

LÓGICA

HOJA 1

Algunas nociones de teoría de conjuntos, relaciones y funciones

Ejercicio 1 Sean $A = \{-3, -1, 3, 9\}$ y $B = \{-3, -1, 0, 3, 5, 7, 8\}$. Determinar $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ y $B \setminus A$.

Ejercicio 2 Sean $A = \{-1, 0, 3, 7\}$ y $B = \{-1, 1\}$. Determinar y representar gráficamente el conjunto $A \times B$.

Ejercicio 3 Demostrar las propiedades

$$(A \setminus B) \cup B = A \cup B \quad (1)$$

$$(A \setminus B) \cap B = \emptyset \quad (2)$$

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B \quad (3)$$

Ejercicio 4 Verifica la siguiente identidad:

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B).$$

Ejercicio 5 Sea $A = \{-1, 1, 3, 5\}$. Determina el conjunto $P(A)$ de las partes de A .

Ejercicio 6 Sean $A = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, b), (b, a), (c, b), (c, a)\}$. Entonces aRb, bRa, cRb y cRa . Representar gráficamente la relación R .

Ejercicio 7 Interpretar gráficamente las propiedades reflexiva, simétrica y antisimétrica.

Ejercicio 8 Sea $H = \{A, B, C, D\}$ el conjunto de las asignaturas en el horario representado en la tabla.

Horario	<i>L</i>	<i>M</i>	<i>X</i>	<i>J</i>
9-10	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>D</i>	<i>B</i>
10-11	<i>A</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>D</i>
11-12	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
12-13				<i>C</i>

Sobre H definimos la relación R como: $\forall x, y \in H, (x, y) \in R$ si y sólo si hay al menos un día en el horario tal que la clase x es anterior a la clase y .

- Determina los elementos de R .
- Determina el dominio, la imagen de R y la imagen inversa de $\{A, C\}$.
- Determina si R es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.
- ¿Es R una función?

Ejercicio 9 En base a la siguiente Tabla 1, describir las relaciones en el conjunto $P = \{Andrea, Beatriz, Carlos, Davide, Edward\}$:

- $xR_1y \leftrightarrow x$ e y viven en el mismo país.
- $xR_2y \leftrightarrow x$ e y tienen el mismo número de teléfono o la misma edad.
- $xR_3y \leftrightarrow x$ e y tienen la misma altura y son europeos.

Tabla 1	Edad	Tel.	País	Altura	Ocupación
Andrea	21	43-6950-555-0001	Alemania	1,75	Informática
Beatriz	18	34-91-555-0000	España	1,68	Estudiante
Carlos	37	34-91-555-0000	España	1,75	Profesor
Davide	18	39-06-555-0002	Italia	1,65	Estudiante
Edward	21	1-215-555-0003	EEUU	1,68	Profesor

Ejercicio 10 Determinar dominio e imagen de las siguientes relaciones:

- $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e\}$ y $R = \{(a, d), (b, e), (c, d), (c, e)\}$.
- Sea A el conjunto de las personas y $R = \{(a, b) \in A \times A : a \text{ es el padre de } b\}$.
- En el conjunto de las partes $P(A)$ de un conjunto A , la relación de inclusión $R = \{(B, C) \in P(A) \times P(A) : B \subseteq C\}$.
- En el conjunto \mathbb{Z} de los números enteros, la relación $R = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n - m \text{ es par}\}$.
- En el conjunto de las rectas del plano real, la relación “ r es ortogonal a s .”

Ejercicio 11 Utilizando la Tabla 1 del ejercicio 9, definir una relación de equivalencia en P y determinar las relativas clases de equivalencia.

Ejercicio 12 Determinar cuáles de las siguientes relaciones binarias son funciones:

- Sobre el conjunto de las personas, la relación que asocia a cada persona su madre.
- Sobre el conjunto de las personas que tienen hermanos, la relación que asocia a cada persona su hermano.

c) Sean A el conjunto de los alumnos matriculados en nuestra asignatura el año pasado y B el conjunto de las notas

$$\{NP, SS, AP, NT, SB, MH\}.$$

En $A \times B$ definimos la relación que asocia a cada alumno su nota final.

d) Con la notación del apartado c), en $B \times A$ definimos la relación que asocia a cada nota los alumnos que han sacado esa nota en la asignatura.

Ejercicio 13 a) Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ y $g(x) = x + 1$. Verificar que $g \circ f \neq f \circ g$. (Entonces la composición de funciones no es conmutativa.)

b) Demostrar que si $f : A \rightarrow B$ es una función, entonces $f = Id_B \circ f = f \circ Id_A$.

c) Descomponer la función $f(x) = \sqrt{3 + (\frac{1}{2 + \sin(x)})^2}$ en una composición de funciones más simples.