LÓGICA

EXAMEN EXTRAORDINARIO

Grado en Ingeniería de la CyberSeguridad. Universidad Rey Juan Carlos

25 junio 2019

Nombre y apellidos: ____

DNI: ____

<u>Entrega esta hoja y todas las demás que hayas necesitado. Pon el nombre en todas ellas y numéralas.</u>

<u>Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas. Las justificaciones tienen que ser claras, bien redactadas y perfectamente comprensibles</u>

1. (1,5 puntos) Utilizando únicamente las 8 reglas básicas de Gentzen (lógica proposicional), demuestra que es cierto el siguiente razonamiento: $\{d \rightarrow c \wedge a,\ \neg a \rightarrow \neg d\} \vdash \neg c \wedge a \rightarrow \neg d$

1. $d \rightarrow c \wedge a$ Pr.
2. $\neg a \rightarrow \neg d$ Pr
3. $\neg c \wedge a$ Pr. aux.
4. d Pr. aux.
5. $c \wedge a$ E→, 4, 1.
6. c E∧, 5
7. $\neg c$ E∧, 3
8. $c \wedge \neg c$ I∧, 6, 7
9. $d \rightarrow c \wedge \neg c$ I→ (4,8)
10. $\neg d$. I¬, 9.
11. $\neg c \wedge a \rightarrow \neg d$ I→ (3,10)

2. (1,5 puntos) Formaliza, en lógica proposicional, el siguiente discurso (el cual es una tautología): "Es necesario que no comas algunas verduras esenciales para ser hacker. Es suficiente con que no comas algunas de estas verduras para que no seas bueno en deportes. Una persona es buena en los deportes o es buena en matemáticas. Por lo tanto, una persona no es hacker o es buena en matemáticas."

Solución:

- p: ser hacker
- q: comer algunas verduras esenciales
- r: ser bueno en deportes
- s: ser bueno en matemáticas

$(p \to \neg q) \wedge (\neg q \to \neg r) \wedge (r \vee s) \to \neg p \vee s$

3. (1 punto) Sea A = {Windows, Linux, Android}. Sobre A, inventa una relación binaria de equivalencia con cardinal mayor o igual que 5. Descríbela en lenguaje natural. Enumera sus elementos. Halla todas sus clases de equivalencia y enumera todos los elementos de cada una.

$R = \{(W,W), (L,L), (An,An), (W,L), (L,W)\} \subseteq A \times A$

Dos elementos están relacionados si su uso principal es para el mismo tipo de dispositivo (ordenador, móvil, smartTV, etc).

$C(W) = C(L) = \{W, L\} \subseteq A$

$C(An) = \{An\}$

4. (1,5 puntos) Considera la siguiente fórmula de la lógica proposicional:

$$\varphi \; : \; ((r \to q) \vee (p \vee \neg q)) \to (r \to (q \vee p))$$

Usando tableaux:

a) Clasifica la fórmula (0,5 puntos)
b) Halla una FND de la fórmula (0,5 puntos)
c) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo (0,5 puntos)

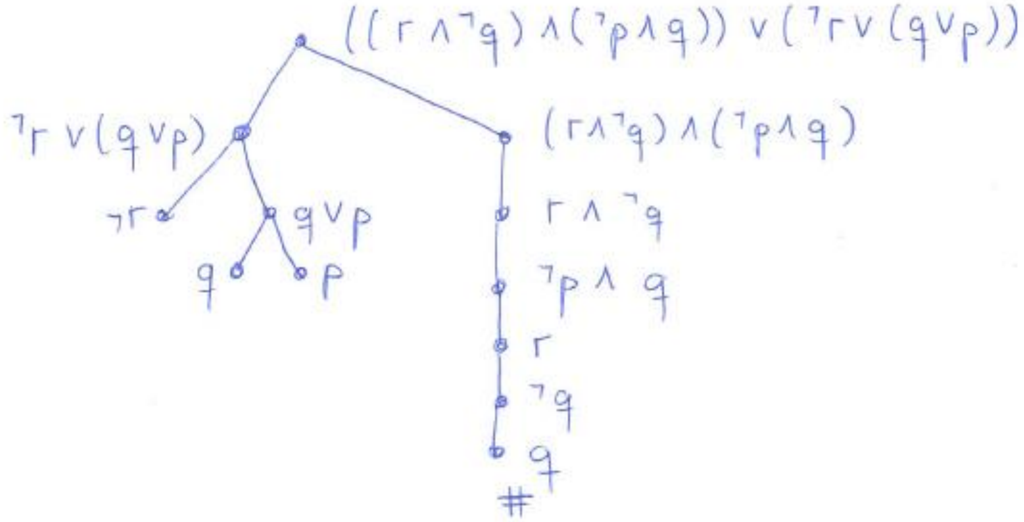
Solución:

a) $\varphi: ((r \to q) \vee (p \vee \neg q)) \to (r \to (q \vee p)) \equiv$

$\equiv \neg((\neg r \vee q) \vee (p \vee \neg q)) \vee (\neg r \vee (q \vee p)) \equiv$

$\equiv (\neg(\neg r \vee q) \wedge \neg(p \vee \neg q)) \vee (\neg r \vee (q \vee p)) \equiv$

$\equiv ((r \wedge \neg q) \wedge (\neg p \wedge q)) \vee (\neg r \vee (q \vee p))$



Como tiene alguna rama abierta, φ es satisfacible y hay que hacer el tableaux de $\neg\varphi$, para ver si φ es tautología o contingencia.

$\neg\varphi: \neg((r \wedge \neg q) \wedge (\neg p \wedge q)) \wedge \neg(\neg r \vee (q \vee p)) \equiv$

$\equiv (\neg(r \wedge \neg q) \vee \neg(\neg p \wedge q)) \wedge (r \wedge \neg(q \vee p)) \equiv$

$\equiv ((\neg r \vee q) \vee (p \vee \neg q)) \wedge (r \wedge (\neg q \wedge \neg p))$

$((\neg r \vee q) \vee (p \vee \neg q)) \wedge (r \wedge (\neg q \wedge \neg p))$

$(\neg r \vee q) \vee (p \vee \neg q)$

$r \wedge (\neg q \wedge \neg p)$

r

$\neg q \wedge \neg p$

$\neg q$

$\neg p$

$\neg r \vee q$ $\qquad$ $p \vee \neg q$

$\neg r$ $\qquad$ q

\# $\qquad$ \#

Como el tableaux de $\neg \varphi$ no es cerrado, φ es contingencia

b) $FND(\varphi) = \neg r \vee q \vee p$

(disyunción de las ramas abiertas del tableaux de φ)

c) • Cualquier valoración en la cual $\neg r$ sea 1 sería un modelo, según el tableaux de φ. Por ejemplo $\{p = 0, q = 0, r = 0\}$.

• Una valoración contraejemplo de φ sería $\{p = 0, q = 0, r = 1\}$ xq, según vemos en el tableaux de $\neg \varphi$, esta valoración sería un modelo de $\neg \varphi$ (y por lo tanto un contraejemplo de φ).

5. (1,5 puntos) Sea el conjunto A el formado por las constantes de aridad 0, los conectivos unarios, los conectivos binarios y los cuantificadores de la lógica de predicados. Sea B el conjunto de todas las palabras de longitud finita formadas con el alfabeto A. Define la función que asocia a cada fórmula de la lógica de primer orden la palabra de B que es la lista de los símbolos de A que aparecen en la fórmula, incluyendo todas sus apariciones y en el mismo orden en que aparecen en la fórmula.

Solución:

$A = \{\top, \bot, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists\}$

DEFINIMOS $f: F \rightarrow B$ POR RECURSIÓN ESTRUCTURAL SOBRE F.

PASO BASE

$f(\top) = \top$, $f(\bot) = \bot$

$f(\varphi) = \emptyset$ PARA TODAS LAS DEMÁS FÓRMULAS ATÓMICAS

PASOS RECURSIVOS

$(\neg)$ $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$

$(\circ)$ $f(\varphi_1 \circ \varphi_2) = f(\varphi_1) \circ f(\varphi_2)$

$(\forall\exists)$ $f(\forall x \varphi) = \forall f(\varphi)$

$f(\exists x \varphi) = \exists f(\varphi)$

6. (1,5 puntos) En la lógica de primer orden, verifica si las siguientes fórmulas son o no son equivalentes:

$$\varphi_1 = \forall x \exists y (P(x) \wedge R(y) \rightarrow Q(z)), \quad \varphi_2 = \forall x \exists y (P(x) \wedge (R(y) \rightarrow Q(z))).$$

Solución:

LAS DOS FÓRMULAS NO SON EQUIVALENTES YA QUE BAJO LA INTERPRETACIÓN $\mathcal{I} = (D, I)$ Y ASIGNACIÓN SIGUIENTES φ_1 ES VERDADERA Y φ_2 ES FALSA:

$D = \{a\}$, $P^I = Q^I = R^I = \emptyset$ (CONJUNTO VACÍO)

$z^A = a$

$\varphi_1^{I,A} = 1$ SIENDO $P^I(x) \wedge Q^I(y) = 0$ PARA TODO x Y y.

$\varphi_2^{I,A} = 0$ SIENDO $P^I(x) = 0$ PARA TODO x

7. (1,5 punto) Formaliza lo siguiente en lógica de predicados de primer orden, sin utilizar ningún predicado (sí puedes usar otros elementos de la lógica de primer orden): "En el conjunto de los números enteros se cumple que cualquier número que sea múltiplo de 6 se puede escribir como el producto de un múltiplo de 2 por un múltiplo de 3." Pista: recuerda que un número "a" es múltiplo de otro "b" cuando "a" es el resultado de multiplicar "b" por otro número natural.

Solución:

$D: \mathbb{Z}$

$f(x,y) = x \cdot y$

$$\forall x\, \exists y\, \exists z \left(\underbrace{f(x,6)}_{\text{cualquier múltiplo de 6}} = f\big(\underbrace{f(y,2)}_{\text{un múltiplo de 2}}, \underbrace{f(z,3)}_{\text{un múltiplo de 3}} \big) \right)$$