LÓGICA

Problemas de repaso sobre lógica proposicional resueltos

Este capítulo contiene los textos y las soluciones de varios exámenes, que incluimos para que puedan ser usados como repaso la lógica proposicional.

Es muy importante que el alumno intente resolver todos los problemas presentados en el tiempo indicado en cada examen.

1. Examen parcial 2005-2006

Fecha: 12 de diciembre de 2005 **Tiempo: 1 hora**

El examen está formado por cuatro problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre cinco puntos.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas*. Podéis consultar los apuntes de la asignatura.*

---

1) Usando la lógica proposicional, formaliza los siguientes enunciados (se necesitan sólo tres proposiciones atómicas):

a) Iremos a Portugal y visitaremos Lisboa sólo si no hace mucho frío.
b) No iremos a Portugal a menos que no haga mucho frío.
c) Si no hace mucho frío, visitaremos Lisboa.
d) O bien hace mucho frío, o bien iremos a Portugal.
e) No iremos a Portugal, si no vamos a visitar Lisboa o si hace mucho frío.

2) Mediante una tabla de verdad, verifica si las dos fórmulas

$$\varphi_1 : \neg p \vee \neg q \to \neg r \quad \text{y} \quad \varphi_2 : p \vee q \vee \neg r,$$

son lógicamente equivalentes.

3) En el sistema de Gentzen, estudia la validez de la deducción

$$\{r \vee p \to \neg p,\ p \to q,\ \neg q \vee p\} \vdash \neg p.$$

4) Sea $\varphi : (p \vee q \to r) \vee (t \to q)$.

Usando tableaux, halla las formas normales disyuntiva y conjuntiva de φ.

2. Soluciones del examen parcial 2005-2006

Fecha: 12 de diciembre de 2005 **Tiempo: 1 hora**

---

1) Usando la lógica proposicional, formaliza los siguientes enunciados (se necesitan sólo tres proposiciones atómicas):

a) Iremos a Portugal y visitaremos Lisboa sólo si no hace mucho frío.
b) No iremos a Portugal a menos que no haga mucho frío.
c) Si no hace mucho frío, visitaremos Lisboa.
d) O bien hace mucho frío, o bien iremos a Portugal.
e) No iremos a Portugal, si no vamos a visitar Lisboa o si hace mucho frío.

Solución: Sean $\{p, q, r\}$ las siguientes proposiciones atómicas:

p= iremos a Portugal,
q= visitaremos Lisboa,
r= hace mucho frío.

Entonces,

a) "Iremos a Portugal y visitaremos Lisboa sólo si no hace mucho frío" se escribe $p \wedge q \to \neg r$,
b) "No iremos a Portugal a menos que no haga mucho frío" se escribe $p \to \neg r$,
c) "Si no hace mucho frío, visitaremos Lisboa" se escribe $\neg r \to q$,
d) "O bien hace mucho frío, o bien iremos a Portugal" se escribe $r \vee p$,
e) "No iremos a Portugal, si no vamos a visitar Lisboa o si hace mucho frío" se escribe $\neg q \vee r \to \neg p$.

2) Mediante una tabla de verdad, verifica si las dos fórmulas

$$\varphi_1 : \neg p \vee \neg q \to \neg r \quad \text{y} \quad \varphi_2 : p \vee q \vee \neg r,$$

son lógicamente equivalentes.

Solución: Con la tabla de verdad de la figura 1 verificamos que $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ no es una tautología, ya que tiene dos contraejemplo:

$$(p = 0,\, q = 1,\, r = 1) \quad \text{y} \quad (p = 1,\, q = 0,\, r = 1).$$

Se sigue que φ_1 y φ_2 no son lógicamente equivalentes.

3) En el sistema de Gentzen, estudia la validez de la deducción

$$\{r \vee p \to \neg p,\, p \to q,\, \neg q \vee p\} \vdash \neg p.$$

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$\neg p \vee \neg q$	φ_1	φ_2	$\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1

CUADRO 1. Tabla de verdad del ejercicio 2

Solución:

1) $r \vee p \to \neg p$ (Premisa)
2) $p \to q$ (Premisa)
3) $\neg q \vee p$ (Premisa)

$$\boxed{\begin{array}{ll} 4)\ \vdash \neg\neg p & \text{(Premisa auxiliar)} \\ 5)\ \vdash p & (\text{E}\neg(4)) \\ 6)\ \vdash r \vee p & (\text{I}\vee(5)) \\ 7)\ \vdash \neg p & (\text{E}\to(6,1)) \\ 8)\ \vdash p \wedge \neg p & (\text{I}\wedge(5,7)) \end{array}}$$

9) $\vdash \neg p$ (I$\neg$(4,8))

La deducción $\{r \vee p \to \neg p,\ p \to q,\ \neg q \vee p\} \vdash \neg p$ es válida.

4) Sea $\varphi : (p \vee q \to r) \vee (t \to q)$.

Usando <u>tableaux</u>, halla las formas normales disyuntiva y conjuntiva de φ.

Solución: Por medio de equivalencias, podemos reescribir φ como:

$$\varphi \equiv \neg(p \vee q) \vee r \vee \neg t \vee q \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r \vee \neg t \vee q \equiv FND(\varphi).$$

Notar que, en general, para hallar la forma normal disyuntiva de un fórmula proposicional tenemos que dibujar su tableau. En nuestro caso particular hemos obtenido esa forma per medio de la simple aplicación de equivalencias lógicas.

Entonces,

$$\neg\varphi \equiv \neg FND(\varphi) \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg r \wedge \neg\neg t \wedge \neg q \equiv$$

$$\equiv (p \vee q) \wedge \neg r \wedge t \wedge \neg q.$$

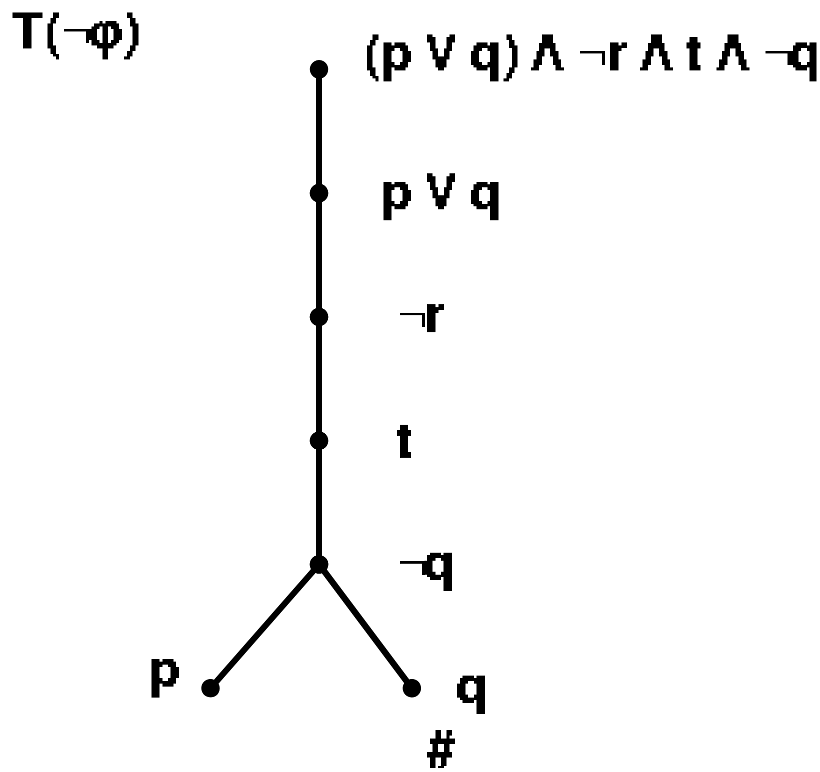


Figura 1. Tableaux acabados de $\neg\varphi$ del problema 4

Para hallar las forma normal conjuntiva de φ, $FNC(\varphi) \equiv \neg FND(\neg\varphi)$, necesitamos dibujar el tableau de $\neg\varphi$, representado en la figura 1.

Usando los literales de la primera rama (la única rama abierta) del tableau, obtenemos que

$$FNC(\varphi) \equiv \neg FND(\neg\varphi) \equiv \neg(p \wedge \neg q \wedge t \wedge \neg r) \equiv \neg p \vee q \vee \neg t \vee r.$$

Notar que, en nuestro caso, la forma normal conjuntiva de φ consiste de una única cláusula disyuntiva.

3. Primer examen parcial 2006-2007

Fecha: 21 de noviembre de 2006 **Tiempo: 1 hora y media**

El examen está formado por tres problemas. La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

---

1) Sea L el conjunto de las fórmulas proposicionales.

Sobre L, sea $R \subseteq L \times L$ la relación binaria definida por:

$$(\varphi, \psi) \in R \quad \text{si y sólo si} \quad \varphi \models \psi.$$

a) (3 puntos) Verifica si R es reflexiva, simétrica o transitiva.

b) (1 punto) Determina si R es una relación de equivalencia.

2) Considera las siguientes dos frases:

φ : "Hoy no hace frío ni calor y no iré al parque a menos que no llueva."

ψ : "Es imposible que: o bien hoy hace frío, o bien hace calor, o bien iré al parque a pesar de que llueva."

a) (2 puntos) Formaliza φ y ψ en la lógica proposicional.

b) (1 puntos) Dibuja los árboles estructurales de las fórmulas proposicionales φ y ψ obtenidas en el apartado a).

c) (3 puntos) Mediante <u>una tabla de verdad</u>, verifica si φ y ψ son lógicamente equivalentes.

3) (5 puntos) Siendo p, q, r y s proposiciones atómicas, estudia la validez del siguiente razonamiento usando el método de los <u>tableaux</u>:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ p \wedge (r \rightarrow s) \\ \neg p \vee s \\ \hline q \vee r \end{array}$$

Si el razonamiento no es válido, halla un contraejemplo.

4. Soluciones del primer examen parcial 2006-2007

Fecha: 21 de noviembre de 2006 **Tiempo: 1 hora y media**

---

1) Sea L el conjunto de las fórmulas proposicionales.
Sobre L, sea $R \subseteq L \times L$ la relación binaria definida por:

$$(\varphi, \psi) \in R \quad \text{si y sólo si} \quad \varphi \models \psi.$$

a) (3 puntos) Verifica si R es reflexiva, simétrica o transitiva.
b) (1 punto) Determina si R es una relación de equivalencia.

Solución:

a) L es reflexiva ya que $\varphi \models \varphi$ para toda $\varphi \in L$, siendo $\varphi \to \varphi$ una tautología (si $\varphi = 1$, $\varphi \to \varphi$ es verdadera).

L no es simétrica ya que, por ejemplo, siendo $\varphi = p \wedge q$ y $\psi = p$, se verifica que $\varphi \models \psi$ (si $p \wedge q = 1$, entonces tiene que ser $p = 1$). Sin embargo, $\psi = p$ no implica lógicamente $\varphi = p \wedge q$ (si $p = 1$ y $q = 0$, $p \to p \wedge q$ es falsa).

L es transitiva: sean $\chi \in L$, $\varphi \models \psi$ y $\psi \models \chi$. Entonces, $\varphi = 1$ implica $\psi = 1$ (siendo cierto que $\varphi \models \psi$) y $\psi = 1$ implica $\chi = 1$ (siendo cierto que $\psi \models \chi$). Por tanto, $\varphi \models \chi$ ($\varphi = 1$ implica $\chi = 1$).

b) La relación R no es simétrica y, por tanto, no es una relación de equivalencia.

2) Considera las siguientes dos frases:

φ : "Hoy no hace frío ni calor y no iré al parque a menos que no llueva."

ψ : "Es imposible que: o bien hoy hace frío, o bien hace calor, o bien iré al parque a pesar de que llueva."

a) (2 puntos) Formaliza φ y ψ en la lógica proposicional.

b) (1 puntos) Dibuja los árboles estructurales de las fórmulas proposicionales φ y ψ obtenidas en el apartado a).

c) (3 puntos) Mediante una tabla de verdad, verifica si φ y ψ son lógicamente equivalentes.

Solución:

a) Consideremos las siguientes fórmulas proposicionales:
p=hoy hace frío, q= hoy hace calor, r= hoy iré al parque, s= hoy llueve.

Entonces,

$$\varphi : (\neg p \wedge (\neg q \wedge (r \to \neg s))) \quad \text{y} \quad \psi : \neg(p \vee (q \vee (r \wedge s))).$$

b) Los árboles estructurales de φ y ψ están representados en la figura 2:

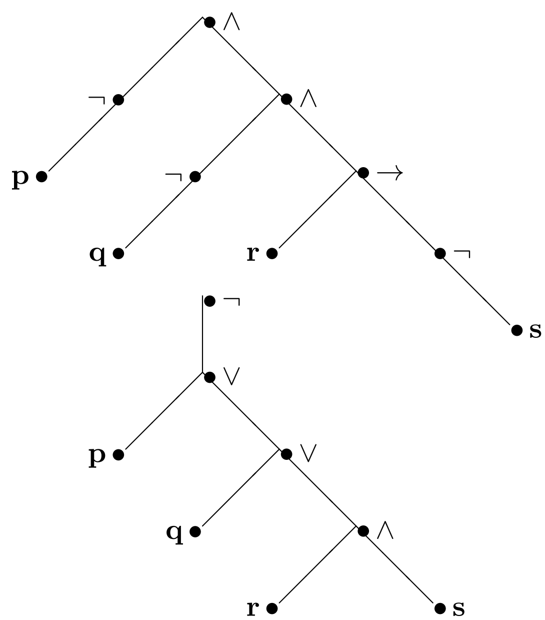


Figura 2. Árboles estructurales de φ y ψ

c) En la tabla 2 verificamos que $\varphi \leftrightarrow \psi$ es una tautología. Por tanto φ y ψ son lógicamente equivalentes.

3) (5 puntos) Siendo p, q, r y s proposiciones atómicas, estudia la validez del siguiente razonamiento usando el método de los tableaux:

$$\begin{array}{c} p \to (q \to r) \\ p \wedge (r \to s) \\ \neg p \vee s \\ \hline q \vee r \end{array}$$

Si el razonamiento no es válido, halla un contraejemplo.

Solución:

Usando las equivalencias

p	q	r	s	$\neg p$	$\neg q$	$\neg s$	$r \to \neg s$	φ	$r \wedge s$	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1

CUADRO 2. Tabla de verdad del ejercicio 2

$p \to (q \to r) \equiv \neg p \vee \neg q \vee r$ y
$p \wedge (r \to s) \equiv p \wedge (\neg r \vee s)$,
podemos escribir el razonamiento en la forma

$$\varphi = (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \wedge (\neg r \vee s)) \wedge (\neg p \vee s) \to q \vee r.$$

Entonces,

$$\neg\varphi = (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \wedge (\neg r \vee s)) \wedge (\neg p \vee s) \wedge \neg(q \vee r) \equiv$$
$$\equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge p \wedge (\neg r \vee s) \wedge (\neg p \vee s) \wedge \neg q \wedge \neg r.$$

La figura 3 representa el tableau $T(\neg\varphi)$ acabado asociado a $\neg\varphi$.

Ya que $T(\neg\varphi)$ no es cerrado, $\neg\varphi$ no es una contradicción y, por tanto, φ no es una tautología y el razonamiento dado no es válido.

La rama completa abierta de $T(\neg\varphi)$ nos proporciona un contraejemplo para el razonamiento:

$$s = 1, \quad r = 0, \quad q = 0, \quad p = 1.$$

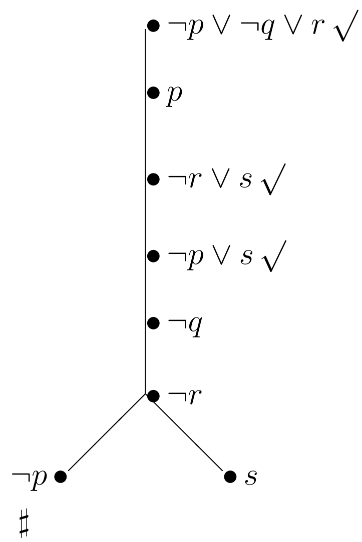


FIGURA 3. Tableau acabado de $\neg\varphi$

5. Examen parcial opcional 2006-2007

Fecha: 12 de diciembre de 2006 **Tiempo: 50 minutos**

El examen está formado por dos problemas. La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

---

1) (8 puntos) Usando el método de los tableaux, clasifica y halla la forma normal conjuntiva de la fórmula:

$$\varphi : (p \to r \vee s) \wedge \neg(q \to s \wedge p) \to \neg r,$$

donde p, q, r y s son proposiciones atómicas.

2) (7 puntos) Usando el sistema de deducción natural de Gentzen, verifica la validez del siguiente razonamiento:

$$\{p \to \neg r \vee s,\ \neg r \to s \wedge \neg t,\ p \to t,\ t \to \neg s\} \vdash \neg p,$$

donde p, r, s y t son proposiciones atómicas.

6. Soluciones del examen parcial opcional 2006-2007

Fecha: 12 de diciembre de 2006 **Tiempo: 50 minutos**

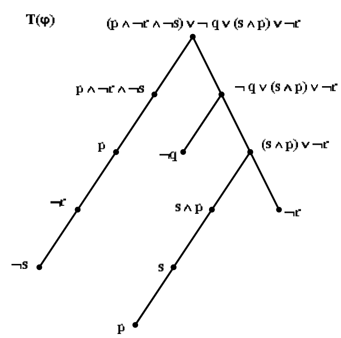


Figura 4. Tableau acabado de φ

1) (8 puntos) Usando el método de los <u>tableaux</u>, clasifica y halla la forma normal conjuntiva de la fórmula:

$$\varphi : (p \to r \vee s) \wedge \neg(q \to s \wedge p) \to \neg r,$$

donde p, q, r y s son proposiciones atómicas.

<u>Solución:</u>

$$\varphi : (p \to r \vee s) \wedge \neg(q \to s \wedge p) \to \neg r \equiv \neg((\neg p \vee r \vee s) \wedge \neg(\neg q \vee (s \wedge p))) \vee \neg r \equiv$$
$$\equiv (p \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (\neg q \vee (s \wedge p)) \vee \neg r \equiv (p \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee \neg q \vee (s \wedge p) \vee \neg r = FND(\varphi)$$

Siendo $T(\varphi)$ abierto (ver figura 4), φ es satisfacible.

$$\neg\varphi : \neg((p \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee \neg q \vee (s \wedge p) \vee \neg r) \equiv \neg(p \wedge \neg r \wedge \neg s) \wedge q \wedge \neg(s \wedge p) \wedge r \equiv$$
$$\equiv (\neg p \vee r \vee s) \wedge q \wedge (\neg s \vee \neg p) \wedge r = FNC(\neg\varphi)$$

Siendo $T(\neg\varphi)$ abierto (ver figura 5), φ es una contingencia.

$$FND(\neg\varphi) = (\neg s \wedge r \wedge q) \vee (\neg p \wedge r \wedge q).$$

$$FNC(\varphi) = \neg FND(\neg\varphi) = \neg(\neg s \wedge r \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge r \wedge q) \equiv$$
$$\equiv (s \vee \neg r \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg q).$$

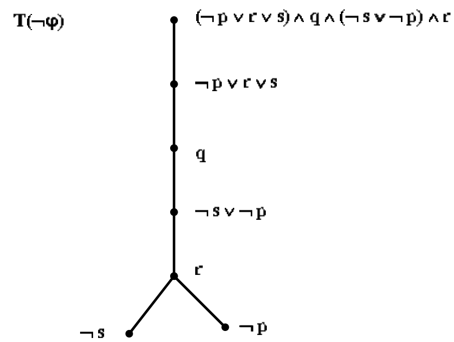


Figura 5. Tableau acabado de $\neg\varphi$

2) (7 puntos) Usando el sistema de deducción natural de Gentzen, verifica la validez del siguiente razonamiento:

$$\{p \to \neg r \vee s,\, \neg r \to s \wedge \neg t,\, p \to t,\, t \to \neg s\} \vdash \neg p,$$

donde p, r, s y t son proposiciones atómicas.

Solución:

1) $p \to \neg r \vee s$ (Premisa)
2) $\neg r \to s \wedge \neg t$ (Premisa)
3) $p \to t$ (Premisa)
4) $t \to \neg s$ (Premisa)
5) $\vdash p \to \neg s$ (Regla del silogismo T2 (3,4))

6) $\neg\neg p$ (Premisa auxiliar) 7) $\vdash p$ (E $\neg$(6)) 8) $\vdash \neg s$ (E $\to$ (7,5)) 9) $\vdash \neg r \vee s$ (E $\to$ (7,1)) 10) $\vdash \neg r$ (Tollendo Ponens (8,9)) 11) $\vdash s \wedge \neg t$ (E $\to$ (10,2)) 12) $\vdash s$ (E $\wedge$ (11)) 13) $\vdash \neg s \wedge s$ (I $\wedge$ (8,12))

14) $\neg p$ (I $\neg$ (6,13))

El razonamiento es válido.

7. Primer examen parcial A 2007-2008

Fecha: 5 de noviembre de 2007 **Tiempo: 1 hora y 15 minutos**

El examen está formado por cuatro problemas. La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

---

1) Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) (1 punto) Si una fórmula φ es satisfacible, entonces la fórmula $\varphi \land \psi$ es satisfacible para toda fórmula ψ.

b) (1 punto) Si una fórmula φ es insatisfacible, entonces la fórmula $\varphi \to \psi$ es una contradicción para toda fórmula ψ.

2) (4 puntos) Sea L el conjunto de las fórmulas proposicionales. Define la función f que a cada fórmula proposicional φ asocia el número de hojas (el número de vértices, distintos de la raíz, que tienen grado 1) de su árbol sintáctico.

3) (4 puntos) Determina si la dos fórmulas

$$\varphi_1 : (p \land q \to r) \to s \qquad \varphi_2 : (\neg p \to q) \land (r \to s)$$

son equivalentes y dibuja sus árboles sintácticos.

4) Considera el siguiente razonamiento:

> *Si x es positivo, existe su raíz cuadrada. La raíz cuarta de x existe sólo si x es positivo. Por tanto, x es positivo si y sólo si existe su raíz cuarta.*

a) (2 puntos) Formaliza el razonamiento anterior en la lógica proposicional.

b) (3 puntos) Por medio de equivalencia de fórmulas, halla una fórmula proposicional equivalente al razonamiento y tal que contenga sólo los conectivos $\{\neg, \land, \lor\}$.

8. Primer examen parcial B 2007-2008

Fecha: 5 de noviembre de 2007 **Tiempo: 1 hora y 15 minutos**

El examen está formado por cuatro problemas. La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

---

1) Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) (1 punto) Si una fórmula φ es satisfacible, entonces la fórmula $\varphi \vee \psi$ es satisfacible para toda fórmula ψ.

b) (1 punto) Si una fórmula ψ es insatisfacible, entonces la fórmula $p \to \psi$ es una contradicción para toda proposición atómica p.

2) (4 puntos) Sea L el conjunto de las fórmulas proposicionales. Define la función f que a cada fórmula proposicional φ asocia el número de hojas (el número de vértices, distintos de la raíz, que tienen grado 1) de su árbol sintáctico.

3) (4 puntos) Determina si la dos fórmulas

$$\varphi_1 : (\neg p \to q) \wedge (r \to s) \qquad \varphi_2 : (p \wedge q \to r) \to s$$

son equivalentes y dibuja sus árboles sintácticos.

4) Considera el siguiente razonamiento:

Si x es negativo, existe su raíz cúbica. La raíz novena de x existe sólo si x es negativo. Por tanto, x es negativo si y sólo si existe su raíz novena.

a) (2 puntos) Formaliza el razonamiento anterior en la lógica proposicional.

b) (3 puntos) Por medio de equivalencia de fórmulas, halla una fórmula proposicional equivalente al razonamiento y tal que contenga sólo los conectivos $\{\neg, \wedge, \vee\}$.

9. Soluciones de los primeros exámenes parciales A y B 2007-2008

Fecha: 5 de noviembre de 2007 **Tiempo: 1 hora y 15 minutos**

---

1 A) Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) (1 punto) Si una fórmula φ es satisfacible, entonces la fórmula $\varphi \wedge \psi$ es satisfacible para toda fórmula ψ.

b) (1 punto) Si una fórmula φ es insatisfacible, entonces la fórmula $\varphi \rightarrow \psi$ es una contradicción para toda fórmula ψ.

Solución:
a) FALSA: si la fórmula ψ es una contradicción (insatisfacible), la fórmula $\varphi \wedge \psi$ también lo es. Por tanto, en este caso, $\varphi \wedge \psi$ no sería satisfacible.
b) FALSA: si la fórmula φ es insatisfacible, entonces la fórmula $\varphi \rightarrow \psi$ es una tautología para toda fórmula ψ, ya que es una implicación con premisa siempre falsa.

1 B) Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) (1 punto) Si una fórmula φ es satisfacible, entonces la fórmula $\varphi \vee \psi$ es satisfacible para toda fórmula ψ.

b) (1 punto) Si una fórmula ψ es insatisfacible, entonces la fórmula $p \rightarrow \psi$ es una contradicción para toda proposición atómica p.

Solución:
a) VERDADERA: si la fórmula φ es satisfacible, la fórmula $\varphi \vee \psi$ también lo es, ya que un modelo de φ es también un modelo de $\varphi \vee \psi$.
b) FALSA: si la proposición atómica p es falsa, entonces la fórmula $p \rightarrow \psi$ es verdadera para toda fórmula ψ, ya que es una implicación con premisa falsa. Se sigue que $p \rightarrow \psi$ es satisfacible.

2 A y B) (4 puntos) Sea L el conjunto de las fórmulas proposicionales. Define la función f que a cada fórmula proposicional φ asocia el número de hojas (el número de vértices, distintos de la raíz, que tienen grado 1) de su árbol sintáctico.

Solución: Por el principio de recursión estructural, es suficiente definir la función

$$f : L \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$$

de la siguiente manera:

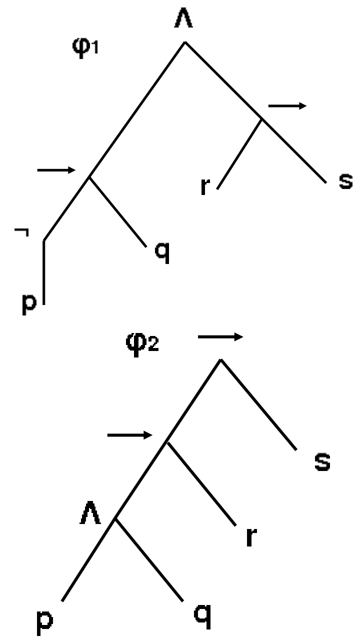


FIGURA 6. Árboles sintácticos de φ_1 y φ_2 del ejercicio 3.

Base: (At): $f(\top) = f(\bot) = f(p) = 0$, para toda proposición atómica p.

Pasos recursivos:

$$(\neg): \; f(\neg\varphi) = \begin{cases} f(\varphi) & \text{si } \varphi \text{ no es atómica,} \\ f(\varphi)+1 & \text{si } \varphi \text{ es atómica.} \end{cases}$$

$$(\varphi\circ\psi): f(\varphi\circ\psi) = \begin{cases} f(\varphi)+f(\psi) & \text{si } \varphi \text{ y } \psi \text{ no son atómicas,} \\ f(\varphi)+f(\psi)+1 & \text{si sólo una de } \varphi \text{ y } \psi \text{ es atómica,} \\ 2 & \text{si } \varphi \text{ y } \psi \text{ son atómicas.} \end{cases}$$

3 A) (4 puntos) Determina si la dos fórmulas

$$\varphi_1 : \; (p \wedge q \to r) \to s \qquad \varphi_2 : (\neg p \to q) \wedge (r \to s)$$

son equivalentes y dibuja sus árboles sintácticos.

Solución:

Bajo la valoración $p = 0, q = 0, r = 1, s = 0$ la fórmula φ_1 es verdadera ($p \wedge q \to r$ es una premisa falsa) y la fórmula φ_2 es falsa ($r \to s$ es falsa siendo su premisa verdadera y su conclusión falsa). Se sigue que las dos fórmulas no son equivalentes, ya que toman valores de verdad distintos bajo una misma valoración.

La figura 6 representa los árboles sintácticos de las dos fórmulas.

3 B) (4 puntos) Determina si la dos fórmulas

$$\varphi_1 : (\neg p \to q) \wedge (r \to s) \qquad \varphi_2 : (p \wedge q \to r) \to s$$

son equivalentes y dibuja sus árboles sintácticos.

Solución: La solución es la misma que en la versión A, intercambiando los nombres de las dos fórmulas.

4 A) Considera el siguiente razonamiento:

Si x es positivo, existe su raíz cuadrada. La raíz cuarta de x existe sólo si x es positivo. Por tanto, x es positivo si y sólo si existe su raíz cuarta.

a) (2 puntos) Formaliza el razonamiento anterior en la lógica proposicional.

b) (3 puntos) Por medio de equivalencia de fórmulas, halla una fórmula proposicional equivalente al razonamiento y tal que contenga sólo los conectivos $\{\neg, \wedge, \vee\}$.

Solución:

a) Consideremos las siguientes proposiciones atómicas: $p =$ x es positivo, $q =$ existe la raíz cuadrada de x, $r =$ existe la raíz cúbica de x.

Con estas proposiciones atómicas, la formalización del razonamiento es:

$$(p \to q) \wedge (r \to p) \to (p \leftrightarrow r).$$

b)

$$\begin{aligned} &(p \to q) \wedge (r \to p) \to (p \leftrightarrow r) \equiv \\ &\equiv \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee p)) \vee ((\neg p \vee r) \wedge (\neg r \vee p)) \equiv \\ &\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg r \vee p) \vee ((\neg p \vee r) \wedge (\neg r \vee p)) \equiv \\ &\equiv (p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg p) \vee ((\neg p \vee r) \wedge (\neg r \vee p)). \end{aligned}$$

4 B) Considera el siguiente razonamiento:

Si x es negativo, existe su raíz cúbica. La raíz novena de x existe sólo si x es negativo. Por tanto, x es negativo si y sólo si existe su raíz novena.

a) (2 puntos) Formaliza el razonamiento anterior en la lógica proposicional.

b) (3 puntos) Por medio de equivalencia de fórmulas, halla una fórmula proposicional equivalente al razonamiento y tal que contenga sólo los conectivos $\{\neg, \wedge, \vee\}$.

Solución:

a) Consideremos las siguientes proposiciones atómicas: $p =$ x es negativo, $q =$ existe la raíz cúbica de x, $r =$ existe la raíz novena de x.

Con estas proposiciones atómicas, la formalización del razonamiento es:

$$(p \to q) \wedge (r \to p) \to (p \leftrightarrow r).$$

b) Siendo la formalización del razonamiento la misma que en la versión A de este ejercicio, la fórmula equivalente al razonamiento resultante es también la misma:

$$(p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg p) \vee ((\neg p \vee r) \wedge (\neg r \vee p)).$$

10. Primer examen parcial 2008-2009

Fecha: 10 de noviembre de 2008 **Tiempo: 50 min**

El examen está formado por cuatro problemas. La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

---

1) Siendo φ_1, φ_2 y φ_3, tres fórmulas proposicionales, determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (justifica tus respuestas):

a) (1 punto) Si el conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ es satisfacible, entonces la fórmula $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \to \varphi_3$ es satisfacible.

b) (1 punto) Si φ_2 es insatisfacible, entonces la fórmula $\varphi_1 \to \varphi_2$ es una contradicción.

c) (1 punto) $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ si y sólo si $\neg\varphi_1 \equiv \neg\varphi_2$.

2) (3 puntos) Sea L el conjunto de las fórmulas proposicionales y sea ψ una tautología. Sobre L, considera la relación binaria R definida por:

$$(\varphi_1, \varphi_2) \in R \qquad \text{si y sólo si} \qquad \neg\varphi_1 \models \varphi_2.$$

Verifica que, para toda fórmula proposicional φ,

$$(\varphi, \varphi \to \psi) \in R.$$

¿Hace falta usar el principio de inducción estructural?

3) (5 puntos) En la <u>lógica proposicional</u>, formaliza y dibuja el árbol sintáctico del siguiente razonamiento:

ln(x) es un número real sólo si x es un número real positivo. ln(x) es un número real no positivo si y sólo si x es un número real positivo menor o igual a 1. Por tanto, si x es un número real positivo menor o igual que 1, ln(x) es un número real no positivo.

4) (4 puntos) Determina si el conjunto de fórmulas $\{p \leftrightarrow q, p \vee q\}$ implica lógicamente la fórmula $p \wedge q$.

11. Soluciones del primer examen parcial 2008-2009

Fecha: 10 de noviembre de 2008 **Tiempo: 50 min**

---

1) Siendo φ_1, φ_2 y φ_3, tres fórmulas proposicionales, determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (justifica tus respuestas):

a) (1 punto) Si el conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ es satisfacible, entonces la fórmula $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \to \varphi_3$ es satisfacible.

b) (1 punto) Si φ_2 es insatisfacible, entonces la fórmula $\varphi_1 \to \varphi_2$ es una contradicción.

c) (1 punto) $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ si y sólo si $\neg\varphi_1 \equiv \neg\varphi_2$.

<u>Solución:</u>
a) VERDADERA: Si el conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ es satisfacible, entonces existe una valoración v tal que $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3)^v = 1$. Bajo esa valoración v, la fórmula $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \to \varphi_3$ es verdadera, ya que su premisa y conclusión son verdaderas. Se sigue que la fórmula $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \to \varphi_3$ es satisfacible.

b) FALSA: Si, por ejemplo, φ_1 es una fórmula atómica p, entonces la fórmula $p \to \varphi_2$ es verdadera bajo cualquier valoración con $p = 0$.

c) VERDADERA: $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ si y sólo si las fórmulas φ_1 y φ_2 toman el mismo valor de verdad bajo cualquier valoración. Por tanto, también $\neg\varphi_1$ y $\neg\varphi_2$ toman el mismo valor de verdad bajo cualquier valoración, es decir, $\neg\varphi_1 \equiv \neg\varphi_2$.

2) (3 puntos) Sea L el conjunto de las fórmulas proposicionales y sea ψ una tautología. Sobre L, considera la relación binaria R definida por:

$$(\varphi_1, \varphi_2) \in R \qquad \text{si y sólo si} \qquad \neg\varphi_1 \models \varphi_2.$$

Verifica que, para toda fórmula proposicional φ,

$$(\varphi, \varphi \to \psi) \in R.$$

¿Hace falta usar el principio de inducción estructural?

<u>Solución:</u> Se trata de verificar que, para toda fórmula proposicional φ, la fórmula $(\neg\varphi \to (\varphi \to \psi))$ es una tautología.
Podemos observar que, siendo ψ una tautología, la implicación $\varphi \to \psi$ también lo es (su conclusión es siempre vardadera). Por tanto, $(\neg\varphi \to (\varphi \to \psi))$ es una tautología ya que su conclusión es siempre verdadera.

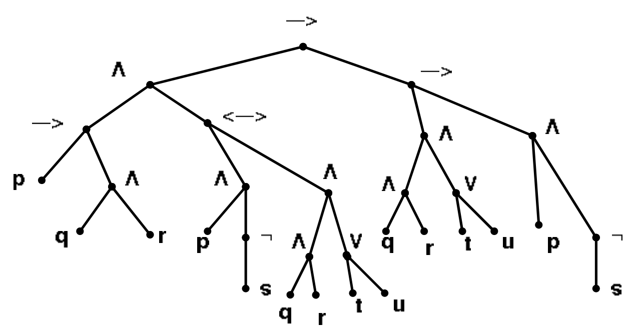


FIGURA 7. Árbol sintáctico del problema 3

Para demostrar la anterior propiedad para toda fórmula proposicional se podría usar el principio de inducción estructural, pero vimos que no hace falta emplearlo.

3) (5 puntos) En la lógica proposicional, formaliza y dibuja el árbol sintáctico del siguiente razonamiento:
ln(x) es un número real sólo si x es un número real positivo. ln(x) es un número real no positivo si y sólo si x es un número real positivo menor o igual a 1. Por tanto, si x es un número real positivo menor o igual que 1, ln(x) es un número real no positivo.

Solución: Para formalizar el razonamiento dado vamos a definir las siguientes proposiciones atómicas:
p= $ln(x)$ es un número real, q= x es un número real,
r= x es positivo, s= $ln(x)$ es positivo,
t= x es menor que 1, u= x es igual a 1.
La formalización del razonamiento es:

$$(p \to q \wedge r) \wedge (p \wedge \neg s \leftrightarrow q \wedge r \wedge (t \vee u)) \to (q \wedge r \wedge (t \vee u) \to p \wedge \neg s).$$

La figura 7 representa el árbol sintáctico del razonamiento.

4) (4 puntos) Determina si el conjunto de fórmulas $\{p \leftrightarrow q, p \vee q\}$ implica lógicamente la fórmula $p \wedge q$.

Solución: Se trata de verificar si la fórmula $(p \leftrightarrow q) \wedge (p \vee q) \to p \wedge q$ es una tautología.

Bajo una cierta valoración, $(p \leftrightarrow q) \wedge (p \vee q)$ es verdadera si y sólo si p y q tienen el mismo valor de verdad y $p \vee q$ es verdadera. Se sigue que $(p \leftrightarrow q) \wedge (p \vee q)$ es verdadera si y sólo si p y q son verdaderas. En este caso también la fórmula $p \wedge q$ es verdadera.

Por tanto, todo modelo de $(p \leftrightarrow q) \wedge (p \vee q)$ es también un modelo de $p \wedge q$. La fórmula $(p \leftrightarrow q) \wedge (p \vee q) \to p \wedge q$ es una tautología.

12. Primer examen parcial 2009-2010

Fecha: 26 de noviembre de 2009 **Tiempo: 50 min**

El examen está formado por tres problemas. La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

---

1) (0.3 puntos) Usando fórmulas de la lógica proposicional en forma abreviada, formaliza el siguiente razonamiento:

> $\sqrt{x}$ es real sólo si x es real y no es negativo. x^2 no es positivo a menos que x sea real y nulo. Por lo tanto, $\sqrt{x}$ no es real si y sólo si x es negativo.

2) (0.3 puntos) Sea L el conjunto de las fórmulas proposicionales **escritas en forma usual**. Define la función $f : L \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que asocia a toda fórmula φ el cardinal del conjunto de subfórmulas **en forma usual** de φ.

NOTA: Recuerda que, si A y B son dos conjuntos finitos,

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B).$$

3) (0.4 puntos) Usando tableaux, verifica si el siguiente razonamiento es una implicación lógica y halla su forma normal conjuntiva:

$$(p \to q \wedge \neg r) \wedge (s \to q \wedge t) \to (\neg p \to r).$$

13. Soluciones del primer examen parcial 2009-2010

Fecha: 26 de noviembre de 2009 **Tiempo: 50 min**

---

1) (0.3 puntos) Usando fórmulas de la lógica proposicional en forma abreviada, formaliza el siguiente razonamiento:

> $\sqrt{x}$ es real sólo si x es real y no es negativo. x^2 no es positivo a menos que x sea real y nulo. Por lo tanto, $\sqrt{x}$ no es real si y sólo si x es negativo.

<u>**Solución:**</u> Definiendo las siguientes proposiciones atómicas:
p = $\sqrt{x}$ es real, q= x es real, r= x es negativo,
s = x^2 es positivo, t= x es nulo,
la formalización del razonamiento dado se puede escribir como:

$$(p \to q \wedge \neg r) \wedge (s \to q \wedge t) \to (\neg p \leftrightarrow r).$$

2) (0.3 puntos) Sea L el conjunto de las fórmulas proposicionales **escritas en forma usual**. Define la función $f : L \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que asocia a toda fórmula φ el cardinal del conjunto de subfórmulas **en forma usual** de φ.

NOTA: Recuerda que, si A y B son dos conjuntos finitos,

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B).$$

<u>**Solución:**</u> Para definir la función $f : L \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ podemos usar el principio de recursión estructural:
Base: (At) $f(\top) = f(\bot) = f(p) = 1$.
Pasos recursivos:
$(\neg) : f(\neg(\varphi)) = f(\varphi) + 1$,
$(\circ) : f((\varphi_1 \circ \varphi_2)) = f(\varphi_1) + f(\varphi_2) - card(sub(\varphi_1) \cap sub(\varphi_2)) + 1$,
donde $sub(\varphi)$ es el conjunto de subfórmulas de una fórmula φ.

3) (0.4 puntos) Usando tableaux, verifica si el siguiente razonamiento es una implicación lógica y halla su forma normal conjuntiva:

$$(p \to q \wedge \neg r) \wedge (s \to q \wedge t) \to (\neg p \to r).$$

<u>**Solución:**</u> Sea $\varphi = (p \to q \wedge \neg r) \wedge (s \to q \wedge t) \to (\neg p \to r)$. Entonces

$$\neg\varphi \equiv (p \to q \wedge \neg r) \wedge (s \to q \wedge t) \wedge \neg(\neg p \to r) \equiv$$
$$\equiv (\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \wedge (\neg s \vee (q \wedge t)) \wedge \neg(p \vee r) \equiv$$
$$\equiv (\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \wedge (\neg s \vee (q \wedge t)) \wedge \neg p \wedge \neg r.$$

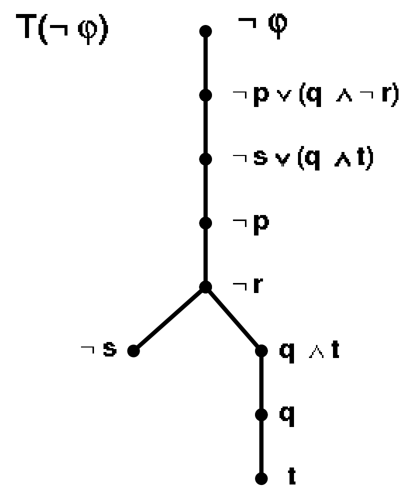


FIGURA 8. Tableau de $\neg\varphi$ del ejercicio 3

La figura 8 representa el tableau completo, $T(\neg\varphi)$, de $\neg\varphi$.

Ya que $T(\neg\varphi)$ es abierto, φ no es una tautología y, por lo tanto, no es una implicación lógica. (Un contraejemplo de φ es la valoración $s = 0, r = 0, p = 0, q = 0$.)

De $T(\neg\varphi)$ obtenemos que:

$$FND(\neg\varphi) \equiv (\neg s \wedge \neg r \wedge \neg p) \vee (t \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg p).$$

Se sigue que

$$FNC(\varphi) \equiv \neg FND(\neg\varphi) \equiv (s \vee r \vee p) \wedge (\neg t \vee \neg q \vee r \vee p).$$

14. Primer examen parcial 2011-2012. Versión A

Fecha: 29 de septiembre de 2011 **Tiempo: 50 min**

El examen está formado por dos problemas y se valorará sobre 20 puntos. La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Podéis consultar una hoja resumen de contenidos de la asignatura de formato A4.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

---

1) (6 puntos) Sean A, B y C tres conjuntos tales que $A \cap B \cap C = \emptyset$ (donde $\emptyset$ es el conjunto vacío). Verifica la siguiente identidad de conjuntos:

$$A \setminus (B \cap C) = A.$$

2) Considera el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Sobre $\mathbb{R}$ se define la siguiente relación binaria:

$$R = \{(x, y) | \, (x - y)(x + y) = 0\}.$$

a) (5 puntos) Escribe explícitamente los elementos de R. Halla el dominio y la imagen de R.

b) (8 puntos) Verifica que R es de equivalencia y halla su conjunto cociente.

c) (1 punto) ÀEs R una función?

15. Primer examen parcial 2011-2012. Versión B

Fecha: 29 de septiembre de 2011 **Tiempo: 50 min**

El examen está formado por dos problemas y se valorará sobre 20 puntos. La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Podéis consultar una hoja resumen de contenidos de la asignatura de formato A4.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

---

1) (6 puntos) Sean A, B y C tres conjuntos tales que $A \cap B \cap C = \emptyset$ (donde $\emptyset$ es el conjunto vacío). Verifica la siguiente identidad de conjuntos:

$$C \setminus (A \cap B) = C.$$

2) Considera el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Sobre $\mathbb{R}$ se define la siguiente relación binaria:

$$R = \{(x, y) |\, y^2 - x^2 = 0\}.$$

a) (5 puntos) Escribe explícitamente los elementos de R. Halla el dominio y la imagen de R.

b) (8 puntos) Verifica que R es de equivalencia y halla su conjunto cociente.

c) (1 punto) ÀEs R una función?

16. Soluciones del primer examen parcial 2011-2012

Fecha: 29 de septiembre de 2011 **Tiempo: 50 min**

---

1) (6 puntos)

Versión A: Sean A, B y C tres conjuntos tales que $A \cap B \cap C = \emptyset$ (donde $\emptyset$ es el conjunto vacío). Verifica la siguiente identidad de conjuntos:

$$A \setminus (B \cap C) = A.$$

Versión B: Sean A, B y C tres conjuntos tales que $A \cap B \cap C = \emptyset$ (donde $\emptyset$ es el conjunto vacío). Verifica la siguiente identidad de conjuntos:

$$C \setminus (A \cap B) = C.$$

Solución:

Versión A: Para verificar la igualdad de conjuntos $A \setminus (B \cap C) = A$ podemos demostrar la doble inclusión de los dos conjuntos.

Paso 1: para todo $x \in A \setminus (B \cap C)$, se verifica que $x \in A$ por definición del conjunto $A \setminus (B \cap C)$.

Paso 2: sea ahora $x \in A$. Siendo $A \cap B \cap C = \emptyset$, el elemento x no puede pertenecer al conjunto $B \cap C$, ya que sería un elemento de $A \cap B \cap C$. Por tanto $x \in A \setminus (B \cap C)$.

Versión B: El ejercicio es el mismo que en la versión A, intercambiando A con C.

2)

Versión A: Considera el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Sobre $\mathbb{R}$ se define la siguiente relación binaria:

$$R = \{(x, y) | \, (x - y)(x + y) = 0\}.$$

a) (5 puntos) Escribe explícitamente los elementos de R. Halla el dominio y la imagen de R.

b) (8 puntos) Verifica que R es de equivalencia y halla su conjunto cociente.

c) (1 punto) ÀEs R una función?

Versión B: Considera el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Sobre $\mathbb{R}$ se define la siguiente relación binaria:

$$R = \{(x, y) | \, y^2 - x^2 = 0\}.$$

a) (5 puntos) Escribe explícitamente los elementos de R. Halla el dominio y la imagen de R.

b) (8 puntos) Verifica que R es de equivalencia y halla su conjunto cociente.

c) (1 punto) ÀEs R una función?

Solución:

Versión A:

a) $R = \{(x,y) | \, (x-y)(x+y) = 0\} = \{(x,x) | \, x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,-x) | \, x \in \mathbb{R}\}$, ya que $x^2 - y^2 = 0$ si y sólo si $|x| = |y|$. $dom(R) = \mathbb{R} = Im(R)$, ya que todo $x \in \mathbb{R}$ se relaciona con sigo mismo y, por tanto, pertenece al dominio y a la imagen de la relación.

b) R es reflexiva ya que, como vimos, todo $x \in \mathbb{R}$ se relaciona con sigo mismo: $(x,x) \in R$.

R es simétrica, ya que para todo para de números reales x, y, si $(x,y) \in R$, entonces $|x| = |y|$ y $(y,x) \in R$.

R es transitiva ya que para toda terna de números reales x, y, z, si $(x,y) \in R$ y $(y,z) \in R$, entonces $|x| = |y| = |z|$. Por tanto $(x,z) \in R$.

Se sigue que R es una relación de equivalencia. Su conjunto cociente tiene como elementos la clase de 0, $C(0) = \{0\}$ y las clases $C(x) = \{x, -x\}$, si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

c) R no es una función ya que, por ejemplo, $(1,1) \in R$ y $(1,-1) \in R$, es decir, existe al menos un elemento del dominio que se relaciona con más de un elemento del codominio.

Versión B:

$R = \{(x,y) | \, y^2 - x^2 = 0\} = \{(x,x) | \, x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,-x) | \, x \in \mathbb{R}\}$, ya que $y^2 - x^2 = 0$ si y sólo si $|y| = |x|$. El resto del ejercicio es igual al ejercicio 2 de la versión A.

17. Segundo examen parcial 2011-2012. Versión A

Fecha: 3 de noviembre de 2011 **Tiempo: 50 min**

El examen está formado por tres problemas y se valorará sobre 20 puntos. La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Podéis consultar una hoja resumen de contenidos de la asignatura de formato A4.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

---

1) (4 puntos) En el contexto de la lógica de proposiciones, formaliza el siguiente razonamiento:

> Apruebas sólo si irás de vacaciones. Has aprobado. Luego no es posible que no irás de vacaciones.

2) (8 puntos) Sean L el conjunto de las fórmulas de la lógica proposicional y P el conjunto de las palabras binarias, es decir, de las listas finitas sobre el alfabeto $\{0, 1\}$ (por ejemplo: 010100, 11, $\emptyset$).

Define la función $f : L \to P$, que a toda fórmula $\varphi \in L$, le asocia el elemento $f(\varphi) \in P$ que es la lista ordenada tal que se verifican las siguientes dos condiciones:

1. la longitud $f(\varphi)$ es igual al número de conectivos unarios y binarios de φ,
2. en $f(\varphi)$ hay un 1 en la posición i si y sólo si el i-ésimo conectivo de φ es $\vee$. En todas las posiciones de $f(\varphi)$ que no se correspondan a las posiciones del conectivo $\vee$ en φ hay 0's.

Por ejemplo, si $\varphi = (p \to q) \to (r \vee s)$, entonces $f(\varphi) = 001$.

3) (8 puntos) Usando tableaux acabados, clasifica la fórmula

$$\varphi = ((\neg p \vee q) \to p) \to s \vee p.$$

18. Segundo examen parcial 2011-2012. Versión B

Fecha: 3 de noviembre de 2011 **Tiempo: 50 min**

El examen está formado por tres problemas y se valorará sobre 20 puntos. La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Podéis consultar una hoja resumen de contenidos de la asignatura de formato A4.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

---

1) (4 puntos) En el contexto de la lógica de proposiciones, formaliza el siguiente razonamiento:

> Irás de vacaciones sólo si apruebas. Irás de vacaciones. Luego no es posible que no apruebes.

2) (8 puntos) Sean L el conjunto de las fórmulas de la lógica proposicional y P el conjunto de las palabras binarias, es decir, de las listas finitas sobre el alfabeto $\{0, 1\}$ (por ejemplo: 010100, 11, $\emptyset$).

Define la función $f : L \to P$, que a toda fórmula $\varphi \in L$, le asocia el elemento $f(\varphi) \in P$ que es la lista ordenada tal que se verifican las siguientes <u>dos condiciones</u>:

1. la longitud $f(\varphi)$ es igual al número de conectivos unarios y binarios de φ,

2. en $f(\varphi)$ hay un 1 en la posición i si y sólo si el i-ésimo conectivo de φ es $\wedge$. En todas las posiciones de $f(\varphi)$ que no se correspondan a las posiciones del conectivo $\wedge$ en φ hay 0's.

Por ejemplo, si $\varphi = (p \to q) \to (r \wedge s)$, entonces $f(\varphi) = 001$.

3) (8 puntos) Usando tableaux acabados, clasifica la fórmula

$$\varphi = ((\neg s \vee q) \to s) \to p \vee s.$$

19. Soluciones del segundo examen parcial 2011-2012

Fecha: 3 de noviembre de 2011 **Tiempo: 50 min**

---

1) (4 puntos) En el contexto de la lógica de proposiciones, formaliza el siguiente razonamiento:

Versión A: Apruebas sólo si irás de vacaciones. Has aprobado. Luego no es posible que no irás de vacaciones.

Versión B: Irás de vacaciones sólo si apruebas. Irás de vacaciones. Luego no es posible que no apruebes.

Solución: Usando las proposiciones atómicas $p =$ apruebas y $q =$ irás de vacaciones, se obtienen las formalizaciones:
Versión A: $(p \to q) \wedge p \to \neg\neg q$,
Versión B: $(q \to p) \wedge q \to \neg\neg p$.

2) (8 puntos) Sean L el conjunto de las fórmulas de la lógica proposicional y P el conjunto de las palabras binarias, es decir, de las listas finitas sobre el alfabeto $\{0, 1\}$ (por ejemplo: 010100, 11, $\emptyset$).

Versión A: Define la función $f : L \to P$, que a toda fórmula $\varphi \in L$, le asocia el elemento $f(\varphi) \in P$ que es la lista ordenada tal que se verifican las siguientes dos condiciones:
1. la longitud $f(\varphi)$ es igual al número de conectivos unarios y binarios de φ,
2. en $f(\varphi)$ hay un 1 en la posición i si y sólo si el i-ésimo conectivo de φ es $\vee$. En todas las posiciones de $f(\varphi)$ que no se correspondan a las posiciones del conectivo $\vee$ en φ hay 0's.
Por ejemplo, si $\varphi = (p \to q) \to (r \vee s)$, entonces $f(\varphi) = 001$.

Versión B: Define la función $f : L \to P$, que a toda fórmula $\varphi \in L$, le asocia el elemento $f(\varphi) \in P$ que es la lista ordenada tal que se verifican las siguientes dos condiciones:
1. la longitud $f(\varphi)$ es igual al número de conectivos unarios y binarios de φ,
2. en $f(\varphi)$ hay un 1 en la posición i si y sólo si el i-ésimo conectivo de φ es $\wedge$. En todas las posiciones de $f(\varphi)$ que no se correspondan a las posiciones del conectivo $\wedge$ en φ hay 0's.
Por ejemplo, si $\varphi = (p \to q) \to (r \wedge s)$, entonces $f(\varphi) = 001$.

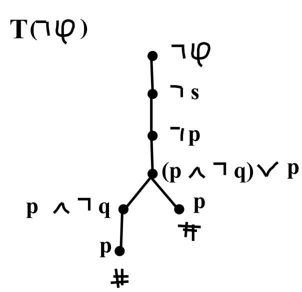
Solución: Por recursión estructural, podemos definir la función f de la siguiente manera:
Base: (At) : $f(\top) = f(\bot) = f(p) = \emptyset$, donde p es un cualquier símbolo de proposición atómica y $\emptyset$ es la lista vacía.
Pasos recursivos: $(\neg)$: $f(\neg\varphi) = 0f(\neg\varphi)$.

Versión A: $(\circ) : f(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \begin{cases} f(\varphi_1) 0 f(\varphi_2) & \text{si} \circ = \vee, \\ f(\varphi_1) 1 f(\varphi_2) & \text{si} \circ \neq \vee. \end{cases}$

Versión B: $(\circ) : f(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \begin{cases} f(\varphi_1) 0 f(\varphi_2) & \text{si} \circ = \wedge, \\ f(\varphi_1) 1 f(\varphi_2) & \text{si} \circ \neq \wedge. \end{cases}$

3) (8 puntos) Usando tableaux acabados, clasifica la fórmula
Versión A: $\varphi = ((\neg p \vee q) \to p) \to s \vee p$.
Versión B: $\varphi = ((\neg s \vee q) \to s) \to p \vee s$.

Solución:
VersiónA: $\neg\varphi = (\neg p \vee q \to p) \wedge \neg(s \vee p) \equiv (\neg(\neg p \vee q) \vee p) \wedge \neg s \wedge \neg p \equiv$ $\equiv ((p \wedge \neg q) \vee p) \wedge \neg s \wedge \neg p$. Siendo el tableau de $\neg\varphi$ cerrado, φ es una tautología:



Versión B: Lo mismo que en la versión A, intercambiando los símbolos p y s.

20. Primer examen parcial 2012-2013. Versión A

Fecha: 18 de octubre de 2012 **Tiempo: 50 min**

El examen está formado por tres problemas y se valorará sobre 20 puntos. La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.Podéis consultar una hoja resumen de contenidos de la asignatura de formato A4. **Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas**.

---

1) Considera el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros. Sobre $\mathbb{Z}$ se define la siguiente relación binaria:

$$R = \{(x, y) |\, x - 2y = 0\} \cup \{(x, x)\}.$$

a) (3 puntos) Escribe explícitamente los elementos de R. Halla el dominio y la imagen de R.

b) (4 puntos) Verifica si R es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva. Si es una relación de equivalencia, halla su conjunto cociente.

2) a) (4 puntos) Formaliza el siguiente razonamiento de la lógica de proposiciones:

> Luis y Miguel son amigos desde hace mucho tiempo. Luis es amigo de Juan sólo si Juan es amigo de Miguel. Juan no es amigo de Miguel a menos que Luis sea amigo de Juan. Por tanto, no es posible que Luis sea amigo de Juan.

b) (3 puntos) Dibuja el árbol sintáctico de la fórmula

$$\varphi = (((p \to (q \wedge r)) \vee (r \wedge q)) \to (\neg p \to r))$$

y escribe su forma abreviada.

3) (6 puntos) Sea L el conjunto de las fórmulas de la lógica proposicional en forma usual. Define la función $f : L \to L$, que a toda fórmula $\varphi \in L$ le asocia la fórmula $f(\varphi)$ obtenida reemplazando todos los conectivos $\wedge$ de φ por el conectivo $\to$.

21. Soluciones del primer examen parcial 2012-2013

Fecha: 18 de octubre de 2012 **Tiempo: 50 min**

---

1) **VERSIÓN A:** Considera el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros. Sobre $\mathbb{Z}$ se define la siguiente relación binaria:

$$R = \{(x, y)|\, x - 2y = 0\} \cup \{(x, x)\}.$$

VERSIÓN B: Considera el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Sobre $\mathbb{R}$ se define la siguiente relación binaria:

$$R = \{(x, y)|\, 2x - y = 0\} \cup \{(x, x)\}.$$

VERSIÓN C: Considera el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales. Sobre $\mathbb{Q}$ se define la siguiente relación binaria:

$$R = \{(x, y)|\, x - 3y = 0\} \cup \{(x, x)\}.$$

VERSIÓN D: Considera el conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$ de los números enteros no negativos. Sobre $\mathbb{N} \cup \{0\}$ se define la siguiente relación binaria:

$$R = \{(x, y)|\, 3x - y = 0\} \cup \{(x, x)\}.$$

a) (3 puntos) Escribe explícitamente los elementos de R. Halla el dominio y la imagen de R.

b) (4 puntos) Verifica si R es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva. Si es una relación de equivalencia, halla su conjunto cociente.

Solución:
VERSIÓN A:
a) $R = \{(2x, x)|\, x \in \mathbb{Z}\} \cup \{(x, x)|\, x \in \mathbb{Z}\}$. El dominio es todo $\mathbb{Z}$ ya que todo $x \in \mathbb{Z}$ se relaciona consigo mismo. Por la misma razón, su imagen es todo $\mathbb{Z}$.

b) R es reflexiva, ya que todo $x \in \mathbb{Z}$ se relaciona consigo mismo. No es simétrica, ya que, por ejemplo, $(2, 1) \in R$, pero $(1, 2) \notin R$. Es antisimétrica ya que las condiciones $(x, y) \in R$ y $(y, x) \in R$ se verifican si y sólo si $x = y$. No es transitiva ya que, por ejemplo, si $x = 4, y = 2$ y $z = 1$, entonces $(x, y) \in R, (y, z) \in R$, pero $(x, z) \notin R$. R no es de equivalencia, ya que no es simétrica, ni transitiva.

VERSIÓN B:
a) $R = \{(x, 2x)|\, x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, x)|\, x \in \mathbb{R}\}$. El dominio es todo $\mathbb{R}$ ya que todo $x \in \mathbb{R}$ se relaciona consigo mismo. Por la misma razón, su imagen es todo $\mathbb{R}$.

b) R es reflexiva, ya que todo $x \in \mathbb{R}$ se relaciona consigo mismo. No es simétrica, ya que, por ejemplo, $(1,2) \in R$, pero $(2,1) \notin R$. Es antisimétrica ya que las condiciones $(x,y) \in R$ y $(y,x) \in R$ se verifican si y sólo si $x = y$. No es transitiva ya que, por ejemplo, si $x = 1, y = 2$ y $z = 4$, entonces $(x,y) \in R, (y,z) \in R$, pero $(x,z) \notin R$. R no es de equivalencia, ya que no es simétrica, ni transitiva.

VERSIÓN C:
a) $R = \{(3x,x)|\, x \in \mathbb{Q}\} \cup \{(x,x)|\, x \in \mathbb{Q}\}$. El dominio es todo $\mathbb{Q}$ ya que todo $x \in \mathbb{Q}$ se relaciona consigo mismo. Por la misma razón, su imagen es todo $\mathbb{Q}$.

b) R es reflexiva, ya que todo $x \in \mathbb{Q}$ se relaciona consigo mismo. No es simétrica, ya que, por ejemplo, $(3,1) \in R$, pero $(1,3) \notin R$. Es antisimétrica ya que las condiciones $(x,y) \in R$ y $(y,x) \in R$ se verifican si y sólo si $x = y$. No es transitiva ya que, por ejemplo, si $x = 9, y = 3$ y $z = 1$, entonces $(x,y) \in R, (y,z) \in R$, pero $(x,z) \notin R$. R no es de equivalencia, ya que no es simétrica, ni transitiva.

VERSIÓN D:
a) $R = \{(x,3x)|\, x \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{(x,x)|\, x \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. El dominio es todo $\mathbb{N} \cup \{0\}$ ya que todo $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se relaciona consigo mismo. Por la misma razón, su imagen es todo $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

b) R es reflexiva, ya que todo $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se relaciona consigo mismo. No es simétrica, ya que, por ejemplo, $(1,3) \in R$, pero $(3,1) \notin R$. Es antisimétrica ya que las condiciones $(x,y) \in R$ y $(y,x) \in R$ se verifican si y sólo si $x = y$. No es transitiva ya que, por ejemplo, si $x = 1, y = 3$ y $z = 9$, entonces $(x,y) \in R, (y,z) \in R$, pero $(x,z) \notin R$. R no es de equivalencia, ya que no es simétrica, ni transitiva.

2) **VERSIÓN A:** a) (4 puntos) Formaliza el siguiente razonamiento de la lógica de proposiciones:

> Luis y Miguel son amigos desde hace mucho tiempo. Luis es amigo de Juan sólo si Juan es amigo de Miguel. Juan no es amigo de Miguel a menos que Luis sea amigo de Juan. Por tanto, no es posible que Luis sea amigo de Juan.

b) (3 puntos) Dibuja el árbol sintáctico de la fórmula

$$\varphi = (((p \to (q \wedge r)) \vee (r \wedge q)) \to (\neg p \to r))$$

y escribe su forma abreviada.

VERSIÓN B: a) (4 puntos) Formaliza el siguiente razonamiento de la lógica de proposiciones:

> Beatriz y Marta son enemigas desde hace mucho tiempo. Beatriz es una enemiga de Juan sólo si Juan es un enemigo de Marta. Juan no es un enemigo de Marta a menos que Beatriz sea una enemiga de Juan. Por tanto, no es posible que Beatriz sea una enemiga de Juan.

b) (3 puntos) Dibuja el árbol sintáctico de la fórmula

$$\varphi = (((r \to (q \wedge p)) \vee (p \wedge q)) \to (\neg r \to p))$$

y escribe su forma abreviada.

VERSIÓN C: a) (4 puntos) Formaliza el siguiente razonamiento de la lógica de proposiciones:

> Luis y Miguel son amigos desde hace mucho tiempo. Luis es amigo de Juan sólo si Juan es amigo de Miguel. Juan no es amigo de Miguel a menos que Luis sea amigo de Juan. Por tanto, no es posible que Luis sea amigo de Juan.

b) (3 puntos) Dibuja el árbol sintáctico de la fórmula

$$\varphi = (((q \to (p \wedge r)) \vee (r \wedge p)) \to (\neg q \to r))$$

y escribe su forma abreviada.

VERSIÓN D: a) (4 puntos) Formaliza el siguiente razonamiento de la lógica de proposiciones:

> Beatriz y Marta son enemigas desde hace mucho tiempo. Beatriz es una enemiga de Juan sólo si Juan es un enemigo de Marta. Juan no es un enemigo de Marta a menos que Beatriz sea una enemiga de Juan. Por tanto, no es posible que Beatriz sea una enemiga de Juan.

b) (3 puntos) Dibuja el árbol sintáctico de la fórmula

$$\varphi = (((q \to (r \wedge p)) \vee (p \wedge r)) \to (\neg q \to p))$$

y escribe su forma abreviada.

Solución:

VERSIÓN A:

a) Sean $p =$ Luis y Miguel son amigos desde hace mucho tiempo, $q =$ Luis es amigo de Juan, $r =$ Juan es amigo de Miguel. La formalización del razonamiento es:

$$p \wedge (q \to r) \wedge (r \to q) \to \neg q.$$

b) La figura 9 representa el árbol estructural de la fórmula

$$\varphi = (((p \to (q \wedge r)) \vee (r \wedge q)) \to (\neg p \to r)),$$

que tiene forma abreviada $\varphi = (p \to q \wedge r) \vee (r \wedge q) \to \neg p \to r$.

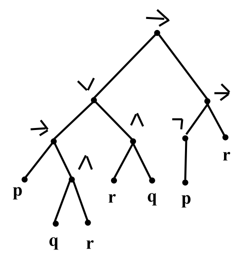


FIGURA 9. çrbol estructural del ejercicio 2b.

VERSIÓN B:
a) Sean $p =$ Beatriz y Marta son enemigas desde hace mucho tiempo, $q =$ Beatriz es una enemiga de Juan, $r =$ Juan es un enemigo de Marta. La formalización del razonamiento es:

$$p \wedge (q \to r) \wedge (r \to q) \to \neg q.$$

b) La solución es la misma que en la versión A, intercambiando los símbolos de proposición atómica p y r.

VERSIÓN C:
a) La solución es la misma que en la versión A.

b) La solución es la misma que en la versión A, intercambiando los símbolos de proposición atómica p y q.

VERSIÓN D:
a) La solución es la misma que en la versión B.

b) La solución es la misma que en la versión A, intercambiando los símbolos de proposición atómicas p por q, r por p y q por r.

3) **VERSIÓN A:** (6 puntos) Sea L el conjunto de las fórmulas de la lógica proposicional en forma usual. Define la función $f : L \to L$, que a toda fórmula $\varphi \in L$ le asocia la fórmula $f(\varphi)$ obtenida reemplazando todos los conectivos $\wedge$ de φ por el conectivo $\to$.

VERSIÓN B: (6 puntos) Sea L el conjunto de las fórmulas de la lógica proposicional en forma usual. Define la función $f : L \to L$, que a toda fórmula $\varphi \in L$ le asocia la fórmula $f(\varphi)$ que se obtiene reemplazando todos los conectivos $\to$ de φ por el conectivo $\vee$.

VERSIÓN C: (6 puntos) Sea L el conjunto de las fórmulas de la lógica proposicional en forma usual. Define la función $f : L \to L$, que a toda fórmula $\varphi \in L$ le asocia la fórmula $f(\varphi)$ obtenida reemplazando todos los conectivos $\wedge$ de φ por el conectivo $\leftrightarrow$.

VERSIÓN D: (6 puntos) Sea L el conjunto de las fórmulas de la lógica proposicional en forma usual. Define la función $f : L \to L$, que a toda fórmula $\varphi \in L$ le asocia la fórmula $f(\varphi)$ que se obtiene reemplazando todos los conectivos $\to$ de φ por el conectivo $\wedge$.

Solución:

VERSIÓN A: Por recursión estructural:

Base: $f(\top) = \top$, $f(\bot) = \bot$ y $f(p) = p$, para todo símbolo de proposición atómica p.

Pasos recursivos: Para toda terna de fórmulas $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$,

$(\neg):\quad f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$.

$$(\circ):\quad f(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \begin{cases} (f(\varphi_1) \circ f(\varphi_2)) & \text{si} \quad \circ \in \{\vee, \to, \leftrightarrow\}, \\ (f(\varphi_1) \to f(\varphi_2)) & \text{si} \quad \circ = \wedge. \end{cases}$$

VERSIÓN B: Por recursión estructural:

Base: $f(\top) = \top$, $f(\bot) = \bot$ y $f(p) = p$, para todo símbolo de proposición atómica p.

Pasos recursivos: Para toda terna de fórmulas $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$,

$(\neg):\quad f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$.

$$(\circ):\quad f(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \begin{cases} (f(\varphi_1) \circ f(\varphi_2)) & \text{si} \quad \circ \in \{\wedge, \vee, \leftrightarrow\}, \\ (f(\varphi_1) \vee f(\varphi_2)) & \text{si} \quad \circ = \to . \end{cases}$$

VERSIÓN C: Por recursión estructural:

Base: $f(\top) = \top$, $f(\bot) = \bot$ y $f(p) = p$, para todo símbolo de proposición atómica p.

Pasos recursivos: Para toda terna de fórmulas $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$,

$(\neg):\quad f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$.

$$(\circ):\quad f(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \begin{cases} (f(\varphi_1) \circ f(\varphi_2)) & \text{si} \quad \circ \in \{\vee, \to, \leftrightarrow\}, \\ (f(\varphi_1) \leftrightarrow f(\varphi_2)) & \text{si} \quad \circ = \wedge. \end{cases}$$

22. Segundo examen parcial 2012-2013. Versión A

Fecha: 22 de noviembre de 2012 **Tiempo: 50 min**

El examen está formado por tres problemas y se valorará sobre 30 puntos. La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado. Podéis consultar una hoja resumen de contenidos de la asignatura de formato A4. **Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas**.

---

1) (4 puntos) Verifica si las siguientes fórmulas de la lógica proposicional son equivalentes:

$$\varphi_1 = (q \to p) \vee (p \to r) \to q, \quad \varphi_2 = (q \to p) \wedge (p \to r) \to r.$$

2) Considera la fórmula $\varphi = (p \to q) \wedge (q \to r) \to r$ de la lógica de proposiciones.

a) (8 puntos) Usando el método de los tableaux, clasifica φ.

b) (2 puntos) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ.

c) (4 puntos) Halla las formas normales disyuntiva y conjuntiva de φ.

3) (12 puntos) Usando el sistema de deducción natural de Gentzen, demuestra la validez de la siguiente deducción:

$$\{p \to s \wedge r,\, r \to t, \neg q \vee t\} \vdash p \vee q \to t.$$

23. Soluciones del segundo examen parcial 2012-2013

Fecha: 22 de noviembre de 2012 **Tiempo: 50 min**

---

1) (4 puntos) Verifica si las siguientes fórmulas de la lógica proposicional son equivalentes:
VERSIÓN A: $\varphi_1 = (q \to p) \vee (p \to r) \to q$, $\varphi_2 = (q \to p) \wedge (p \to r) \to r$.
VERSIÓN B: $\varphi_1 = (p \to r) \vee (r \to q) \to p$, $\varphi_2 = (p \to r) \wedge (r \to q) \to q$.
VERSIÓN C: $\varphi_1 = (r \to q) \vee (q \to p) \to r$, $\varphi_2 = (r \to q) \wedge (q \to p) \to p$.
VERSIÓN D: $\varphi_1 = (p \to q) \vee (q \to r) \to p$, $\varphi_2 = (p \to q) \wedge (q \to r) \to r$.

<u>Solución:</u>
VERSIÓN A: Es la versión D, intercambiando p y q.
VERSIÓN B: Es la versión D, intercambiando r con q.
VERSIÓN C: Es la versión D, intercambiando p con r.
VERSIÓN D: Las dos fórmulas no son equivalentes ya que, por ejemplo, la valoración $\{p = 0, q = 0, r = 1\}$ es un contraejemplo de φ_1 y un modelo de φ_2.

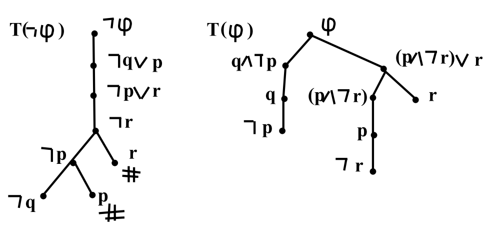


Figura 10. Tableaux del ejercicio 2 a, versión D.

2) Considera la fórmula
VERSIÓN A: $\varphi = (p \to q) \wedge (q \to r) \to r$
VERSIÓN B: $\varphi = (r \to p) \wedge (p \to r) \to q$
VERSIÓN C: $\varphi = (q \to r) \wedge (r \to p) \to p$
VERSIÓN D: $\varphi = (q \to p) \wedge (p \to r) \to r$
de la lógica de proposiciones.

a) (8 puntos) Usando el método de los tableaux, clasifica φ.

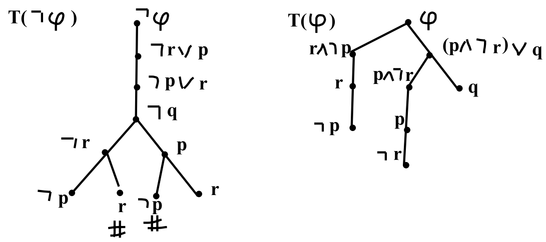


Figura 11. Tableaux del ejercicio 2 a, versión B.

b) (2 puntos) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ.

c) (4 puntos) Halla las formas normales disyuntiva y conjuntiva de φ.

Solución:

VERSIÓN A: Es la versión D, intercambiando p y q.

VERSIÓN B:

a) $\neg\varphi \equiv (\neg r \vee p) \wedge (\neg p \vee r) \wedge \neg q$ y $\varphi \equiv \neg\neg\varphi \equiv (r \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg r) \vee q$. La figura 11 representa los tableaux de $\neg\varphi$ y de φ. Ya que el tableau de $\neg\varphi$ es abierto, $\neg\varphi$ no es una contradicción y φ no es una tautología. Siendo también el tableau de φ abierto, φ es una contingencia.

b) De la primera rama abierta del tableau de φ obtenemos el modelo $\{p = 0, q = 0, r = 1\}$ de φ. De la primera rama abierta del tableau de $\neg\varphi$ obtenemos el contraejemplo $\{p = 0, q = 0, r = 0\}$ de φ.

c) De las equivalencias del apartado a (o de su tableau) se deduce que $\varphi \equiv (r \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg r) \vee q = FND(\varphi)$.

Del tableau de $\neg\varphi$ se obtiene que $FND(\neg\varphi) = (\neg q \wedge \neg r \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge p \wedge r)$.

Por tanto, $FNC(\varphi) \equiv \neg(FND(\neg\varphi)) \equiv (q \vee r \vee p) \wedge (q \vee \neg p \vee \neg r)$.

VERSIÓN C: Es la versión D, intercambiando p con r.

VERSIÓN D:

a) $\neg\varphi \equiv (\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee r) \wedge \neg r$ y $\varphi \equiv \neg\neg\varphi \equiv (q \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg r) \vee r$. La figura 10 representa los tableaux de $\neg\varphi$ y de φ. Ya que el tableau de $\neg\varphi$ es abierto, $\neg\varphi$ no es una contradicción y φ no es una tautología. Siendo también el tableau de φ abierto, φ es una contingencia.

b) De la primera rama abierta del tableau de φ obtenemos el modelo $\{p = 0, q = 1, r = 0\}$ de φ. De la primera rama abierta del tableau de $\neg\varphi$ obtenemos el contraejemplo $\{p = 0, q = 0, r = 0\}$ de φ.

c) De las equivalencias del apartado a (o de su tableau) se deduce que $\varphi \equiv (q \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg r) \vee r = FND(\varphi)$.

Del tableau de $\neg\varphi$ se obtiene que $FND(\neg\varphi) = \neg q \wedge \neg p \wedge \neg r$.

Por tanto, $FNC(\varphi) \equiv \neg(FND(\neg\varphi)) \equiv q \vee p \vee r$.

3) (12 puntos) Usando el sistema de deducción natural de Gentzen, demuestra la validez de la siguiente deducción:

VERSIÓN A: $\{p \to s \wedge r,\ r \to t, \neg q \vee t\} \vdash p \vee q \to t$.

VERSIÓN B: $\{p \to r \wedge t,\ t \to s, \neg q \vee s\} \vdash p \vee q \to s$.

VERSIÓN C: $\{s \to r \wedge p,\ p \to t, \neg q \vee t\} \vdash s \vee q \to t$.

VERSIÓN D: $\{p \to r \wedge s,\ s \to t, \neg q \vee t\} \vdash p \vee q \to t$.

<u>Solución:</u>

VERSIÓN A: Es la versión D, intercambiando r con s.

VERSIÓN B: Es la versión D, intercambiando s con t.

VERSIÓN C: Es la versión D, intercambiando s con p.

VERSIÓN D: Por el teorema de la deducción, podemos demostrar la deducción $\{p \to r \wedge s,\ s \to t, \neg q \vee t, p \vee q\} \vdash t$.

1) $p \to r \wedge s$	(Premisa)
2) $s \to t$	(Premisa)
3) $\neg q \vee t$	(Premisa)
4) $p \vee q$	(Premisa)

5) p	(Premisa auxiliar)
6) $\vdash r \wedge s$	(E$\to$(5,1))
7) $\vdash s$	(E$\wedge$(6))
8) $\vdash t$	(E$\to$(7,2))

9) q	(Premisa auxiliar)
10) $\vdash t$	(TP(9,3))

11) $\vdash t$	(E$\vee$(4, (5,10)))