

Lección 14: Compromiso entre Modulación y Codificación. Parte I

Gianluca Cornetta, Ph.D.

Dep. de Ingeniería de Sistemas de Información y Telecomunicación

Universidad San Pablo-CEU



Contenido

- ❑ Los Objetivos del Diseñador de Sistemas de Comunicación
- ❑ El Plano de Probabilidad de Error
- ❑ La Banda de Nyquist
- ❑ El Teorema de Shannon-Hartley
- ❑ El Plano de Eficiencia de Banda
- ❑ Compromiso entre Modulación y Codificación
- ❑ Definición, Diseño y Evaluación de Sistemas de Comunicación Digitales



Los Objetivos del Diseñador de Sistemas de Comunicación

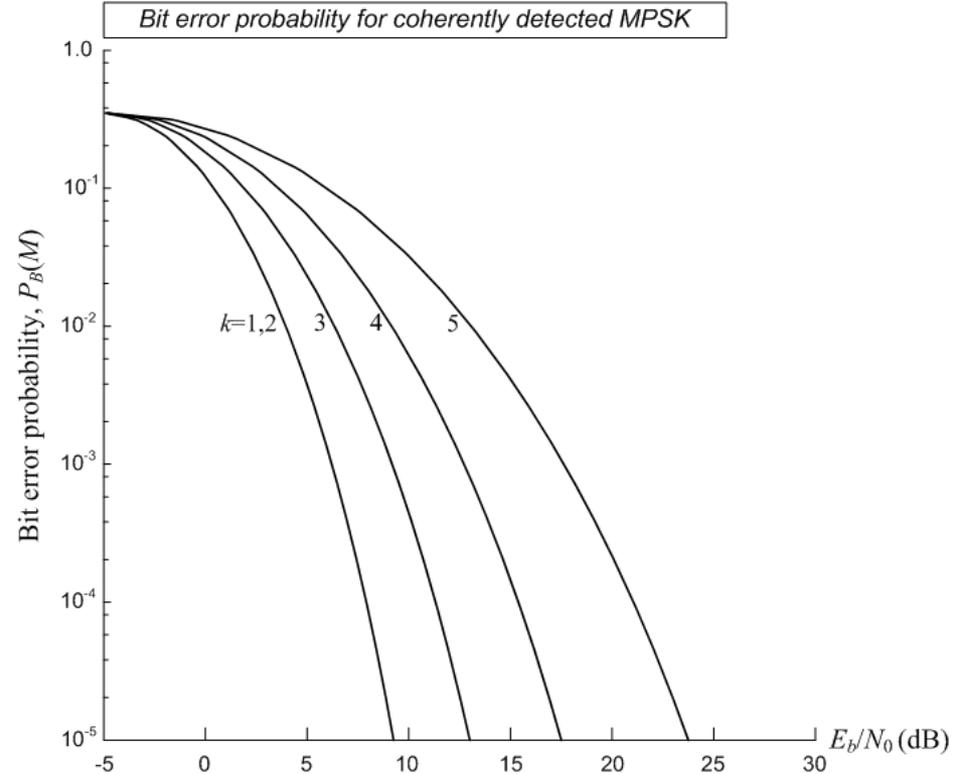
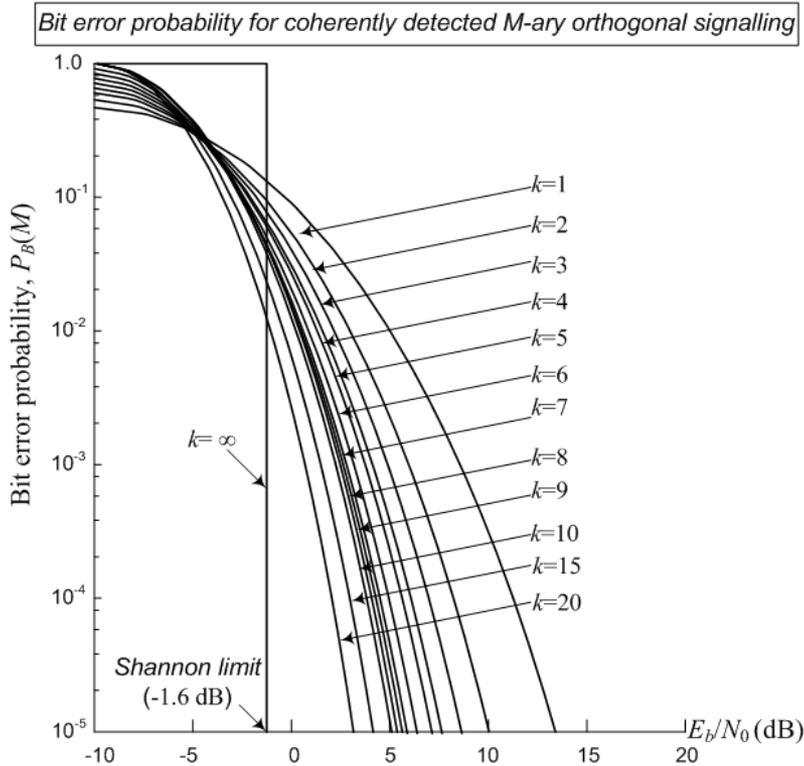
- ❑ Los objetivos del diseñador de sistemas de comunicación digitales incluyen:
 - ❑ *Objetivo 1:* Maximizar la tasa de transmisión de bit R (*bit rate*)
 - ❑ *Objetivo 2:* Minimizar la probabilidad de error de bit P_B
 - ❑ *Objetivo 3:* Minimizar la potencia de requerida o, de forma equivalente, minimizar la relación entre energía por bit transmitido y la densidad espectral de potencia de ruido E_b/N_0
 - ❑ *Objetivo 4:* Minimizar el ancho de banda W requerido por el sistema
 - ❑ *Objetivo 5:* Maximizar la utilización del sistema, es decir proporcionar un servicio fiable, robusto, con un elevado rechazo de las interferencias y un retardo mínimo al mayor número de usuarios posibles
 - ❑ *Objetivo 6:* Minimizar la complejidad, los costes y la carga computacional del sistema
- ❑ El diseñador intenta conseguir todos estos objetivos a la vez, sin embargo algunos de ellos están claramente en conflicto:
 - ❑ Por ejemplo, los objetivos (1) y (2) están claramente en conflicto con los objetivos (3) y (4)
- ❑ El diseñador debe buscar una solución de compromiso entre sus distintos objetivos teniendo en cuenta las siguientes restricciones:
 - ❑ Los requerimientos mínimos de ancho de banda fijados por el teorema de Nyquist
 - ❑ La capacidad de canal fijada por el teorema de Shannon-Hartley
 - ❑ Las restricciones fijada por los organismos que regulan las telecomunicaciones (por ejemplo, las restricciones de frecuencia)
 - ❑ Limitaciones tecnológicas
 - ❑ Otros requerimientos de Sistema (por ejemplo, órbitas de satélites)



El Plano de Probabilidad de Error

- ❑ Un modulador utiliza un alfabeto de $M=2^k$ señales para representar una secuencia de k bits
- ❑ Existen dos clases de señales:
 - ❑ Señales ortogonales (típicas de modulaciones MFSK): P_B mejora (o, de forma equivalente se E_b/N_0 reduce) al aumentar de k en detrimento del ancho de banda (que aumenta)
 - ❑ Señales no ortogonales (típicas de modulaciones MPSK): aumentando k , aumenta la eficiencia espectral (es decir, se reduce el ancho de banda necesario) al coste de una degradación de P_B y de un aumento de E_b/N_0
 - ❑ Con el mismo ancho de banda W es posible transmitir señales a una tasa más elevadas (es decir, mejora R/W)
- ❑ Cada tipo de modulación tiene un rendimiento que puede representarse mediante unas curvas de rendimiento de probabilidad de error (*error probability performance curves*)
 - ❑ Estas curvas se representan en un plano que se denomina plano de probabilidad de error (*error probability plane*)
 - ❑ El plano de probabilidad de error representa el lugar geométrico de los puntos de funcionamiento disponibles para un tipo dado de modulación y codificación

El Plano de Probabilidad de Error



Cada curva está asociada a un ancho de banda de transmisión dado, por ello estas curvas se denominan también curvas de igual ancho de banda (*equibandwidth curves*)

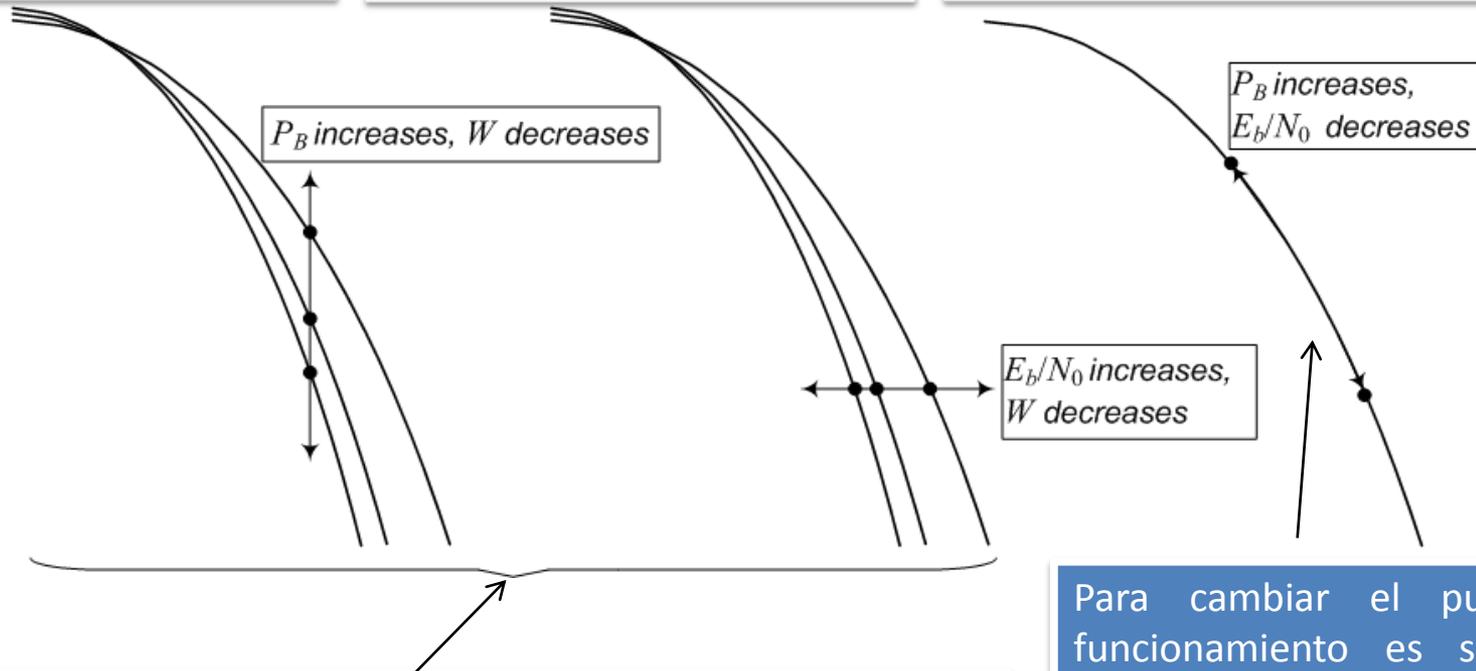


El Plano de Probabilidad de Error

Trades off P_B for W (with E_b/N_0 fixed)

Trades off W for E_b/N_0 (with P_B fixed)

Trades off P_B for E_b/N_0 (with W fixed)



Estos compromisos de diseño implican cambios en el esquema de modulación y codificación del sistema por tanto deben ser considerados durante la fase de diseño. De todas maneras, existen sistemas más flexibles que se denominan *Software Defined Radio* (SDR) que permiten cambiar por software esquemas de modulación y codificación.

Para cambiar el punto de funcionamiento es suficiente variar la potencia de transmisión, lo que es posible realizar sin problemas también después de la configuración del sistema.

La Banda de Nyquist

- ❑ Los sistemas reales padecen de interferencia intersímbolo (ISI) generada fundamentalmente por las no idealidades de los filtros del sistema
- ❑ Nyquist demostró que el mínimo ancho de banda teórico (utilizando un filtro paso-bajo ideal) necesario para transmitir sin ISI con una tasa de R_s símbolos/s una señal en banda base es $R_s/2$ Hz
- ❑ En la práctica, los filtros reales imponen un aumento de la banda de Nyquist de entre un 10% y un 40%.
 - ❑ Esto reduce la tasa de símbolo de 2 símbolos/s/Hz hasta el rango incluido entre 1.8 y 1.4 símbolos/s/Hz
- ❑ En un sistema con un alfabeto de $M=2^k$ símbolos, cada símbolo se compone de $k=\log_2 M$ bits y la tasa de bit (*bit rate*) debe ser k veces más rápida que la tasa de símbolo R_s , es decir:

$$R = kR_s \Rightarrow R_s = \frac{R}{k} = \frac{R}{\log_2 M}$$

- ❑ Si se transmite a una tasa de símbolo fija, aumentar k equivale a aumentar R
 - ❑ En el caso de un esquema MPSK aumentar k implica aumentar de un factor k la eficiencia de banda R/W (bits/s/Hz)



El Teorema de Shannon-Hartley

- Shannon demostró que la capacidad C de un canal perturbado por ruido AWGN es una función de la potencia media recibida S , de la potencia media de ruido N y del ancho de banda W (Teorema de Shannon-Hartley):

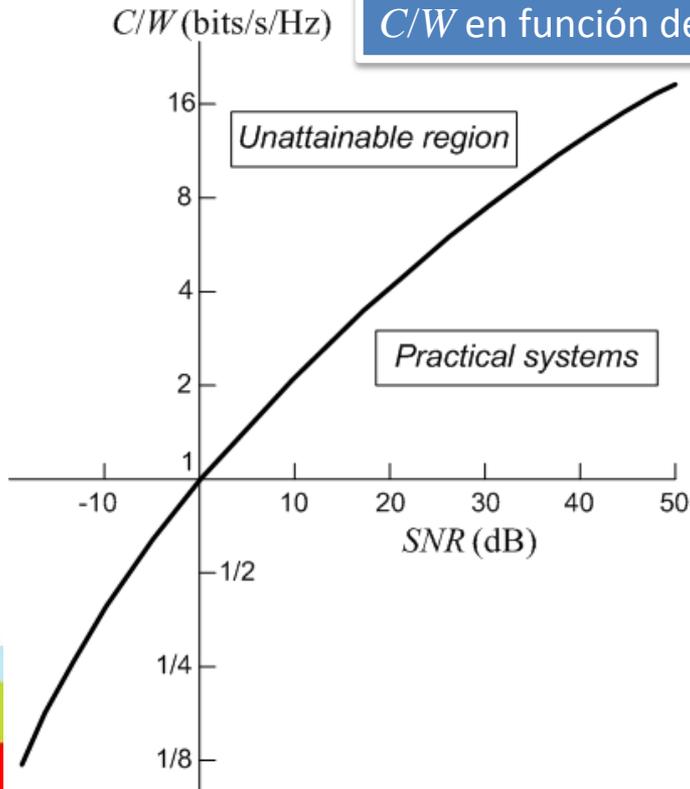
$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right)$$

- Cuando W está en Hz y el logaritmo está en base 2 y la capacidad de canal en bit/s es posible transmitir en este canal a una tasa cualquiera $R \leq C$ con una P_B arbitrariamente pequeña que depende de la complejidad del esquema de codificación utilizado
- Para $R > C$ no es posible encontrar un código que permita alcanzar una P_B arbitrariamente pequeña
- S , N y W fijan un límite para la tasa de transmisión y no para la probabilidad de error

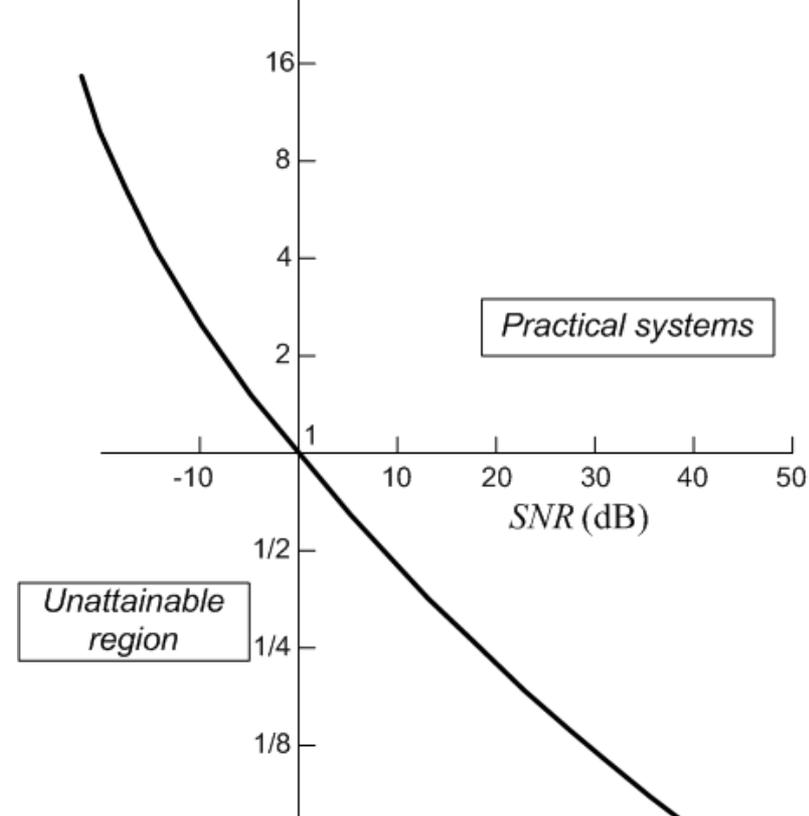


El Teorema de Shannon-Hartley

Capacidad de canal normalizada
 C/W en función del SNR

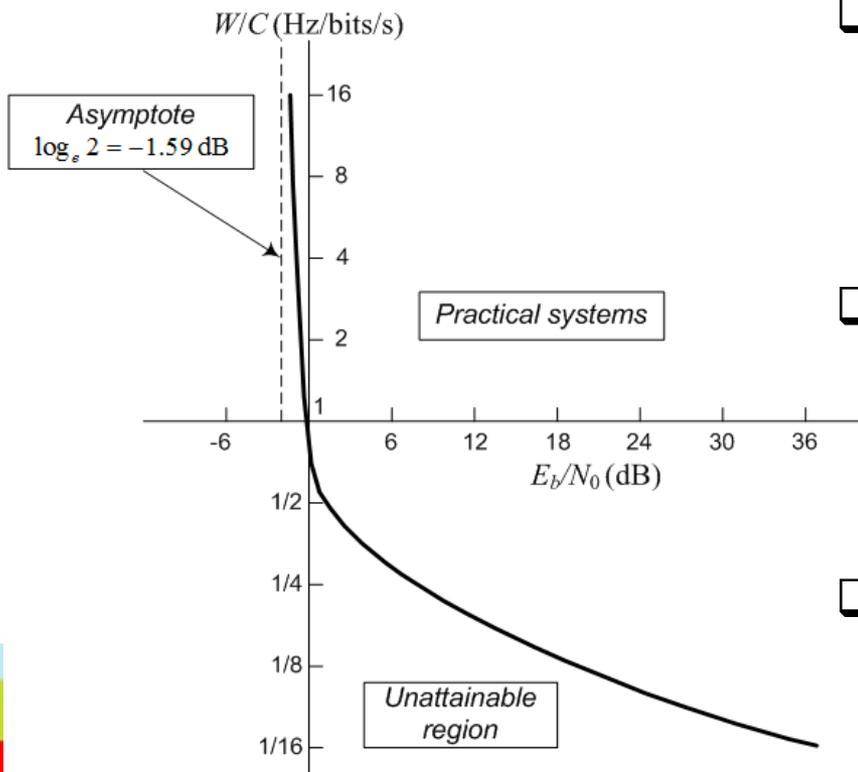


W/C (Hz/bits/s)



Ancho de banda normalizado W/C en función del SNR . Esta gráfica se utiliza para estudiar el compromiso entre potencia de transmisión y ancho de banda para un canal ideal. No se trata de una medida exacta ya que la potencia de ruido detectada N es proporcional al ancho de banda, es decir: $N=N_0W$

El Teorema de Shannon-Hartley



Esta curva representa la relación real entre potencia de transmisión y ancho de banda. La reducción de banda se obtiene al coste de una mayor potencia de transmisión.

- Teniendo en cuenta que $N=N_0W$ la relación de la capacidad de canal se vuelve:

$$\frac{C}{W} = \log_2 \left(1 + \frac{S}{N_0W} \right)$$

- Cuando $R=C$ la relación E_b/N_0 entre energía por bit transmitido y densidad espectral de potencia de ruido se vuelve:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{S}{N} \left(\frac{W}{R} \right) \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = \frac{S}{N_0W} \left(\frac{W}{C} \right) = \frac{S}{N_0C}$$

- Por tanto la relación de la capacidad de canal se vuelve:

$$\frac{C}{W} = \log_2 \left[1 + \frac{E_b}{N_0} \left(\frac{C}{W} \right) \right]$$

- De lo que sigue que:

$$2^{C/W} = 1 + \frac{E_b}{N_0} \left(\frac{C}{W} \right) \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = \frac{W}{C} (2^{C/W} - 1) \Rightarrow \frac{W}{C} = \frac{E_b/N_0}{(2^{C/W} - 1)}$$



El Teorema de Shannon-Hartley

- ❑ Existe un valor límite de E_b/N_0 por debajo del cual no es posible realizar una comunicación libre de errores para cualquier tasa de transmisión

- ❑ Recuerde que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$$

- ❑ Imponiendo $x = \frac{E_b}{N_0} \left(\frac{C}{W} \right)$ la expresión de la capacidad de canal se vuelve:

$$\frac{C}{W} = \log_2(1+x) = x \log_2(1+x)^{1/x}$$

- ❑ De lo que sigue que:

$$1 = \frac{E_b}{N_0} \log_2(1+x)^{1/x} \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = \frac{1}{\log_2(1+x)^{1/x}}$$

- ❑ Al límite, cuando $C/W \rightarrow 0$ también $x \rightarrow 0$, por tanto

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{1}{\log_2 e} = 0.693 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = -1.6 \text{ dB}$$

- ❑ Este valor se conoce como el límite de Shannon
- ❑ En la práctica no es posible alcanzar el límite de Shannon porque si k aumenta de forma ilimitada, también el ancho de banda necesario aumenta de forma ilimitada



El Teorema de Shannon-Hartley

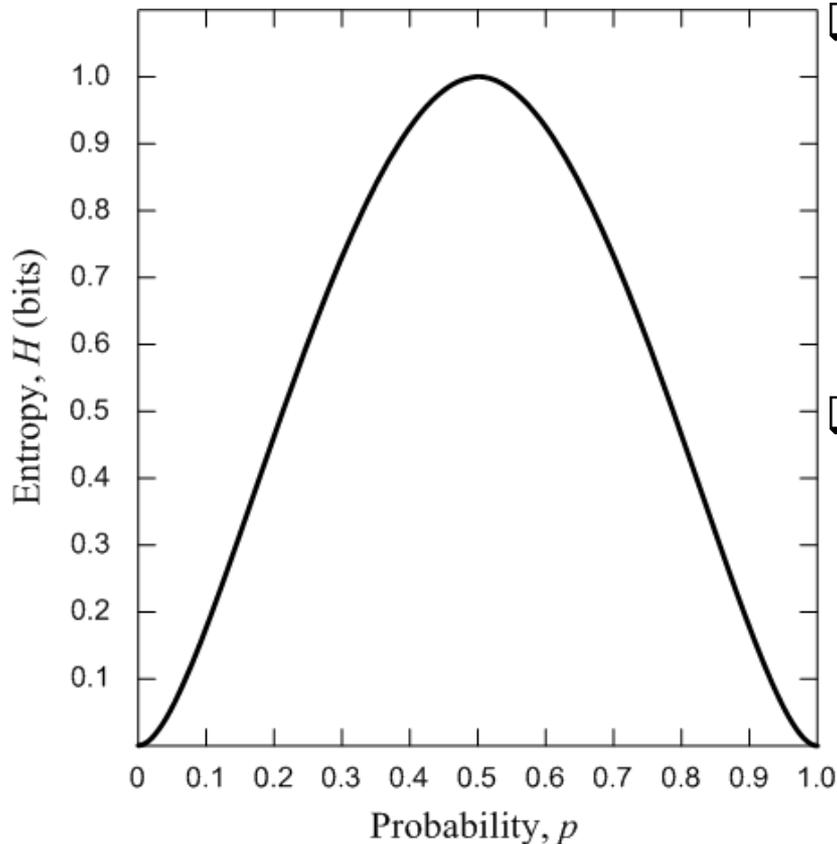
- ❑ Es necesario definir también una métrica para medir la cantidad de información contenida en un mensaje codificado
- ❑ Esta métrica fue definida por Shannon y se conoce como entropía (H) de una fuente de información (con n posibles mensajes de salida)
- ❑ La entropía es el contenido medio de bits de información por mensaje de salida de la fuente de información (*source output*) y se define como:

$$H = \sum_{i=1}^n p_i L_i = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i \text{ bits/source output}$$

- ❑ Siendo p_i la probabilidad del mensaje i -ésimo y $\sum p_i = 1$
- ❑ Los mensajes emitidos por una fuente no son equiprobables sino que tienen una cierta probabilidad de ocurrencia dependiendo del mensaje
- ❑ El objetivo es encontrar para los distintos mensajes unas longitudes L_i que en promedio minimizan la entropía H
- ❑ La longitud de mensaje debe ser una función de su probabilidad de ocurrencia p_i . El objetivo es codificar los más ocurrentes con menos bits
- ❑ Shannon encontró que H es mínima cuando $L_i = \log_2(1/p_i) = -\log_2 p_i$
- ❑ El concepto de entropía es el fundamento de la codificación de fuente (*source coding*)
 - ❑ Para codificar los mensajes de una fuente conviene utilizar menor cantidad de bits para los mensajes más probables y mayor cantidad de bits para los mensajes menos probables de forma tal que el promedio de bits utilizados para codificar los mensajes sea menor a la cantidad de bits promedio de los mensajes originales (esta es la base de la compresión de datos)



El Teorema de Shannon-Hartley



- Un caso interesante es el de un mensaje binario de una fuente con sólo dos posibles estados con probabilidades p y $q=(1-p)$; en este caso la entropía de la fuente resulta:

$$H = -(p \log_2 p + q \log_2 q)$$

- La máxima cantidad de información asociada a un evento aleatorio es ligada a la máxima incertidumbre
 - En este caso, $H=1$ (la información puede codificarse sobre 1 bit) cuando $p=q=0.5$



El Teorema de Shannon-Hartley

- ❑ Un canal ruidoso introduce un error que añade una incertidumbre a la señal recibida
- ❑ Esta incertidumbre o equivocación es definida como la entropía condicional $H(X|Y)$ del mensaje, es decir la entropía calculada cuando se recibe un mensaje Y habiendo transmitido X

$$H(X | Y) = - \sum_{X,Y} P(X, Y) \log_2 P(X | Y) = - \sum_Y P(Y) \sum_X P(X | Y) \log_2 P(X | Y)$$

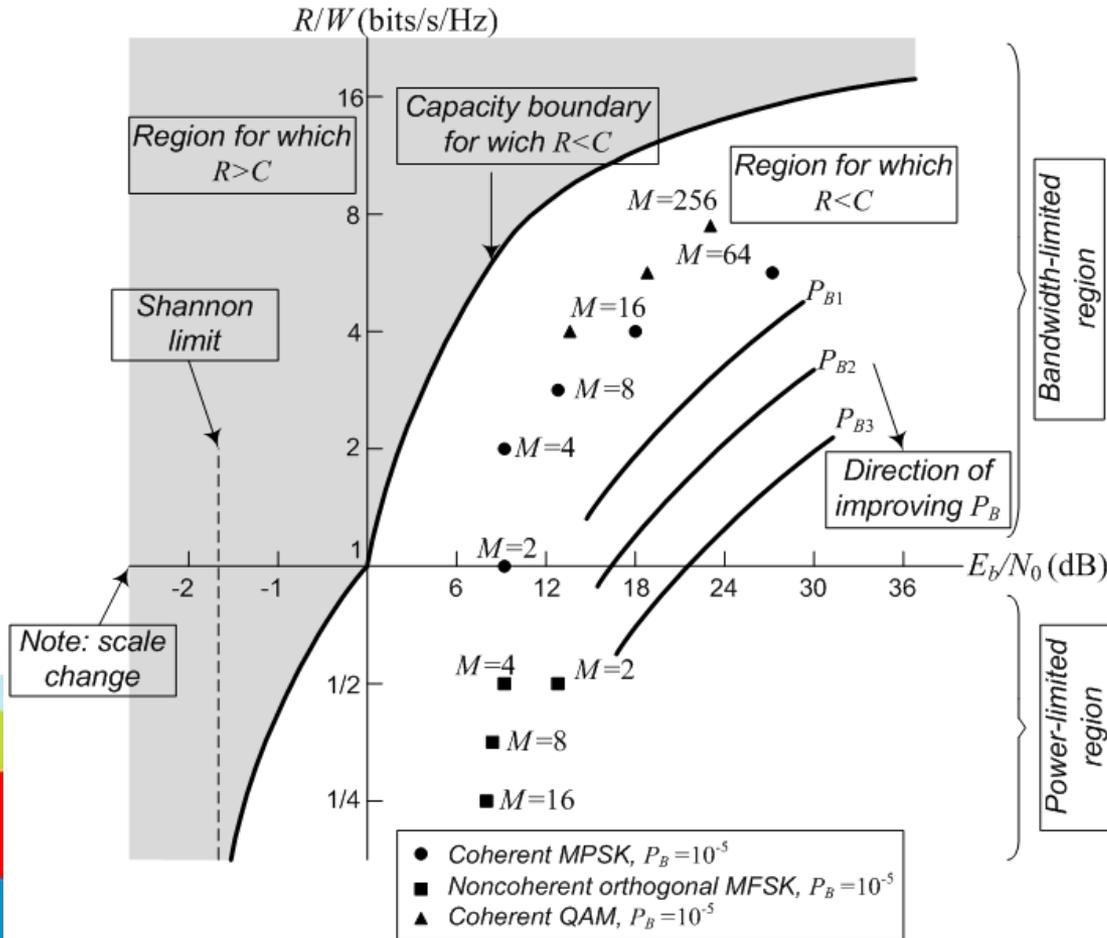
- ❑ Donde $P(X, Y) = P(X|Y) P(Y)$ es la probabilidad conjunta de X e Y
- ❑ La información media efectivamente recibida H_{eff} se obtiene sustrayendo la equivocación a la entropía de la fuente

$$H_{eff} = H(X) - H(X | Y)$$

- ❑ Por consiguiente la tasa de transmisión (*bit rate*) efectiva R_{eff} resulta ser:

$$R_{eff} = RH_{eff}$$

El Plano de Eficiencia de Banda

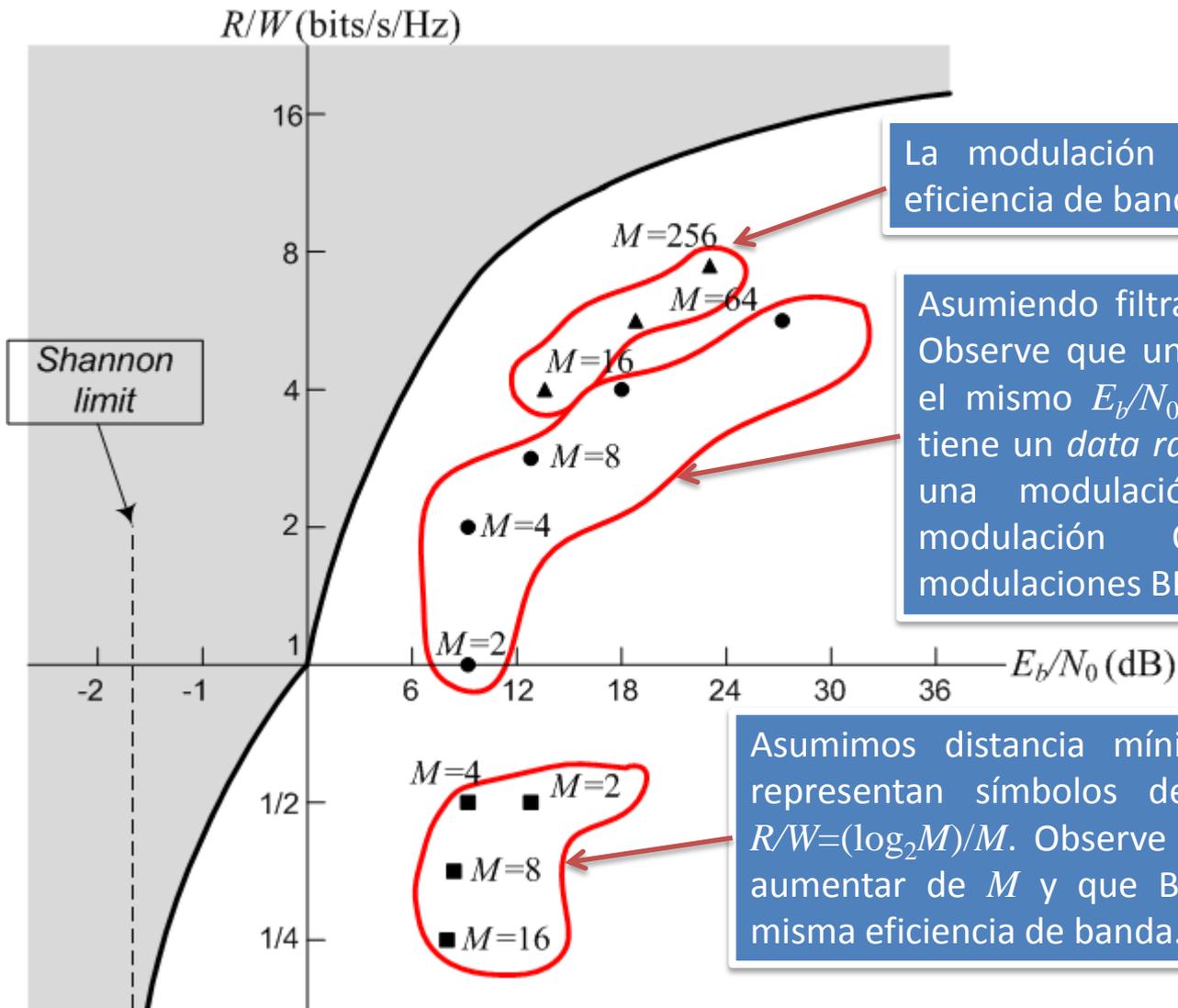


- La ecuación:

$$\frac{R}{W} = \frac{(2^{R/W} - 1)}{E_b/N_0}$$

- Define el plano de eficiencia de banda para una probabilidad de error P_B dada
- La curva es el lugar geométrico de los puntos del plano con la misma probabilidad de error (equierror curve)
- La relación R/W representa cuánta información puede enviarse en una banda específica en un tiempo dado. En otras palabras, R/W representa la eficiencia con la que se aprovecha el ancho de banda disponible
- La curva es para un sistema de portadora sencilla
 - Para sistemas con múltiples portadoras la eficiencia de banda es también función de la separación entre las portadoras (que depende también del tipo de modulación)
 - El objetivo es determinar cuánto se pueden acercar las portadoras sin sufrir un nivel excesivo de interferencia de canal adyacente (Adjacent Channel Interference –ACI)

El Plano de Eficiencia de Banda

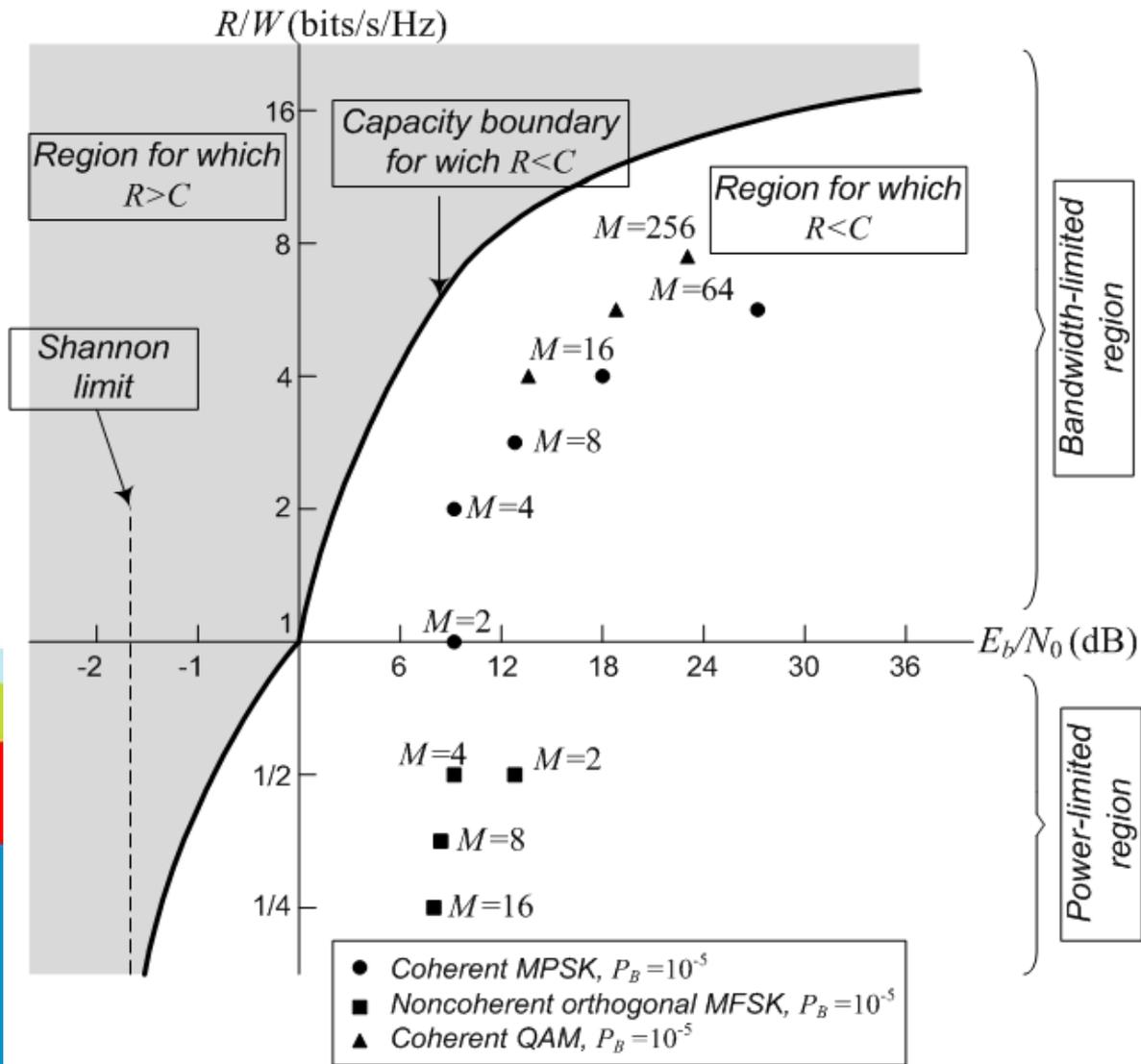


La modulación QAM es la con la mejor eficiencia de banda.

Asumiendo filtrado ideal resulta $R/W = \log_2 M$. Observe que una modulación MPSK requiere el mismo E_b/N_0 para $M=2, 4$, que para $M=4$ tiene un *data rate* de 2 bits/s/Hz, el doble de una modulación BPSK (en efecto una modulación QPSK equivale a dos modulaciones BPSK ortogonales).

Asumimos distancia mínima entre tonos que representan símbolos de duración T resulta $R/W = (\log_2 M)/M$. Observe que R/W disminuye al aumentar de M y que BFSK y 4-FSK tienen la misma eficiencia de banda.

El Plano de Eficiencia de Banda

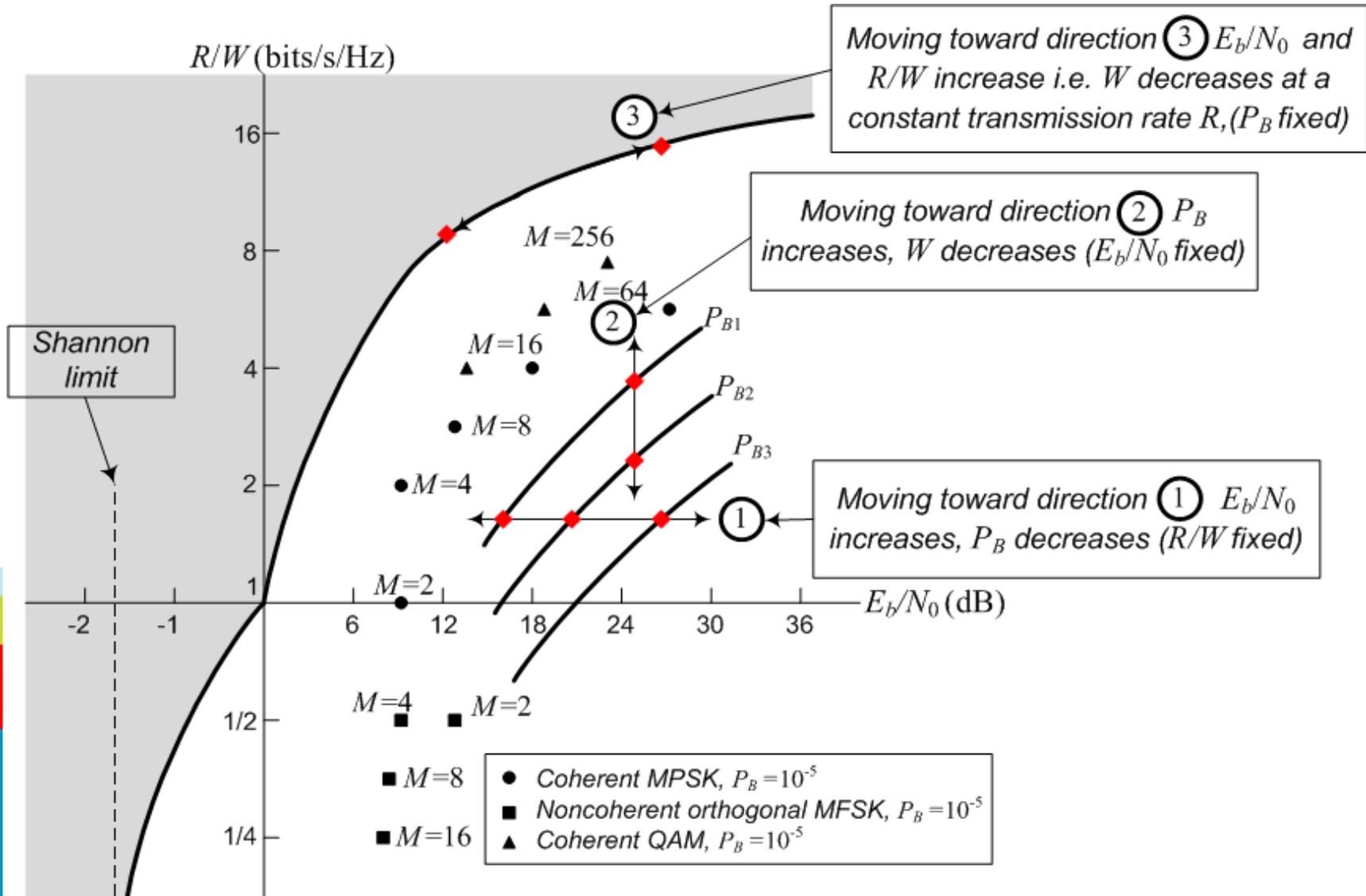


Hay que utilizar estas modulaciones cuando hay fuertes restricciones de ancho de banda. La mejor eficiencia espectral se consigue en detrimento de la potencia de transmisión.

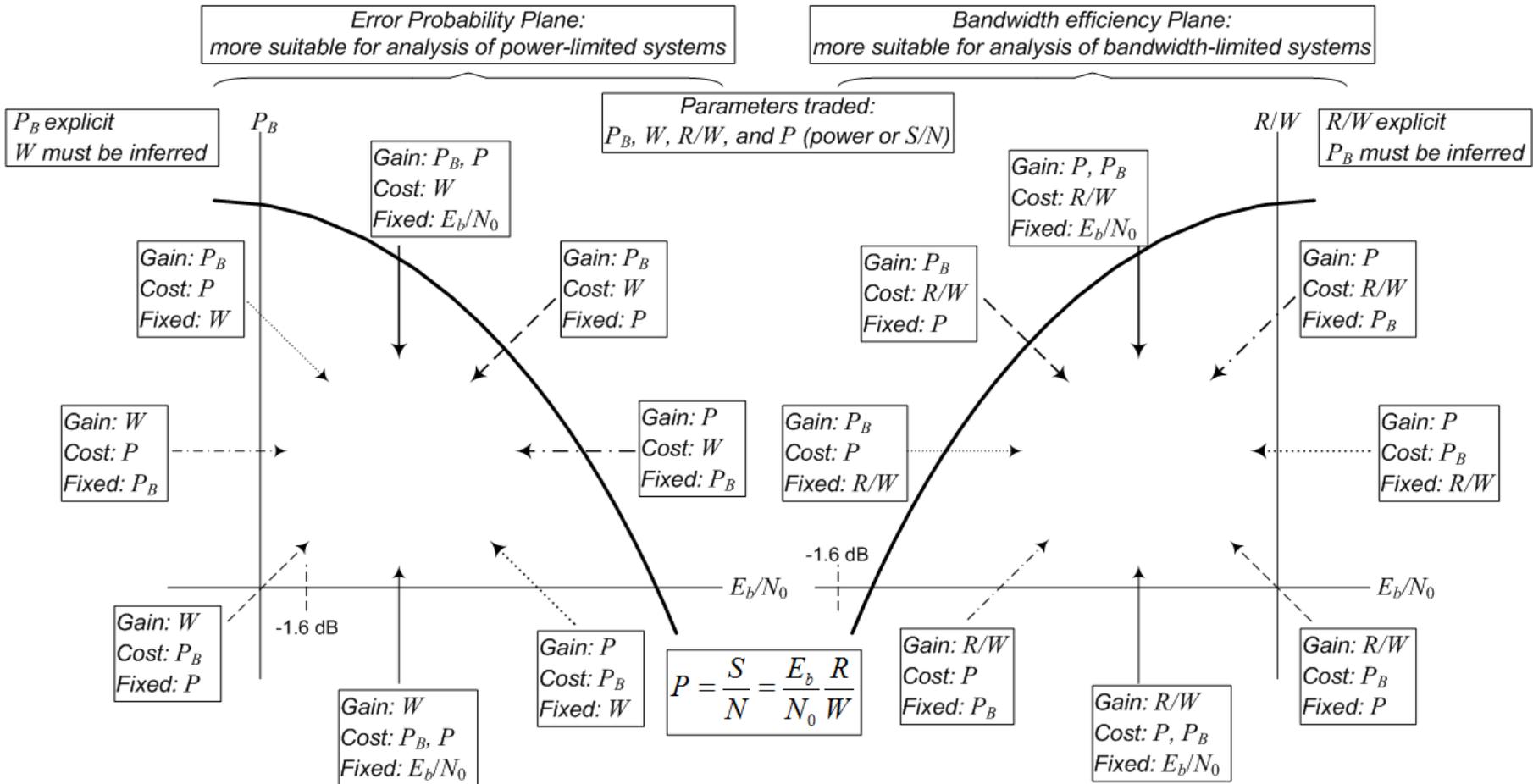
Hay que utilizar estas modulaciones cuando hay fuertes restricciones de potencia de transmisión. Técnicas de codificación pueden utilizarse para reducir la potencia de transmisión en detrimento de la eficiencia de banda.



El Plano de Eficiencia de Banda



Compromiso entre Modulación y Codificación



Las flechas con el mismo patrón denotan correspondencia entre ambos planos



Compromiso entre Modulación y Codificación

- ❑ En la mayoría de los casos el estándar fija P_B , por tanto sólo los desplazamientos con P_B fijo son de interés
- ❑ Es posible construir los planos de probabilidad de error y de eficiencia de banda para examinar el compromiso entre P_B , W y P para la mayoría de modulaciones y esquemas de codificación
- ❑ Para algunos códigos o esquemas combinados de modulación y codificación el comportamiento de las curvas puede llegar a ser muy complejo
 - ❑ El motivo de este comportamiento es debido a las distintas prestaciones en términos de capacidad de corrección de error y expansión de banda de los distintos tipos de códigos



Definición, Diseño y Evaluación de sistemas de Comunicación Digitales

- Para cumplir con las restricciones de ancho de banda (W), potencia de transmisión (P) y tolerancia al error (P_B) de un sistema de comunicación digital hay que seguir unas pautas de diseño bien determinadas
- Hay que analizar cuáles son los tipos de modulación más adecuados
 - La elección del esquema de modulación depende de las restricciones de potencia y ancho de banda
- El diseño de un sistema de comunicación digital empieza con la caracterización del canal de comunicación:
 - Potencia recibida (P), ancho de banda disponible (W), estadística de ruido (W), otras no idealidades como el desvanecimiento
- El diseño sigue con el análisis de los requisitos del sistema:
 - Tasa de transmisión (R)
 - Tolerancia al error (P_B)
- Hay que realizar las elecciones de diseño que:
 - Mejor se adaptan a la topología del canal*
 - Cumplen con los requisitos del sistema en términos de rendimiento*



Definición, Diseño y Evaluación de sistemas de Comunicación Digitales

- ❑ Los recursos disponible que maneja el diseñador de sistemas de comunicación digital son:
 - ❑ La potencia de transmisión disponible
 - ❑ El ancho de banda de transmisión disponible
- ❑ Dependiendo del tipo de sistema y aplicación la disponibilidad de uno de estos dos recursos puede ser muy escasa:
 - ❑ Los sistemas que priorizan los consumos de potencia se definen limitados en potencia (*power-limited*)
 - ❑ Los sistemas que priorizan la eficiencia espectral se denominan de banda limitada (*bandwidth-limited*)
- ❑ En ambos tipos de sistemas (limitados en banda o en potencia) es posible utilizar codificación de canal (*channel coding*)
 - ❑ La codificación de canal consiste en codificar cada mensaje transmitido utilizando un código con capacidad de corrección de error
 - ❑ Esta técnica permite reducir los consumos o mejorar P_B en detrimento del ancho de banda



Definición, Diseño y Evaluación de sistemas de Comunicación Digitales

- ❑ Los sistemas de comunicación M -arios tienen la capacidad de procesar k bits a la vez
- ❑ Cada grupo de k bits representa uno de los $M=2^k$ símbolos del alfabeto que maneja el sistema
- ❑ Cada símbolo tiene una duración de T_s segundos (*tiempo de símbolo*); es decir, cada símbolo es asociado a una forma de onda (*señal*) de duración T_s
- ❑ La tasa de transmisión de datos R (data rate) es definida como:

$$R = \frac{k}{T_s} = \frac{\log_2 M}{T_s} \text{ bit/s}$$

- ❑ La duración efectiva de un bit T_b es definida como:

$$T_b = \frac{1}{R} = \frac{T_s}{k} = \frac{1}{kR_s}$$

- ❑ Donde $R_s = 1/T_s$ representa la tasa de símbolo



Definición, Diseño y Evaluación de sistemas de Comunicación Digitales

- ❑ La tasa de símbolo R_s puede expresarse en función de la tasa de bit R :

$$R_s = \frac{R}{\log_2 M}$$

- ❑ Todo esquema de comunicación digital que transmite $k = \log_2 M$ bits en T_s segundos utilizando un ancho de banda de W Hz tiene una eficiencia de banda R/W igual a:

$$\frac{R}{W} = \frac{\log_2 M}{T_s W} = \frac{1}{WT_b} \text{ bit/s/Hz}$$

- ❑ La eficiencia de banda mejora si WT_b disminuye, de hecho, las señales con WT_b pequeño se suelen utilizar en sistemas de ancho de banda limitado
- ❑ El objetivo de diseño de sistemas sin codificación de mensaje es maximizar la tasa de transmisión dentro de la banda disponible en detrimento de P_B y manteniendo constante P_B

Definición, Diseño y Evaluación de sistemas de Comunicación Digitales

- ❑ Asumiendo un filtrado de Nyquist ideal (y por tanto no realizable físicamente), la banda lateral doble (*Double Side Band* –DSB) requerida por una señal MPSK a frecuencias intermedias es:

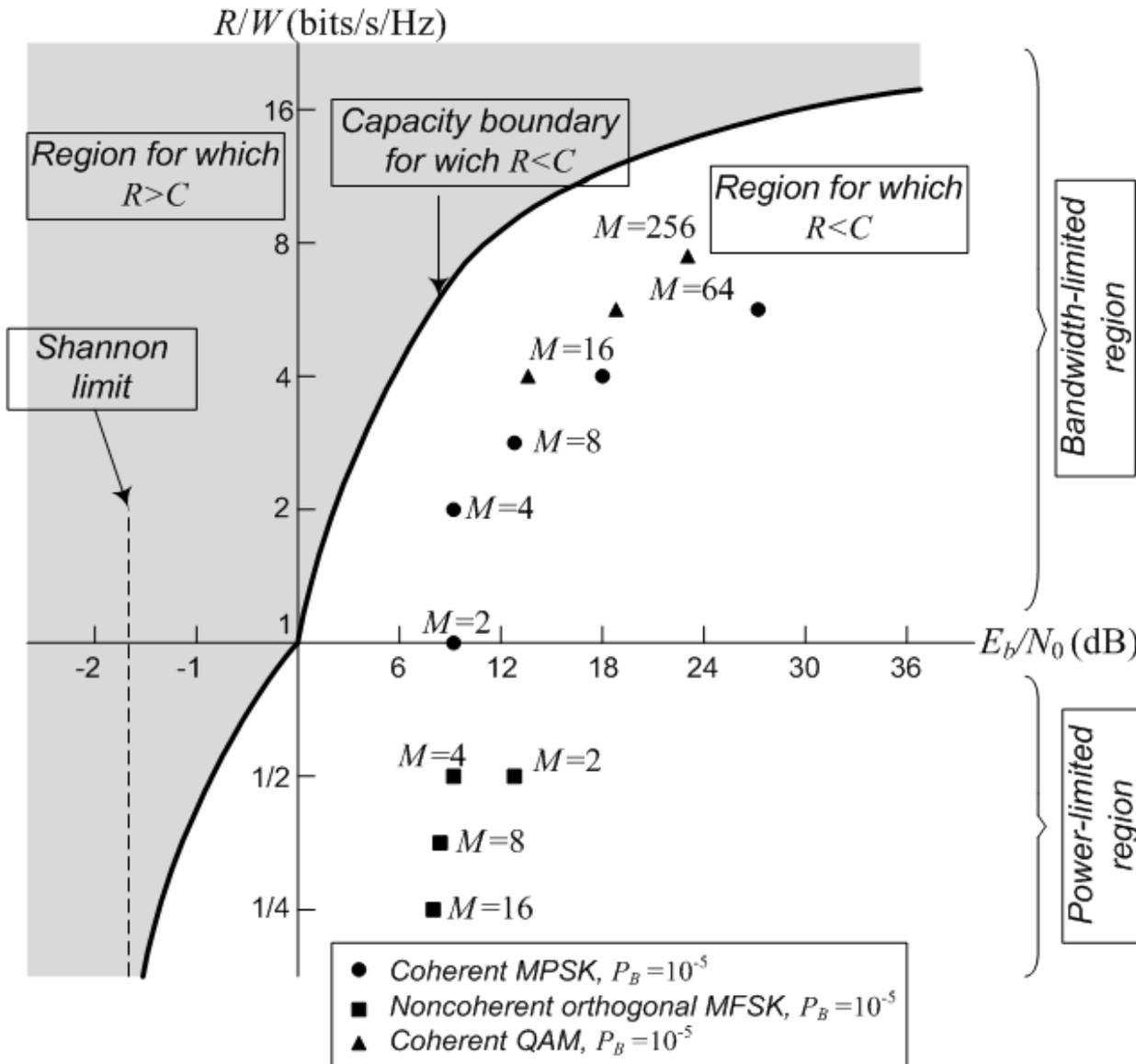
$$W = \frac{1}{T_s} = R_s$$

- ❑ El uso de un filtro de Nyquist minimiza el ancho de banda de transmisión que garantiza la ausencia de interferencia intersímbolo (ISI)
- ❑ El ancho de banda requerido por un esquema de transmisión no ortogonal como MPSK o MQAM no depende de la densidad de puntos de la constelación
 - ❑ Cada punto de la constelación se codifica con un faser independientemente del tipo de alfabeto
- ❑ La eficiencia de banda de un esquema MPSK es:

$$W = \frac{1}{T_s} \Rightarrow \frac{R}{W} = \frac{\log_2 M}{T_s W} = \log_2 M \text{ bit/s/Hz}$$

- ❑ Se trata evidentemente de un esquema con elevada eficiencia de banda porque si aumenta M , aumenta también R/W (el coste es un aumento de E_b/N_0)

Definición, Diseño y Evaluación de sistemas de Comunicación Digitales



Es deseable tener un R/W grande pero para valores muy grande la curva se aplana lo que implica un aumento excesivo de E_b/N_0

Es deseable tener un E_b/N_0 pequeño pero la pendiente de la curva en esta región es muy abrupta por lo que una reducción pequeña de E_b/N_0 implica una reducción excesiva de R/W



Definición, Diseño y Evaluación de sistemas de Comunicación Digitales

- ❑ Cuando la potencia disponible en transmisión es poca pero el ancho de banda disponible en transmisión es muy elevado (por ejemplo en el caso de enlaces satelitales) es posible barajar dos opciones de diseño:
 - ❑ Mejorar P_B al coste de un mayor ancho de banda W para un E_b/N_0 fijado
 - ❑ Reducir E_b/N_0 al coste de un mayor ancho de banda W para P_B fijado
- ❑ Una clase de modulaciones ideales en sistemas con estas características es la MFSK
- ❑ Asumiendo espaciado mínimo entre tonos (es decir, $1/T_s$), el ancho de banda es:

$$W = \frac{M}{T_s} = MR_s$$

- ❑ El ancho de banda aumenta con M (hay M señales ortogonales distintas cada una de las cuales precisa un ancho de banda mínimo $1/T_s$)
- ❑ La eficiencia de banda de una señal MFSK es:

$$W = \frac{M}{T_s} \Rightarrow \frac{R}{W} = \frac{\log_2 M}{T_s W} = \frac{\log_2 M}{M} \text{ bit/s/Hz}$$

- ❑ Observe que la eficiencia de banda disminuye al aumentar de M (con M grande la penalización es mucho mayor ya que el denominador aumenta mucho más rápidamente que el numerador)
- ❑ Finalmente, recuerde que para sistemas reales (tanto MPSK como MFSK) el ancho de banda debe ser aumentado para tener en cuenta el efecto de los filtros reales



Definición, Diseño y Evaluación de sistemas de Comunicación Digitales

M	k	R (bit/s)	R_s (Symb/s)	MPSK Minimum Bandwidth (Hz)	MPSK R/W	MPSK E_b/N_0 (dB) $P_B=10^{-5}$	Noncoherent Orthog MFSK Min Bandwidth (Hz)	MFSK R/W	MFSK E_b/N_0 (dB) $P_B=10^{-5}$
2	1	9600	9600	9600	1	9.6	19200	1/2	13.4
4	2	9600	4800	4800	2	9.6	19200	1/2	10.6
8	3	9600	3200	3200	3	13.0	25600	1/3	9.1
16	4	9600	2400	2400	4	17.5	38400	1/4	8.1
32	5	9600	1920	1920	5	22.4	61440	5/32	7.4

$$R_s = \frac{R}{\log_2 M} = \frac{R}{k}$$