

Lección 7: Demodulación y Detección Paso-Banda. Parte I

Gianluca Cornetta, Ph.D.

Dep. de Ingeniería de Sistemas de Información y Telecomunicación

Universidad San Pablo-CEU



Contenido

- ❑ ¿Por qué Modular?
- ❑ Técnicas Digitales de Modulación Paso-Banda
- ❑ Detección de Señales en Ruido Gaussiano Blanco
- ❑ Detección Coherente
- ❑ Detección No Coherente



¿Por qué Modular?

- ❑ Una modulación es el proceso a través del cual un símbolo digital es transformado en una forma de onda compatible con las características del canal
 - ❑ En el caso de modulaciones en banda base la forma de onda es una serie de pulsos filtrados por un filtro de forma
 - ❑ En el caso de modulaciones paso-banda los pulsos transformados por el filtro de forma modulan una portadora sinusoidal a las radiofrecuencias
- ❑ Una modulación paso-banda tiene una serie de ventajas:
 - ❑ Reducción del tamaño de la antena al aumentar de la frecuencia de transmisión (el tamaño típico de una antena en sistemas radio $\lambda/4$ es donde $\lambda=c/f$ y $c=3\times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ es la velocidad de la luz)
 - ❑ Posibilidad de realizar más transmisiones simultáneamente en el mismo canal utilizando *multiplexado de frecuencias* (*Frequency Division Multiplexing –FDM*)
 - ❑ Posibilidad de minimizar los efectos de las interferencias utilizando modulaciones de espectro ensanchado



Técnicas Digitales de Modulación Paso-Banda

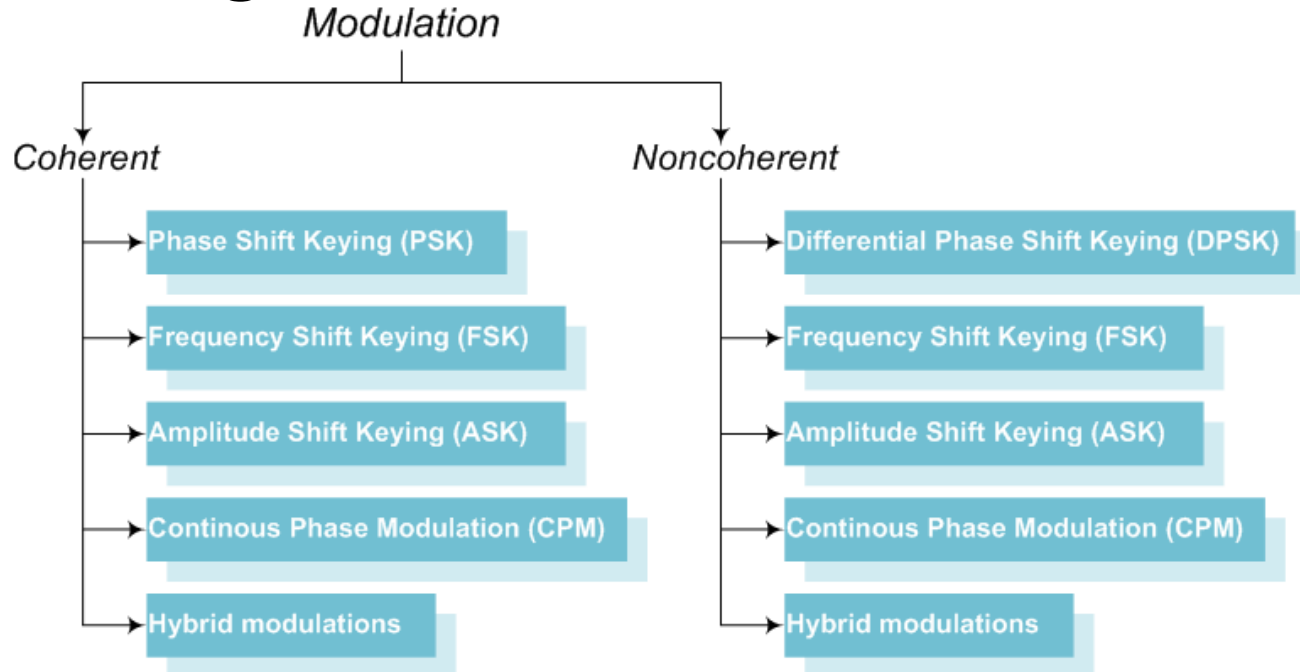
- ❑ Una modulación paso-banda (analógica o digital) convierte la información en una senoide
- ❑ En el dominio digital una senoide de duración T representa un símbolo
- ❑ Una senoide es caracterizada por tres parámetros: amplitud, frecuencia y fase
- ❑ Una modulación digital es el proceso mediante el cual la información es codificada modulando una senoide en amplitud, fase, frecuencia o una combinación de las anteriores:

$$s(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \phi(t)]$$

- ❑ Donde ω_0 representa la frecuencia angular y $\phi(t)$ la fase
- ❑ La frecuencia de una senoide se indica indistintamente con f (medida en Hz) o $\omega = 2\pi f$ (medida en rad/s)



Técnicas Digitales de Modulación Paso-Banda



❑ Existen dos técnicas para detectar una señal transmitida:

❑ Demodulación coherente:

❑ Utiliza la fase de la portadora en el proceso de detección

❑ El receptor utiliza unas réplicas de todos los posibles símbolos para reconocer la señal recibida

❑ El proceso de detección consiste en correlar la señal recibida con los símbolos esperados

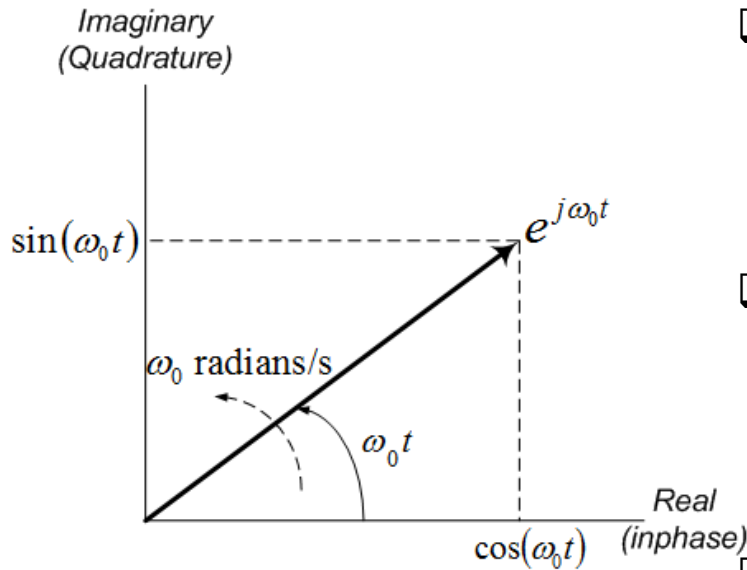
❑ Demodulación no coherente:

❑ No utiliza la fase de la portadora en el proceso de detección por lo que no precisan un estimador de fase

❑ La ausencia de un estimador de fase reduce la complejidad hardware del receptor; sin embargo, aumenta la probabilidad de error en recepción



Técnicas Digitales de Modulación Paso-Banda



- Formas de onda sinusoidales pueden representarse de forma eficientes en el dominio complejo utilizando fasores:

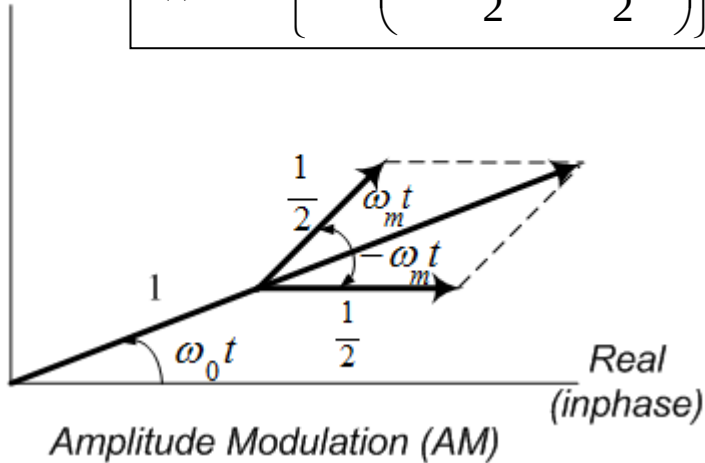
$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)$$

- Se trata de una representación más compacta de una portadora que contiene dos componentes ortogonales:
 - Una componente en fase (la parte real): $\cos(\omega_0 t)$
 - Una componente en cuadratura (la parte imaginaria): $\sin(\omega_0 t)$
- La notación fasorial permite representar una portadora no modulada como un vector rotante de módulo unitario y fase
- Una modulación de la portadora puede representarse como una perturbación del fasor rotante

Técnicas Digitales de Modulación Paso-Banda

Imaginary
(Quadrature)

$$s(t) = \text{Re} \left\{ e^{j\omega_0 t} \left(1 + \frac{e^{j\omega_m t}}{2} + \frac{e^{-j\omega_m t}}{2} \right) \right\}$$

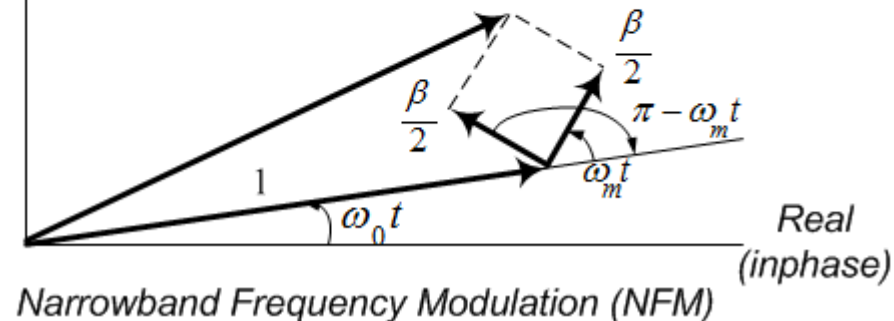


El fasor $e^{j\omega_0 t}$ es perturbado por dos fasores que se encuentran en dos bandas laterales a una frecuencia $\omega_m \ll \omega_0$; por tanto la frecuencia del fasor principal no cambiará mientras que su módulo irá cambiando en el tiempo aumentando y disminuyendo

En una modulación NFM, el fasor de la banda lateral que se mueve en sentido horario es rotado de 180° respecto al caso de una modulación AM y tiene un módulo que depende del índice de modulación β . Esta configuración hará que el fasor de la portador se moverá más o menos rápidamente dependiendo de las bandas laterales

Imaginary
(Quadrature)

$$s(t) = \text{Re} \left\{ e^{j\omega_0 t} \left(1 - \frac{\beta}{2} e^{-j\omega_m t} + \frac{\beta}{2} e^{j\omega_m t} \right) \right\}$$



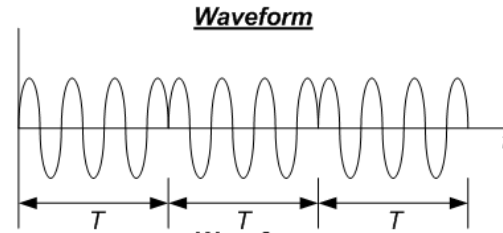
Técnicas Digitales de Modulación Paso-Banda

PSK

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos\left(\omega_0 t + \frac{2\pi i}{M}\right)$$

$$i = 1, 2, \dots, M$$

$$0 \leq t \leq T$$



Vector

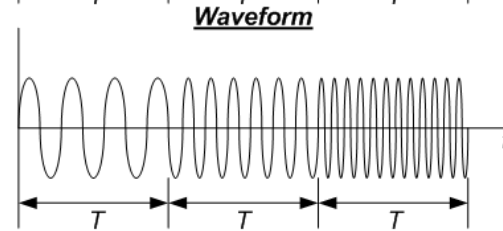


FSK

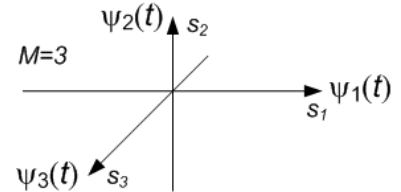
$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_i t + \phi)$$

$$i = 1, 2, \dots, M$$

$$0 \leq t \leq T$$



Vector

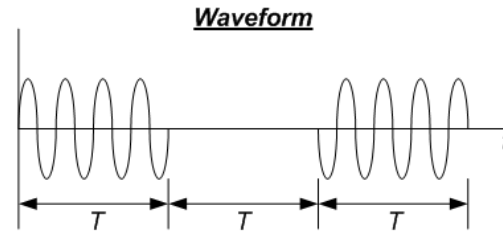


ASK

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_i(t)}{T}} \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$i = 1, 2, \dots, M$$

$$0 \leq t \leq T$$



Vector

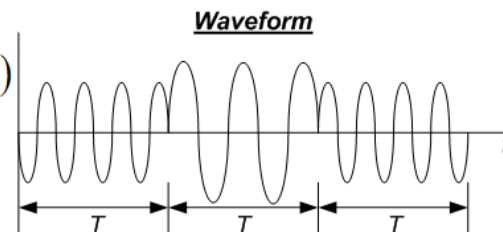


APK

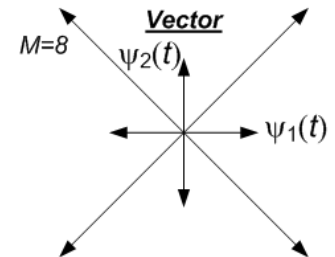
$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_i(t)}{T}} \cos(\omega_0 t + \phi_i(t))$$

$$i = 1, 2, \dots, M$$

$$0 \leq t \leq T$$



Vector



Técnicas Digitales de Modulación Paso-Banda

- ❑ En las distintas modulaciones aparece un término $\sqrt{2E/T}$ que representa la amplitud, donde E representa la energía de un símbolo y T su duración

- ❑ Esta expresión se deriva a partir de la definición:

$$s(t) = A \cos \omega t$$

- ❑ Donde A es el valor de pico de la forma de onda.

- ❑ Es sabido que el valor de pico es ligado al valor eficaz A_{rms} por la siguiente relación:

$$A = \sqrt{2} A_{rms}$$

- ❑ Por consiguiente se obtiene:

$$s(t) = \sqrt{2} A_{rms} \cos \omega t = \sqrt{2 A_{rms}^2} \cos \omega t$$

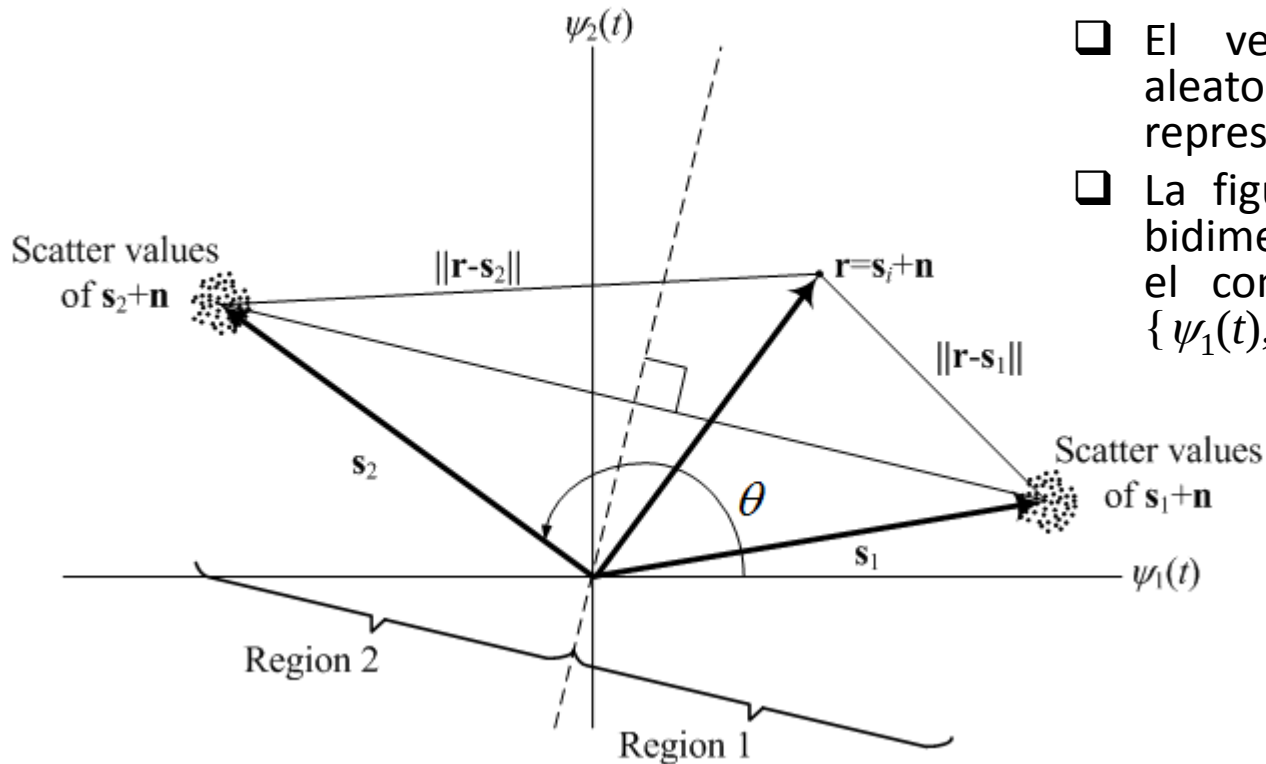
- ❑ El valor eficaz al cuadrado representa la potencia media P normalizada respecto a una resistencia de 1Ω , por tanto se puede escribir:

$$s(t) = \sqrt{2P} \cos \omega t$$

- ❑ Sustituyendo los P vatios por los E Julios/ T segundos se obtiene:

$$s(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos \omega t$$

Detección de Señales en Ruido Gaussiano Blanco

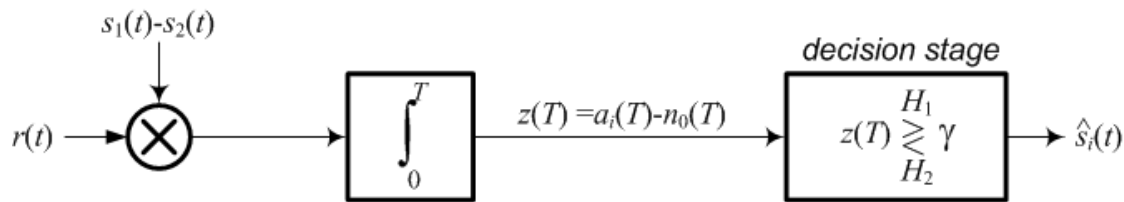


- ❑ El vector $\mathbf{n}$ es un proceso aleatorio de media nula que representa el ruido AWGN
- ❑ La figura representa un espacio bidimensional caracterizado por el conjunto de funciones base $\{\psi_1(t), \psi_2(t)\}$

- ❑ El proceso de detección se diseña para minimizar la probabilidad de error P_E
- ❑ La bisectriz del ángulo formado por $\mathbf{s}_1$ y $\mathbf{s}_2$ divide el espacio en dos regiones de decisión
- ❑ La regla de decisión que minimiza la probabilidad de error es:

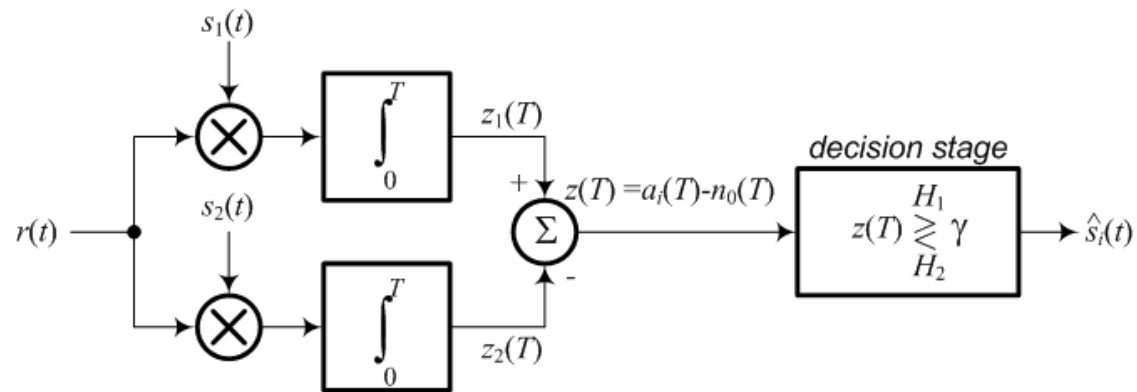
$$\text{select } \mathbf{s}_i \text{ with } \min \{d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i) = \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|\}$$

Detección de Señales en Ruido Gaussiano Blanco



Correlator único que utiliza como señal de referencia la diferencia entre las señales esperadas $s_1(t) - s_2(t)$

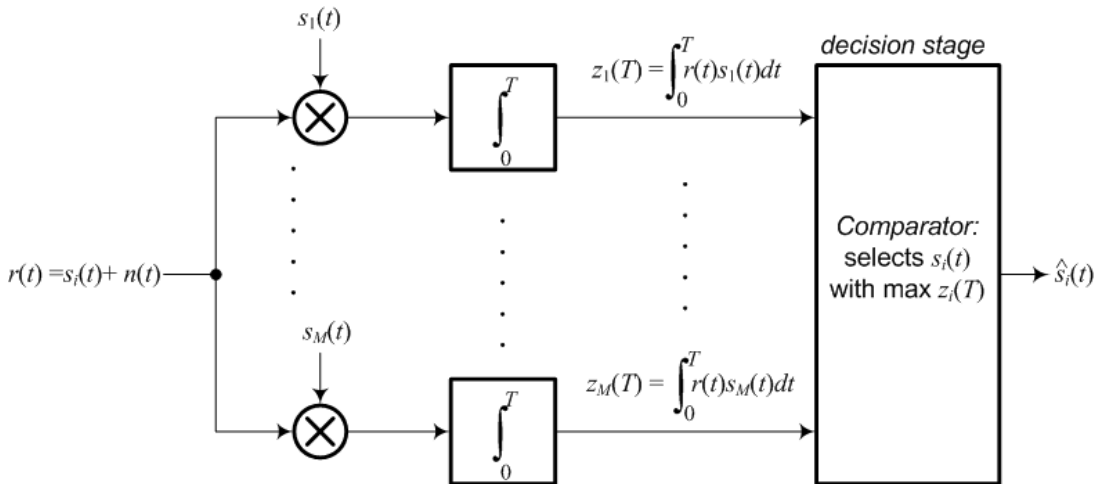
Dos correladores, uno por cada una de las señales esperadas $s_1(t)$ y $s_2(t)$



- ❑ La operación de detección consiste en correlar la señal recibida con un conjunto de M señales esperadas $\{s_i(t)\}$ (con $i=1, \dots, M$) o con una base de funciones ortonormales $\{\psi_j(t)\}$ (con $j=1, \dots, N$ y $N \leq M$)
- ❑ $N=M$ solo si las $\{s_i(t)\}$ son un conjunto ortogonal

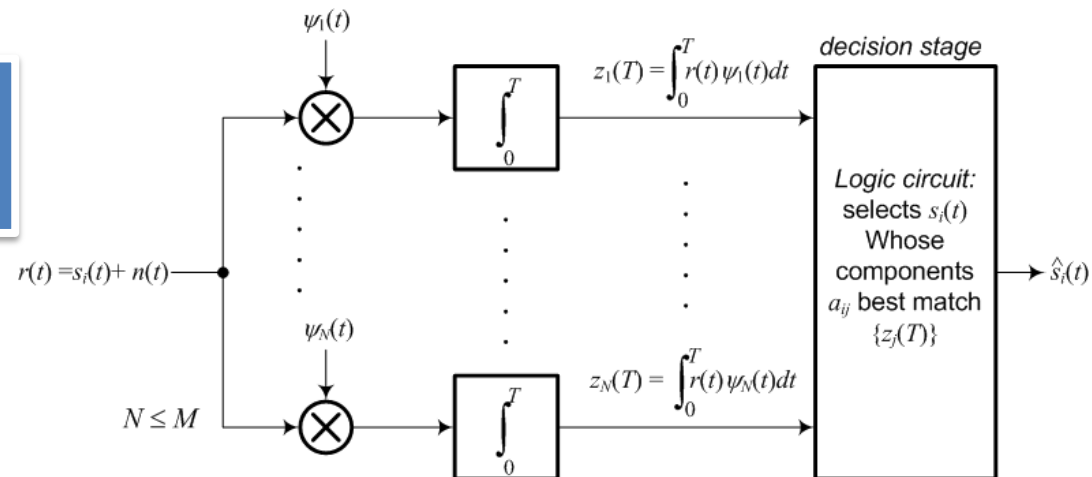


Detección de Señales en Ruido Gaussiano Blanco



Receptor de símbolos M -arios que realiza la correlación con las señales de referencia $\{s_i(t)\}$

Receptor de símbolos M -arios que realiza la correlación con unas funciones base ortonormales $\{\psi_j(t)\}$



Técnicas Digitales de Modulación Paso-Banda

- ❑ En el caso de detector de máxima verosimilitud binario resulta:

$$s_1(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_0 t + \phi) \quad 0 \leq t \leq T$$

$$s_2(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_0 t + \phi + \pi) = -\sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_0 t + \phi) \quad 0 \leq t \leq T$$

- ❑ Donde ϕ es una constante arbitraria, E representa la energía de un símbolo y T su duración
- ❑ Asimismo $n(t)$ es un proceso Gaussiano blanco con media nula
- ❑ En el caso de señales antipodales sólo es necesaria una función base (se asume $\phi=0$):

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_0 t \quad 0 \leq t \leq T$$

- ❑ Las señales transmitidas $s_i(t)$ pueden expresarse en función de $\psi_1(t)$ y de unos coeficientes $a_{i1}(t)$:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= a_{11} \psi_1(t) = \sqrt{E} \psi_1(t) \\ s_2(t) &= a_{21} \psi_1(t) = -\sqrt{E} \psi_1(t) \end{aligned}$$

Técnicas Digitales de Modulación Paso-Banda

❑ Si asumimos que viene transmitido $s_1(t)$:

$$\mathbf{E}\{z_1 | s_1\} = \mathbf{E}\left\{\int_0^T \sqrt{E}\psi_1^2(t) + n(t)\psi_1(t)dt\right\} = \mathbf{E}\left\{\int_0^T \frac{2}{T} \sqrt{E} \cos^2 \omega_0 t + n(t) \cos \omega_0 t dt\right\} = \sqrt{E}$$

$$\mathbf{E}\{z_2 | s_1\} = \mathbf{E}\left\{\int_0^T -\sqrt{E}\psi_1^2(t) + n(t)\psi_1(t)dt\right\} = \mathbf{E}\left\{\int_0^T -\frac{2}{T} \sqrt{E} \cos^2 \omega_0 t + n(t) \cos \omega_0 t dt\right\} = -\sqrt{E}$$

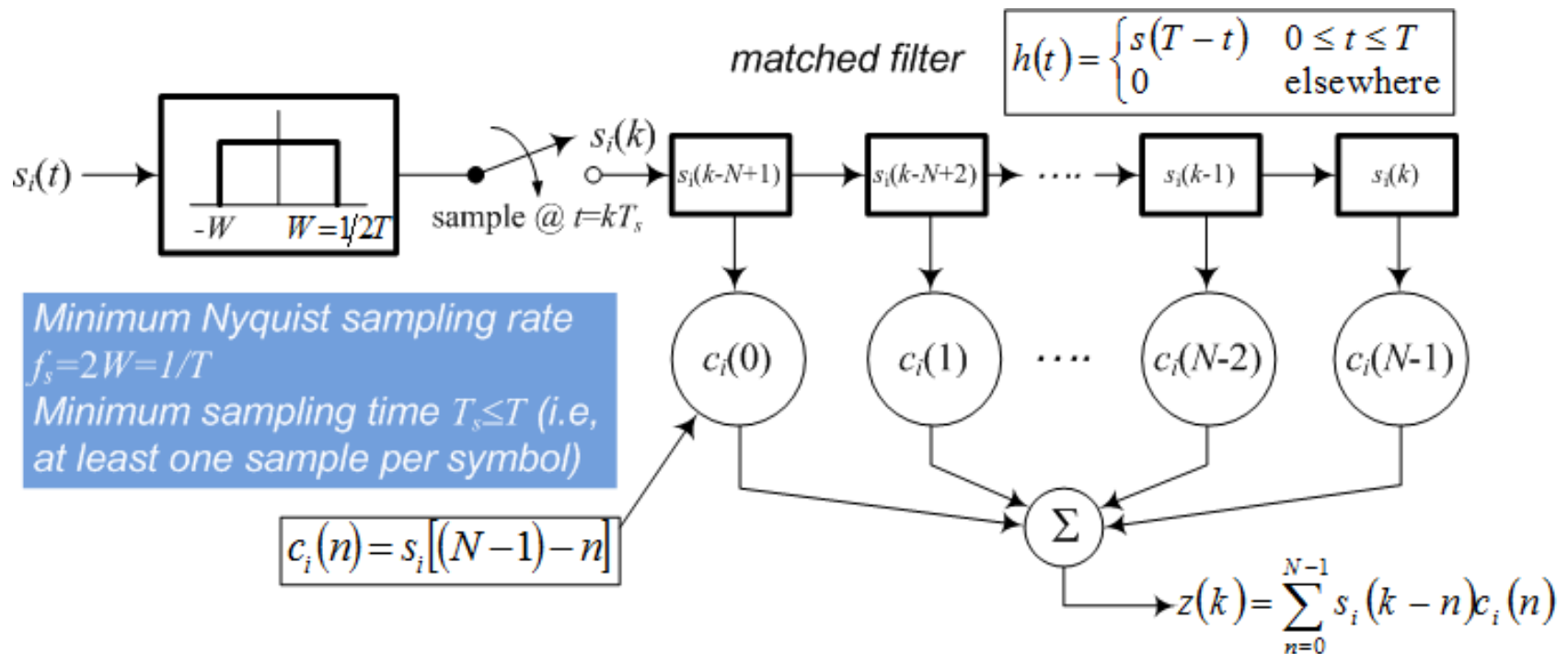
❑ ya que $\mathbf{E}\{n(t)\}=0$

❑ La elección $\psi_1(t) = \sqrt{2E/T} \cos \omega_0 t$ normaliza $\mathbf{E}\{z_i(T)\}$ a $\pm \sqrt{E}$

❑ Las señales prototipo $\{s_i(t)\}$ son idénticas a las señales de referencia $\{\psi_j(t)\}$ a menos de un factor de normalización

❑ La etapa de decisión escoge la señal con el máximo valor de $z_i(T)$

Detección de Señales en Ruido Gaussiano Blanco



La detección se puede realizar también con una batería de filtros adaptados cuya respuesta al impulso $h(t)$ es igual a la señal esperada reflejada y retardada del tiempo de símbolo T , es decir: $s(T-t)$. Los coeficientes $\{c_i(n)\}$ constituyen la respuesta al impulso del filtro construida a partir de muestras discreta de la señal esperada.

Técnicas Digitales de Modulación Paso-Banda

- ❑ Recordando que el ruido tiene media nula (es decir, $\mathbf{E}\{n(t)\}=0$), el valor esperado de una muestra recibida es:

$$\mathbf{E}\{r(k)\} = s_i(k)$$

- ❑ Si $s_i(t)$ es transmitido, la salida esperada del filtro adaptado es:

$$\mathbf{E}\{z_i(k)\} = \mathbf{E}\left\{\sum_{n=0}^{N-1} r(k-n)c_i(n)\right\} = \sum_{n=0}^{N-1} s_i(k-n)c_i(n)$$

Técnicas Digitales de Modulación Paso-Banda

- ❑ En el caso de señales MPSK (*Multiple Phase-Shift Keying*) como por ejemplo una señal QPSK (es decir, con $M=4$), la señal transmitida $s_i(t)$ puede expresarse como:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos\left(\omega_0 t - \frac{2\pi i}{M}\right)$$

$$0 \leq t \leq T$$

$$i = 1, \dots, M$$

- ❑ En un espacio de señales ortonormales es posible definir dos componentes ortogonales:

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_0 t \quad \psi_2 = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \omega_0 t$$

- ❑ Tales que:

$$s_i(t) = a_{i1}\psi_1 + a_{i2}\psi_2 = \sqrt{E} \cos\left(\frac{2\pi i}{M}\right)\psi_1 + \sqrt{E} \sin\left(\frac{2\pi i}{M}\right)\psi_2$$

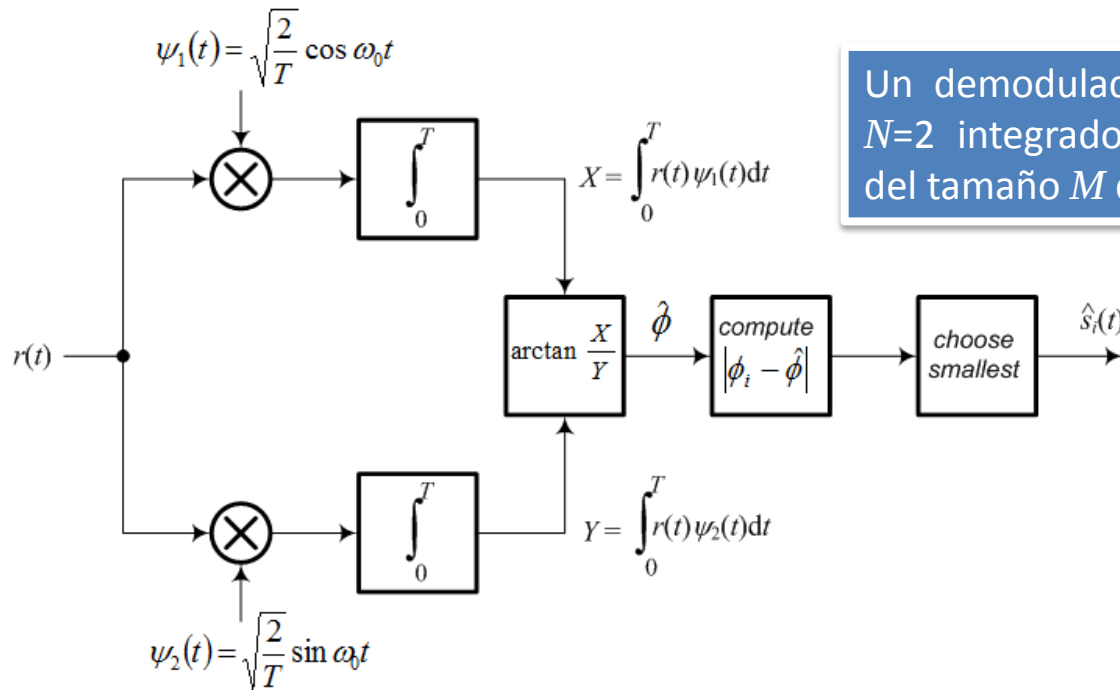
$$0 \leq t \leq T$$

$$i = 1, \dots, M$$

- ❑ Por tanto una señal arbitraria puede expresarse como una combinación lineal de señales ortogonales

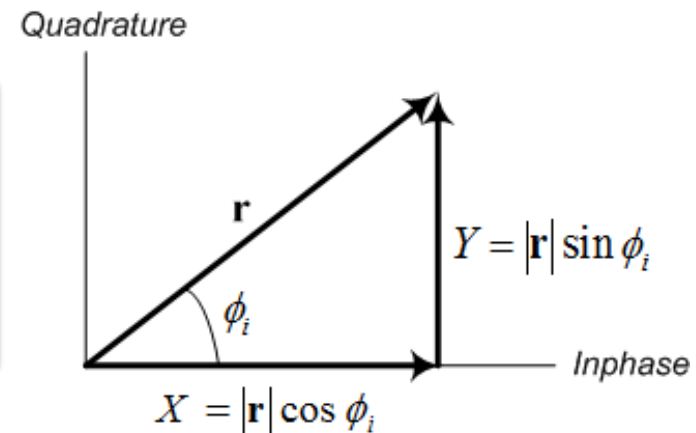


Detección de Señales en Ruido Gaussiano Blanco



Un demodulador de una señal MPSK requiere sólo $N=2$ integradores de producto independientemente del tamaño M del espacio de señales $\{s_i(t)\}$

X es la componente en fase de la señal recibida $r(t)$, Y la componente en cuadratura de la señal recibida y $\hat{\phi}$ es una estimación afectada por ruido de la fase transmitida ϕ_i . $\mathbf{r}$ es una representación vectorial de $r(t)$



Técnicas Digitales de Modulación Paso-Banda

- ❑ En el caso de señales FSK (*Frequency Shift Keying*) la información es contenida en la frecuencia de portadora; la señal transmitida $s_i(t)$ puede expresarse como:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_i t + \phi)$$
$$0 \leq t \leq T$$
$$i = 1, \dots, M$$

- ❑ La diferencia entre frecuencias adyacentes $(\omega_{i+1} - \omega_i)$ es un múltiplo entero de π/T , donde T es el tiempo de símbolo
- ❑ Las funciones $\{\psi_j(t)\}$ forman una base ortonormal
- ❑ La amplitud $\sqrt{2/T}$ normaliza el valor de salida del filtro adaptado:

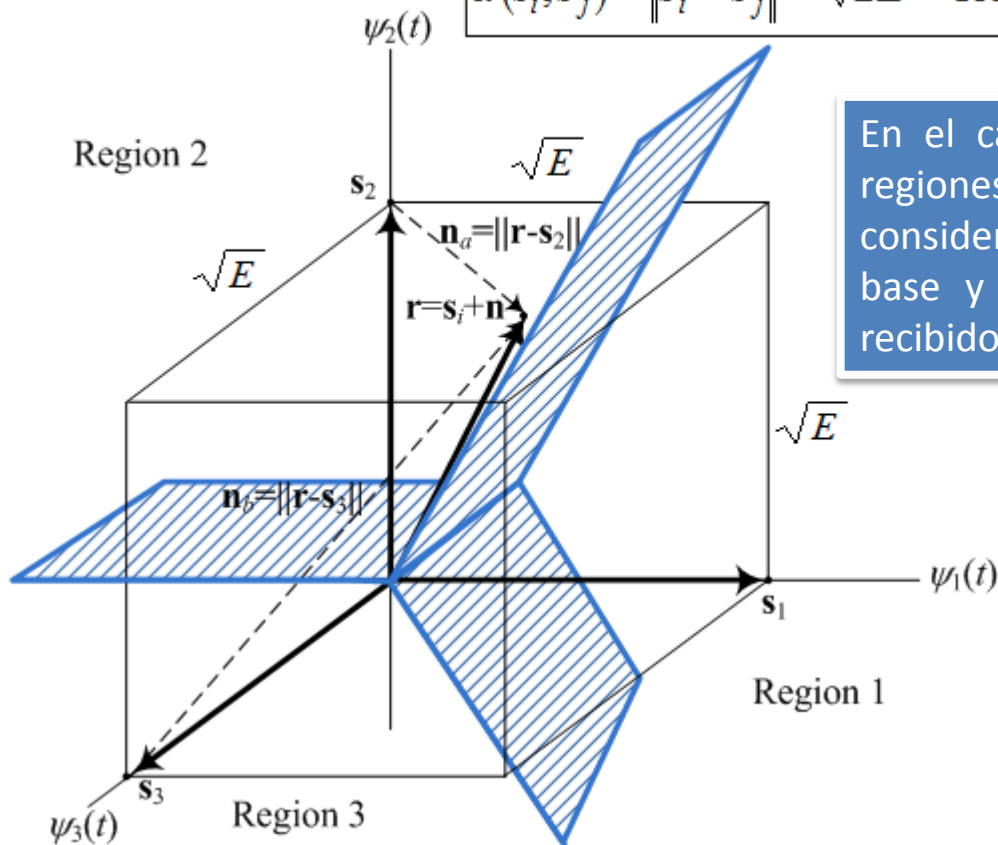
$$\psi_j(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_j t \quad j = 1, \dots, N$$

- ❑ Los coeficientes a_{ij} se calculan como:

$$a_{ij} = \int_0^T \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_i t) \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_j t) dt \Rightarrow a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{E} & \text{for } i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Detección de Señales en Ruido Gaussiano Blanco

$$d(s_i, s_j) = \|s_i - s_j\| = \sqrt{2E} \quad \text{for } i \neq j$$



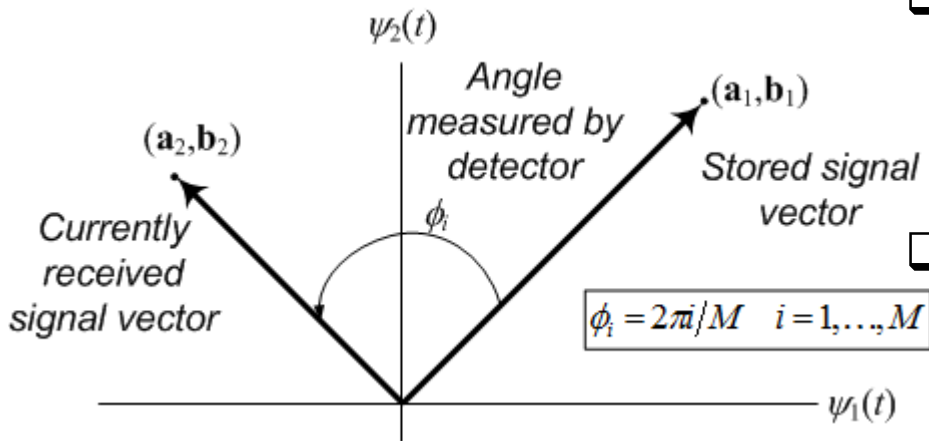
En el caso de $M=3$, El espacio es dividido en tres regiones de detección. El vector recibido puede considerarse como la suma de uno de los vectores base y ruido, es decir $r=s_i+n$. La fase del vector recibido determina el valor del símbolo detectado

Técnicas Digitales de Modulación Paso-Banda

- ❑ En una modulación PSK diferencial (DPSK) el transmisor codifica los datos de forma diferencial por lo que un símbolo a transmitir depende de su valor y del valor del último símbolo transmitido
 - ❑ La fase de la portadora del último símbolo recibido se utiliza como referencia para la demodulación del símbolo actual
- ❑ La codificación diferencial en transmisión es esencial para la detección ya que la información es transportada por la diferencia de fase entre dos símbolos consecutivos
- ❑ En general una modulación DPSK es menos eficiente de una PSK porque el error tiende a propagarse entre símbolos adyacentes
 - ❑ En una modulación PSK una señal con ruido es comparada con una referencia “limpia”
 - ❑ En una modulación DPSK dos señales con ruido son comparadas entre ellas por lo que se puede decir que a una señal DPSK es asociado el doble de ruido respecto a una PSK
 - ❑ En primera aproximación se puede decir que la probabilidad de error para una modulación DPSK es dos veces (3 dB) peor que una PSK. Esta degradación disminuye rápidamente al aumentar la relación señal-ruido



Técnicas Digitales de Modulación Paso-Banda



- ❑ La señal transmitida es:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_0 t + \theta_i(t))$$

$$0 \leq t \leq T$$

$$i = 1, \dots, M$$

- ❑ La señal recibida es:

$$r(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos[\omega_0 t + \theta_i(t) + \alpha] + n(t)$$

$$0 \leq t \leq T$$

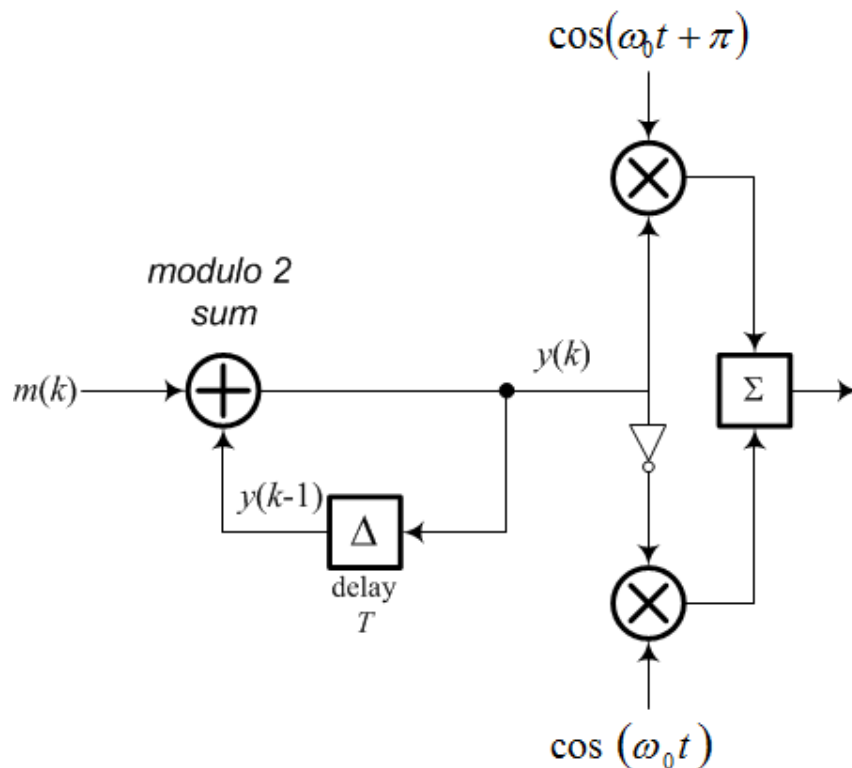
$$i = 1, \dots, M$$

- ❑ α es una variable aleatoria uniformemente distribuida entre 0 y 2π . No es posible utilizar filtros adaptados en recepción porque su salida sería una función de una variable aleatoria

- ❑ Pero, si se asume que α varía lentamente en el tiempo, la diferencia de fase entre dos símbolos consecutivos es independiente de α :

$$[\theta_k(T_2) + \alpha] - [\theta_j(T_1) + \alpha] = \theta_k(T_2) - \theta_j(T_1) = \phi_i(T_2)$$

Técnicas Digitales de Modulación Paso-Banda



- ❑ En un modulador DPSK el mensaje $m(k)$, muestreado en los instantes discretos k , se codifica en formato diferencial mediante una suma módulo 2 (XOR):

$$y(k) = y(k-1) \oplus m(k)$$

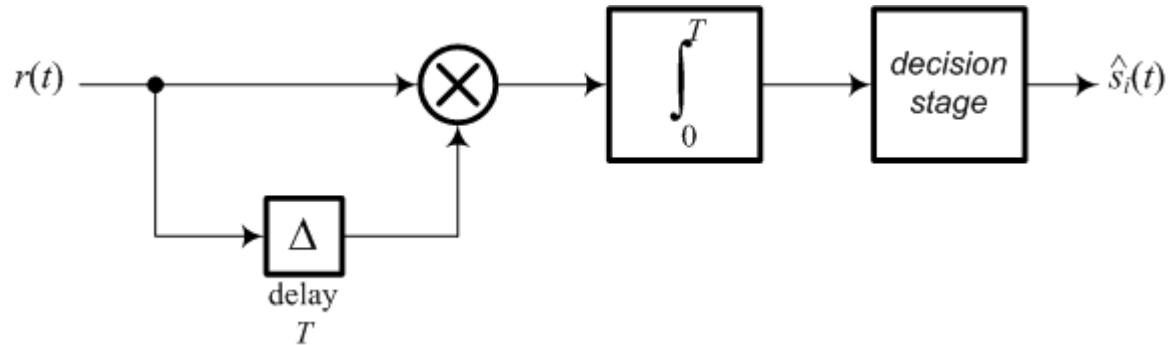
- ❑ O, de forma equivalente:

$$y(k) = \overline{y(k-1)} \oplus m(k)$$

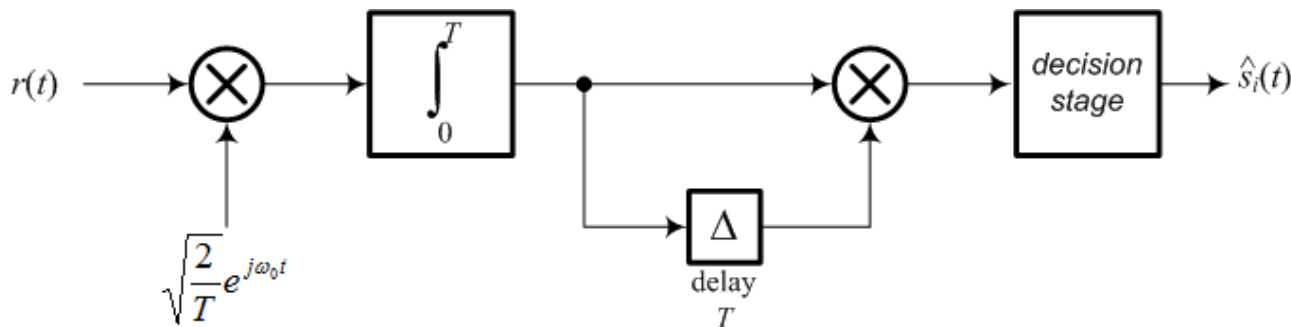
- ❑ La secuencia binaria $y(k)$ se utiliza para modular dos portadoras con un desfase $\theta(k) = \pi$ que representan un 0 y un 1 respectivamente

Detección de Señales en Ruido Gaussiano Blanco

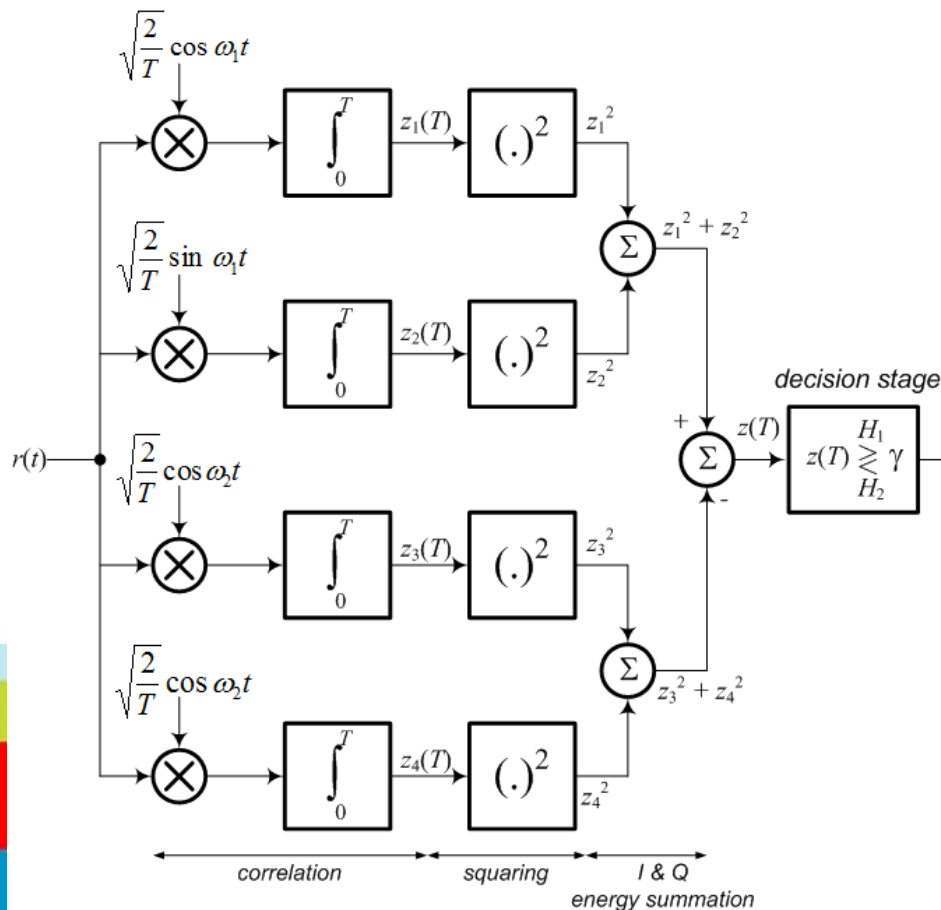
El detector subóptimo calcula la diferencia de fase entre dos bits consecutivos correlando la señal en entrada con la del símbolo anterior. Si las fases coinciden los dos bits detectados son iguales (ambos 0 ó ambos 1). Si las fases son distintas el bit detectado es el inverso del anterior



Un demodulador DPSK óptimo necesita una portadora de referencia con la misma frecuencia de la señal recibida pero no necesariamente con la misma fase. La portadora expresada en forma compleja denota una señal de entrada compleja (es decir, una señal con una componente en fase I y otra en cuadratura Q)

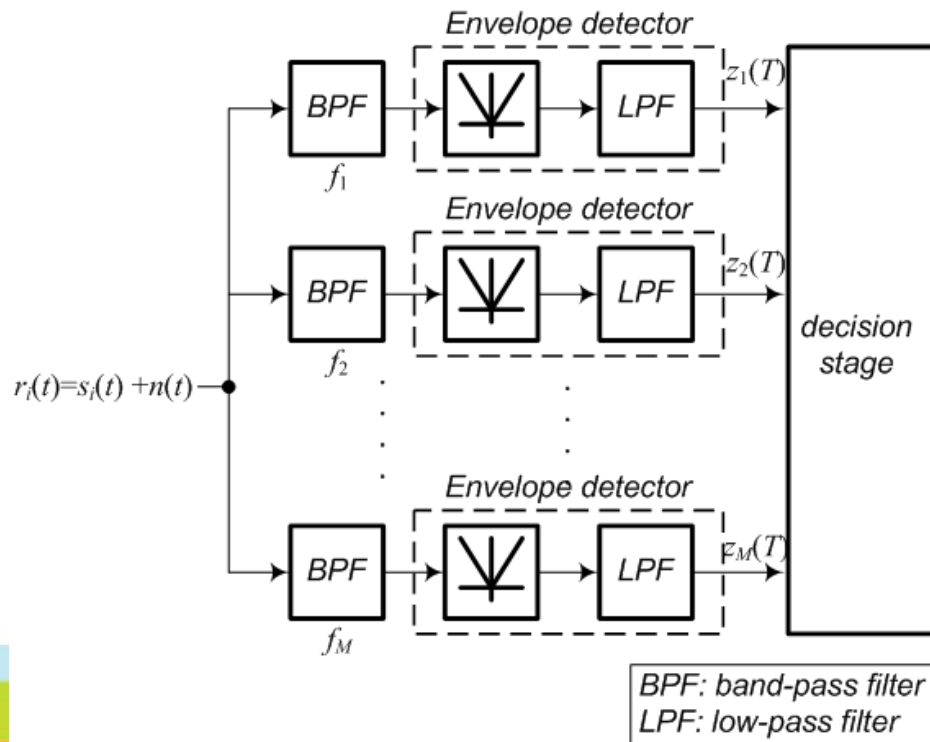


Detección de Señales en Ruido Gaussiano Blanco



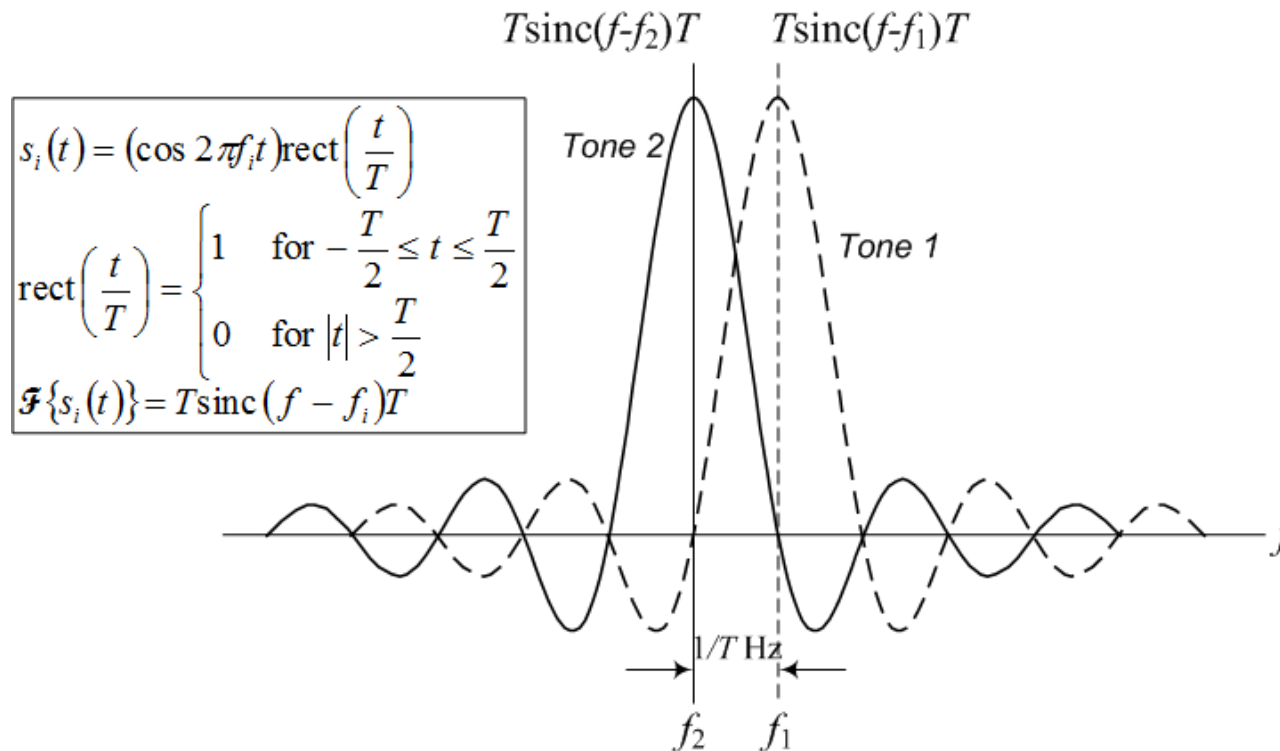
- La figura muestra un detector BFSK no coherente diseñado para detectar una señal $r(t) = \cos(\omega_i t + \phi) + n(t)$
- El error de fase ϕ obliga a tener dos ramas (I y Q) de forma que se realice una correlación parcial de la señal en ambas ramas
- La elevación al cuadrado sirve para estimar la energía de las componentes I y Q de la señal
- Para detectar las dos frecuencias ω_1 y ω_2 hacen falta bloques I-Q sintonizados en estas frecuencias
- Las energías detectadas en los dos bloques se restan: si el resultado es positivo se detecta ω_1 si es negativo se detecta ω_2

Detección de Señales en Ruido Gaussiano Blanco



- ❑ Otra posible implementación de un detector FSK no coherente utiliza un banco de filtros paso-banda de ancho $W_f = 1/T$ con frecuencia central $f_i = \omega_i/2\pi$ seguido por un detector de envolvente
- ❑ Un detector de envolvente se compone de un rectificador y un filtro paso-bajo
- ❑ El detector es adaptado a la envolvente de la señal y no a su fase por lo que selecciona la máxima $z_i(T)$
- ❑ En una modulación FSK hay que garantizar que las señales sean ortogonales (es decir, no correlatas durante un periodo de símbolo T). Esto implica que los tonos a transmitir deban ser separados de al menos $1/T$
- ❑ Esta condición no se aplica al caso de modulación FSK coherente en la que la separación mínima entre tonos debe ser de $1/2T$

Detección de Señales en Ruido Gaussiano Blanco



La ortogonalidad entre las señales de un conjunto M -FSK es asegurada si cuando el tono recibido es muestreado, las muestras de todos los otros son nulas. Es decir, el pico del espectro de la señal recibida debe coincidir con ceros espectrales de todas las otras