Tema 3: Aplicaciones Lineales

José M. Salazar

Noviembre de 2016

Tema 3: Aplicaciones Lineales

- Lección 3. Aplicaciones lineales.

Índice

Definición de aplicación lineal

Objetivo del tema: estudio de las aplicaciones entre espacios vectoriales que respetan las propiedades de suma y producto por escalar.

Definición (Aplicación lineal)

De una aplicación $f : V \to V'$ con V y V' $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, decimos que es lineal *si:*

i) $f(u+v) = f(u) + f(v)\ \forall u, v \in V$.

ii) $f(a \cdot u) = a \cdot f(u)\ \forall a \in \mathbb{K}$ y $\forall u \in V$.

Obsérvese que tanto $+$ en i) como $\cdot$ en ii), aunque denotadas igual, están definidas en dos espacios vectoriales distintos.
A las aplicaciones lineales también se las llama *homomorfismos*.

Propiedades de las aplicaciones lineales

Propiedades

Si $f : V \to V'$ es una aplicación lineal, entonces:

1. $f(\bar{0}_V) = \bar{0}_{V'}$.
2. $f(-u) = -f(u)$.
3. $f(a_1 u_1 + \cdots + a_m u_m) = a_1 f(u_1) + \cdots + a_m f(u_m)$.

Consecuencia de esta última propiedad es que una aplicación lineal $f : V \to V'$ queda determinada con sólo conocer las imágenes de los vectores de una base de V.

Definición de núcleo e imagen

Definición (Núcleo e imagen de una aplicación lineal)

Dada una aplicación lineal $f : V \to V'$, se define el núcleo *de f, $Ker(f)$, como el conjunto*

$$Ker(f) = \{v \in V : f(v) = \bar{0}_{V'}\}$$

Llamamos imagen *de f, $Im(f)$, al conjunto*

$$Im(f) = \{f(v) \in V' : v \in V\} = f(V)$$

Propiedades de núcleo e imagen. Subespacios obtenidos a partir de f

Propiedades

1. *El conjunto $Ker(f)$ es un subespacio vectorial de V.*
2. *El conjunto $Im(f)$ es un subespacio vectorial de V'.*
3. *Si W es subespacio vectorial de V, entonces $f(W) = \{f(w) \in V' : w \in W\}$ es subespacio vectorial de V'.*
4. *Si $W = L(\{v_1, \ldots, v_m\})$, entonces $f(W) = L(\{f(v_1), \ldots, f(v_m)\})$.*
5. *Si W' es subespacio vectorial de V', entonces $f^{-1}(W') = \{v \in V : f(v) \in W'\}$ es subespacio vectorial de V.*

Definición (Rango de f)

Si $f : V \to V'$ es lineal, con V de tipo finito, llamamos rango de f a la dimensión de la imagen, $r(f) = dim(Im(f))$.

Definición de monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo

Definición (Monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos)

1. *Una aplicación $f : A \to B$ es* inyectiva *si $\forall a_1, a_2 \in A$, con $a_1 \neq a_2$, se cumple $f(a_1) \neq f(a_2)$. De ser lineal, se la llama* monomorfismo.
2. *Una aplicación $f : A \to B$ es* sobreyectiva *si $\forall b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. De ser lineal, se la llama epimorfismo.*
3. *Una aplicación $f : A \to B$ es* biyectiva *si es inyectiva y sobreyectiva a la vez. De ser lineal, se la llama isomorfismo.*
4. *Una aplicación lineal $f : V \to V$, definida de un espacio vectorial en sí mismo, se denomina* endomorfismo. *De ser isomorfismo, la llamamos* automorfismo.

Propiedades

Propiedades

Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal. Se verifica:

1. f *es un monomorfismo si y sólo si* $Ker(f) = \{\bar{0}_V\}$ $(dim(Ker(f)) = 0)$.
2. f *es un epimorfismo si y sólo si* $Im(f) = V'$.
3. f *es un monomorfismo si y sólo si para todo conjunto* $S = \{v_1, \dots, v_m\} \subset V$ *l.i., se tiene que* $f(S) \subset V'$ *es l.i.*
4. f *es un epimorfismo si y sólo si para todo conjunto* $S = \{v_1, \dots, v_m\} \subset V$ *s.g. de* V, *entonces* $f(S) \subset V'$ *es s.g. de* V'.
5. f *es un isomorfismo si y sólo si para toda base* $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ *de* V, *se tiene que* $f(B)$ *es base de* V'.

Propiedades

Teorema

Sea $f : V \to V'$ lineal y sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Entonces f es un monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo si y sólo si $f(B)$ es l.i., s.g. de V' o base de V' respectivamente.

Teorema

Sea $f : V \to V'$ lineal con $dim(V) = dim(V') = n$. Son equivalentes:

1. *f es un monomorfismo.*
2. *f es un epimorfismo.*
3. *f es un isomorfismo.*

Espacios isomorfos

Definición (Espacios isomorfos)

Un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V es isomorfo *a otro $\mathbb{K}$-espacio vectorial $V'(V \equiv V')$ si existe un isomorfismo $f : V \to V'$.*

Teorema

Dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de tipo finito, V y V', son isomorfos si y sólo si $dim(V) = dim(V')$. En particular, cualquier $\mathbb{K}$-espacio vectorial V de dimensión n es isomorfo a $\mathbb{K}^n$.

Ejemplos de espacios isomorfos

Ejemplos

- $M_{m\times n}(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^{mn}$
- $\mathbb{R}_n[x] \equiv \mathbb{R}^{n+1}$.

El modo de construir los isomorfismos es eligiendo una base de cada uno de los espacios vectoriales y construyendo la aplicación lineal que asocia a cada elemento de una base un elemento de la otra base de manera biyectiva.

Operaciones con aplicaciones lineales

Teorema (Operaciones con aplicaciones lineales)

Sean V, V', V'' $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y sean $f, g : V \to V'$ y $h : V' \to V''$ lineales. Las siguientes aplicaciones son lineales:

1. *La aplicación suma $f + g : V \to V'$ definida como $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$ para todo $v \in V$.*
2. *La aplicación producto por un escalar $a \in \mathbb{K}$, $a \cdot f : V \to V'$, definida como $(a \cdot f)(v) = a \cdot f(v)$.*
3. *La aplicación composición $h \circ f : V \to V''$, definida como la aplicación $(h \circ f)(v) = h(f(v))$ para todo $v \in V$.*

Teorema

El conjunto de los homomorfismos entre los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales V y V', $Hom(V, V')$, es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial para las operaciones suma y producto por escalar definidas.

Representación matricial: planteamiento del problema

Sea $f : V \to V'$ lineal con V y V' de tipo finito. Sean

$$B = \{e_1, \ldots, e_n\} \text{ y } B' = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$$

bases de V y V' respectivamente.

Objetivo: dado $x \in V$ con coordenadas X_B respecto de B y dado $f(x) = y \in V'$ con coordenadas $Y_{B'}$ respecto de B', ¿cuál es la relación entre las coordenadas X_B e $Y_{B'}$?

Consideremos la representación de los vectores $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ respecto de B':

$$\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & a_{11}e'_1 + \cdots + a_{m1}e'_m \\ & \vdots & \\ f(e_n) & = & a_{1n}e'_1 + \cdots + a_{mn}e'_m \end{array}$$

Cálculo de la ecuación matricial de f

Si $x \in V$ tiene coordenadas $X_B = (x_1, \dots, x_n)$ respecto de B, esto es, $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, entonces:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) \\ &= x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n) \\ &= x_1(a_{11} e'_1 + \cdots + a_{m1} e'_m) + \cdots + x_n(a_{1n} e'_1 + \cdots + a_{mn} e'_m) \\ &= (a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n) e'_1 + \cdots + (a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n) e'_m. \end{aligned}$$

Cálculo de la ecuación matricial de f

Si denotamos por $Y_{B'} = (y_1, \ldots, y_m)$ a las coordenadas de $y = f(x)$ respecto de B', entonces:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y_1 & = & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ & \vdots & \\ y_m & = & a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array} \right.$$

o, escrito matricialmente,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Esta es la *ecuación matricial de f* respecto de las bases B y B'.

Cálculo de la ecuación matricial de f

La matriz

$$F = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se denomina *matriz asociada a f* respecto de las bases B y B'. Además, F tiene por columnas las coordenadas respecto de B' de los vectores $f(e_1), \ldots, f(e_n)$. Escribiremos $F = M(f, B, B')$. La ecuación matricial de f se escribe abreviadamente como $Y_{B'} = M(f, B, B')X_B$, entendiendo que X_B e $Y_{B'}$ están escritos en forma de columna.

Operaciones con homomorfismos y matrices

Sean V, V', V'' tres $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de tipo finito y sean $f, g : V \to V'$ y $h : V' \to V''$ tres aplicaciones lineales. Fijamos bases B, B' y B'' asociadas a cada uno de los espacios vectoriales. Entonces

Propiedades

1. $M(f+g, B, B') = M(f, B, B') + M(g, B, B')$.
2. *Dado* $a \in \mathbb{K}$, $M(af, B, B') = aM(f, B, B')$.
3. $M(h \circ f, B, B'') = M(h, B', B'')M(f, B, B')$.

Operaciones con homomorfismos y matrices

Teorema

Dados dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales V, V' de dimensiones n y m, y dadas dos bases B, B' fijadas para cada uno de ellos, se tiene que existe un isomorfismo M entre los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales $Hom(V, V')$ y $M_{m\times n}(\mathbb{K})$,

$$M : Hom(V, V') \to M_{m\times n}(\mathbb{K})$$

que asocia a cada aplicación lineal $f \in Hom(V, V')$ la matriz $M(f, B, B')$. Por tanto,

$$dim(Hom(V, V')) = dim(M_{m\times n}(\mathbb{K})) = mn$$

Ecuaciones del núcleo de f

Sea $f : V \to V'$ lineal con $dim(V)) = n$ y $dim(V') = m$. Veamos cómo calcular las ecuaciones de $Ker(f)$.

Procedimiento

1. *Se fijan bases B y B' de los respectivos espacios vectoriales.*
2. *Se calcula $F = M(f, B, B')$.*
3. *Las ecuaciones de $Ker(f)$ respecto de B son las que proporciona el sistema $F X_B = \bar{0}$. Se escalona $F \to E$ y se obtienen las ecuaciones implícitas de $Ker(f)$ respecto de B:*

$$E \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. *A partir de aquí, resolviendo el sistema, se determinan las ecuaciones paramétricas y una base.*

Obsérvese que $dim(Ker(f)) = n - r(F)$.

Ecuaciones de la imagen de f

Sea $f : V \to V'$ lineal con $dim(V)) = n$ y $dim(V') = m$. Veamos cómo calcular las ecuaciones de $Im(f)$.

Procedimiento

1. *Se fijan bases B y B' de los respectivos espacios vectoriales.*
2. *Se calcula $F = M(f, B, B')$.*
3. *Las columnas de F son las coordenadas respecto de B' de un s.g. de $Im(f)$. Se escalona $F^T \to E$. Las filas no nulas de E son las coordenadas de una base de $Im(f)$ respecto de B'.*
4. *A partir de aquí se obtiene una base y las ecuaciones paramétricas e implícitas de $Im(f)$ respecto de B'.*

Obsérvese que $dim(Im(f)) = r(f) = r(F)$.

Propiedades de f deducidas de su representación matricial

Propiedades

Sea $f : V \to V'$ lineal con $\dim(V) = n$ y $\dim(V') = m$ y sea F una representación matricial de f. Entonces:

1. $\dim(Ker(f)) = \dim(V) - r(F)$.
2. $\dim(Im(f)) = r(F)$.
3. *(Fórmula de las dimensiones)* $\dim(V) = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f))$.
4. f *es un monomorfismo si y sólo si* $r(F) = n$.
5. f *es un epimorfismo si y sólo si* $r(F) = m$.
6. f *es un isomorfismo si y sólo si* $m = n$ *y* F *es regular.*

Cambios de base: planteamiento del problema

Objetivo: estudiar la relación entre las distintas expresiones matriciales asociadas a una misma aplicación lineal $f : V \to V'$.

Sea $f : V \to V'$ lineal con $dim(V) = n$ y $dim(V') = m$. Sean B_1, B_2 bases de V y B_1', B_2' bases de V'.
Consideremos las ecuaciones de cambio de base de B_1 en B_2 y de B_1' en B_2' determinadas por las expresiones

$$X_{B_2} = P\, X_{B_1} \qquad Y_{B_2'} = Q\, Y_{B_1'}$$

con $P = M(B_1, B_2)$ y $Q = M(B_1', B_2')$.

Cambios de base: planteamiento del problema

Las ecuaciones matriciales de f respecto de las bases B_1, B_1' y B_2, B_2' son

$$Y_{B_1'} = F\,X_{B_1} \qquad Y_{B_2'} = G\,X_{B_2}$$

con $F = M(f, B_1, B_1')$, $G = M(f, B_2, B_2')$.

¿Cuál es la relación entre F y G?

Relación entre las matrices asociadas a f

Obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$V \xrightarrow{f} V'$$

$$\begin{array}{ccc} X_{B_1} & \xrightarrow{F} & Y_{B'_1} \\ P\downarrow & & \downarrow Q \\ X_{B_2} & \xrightarrow{G} & Y_{B'_2} \end{array}$$

Por tanto, $F = Q^{-1}GP$.

Relación entre las matrices asociadas a f

En el importantte caso en que f sea un endomorfismo $f : V \to V$ y las dos bases sean la misma, $B_1 = B_1'$ y $B_2 = B_2'$, el diagrama conmutativo queda del siguiente modo:

$$V \xrightarrow{f} V$$

$$\begin{array}{ccc} X_{B_1} & \xrightarrow{F} & Y_{B_1} \\ P \downarrow & & \downarrow P \\ X_{B_2} & \xrightarrow{G} & Y_{B_2} \end{array}$$

Por tanto, $F = P^{-1}GP$.

Equivalencia de matrices y semejanza de matrices

Definición

- *Dos matrices* $F, G \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ *son* equivalentes *si existen matrices regulares* $P \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ *y* $Q \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$ *tales que*

$$F = Q^{-1}GP$$

- *Dos matrices* $F, G \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ *son* semejantes *si existe una matriz regular* $P \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ *tal que*

$$F = P^{-1}GP$$

Equivalencia y semejanza de matrices

Teorema

Todas las representaciones matriciales de una misma aplicación lineal $f : V \to V'$ son equivalentes.

Teorema

Todas las representaciones matriciales de un mismo endomorfismo lineal $f : V \to V$ con la misma base fijada $B = B'$ son semejantes.