BLOQUE III:
Tema 2
SEMÁNTICA DE LA LÓGICA DE PRIMER ORDEN. TEORÍA INTERPRETATIVA
Lógica
Grado en Ingeniería Informática

Alessandra Gallinari

URJC

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Introducción

Como ya hicimos para la lógica proposicional, en este tema vamos a estudiar la semántica y sus sistemas de demostración en la lógica de primer orden. Volvemos a recordar sus definiciones:

Introducción

Como ya hicimos para la lógica proposicional, en este tema vamos a estudiar la semántica y sus sistemas de demostración en la lógica de primer orden. Volvemos a recordar sus definiciones:

La **semántica** es la definición de un conjunto de significados (generalmente verdadero o falso) que se puedan asociar a una expresión bien construida. Permite definir la validez de un expresión o de un razonamiento.

Introducción

Como ya hicimos para la lógica proposicional, en este tema vamos a estudiar la semántica y sus sistemas de demostración en la lógica de primer orden. Volvemos a recordar sus definiciones:

La **semántica** es la definición de un conjunto de significados (generalmente verdadero o falso) que se puedan asociar a una expresión bien construida. Permite definir la validez de un expresión o de un razonamiento.
Los **sistemas de demostración** son sistemas formales que permiten averiguar cuándo una expresión o un razonamiento son válidos. En el contexto de la semántica se denominan **teoría interpretativa**.

Introducción

Volveremos a estudiar los conceptos fundamentales de validez de una fórmula, de consecuencia lógica y de equivalencia entre fórmulas en el contexto más complejo y detallado de la lógica de primer orden.

Introducción

Volveremos a estudiar los conceptos fundamentales de validez de una fórmula, de consecuencia lógica y de equivalencia entre fórmulas en el contexto más complejo y detallado de la lógica de primer orden.
A pesar de las muchas analogías entre la semántica de la lógica proposicional y la de la lógica de primer orden, veremos que hay varias diferencias entre ellas.

Introducción

Volveremos a estudiar los conceptos fundamentales de validez de una fórmula, de consecuencia lógica y de equivalencia entre fórmulas en el contexto más complejo y detallado de la lógica de primer orden.
A pesar de las muchas analogías entre la semántica de la lógica proposicional y la de la lógica de primer orden, veremos que hay varias diferencias entre ellas.
La principal es que en la lógica de primer orden no hay un algoritmo de decisión de validez de fórmulas (como veremos, se pierde la propiedad de decidibilidad). Los métodos de las tablas de verdad y de los tableaux de la lógica proposicional no se pueden extender a la lógica de primer orden.

Contenido

Interpretaciones en lógica de primer orden

Debido a la mayor precisión y variedad de los elementos básicos del lenguaje de la lógica de primer orden, para asignar un significado a una expresión bien construida de la lógica de primer orden necesitamos unos métodos más complejos que aquellos estudiados en la lógica proposicional.

Interpretaciones en lógica de primer orden

Debido a la mayor precisión y variedad de los elementos básicos del lenguaje de la lógica de primer orden, para asignar un significado a una expresión bien construida de la lógica de primer orden necesitamos unos métodos más complejos que aquellos estudiados en la lógica proposicional.

Lo primero que se necesita es establecer un universo del discurso, un **dominio**, para definir qué tipo de objetos estamos analizando.

Interpretaciones en lógica de primer orden

Debido a la mayor precisión y variedad de los elementos básicos del lenguaje de la lógica de primer orden, para asignar un significado a una expresión bien construida de la lógica de primer orden necesitamos unos métodos más complejos que aquellos estudiados en la lógica proposicional.

Lo primero que se necesita es establecer un universo del discurso, un **dominio**, para definir qué tipo de objetos estamos analizando.

A continuación, tendremos que definir cómo asignar un significado, en el dominio elegido, a los elementos básicos del lenguaje.

Interpretaciones en lógica de primer orden

Debido a la mayor precisión y variedad de los elementos básicos del lenguaje de la lógica de primer orden, para asignar un significado a una expresión bien construida de la lógica de primer orden necesitamos unos métodos más complejos que aquellos estudiados en la lógica proposicional.

Lo primero que se necesita es establecer un universo del discurso, un **dominio**, para definir qué tipo de objetos estamos analizando.

A continuación, tendremos que definir cómo asignar un significado, en el dominio elegido, a los elementos básicos del lenguaje.

Finalmente, los significados de los elementos básicos nos proporcionarán, con un procedimiento de recursión estructural, los significados de los términos y de las fórmulas.

Interpretaciones en lógica de primer orden

Necesitamos entonces empezar con asignar significados a constantes, funciones, predicados (algo que llamaremos una **interpretación**) y a variables (una **asignación**).

Interpretaciones en lógica de primer orden

Necesitamos entonces empezar con asignar significados a constantes, funciones, predicados (algo que llamaremos una **interpretación**) y a variables (una **asignación**).
Estos conceptos se corresponden al concepto de valoración visto en la lógica proposicional.

Interpretaciones en lógica de primer orden

Necesitamos entonces empezar con asignar significados a constantes, funciones, predicados (algo que llamaremos una **interpretación**) y a variables (una **asignación**).

Estos conceptos se corresponden al concepto de valoración visto en la lógica proposicional.

En la lógica de primer orden una **signatura** Σ es un conjunto de símbolos de funciones y de predicados con aridades asociadas.

Interpretaciones en lógica de primer orden

Necesitamos entonces empezar con asignar significados a constantes, funciones, predicados (algo que llamaremos una **interpretación**) y a variables (una **asignación**).

Estos conceptos se corresponden al concepto de valoración visto en la lógica proposicional.

En la lógica de primer orden una **signatura** Σ es un conjunto de símbolos de funciones y de predicados con aridades asociadas.

Una signatura puede ser finita o infinita numerable. Supondremos que sea decidible, es decir, que sea posible reconocer efectivamente sus símbolos con sus aridades.

Interpretaciones en lógica de primer orden

Necesitamos entonces empezar con asignar significados a constantes, funciones, predicados (algo que llamaremos una **interpretación**) y a variables (una **asignación**).

Estos conceptos se corresponden al concepto de valoración visto en la lógica proposicional.

En la lógica de primer orden una **signatura** Σ es un conjunto de símbolos de funciones y de predicados con aridades asociadas.

Una signatura puede ser finita o infinita numerable. Supondremos que sea decidible, es decir, que sea posible reconocer efectivamente sus símbolos con sus aridades.

El lenguaje $\mathbf{L}_\Sigma$ es el conjunto de todas las fórmulas que se pueden construir a partir de los elementos de Σ.

Interpretaciones en lógica de primer orden

Necesitamos entonces empezar con asignar significados a constantes, funciones, predicados (algo que llamaremos una **interpretación**) y a variables (una **asignación**).

Estos conceptos se corresponden al concepto de valoración visto en la lógica proposicional.

En la lógica de primer orden una **signatura** Σ es un conjunto de símbolos de funciones y de predicados con aridades asociadas.

Una signatura puede ser finita o infinita numerable. Supondremos que sea decidible, es decir, que sea posible reconocer efectivamente sus símbolos con sus aridades.

El lenguaje $\mathbf{L}_\Sigma$ es el conjunto de todas las fórmulas que se pueden construir a partir de los elementos de Σ.

Cuando no haga falta especificar la signatura que se está usando, indicaremos un lenguaje simplemente con el símbolo $\mathbf{L}$.

Interpretaciones en lógica de primer orden

Definición

Sea **L** *un lenguaje de la lógica de primer orden. Una* **interpretación** *es cualquier par* $\mathbb{I} = (D, I)$ *donde:*

Interpretaciones en lógica de primer orden

Definición

Sea **L** *un lenguaje de la lógica de primer orden. Una* **interpretación** *es cualquier par* $\mathbb{I} = (D, I)$ *donde:*

- D *es un conjunto no vacío, denominado* **dominio** *de la interpretación,*

Interpretaciones en lógica de primer orden

Definición

Sea **L** *un lenguaje de la lógica de primer orden. Una* **interpretación** *es cualquier par* $\mathbb{I} = (D, I)$ *donde:*

- D *es un conjunto no vacío, denominado* **dominio** *de la interpretación,*
- I *es una función que asocia:*

Interpretaciones en lógica de primer orden

Definición

Sea **L** *un lenguaje de la lógica de primer orden. Una* **interpretación** *es cualquier par* $\mathbb{I} = (D, I)$ *donde:*

- D *es un conjunto no vacío, denominado* **dominio** *de la interpretación,*
- I *es una función que asocia:*
  1. *a cada símbolo de* **constante** c *del lenguaje un elemento* c^I *del conjunto* D*,*

Interpretaciones en lógica de primer orden

Definición

Sea **L** *un lenguaje de la lógica de primer orden. Una* **interpretación** *es cualquier par* $\mathbb{I} = (D, I)$ *donde:*

- D *es un conjunto no vacío, denominado* **dominio** *de la interpretación,*
- I *es una función que asocia:*
  1. *a cada símbolo de* **constante** c *del lenguaje un elemento* c^I *del conjunto* D,
  2. *a cada símbolo de* **función** f *del lenguaje con aridad* $n > 0$ *una función* $f^I : D^n \longrightarrow D$,

Interpretaciones en lógica de primer orden

Definición

Sea **L** *un lenguaje de la lógica de primer orden. Una* **interpretación** *es cualquier par* $\mathbb{I} = (D, I)$ *donde:*

- D *es un conjunto no vacío, denominado* **dominio** *de la interpretación,*
- I *es una función que asocia:*
  1. *a cada símbolo de* **constante** c *del lenguaje un elemento* c^I *del conjunto* D*,*
  2. *a cada símbolo de* **función** f *del lenguaje con aridad* $n > 0$ *una función* $f^I : D^n \longrightarrow D$*,*
  3. *a cada símbolo de* **proposición atómica** p *un elemento* p^I *del conjunto* $\{0, 1\}$ *(una valoración),*

Interpretaciones en lógica de primer orden

Definición

Sea **L** *un lenguaje de la lógica de primer orden. Una* **interpretación** *es cualquier par* $\mathbb{I} = (D, I)$ *donde:*

- D *es un conjunto no vacío, denominado* **dominio** *de la interpretación,*
- I *es una función que asocia:*
  1. *a cada símbolo de* **constante** c *del lenguaje un elemento* c^I *del conjunto* D,
  2. *a cada símbolo de* **función** f *del lenguaje con aridad* $n > 0$ *una función* $f^I : D^n \longrightarrow D$,
  3. *a cada símbolo de* **proposición atómica** p *un elemento* p^I *del conjunto* $\{0, 1\}$ *(una valoración),*
  4. *a cada símbolo de* **predicado** P *del lenguaje con aridad* $n > 0$ *una relación* $P^I \subseteq D^n$.

Interpretaciones en lógica de primer orden

Definición

Dada una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ *para un lenguaje de primer orden, se llama* **asignación** *a una función* A *que asocia a cada símbolo de variable* x *un elemento* x^A *perteneciente al conjunto* D.

Interpretaciones en lógica de primer orden

Definición

Dada una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ para un lenguaje de primer orden, se llama **asignación** *a una función A que asocia a cada símbolo de variable x un elemento x^A perteneciente al conjunto D.*

Observación

En la literatura la terminología empleada no es uniforme: en varios textos se denomina interpretación al par formado por una **estructura** *(interpretación en nuestra notación) y un* **estado** *(asignación en nuestra notación).*

Interpretaciones en lógica de primer orden

Definición

Dada una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ para un lenguaje de primer orden, se llama **asignación** *a una función A que asocia a cada símbolo de variable x un elemento x^A perteneciente al conjunto D.*

Observación

En la literatura la terminología empleada no es uniforme: en varios textos se denomina interpretación al par formado por una **estructura** *(interpretación en nuestra notación) y un* **estado** *(asignación en nuestra notación).*
En estos apuntes la definición de interpretación no incluye ninguna asignación. En cada caso, se tendrá que especificar la asignación elegida para una dada interpretación.

Interpretaciones en lógica de primer orden

Definición

Dada una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ *para un lenguaje de primer orden, se llama* **asignación** *a una función* A *que asocia a cada símbolo de variable* x *un elemento* x^A *perteneciente al conjunto* D*.*

Observación

En la literatura la terminología empleada no es uniforme: en varios textos se denomina interpretación al par formado por una **estructura** *(interpretación en nuestra notación) y un* **estado** *(asignación en nuestra notación).*
En estos apuntes la definición de interpretación no incluye ninguna asignación. En cada caso, se tendrá que especificar la asignación elegida para una dada interpretación.
La justificación de la notación elegida es que, como veremos, nuestras definiciones permiten definir más claramente los conceptos de fórmula satisfacible bajo una interpretación y de modelo de una fórmula.

Interpretaciones en lógica de primer orden

Ejemplo

Sea $\Sigma = \{a, f, g\}$ *una signatura, donde* a *es una constante,* f *es una función unaria y* g *una función binaria.*

Interpretaciones en lógica de primer orden

Ejemplo

Sea $\Sigma = \{a, f, g\}$ *una signatura, donde* a *es una constante,* f *es una función unaria y* g *una función binaria.*

Vamos a ver tres posibles interpretaciones y asignaciones:

Interpretaciones en lógica de primer orden

Ejemplo

Sea $\Sigma = \{a, f, g\}$ *una signatura, donde* a *es una constante,* f *es una función unaria y* g *una función binaria.*

Vamos a ver tres posibles interpretaciones y asignaciones:

1) Definimos el dominio

$$D_1 = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\},$$

la interpretación

$$I : \quad a^I = 0, \quad f^I = suc\,(el\,siguiente), \quad g^I = +\,(la\,suma),$$

y la asignación

$$A : x^A = 1.$$

Interpretaciones en lógica de primer orden

Ejemplo

2) Definimos el dominio D_2 como el conjunto de todas las posibles palabras que se pueden construir con el alfabeto $\{*, @\}$, la interpretación

$$I : \quad a^I = *, \quad f^I = \textit{añade} \;\; * \;\; \textit{al} \;\; \textit{final} \;\; \textit{de} \;\; \textit{la} \;\; \textit{palabra},$$

$$g^I = + \textit{(la} \;\; \textit{concatenación)},$$

y la asignación

$$x^A = *@* \,.$$

Interpretaciones en lógica de primer orden

Ejemplo

3) Definimos el dominio

$$D_3 = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{Z},$$

la interpretación

$$I: \quad a^I = 1, \quad f^I = ant\,(el\,anterior), \quad g^I = -\,(la\,resta),$$

y la asignación

$$A: x^A = 1.$$

Interpretaciones en lógica de primer orden

Observación

Hay una clara analogía entre el concepto de asignación y de asignación de un estado a las variables de un programa en un lenguaje de programación.

Interpretaciones en lógica de primer orden

Observación

Hay una clara analogía entre el concepto de asignación y de asignación de un estado a las variables de un programa en un lenguaje de programación. Si en un programa ejecutamos el comando "$x := a$," el estado de la variable x se ha modificado y ahora su valor es el elemento a del conjunto del tipo de datos que se está considerando.

Interpretaciones en lógica de primer orden

Observación

Hay una clara analogía entre el concepto de asignación y de asignación de un estado a las variables de un programa en un lenguaje de programación. Si en un programa ejecutamos el comando "$x := a$," el estado de la variable x se ha modificado y ahora su valor es el elemento a del conjunto del tipo de datos que se está considerando.
En nuestra notación, siendo D el dominio de una interpretación y A una asignación para esa interpretación, el nuevo estado de la variable x es $x^A = a \in D$.

Interpretaciones en lógica de primer orden

Observación

Hay una clara analogía entre el concepto de asignación y de asignación de un estado a las variables de un programa en un lenguaje de programación. Si en un programa ejecutamos el comando "$x := a$," el estado de la variable x se ha modificado y ahora su valor es el elemento a del conjunto del tipo de datos que se está considerando.
En nuestra notación, siendo D el dominio de una interpretación y A una asignación para esa interpretación, el nuevo estado de la variable x es $x^A = a \in D$.

NOTACIÓN: Si A es una asignación, escribiremos $A[x/d]$ para indicar una nueva asignación que difiere de A sólo en la variable x, a la cual ya se ha asignado el valor $d \in D$.

Contenido

Interpretación semántica de términos y fórmulas

El siguiente paso hacía la definición de significados para expresiones bien construidas consiste en el usar el principio de recursión estructural para poder extender una interpretación y una asignación dadas a todos los términos y a todas las fórmulas.
Esta extensión nos permitirá asociar valores de verdad $\{0, 1\}$ a las fórmulas y estudiar su validez.

Interpretación semántica de términos

Definición

(Definición por recursión estructural de interpretación de términos)
Dada una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ *para un lenguaje de primer orden, y dada una asignación* A *para esa interpretación,* **se asocia a cada término del lenguaje** t **un elemento** $t^{I,A}$ **perteneciente a** D *de la siguiente forma:*

Interpretación semántica de términos

Definición

(Definición por recursión estructural de interpretación de términos)
Dada una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ *para un lenguaje de primer orden, y dada una asignación* A *para esa interpretación,* **se asocia a cada término del lenguaje** t **un elemento** $t^{I,A}$ **perteneciente a** D *de la siguiente forma:*

1. **Base (TAt):**

   - si t *es una constante* c*, entonces*

   $$t^{I,A} = c^{I},$$

   - si t *es una variable* x*, entonces*

   $$t^{I,A} = x^{A},$$

Interpretación semántica de términos

Definición

(Definición por recursión estructural de interpretación de términos)
Dada una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ *para un lenguaje de primer orden, y dada una asignación* A *para esa interpretación,* **se asocia a cada término del lenguaje** t **un elemento** $t^{I,A}$ **perteneciente a** D *de la siguiente forma:*

1. **Base (TAt):**

   - si t *es una constante* c*, entonces*

   $$t^{I,A} = c^I,$$

   - si t *es una variable* x*, entonces*

   $$t^{I,A} = x^A,$$

2. **Paso recursivo (TF):** *si* t *es un término de la forma* $f(t_1, \ldots, t_n)$*, entonces*

   $$t^{I,A} = f^I(t_1^{I,A}, \ldots, t_n^{I,A}).$$

Interpretación semántica de términos

Ejemplo

Usando las definiciones del ejemplo anterior, los términos

$$t_1 = f(g(f(a), f(x))) \quad y \quad t_2 = f(g(x, f(g(x, f(a)))))$$

se interpretan como se describe a continuación:

Interpretación semántica de términos

Ejemplo

Usando las definiciones del ejemplo anterior, los términos

$$t_1 = f(g(f(a), f(x))) \quad \text{y} \quad t_2 = f(g(x, f(g(x, f(a)))))$$

se interpretan como se describe a continuación:
1) $t_1^{I,A} = suc(suc(0) + suc(1)) = 4$, $t_2^{I,A} = suc(1 + suc(1 + suc(0))) = 5$.

Interpretación semántica de términos

Ejemplo

Usando las definiciones del ejemplo anterior, los términos

$$t_1 = f(g(f(a), f(x))) \quad y \quad t_2 = f(g(x, f(g(x, f(a)))))$$

se interpretan como se describe a continuación:

1) $t_1^{I,A} = suc(suc(0) + suc(1)) = 4$, $t_2^{I,A} = suc(1 + suc(1 + suc(0))) = 5$.

2) $t_1^{I,A} = f^I(f^I(*) + f^I(*@*)) = f^I(** + * @ **) = ***@***$.

$t_2^{I,A} = f^I(*@* + f^I(*@* + f^I(*))) =$

$= f^I(*@* + * @ ****) = *@**@*****$.

Interpretación semántica de términos

Ejemplo

Usando las definiciones del ejemplo anterior, los términos

$$t_1 = f(g(f(a), f(x))) \quad \textit{y} \quad t_2 = f(g(x, f(g(x, f(a)))))$$

se interpretan como se describe a continuación:

1) $t_1^{I,A} = suc(suc(0) + suc(1)) = 4$, $t_2^{I,A} = suc(1 + suc(1 + suc(0))) = 5$.

2) $t_1^{I,A} = f^I(f^I(*) + f^I(*@*)) = f^I(** + *@**) = ***@***$.

$t_2^{I,A} = f^I(*@* + f^I(*@* + f^I(*))) =$
$= f^I(*@* + *@****) = *@**@*****$.

3) $t_1^{I,A} = ant(ant(1) - ant(1)) = -1$,

$t_2^{I,A} = ant(x^A - ant(x^A - ant(1))) = ant(x^A - ant(x^A)) = ant(1) = 0$.

Interpretación semántica de fórmulas

El significado de una fórmula, fijada una interpretación y una asignación, tiene que ser un valor de verdad. Seguiremos usando 0 para representar el valor falso y 1 para representar el valor verdadero.

Interpretación semántica de fórmulas

El significado de una fórmula, fijada una interpretación y una asignación, tiene que ser un valor de verdad. Seguiremos usando 0 para representar el valor falso y 1 para representar el valor verdadero.
La siguiente definición nos permite calcular valores de verdad de fórmulas.

Interpretación semántica de fórmulas

Definición

(Definición por recursión estructural de interpretación de fórmulas) *Dada una interpretación* $\mathbb{I} = (D, I)$ *para un lenguaje de primer orden, y dada una asignación* A *para esa interpretación,* **se asocia a cada fórmula del lenguaje** φ **un valor de verdad** $\varphi^{I,A}$ **perteneciente a** $\{0, 1\}$ *de la siguiente forma:*

Interpretación semántica de fórmulas

Definición

(Definición por recursión estructural de interpretación de fórmulas) *Dada una interpretación* $\mathbb{I} = (D, I)$ *para un lenguaje de primer orden, y dada una asignación* A *para esa interpretación,* **se asocia a cada fórmula del lenguaje** φ **un valor de verdad** $\varphi^{I,A}$ **perteneciente a** $\{0,1\}$ *de la siguiente forma:*

- **Base (FAt):**
  - - $\perp^{I,A} = 0$; $\top^{I,A} = 1$,

Interpretación semántica de fórmulas

Definición

(Definición por recursión estructural de interpretación de fórmulas) *Dada una interpretación* $\mathbb{I} = (D, I)$ *para un lenguaje de primer orden, y dada una asignación* A *para esa interpretación,* **se asocia a cada fórmula del lenguaje** φ **un valor de verdad** $\varphi^{I,A}$ **perteneciente a** $\{0, 1\}$ *de la siguiente forma:*

- **Base (FAt):**
  - \- $\perp^{I,A} = 0$; $\top^{I,A} = 1$,
  - \- *si* p *es una proposición atómica,* $p^{I,A} = p^{I}$,

Interpretación semántica de fórmulas

Definición

(Definición por recursión estructural de interpretación de fórmulas) *Dada una interpretación* $\mathbb{I} = (D, I)$ *para un lenguaje de primer orden, y dada una asignación* A *para esa interpretación,* **se asocia a cada fórmula del lenguaje** φ **un valor de verdad** $\varphi^{I,A}$ **perteneciente a** $\{0,1\}$ *de la siguiente forma:*

- **Base (FAt):**
  - - $\perp^{I,A} = 0$; $\top^{I,A} = 1$,
  - - *si* p *es una proposición atómica,* $p^{I,A} = p^I$,
  - - *si* $(s = t)$ *es la igualdad entre dos términos,*

$$(s=t)^{I,A} = \begin{cases} 1 & \textit{si } s^{I,A} = t^{I,A}, \\ 0 & \textit{si } s^{I,A} \textit{ no es igual a } t^{I,A}, \end{cases}$$

Interpretación semántica de fórmulas

Definición

(Definición por recursión estructural de interpretación de fórmulas) *Dada una interpretación* $\mathbb{I} = (D, I)$ *para un lenguaje de primer orden, y dada una asignación* A *para esa interpretación,* **se asocia a cada fórmula del lenguaje** φ **un valor de verdad** $\varphi^{I,A}$ **perteneciente a** $\{0,1\}$ *de la siguiente forma:*

- **Base (FAt):**
  - - $\perp^{I,A} = 0$; $\top^{I,A} = 1$,
  - - *si* p *es una proposición atómica,* $p^{I,A} = p^I$,
  - - *si* $(s = t)$ *es la igualdad entre dos términos,*
    $$(s = t)^{I,A} = \begin{cases} 1 & \text{si } s^{I,A} = t^{I,A}, \\ 0 & \text{si } s^{I,A} \text{ no es igual a } t^{I,A}, \end{cases}$$
  - - *si* $\varphi = P(t_1, \ldots, t_n)$, *entonces* $\varphi^{I,A} = 1$ *si y sólo si* $(t_1^{I,A}, \ldots, t_n^{I,A}) \in P^I$, *es decir, si y sólo si los elementos* $(t_1^{I,A}, \ldots, t_n^{I,A})$ *están relacionados mediante la relación* P^I.

Interpretación semántica de fórmulas

Definición

- **Paso recursivo:**
  - - *(F¬): si* $\varphi = \neg\psi$*, entonces*

$$\varphi^{I,A} = \neg(\psi^{I,A}),$$

siendo $\neg(0) = 1$ *y* $\neg(1) = 0$,

Interpretación semántica de fórmulas

Definición

- **Paso recursivo:**
  - *- (F$\neg$): si $\varphi = \neg\psi$, entonces*

$$\varphi^{I,A} = \neg(\psi^{I,A}),$$

    siendo $\neg(0) = 1$ y $\neg(1) = 0$,
  - *- (F$\circ$): si $\varphi = (\varphi_1 \circ \varphi_2)$, entonces*

$$\varphi^{I,A} = \varphi_1^{I,A} \circ \varphi_2^{I,A},$$

    donde el valor de $\varphi_1^{I,A} \circ \varphi_2^{I,A}$, viene dado por la tabla de la lógica proposicional:

Interpretación semántica de fórmulas

Definición

- **Paso recursivo:**
  - *- (F¬): si* $\varphi = \neg\psi$*, entonces*

$$\varphi^{I,A} = \neg(\psi^{I,A}),$$

    siendo $\neg(0) = 1$ *y* $\neg(1) = 0$,
  - *- (F∘): si* $\varphi = (\varphi_1 \circ \varphi_2)$*, entonces*

$$\varphi^{I,A} = \varphi_1^{I,A} \circ \varphi_2^{I,A},$$

    donde el valor de $\varphi_1^{I,A} \circ \varphi_2^{I,A}$*, viene dado por la tabla de la lógica proposicional:*

$\varphi_1^{I,A}$	$\varphi_2^{I,A}$	$\neg\varphi_1^{I,A}$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Interpretación semántica de fórmulas

Definición

- - *(F∃): si* $\varphi = \exists x \psi$, *entonces* $\varphi^{I,A} = 1$ *si y sólo si existe algún elemento del dominio* D *tal que, después de asignar ese valor a la variable* x *en* ψ, *se tiene* $\psi^{I,A} = 1$.
  De forma equivalente, $\varphi^{I,A} = 1$ *si y sólo si existe algún* $d \in D$ *tal que* $\psi^{I,A[x/d]} = 1$,

Interpretación semántica de fórmulas

Definición

- *- (F$\exists$): si $\varphi = \exists x \psi$, entonces $\varphi^{I,A} = 1$ si y sólo si existe algún elemento del dominio D tal que, después de asignar ese valor a la variable x en ψ, se tiene $\psi^{I,A} = 1$.*
  De forma equivalente, $\varphi^{I,A} = 1$ si y sólo si existe algún $d \in D$ tal que $\psi^{I,A[x/d]} = 1$,
- *- (F$\forall$): si $\varphi = \forall x \psi$, entonces $\varphi^{I,A} = 1$ si y sólo si se tiene $\psi^{I,A} = 1$ para cualquier posible asignación de un elemento del dominio D a la variable x en ψ.*
  De forma equivalente, $\varphi^{I,A} = 1$ si y sólo si para todo $d \in D$ se verifica que $\psi^{I,A[x/d]} = 1$.

Interpretación semántica de fórmulas

Ejemplos

1) Consideremos la fórmula $\varphi = \exists x P(f(x), a)$.

Interpretación semántica de fórmulas

Ejemplos

1) Consideremos la fórmula $\varphi = \exists x P(f(x), a)$.
En la interpretación (D_1, I_1) *definida por:*

$$D_1 = \mathbb{R},\ a^{I_1} = 2,\ f^{I_1}(x) = x^2,\ P^{I_1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y\},$$

la fórmula φ *se escribe* $\exists x(x^2 = 2)$ *y tiene valor 1 ya que existe la raíz cuadrada de 2.*

Interpretación semántica de fórmulas

Ejemplos

1) Consideremos la fórmula $\varphi = \exists x P(f(x), a)$.
En la interpretación (D_1, I_1) *definida por:*

$$D_1 = \mathbb{R},\ a^{I_1} = 2,\ f^{I_1}(x) = x^2,\ P^{I_1} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y\},$$

la fórmula φ *se escribe* $\exists x(x^2 = 2)$ *y tiene valor 1 ya que existe la raíz cuadrada de 2.*

En la interpretación (D_2, I_2) *definida por:*

$$D_2 = \mathbb{C},\ a^{I_1} = -2,\ f^{I_2}(x) = x^2,\ P^{I_2} = \{(x,y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : x = y\},$$

la fórmula φ *se escribe* $\exists x(x^2 = -2)$ *tiene valor 1 ya que todo número complejo tiene dos raíces cuadradas complejas.*

Interpretación semántica de fórmulas

Ejemplos

2) Consideremos la fórmula $\varphi = \forall x \forall y (P(f(x,y),a) \to P(x,y))$ *en la interpretación* (D_1, I_1) *definida por:*

$$D_1 = \mathbb{Z},\ a^{I_1} = 0,\ f^{I_1}(x,y) = x - y,\ P^{I_1} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x < y\}.$$

Interpretación semántica de fórmulas

Ejemplos

2) Consideremos la fórmula $\varphi = \forall x \forall y(P(f(x,y),a) \to P(x,y))$ *en la interpretación* (D_1, I_1) *definida por:*

$$D_1 = \mathbb{Z},\ a^{I_1} = 0,\ f^{I_1}(x,y) = x - y,\ P^{I_1} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x < y\}.$$

Con la interpretación dada, la fórmula φ *se escribe* $\forall x \forall y((x - y < 0) \to x < y)$ *y tiene valor 1.*

Interpretación semántica de fórmulas

Ejemplos

2) Consideremos la fórmula $\varphi = \forall x \forall y (P(f(x,y),a) \to P(x,y))$ *en la interpretación* (D_1, I_1) *definida por:*

$$D_1 = \mathbb{Z},\ a^{I_1} = 0,\ f^{I_1}(x,y) = x - y,\ P^{I_1} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x < y\}.$$

Con la interpretación dada, la fórmula φ *se escribe* $\forall x \forall y ((x - y < 0) \to x < y)$ *y tiene valor 1.*

Sin embargo, si consideramos la interpretación (D_2, I_2) *definida por:*

$$D_2 = \mathbb{Z},\ a^{I_2} = 4,\ f^{I_2}(x,y) = x - y,\ P^{I_2} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x < y\},$$

entonces $\varphi^{I,A_2} = 0$. *En efecto, si* $x = 5$ *y* $y = 2$, *se obtiene que* $(x - y < 4)$ *es cierta, pero* $x < y$ *es falsa.*

Contenido

Validez semántica de fórmulas: modelos

Definición

- *Se dice que una fórmula* φ *es* **satisfacible bajo una interpretación** (D, I) *cuando se verifica* $\varphi^{I,A} = 1$ *para* **alguna** *asignación* A.

Validez semántica de fórmulas: modelos

Definición

- *Se dice que una fórmula* φ *es* **satisfacible bajo una interpretación** (D, I) *cuando se verifica* $\varphi^{I,A} = 1$ *para* **alguna** *asignación* A.
- *Se dice que una fórmula* φ *es* **satisfacible** *cuando es satisfacible bajo alguna interpretación* (D, I)*. Por tanto, una fórmula* φ *es satisfacible si existen al menos una interpretación* (D, I) *y una asignación* A *(relativa a esa interpretación) tales que* $\varphi^{I,A} = 1$.

Validez semántica de fórmulas: modelos

Definición

- *Se dice que una fórmula φ es* **satisfacible bajo una interpretación** (D, I) *cuando se verifica* $\varphi^{I,A} = 1$ *para* **alguna** *asignación* A.
- *Se dice que una fórmula φ es* **satisfacible** *cuando es satisfacible bajo alguna interpretación* (D, I). *Por tanto, una fórmula φ es satisfacible si existen al menos una interpretación (D, I) y una asignación A (relativa a esa interpretación) tales que* $\varphi^{I,A} = 1$.
- *Si una fórmula no es satisfacible se dice que es* **insatisfacible**.

Validez semántica de fórmulas: modelos

Definición

- *Se dice que una fórmula* φ *es* **satisfacible bajo una interpretación** (D, I) *cuando se verifica* $\varphi^{I,A} = 1$ *para* **alguna** *asignación* A.
- *Se dice que una fórmula* φ *es* **satisfacible** *cuando es satisfacible bajo alguna interpretación* (D, I)*. Por tanto, una fórmula* φ *es satisfacible si existen al menos una interpretación* (D, I) *y una asignación* A *(relativa a esa interpretación) tales que* $\varphi^{I,A} = 1$.
- *Si una fórmula no es satisfacible se dice que es* **insatisfacible**.
- *Se dice que una fórmula* φ *es* **verdadera bajo una interpretación** $\mathbb{I} = (D, I)$ *cuando se verifica* $\varphi^{I,A} = 1$ *para* **cualquier** *asignación* A*. En este caso se dice también que* $\mathbb{I}$ **es un modelo de** φ *y se escribe* $\mathbb{I} \models \varphi$.

Validez semántica de fórmulas: modelos

Definición

- *Se dice que una fórmula* φ *es* **válida** *cuando es verdadera bajo cualquier interpretación, y se denota* $\models \varphi$. *Por tanto, una fórmula* φ *es válida si para toda interpretación* (D, I) *y una asignación* A *(relativa a esa interpretación) se verifica que* $\varphi^{I,A} = 1$.

Validez semántica de fórmulas: modelos

Definición

- *Se dice que una fórmula* φ *es* **válida** *cuando es verdadera bajo cualquier interpretación, y se denota* $\models \varphi$. *Por tanto, una fórmula* φ *es válida si para toda interpretación* (D, I) *y una asignación* A *(relativa a esa interpretación) se verifica que* $\varphi^{I,A} = 1$.
- *Si una fórmula no es válida se dice que es* **falsificable**.

Validez semántica de fórmulas: modelos

Definición

- *Se dice que una fórmula φ es* **válida** *cuando es verdadera bajo cualquier interpretación, y se denota $\models \varphi$. Por tanto, una fórmula φ es válida si para toda interpretación (D, I) y una asignación A (relativa a esa interpretación) se verifica que $\varphi^{I,A} = 1$.*
- *Si una fórmula no es válida se dice que es* **falsificable**.

Observación

El concepto de fórmula insatisfacible en LPO se corresponde al concepto de fórmula insatisfacible (o contradicción) en LP. Es una fórmula que es siempre falsa.

Validez semántica de fórmulas: modelos

Definición

- *Se dice que una fórmula* φ *es* **válida** *cuando es verdadera bajo cualquier interpretación, y se denota* $\models \varphi$*. Por tanto, una fórmula* φ *es válida si para toda interpretación* (D, I) *y una asignación* A *(relativa a esa interpretación) se verifica que* $\varphi^{I,A} = 1$*.*
- *Si una fórmula no es válida se dice que es* **falsificable***.*

Observación

El concepto de fórmula insatisfacible en LPO se corresponde al concepto de fórmula insatisfacible (o contradicción) en LP. Es una fórmula que es siempre falsa.
El concepto de fórmula válida en LPO se corresponde al concepto de fórmula válida (o tautología) en LP. Es una fórmula que es siempre verdadera.

Validez semántica de fórmulas: modelos

Ejemplo

Sea

$$\varphi : \exists y R(x, f(y, y)).$$

Siendo la variable x *libre,* φ *es abierta.*

Validez semántica de fórmulas: modelos

Ejemplo

Sea

$$\varphi : \exists y R(x, f(y, y)).$$

Siendo la variable x libre, φ es abierta.
Sean $D = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$, $R^I =$ "$=$" *y* $f^I = +$.

Validez semántica de fórmulas: modelos

Ejemplo

Sea

$$\varphi : \exists y R(x, f(y,y)).$$

Siendo la variable x *libre,* φ *es abierta.*
Sean $D = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$, $R^I =$ " $=$ " *y* $f^I = +$.
Entonces, para una asignación A,

$$\varphi^{I,A} : \exists y(x^A = 2y).$$

Validez semántica de fórmulas: modelos

Ejemplo

Sea

$$\varphi : \exists y R(x, f(y, y)).$$

Siendo la variable x *libre,* φ *es abierta.*
Sean $D = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$, $R^I =$ "$=$" *y* $f^I = +$.
Entonces, para una asignación A,

$$\varphi^{I,A} : \exists y(x^A = 2y).$$

Si A *es tal que* x^A *es un numero par, entonces* $\varphi^{I,A} = 1$.

Validez semántica de fórmulas: modelos

Ejemplo

Sea

$$\varphi : \exists y R(x, f(y,y)).$$

Siendo la variable x *libre,* φ *es abierta.*
Sean $D = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$, $R^I =$ "$=$" *y* $f^I = +$.
Entonces, para una asignación A,

$$\varphi^{I,A} : \exists y (x^A = 2y).$$

Si A *es tal que* x^A *es un numero par, entonces* $\varphi^{I,A} = 1$.
Si A *es tal que* x^A *es un numero impar, entonces* $\varphi^{I,A} = 0$.

Validez semántica de fórmulas: modelos

Ejemplo

Sea

$$\varphi : \exists y R(x, f(y, y)).$$

Siendo la variable x libre, φ es abierta.
Sean $D = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$, $R^I =$ "$=$" y $f^I = +$.
Entonces, para una asignación A,

$$\varphi^{I,A} : \exists y(x^A = 2y).$$

Si A es tal que x^A es un numero par, entonces $\varphi^{I,A} = 1$.
Si A es tal que x^A es un numero impar, entonces $\varphi^{I,A} = 0$.
Se sigue que φ es satisfacible bajo (D, I), pero no es verdadera bajo (D, I). En particular, φ no es válida.

Validez semántica de fórmulas: modelos

Ejemplo

Sea $\varphi : \forall x(P(x) \to R(x)) \to \exists y Q(y)$.

Validez semántica de fórmulas: modelos

Ejemplo

Sea $\varphi : \forall x(P(x) \to R(x)) \to \exists y Q(y)$.
Sean $D = \{a, b, c\}$, $P^I = \{a, b\}$, $R^I = \{b\}$ *y* $Q^I = \emptyset$.

Validez semántica de fórmulas: modelos

Ejemplo

Sea $\varphi : \forall x(P(x) \to R(x)) \to \exists y Q(y)$.
Sean $D = \{a, b, c\}$, $P^I = \{a, b\}$, $R^I = \{b\}$ *y* $Q^I = \emptyset$.
Usando la siguiente tabla (el dominio D *contiene sólo tres elementos) podemos determinar el valor de la subfórmula* $\forall x(P(x) \to R(x))$:

Validez semántica de fórmulas: modelos

Ejemplo

Sea $\varphi : \forall x(P(x) \to R(x)) \to \exists y Q(y)$.
Sean $D = \{a, b, c\}$, $P^I = \{a, b\}$, $R^I = \{b\}$ *y* $Q^I = \emptyset$.
Usando la siguiente tabla (el dominio D *contiene sólo tres elementos) podemos determinar el valor de la subfórmula* $\forall x(P(x) \to R(x))$:

x	$P^I(x)$	$R^I(x)$	$(P(x) \to R(x))^I$	$(\forall x(P(x) \to R(x)))^I$
a	1	0	0	
b	1	1	1	0
c	0	0	1	

Validez semántica de fórmulas: modelos

Ejemplo

Sea $\varphi : \forall x(P(x) \to R(x)) \to \exists y Q(y)$.
Sean $D = \{a, b, c\}$, $P^I = \{a, b\}$, $R^I = \{b\}$ *y* $Q^I = \emptyset$.
Usando la siguiente tabla (el dominio D *contiene sólo tres elementos) podemos determinar el valor de la subfórmula* $\forall x(P(x) \to R(x))$:

x	$P^I(x)$	$R^I(x)$	$(P(x) \to R(x))^I$	$(\forall x(P(x) \to R(x)))^I$
a	1	0	0	
b	1	1	1	0
c	0	0	1	

Se sigue que $(\forall x(P(x) \to R(x)))^I = 0$ *(esta conclusión se podría haber deducido mirando sólo a la primera fila de la tabla). Por tanto, la fórmula inicial* φ *tiene valor 1 bajo la interpretación dada, siendo una implicación con premisa siempre falsa. Se deduce que la interpretación* (D, I) *es un modelo de* φ.

Validez semántica de fórmulas: modelos

Observación

1) Una fórmula φ es válida si y sólo si su negación, $\neg\varphi$, es insatisfacible.

Validez semántica de fórmulas: modelos

Observación

1) Una fórmula φ es válida si y sólo si su negación, $\neg\varphi$, es insatisfacible.
2) Si una fórmula φ es cerrada, dada una interpretación (D, I), su valor de verdad no depende de la asignación elegida y se puede denotar φ^I.
En este caso φ es satisfacible bajo (D, I) si y sólo si es verdadera bajo (D, I).

Validez semántica de fórmulas: modelos

Observación

1) Una fórmula φ es válida si y sólo si su negación, $\neg\varphi$, es insatisfacible.
2) Si una fórmula φ es cerrada, dada una interpretación (D, I), su valor de verdad no depende de la asignación elegida y se puede denotar φ^I.
En este caso φ es satisfacible bajo (D, I) si y sólo si es verdadera bajo (D, I).
3) Si una fórmula φ (no cerrada) contiene las variables libres $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, se llama **cierre universal de** φ *a la fórmula cerrada $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Validez semántica de fórmulas: modelos

Observación

1) Una fórmula φ *es válida si y sólo si su negación,* $\neg\varphi$*, es insatisfacible.*
2) Si una fórmula φ *es cerrada, dada una interpretación* (D, I)*, su valor de verdad no depende de la asignación elegida y se puede denotar* φ^I*.*
En este caso φ *es satisfacible bajo* (D, I) *si y sólo si es verdadera bajo* (D, I)*.*
3) Si una fórmula φ *(no cerrada) contiene las variables libres* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$*, se llama* **cierre universal de** φ *a la fórmula cerrada* $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*.*
Por tanto, en el caso de una fórmula φ *no cerrada:*

- φ *es verdadera bajo* (D, I) *si y sólo si* $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *es verdadera bajo* (D, I) *y*

Validez semántica de fórmulas: modelos

Observación

1) Una fórmula φ *es válida si y sólo si su negación,* $\neg\varphi$*, es insatisfacible.*
2) Si una fórmula φ *es cerrada, dada una interpretación* (D, I)*, su valor de verdad no depende de la asignación elegida y se puede denotar* φ^I*.*
En este caso φ *es satisfacible bajo* (D, I) *si y sólo si es verdadera bajo* (D, I)*.*
3) Si una fórmula φ *(no cerrada) contiene las variables libres* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$*, se llama* **cierre universal de** φ *a la fórmula cerrada* $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*.*
Por tanto, en el caso de una fórmula φ *no cerrada:*

- φ *es verdadera bajo* (D, I) *si y sólo si* $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *es verdadera bajo* (D, I) *y*
- φ *es válida si y sólo si* $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *es válida.*

Validez semántica de fórmulas: modelos

Observación

1) Una fórmula φ *es válida si y sólo si su negación,* $\neg\varphi$*, es insatisfacible.*
2) Si una fórmula φ *es cerrada, dada una interpretación* (D, I)*, su valor de verdad no depende de la asignación elegida y se puede denotar* φ^I.
En este caso φ *es satisfacible bajo* (D, I) *si y sólo si es verdadera bajo* (D, I).
3) Si una fórmula φ *(no cerrada) contiene las variables libres* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$*, se llama* **cierre universal de** φ *a la fórmula cerrada* $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Por tanto, en el caso de una fórmula φ *no cerrada:*

- φ *es verdadera bajo* (D, I) *si y sólo si* $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *es verdadera bajo* (D, I) *y*
- φ *es válida si y sólo si* $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *es válida.*

NOTA: *de las anteriores observaciones se sigue que* **basta estudiar la validez de fórmulas cerradas**.

Contenido

Evaluación semántica de deducciones

Otro concepto fundamental que vamos a definir es el concepto de consecuencia lógica.

Evaluación semántica de deducciones

Otro concepto fundamental que vamos a definir es el concepto de consecuencia lógica.

Las definiciones son similares a las vistas en lógica proposicional, teniendo en cuenta que tenemos que reemplazar el concepto de valoración por los de interpretación y asignación.

Evaluación semántica de deducciones

Otro concepto fundamental que vamos a definir es el concepto de consecuencia lógica.
Las definiciones son similares a las vistas en lógica proposicional, teniendo en cuenta que tenemos que reemplazar el concepto de valoración por los de interpretación y asignación.

Definición

Se dice que una fórmula φ *es* **consecuencia lógica** *de un conjunto finito de fórmulas* $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n\}$ *si cualquier interpretación* (D, I) *y cualquier asignación* A *que satisfacen todo elemento del conjunto* Φ *satisfacen también la fórmula* φ.

Evaluación semántica de deducciones

Otro concepto fundamental que vamos a definir es el concepto de consecuencia lógica.

Las definiciones son similares a las vistas en lógica proposicional, teniendo en cuenta que tenemos que reemplazar el concepto de valoración por los de interpretación y asignación.

Definición

Se dice que una fórmula φ *es* **consecuencia lógica** *de un conjunto finito de fórmulas* $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n\}$ *si cualquier interpretación* (D, I) *y cualquier asignación* A *que satisfacen todo elemento del conjunto* Φ *satisfacen también la fórmula* φ.

De forma equivalente, φ *es consecuencia lógica de* Φ *si* $\varphi_i^{I,A} = 1$ *para todo* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *implica* $\varphi^{I,A} = 1$.

Evaluación semántica de deducciones

Otro concepto fundamental que vamos a definir es el concepto de consecuencia lógica.

Las definiciones son similares a las vistas en lógica proposicional, teniendo en cuenta que tenemos que reemplazar el concepto de valoración por los de interpretación y asignación.

Definición

Se dice que una fórmula φ *es* **consecuencia lógica** *de un conjunto finito de fórmulas* $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n\}$ *si cualquier interpretación* (D, I) *y cualquier asignación* A *que satisfacen todo elemento del conjunto* Φ *satisfacen también la fórmula* φ.

De forma equivalente, φ *es consecuencia lógica de* Φ *si* $\varphi_i^{I,A} = 1$ *para todo* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *implica* $\varphi^{I,A} = 1$.

Si φ *es consecuencia lógica de* Φ *también se dice que* Φ **implica lógicamente** *a* φ *y se escribe* $\Phi \models \varphi$.

Evaluación semántica de deducciones

A continuación recordamos la definición de razonamiento válido:

Definición

Sean $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n\}$ *un conjunto finito de fórmulas y* φ *una fórmula. Se define* **deducción** *o* **razonamiento** *a la fórmula*

$$((\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \varphi).$$

Evaluación semántica de deducciones

A continuación recordamos la definición de razonamiento válido:

Definición

Sean $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n\}$ *un conjunto finito de fórmulas y* φ *una fórmula. Se define* **deducción** *o* **razonamiento** *a la fórmula*

$$((\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \varphi).$$

Se dice que el razonamiento anterior es **correcto** *o* **lógicamente válido** *si*

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \models \varphi,$$

es decir, si el conjunto Φ *de las* **premisas** *o* **hipótesis** *del razonamiento implica lógicamente a la* **conclusión** *o* **tesis** φ.

Evaluación semántica de deducciones

El siguiente teorema extiende a la lógica de primer orden la relación existente entre la validez de una fórmula y el concepto de consecuencia lógica ya vista en el contexto de la lógica proposicional.

Evaluación semántica de deducciones

El siguiente teorema extiende a la lógica de primer orden la relación existente entre la validez de una fórmula y el concepto de consecuencia lógica ya vista en el contexto de la lógica proposicional.

Teorema

Sean $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n\}$ *un conjunto finito de fórmulas y* φ *una fórmula.*

Evaluación semántica de deducciones

El siguiente teorema extiende a la lógica de primer orden la relación existente entre la validez de una fórmula y el concepto de consecuencia lógica ya vista en el contexto de la lógica proposicional.

Teorema

Sean $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n\}$ *un conjunto finito de fórmulas y* φ *una fórmula.*
La siguientes afirmaciones son equivalentes:
1) φ *es consecuencia lógica de* Φ,

Evaluación semántica de deducciones

El siguiente teorema extiende a la lógica de primer orden la relación existente entre la validez de una fórmula y el concepto de consecuencia lógica ya vista en el contexto de la lógica proposicional.

Teorema

Sean $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n\}$ un conjunto finito de fórmulas y φ una fórmula.
La siguientes afirmaciones son equivalentes:
1) φ es consecuencia lógica de Φ,
2) $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \varphi$ es una fórmula válida (y se escribe $\models ((\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \varphi)$),

Evaluación semántica de deducciones

El siguiente teorema extiende a la lógica de primer orden la relación existente entre la validez de una fórmula y el concepto de consecuencia lógica ya vista en el contexto de la lógica proposicional.

Teorema

Sean $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n\}$ *un conjunto finito de fórmulas y* φ *una fórmula.*
La siguientes afirmaciones son equivalentes:
1) φ *es consecuencia lógica de* Φ,
2) $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \varphi$ *es una fórmula válida (y se escribe* $\models ((\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \varphi)$*),*
3) $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \wedge \neg\varphi$ *es insatisfacible (***Reducción al absurdo***).*

Evaluación semántica de deducciones

Ejemplo

Volvamos a considerar el razonamiento

$$\frac{\begin{array}{l}\textit{Todos los hombres son mortales,}\\ \textit{Sócrates es un hombre,}\end{array}}{\textit{Sócrates es mortal.}}$$

Evaluación semántica de deducciones

Ejemplo

Volvamos a considerar el razonamiento

$$\frac{\begin{array}{l}\textit{Todos los hombres son mortales,}\\ \textit{Sócrates es un hombre,}\end{array}}{\textit{Sócrates es mortal.}}$$

Vimos que este razonamiento no es válido en lógica proposicional.

Evaluación semántica de deducciones

Ejemplo

Volvamos a considerar el razonamiento

$$\begin{array}{l} \textit{Todos los hombres son mortales,} \\ \textit{Sócrates es un hombre,} \\ \hline \textit{Sócrates es mortal.} \end{array}$$

Vimos que este razonamiento no es válido en lógica proposicional. Su formalización en lógica de primer orden es

$$\begin{array}{l} \forall x(H(x) \to M(x)), \\ H(s), \\ \hline M(s). \end{array}$$

En este caso $\Phi = \{\forall x(H(x) \to M(x)), H(s)\}$ *y* $\varphi : M(s)$.

Evaluación semántica de deducciones

Ejemplo

Volvamos a considerar el razonamiento

$$\frac{\begin{array}{l}\textit{Todos los hombres son mortales,}\\ \textit{Sócrates es un hombre,}\end{array}}{\textit{Sócrates es mortal.}}$$

Vimos que este razonamiento no es válido en lógica proposicional. Su formalización en lógica de primer orden es

$$\frac{\begin{array}{l}\forall x(H(x) \to M(x)),\\ H(s),\end{array}}{M(s).}$$

En este caso $\Phi = \{\forall x(H(x) \to M(x)), H(s)\}$ *y* $\varphi : M(s)$. *Queremos verificar si* Φ *implica lógicamente* φ.

Evaluación semántica de deducciones

Ejemplo

Sean (D, I) *y* A *tales que*

$$(\forall x(H(x) \to M(x)))^{I,A} = 1, \quad (H(s))^{I,A} = 1.$$

Evaluación semántica de deducciones

Ejemplo

Sean (D, I) *y* A *tales que*

$$(\forall x(H(x) \to M(x)))^{I,A} = 1, \quad (H(s))^{I,A} = 1.$$

Se trata de verificar si, necesariamente, tiene que ser $M(s)^{I,A} = 1$.

Evaluación semántica de deducciones

Ejemplo

Sean (D, I) *y* A *tales que*

$$(\forall x(H(x) \to M(x)))^{I,A} = 1, \quad (H(s))^{I,A} = 1.$$

Se trata de verificar si, necesariamente, tiene que ser $M(s)^{I,A} = 1$.
Por definición, $(\forall x(H(x) \to M(x)))^{I,A} = 1$ *si y sólo si* $(H(x) \to M(x)))^{I,A} = 1$ *para todo* $x^A \in D$.

Evaluación semántica de deducciones

Ejemplo

Sean (D, I) *y* A *tales que*

$$(\forall x(H(x) \to M(x)))^{I,A} = 1, \quad (H(s))^{I,A} = 1.$$

Se trata de verificar si, necesariamente, tiene que ser $M(s)^{I,A} = 1$.
Por definición, $(\forall x(H(x) \to M(x)))^{I,A} = 1$ *si y sólo si* $(H(x) \to M(x)))^{I,A} = 1$ *para todo* $x^A \in D$. *En particular,* $(H(s) \to M(s)))^{I,A} = 1$.
Siendo $H(s)^{I,A}$ *y* $M(s)^{I,A}$ *fórmulas proposicionales, la condición anterior es equivalente a* $(\neg H(s) \vee M(s)))^{I,A} = 1$.

Evaluación semántica de deducciones

Ejemplo

Sean (D, I) *y* A *tales que*

$$(\forall x(H(x) \to M(x)))^{I,A} = 1, \quad (H(s))^{I,A} = 1.$$

Se trata de verificar si, necesariamente, tiene que ser $M(s)^{I,A} = 1$.
Por definición, $(\forall x(H(x) \to M(x)))^{I,A} = 1$ *si y sólo si* $(H(x) \to M(x)))^{I,A} = 1$ *para todo* $x^A \in D$. *En particular,* $(H(s) \to M(s)))^{I,A} = 1$.
Siendo $H(s)^{I,A}$ *y* $M(s)^{I,A}$ *fórmulas proposicionales, la condición anterior es equivalente a* $(\neg H(s) \vee M(s)))^{I,A} = 1$.
Por hipótesis sabemos que $(H(s))^{I,A} = 1$, *es decir, que* $(\neg H(s))^{I,A} = 0$.

Evaluación semántica de deducciones

Ejemplo

Sean (D, I) *y* A *tales que*

$$(\forall x (H(x) \to M(x)))^{I,A} = 1, \quad (H(s))^{I,A} = 1.$$

Se trata de verificar si, necesariamente, tiene que ser $M(s)^{I,A} = 1$.
Por definición, $(\forall x (H(x) \to M(x)))^{I,A} = 1$ *si y sólo si* $(H(x) \to M(x)))^{I,A} = 1$ *para todo* $x^A \in D$. *En particular,* $(H(s) \to M(s)))^{I,A} = 1$.
Siendo $H(s)^{I,A}$ *y* $M(s)^{I,A}$ *fórmulas proposicionales, la condición anterior es equivalente a* $(\neg H(s) \vee M(s)))^{I,A} = 1$.
Por hipótesis sabemos que $(H(s))^{I,A} = 1$, *es decir, que* $(\neg H(s))^{I,A} = 0$.
Se sigue que para que se verifique $(\neg H(s) \vee M(s)))^{I,A} = 1$ *tiene que ser* $(M(s))^{I,A} = 1$.

Evaluación semántica de deducciones

Ejemplo

Sean (D, I) *y* A *tales que*

$$(\forall x(H(x) \to M(x)))^{I,A} = 1, \quad (H(s))^{I,A} = 1.$$

Se trata de verificar si, necesariamente, tiene que ser $M(s)^{I,A} = 1$.
Por definición, $(\forall x(H(x) \to M(x)))^{I,A} = 1$ *si y sólo si* $(H(x) \to M(x)))^{I,A} = 1$ *para todo* $x^A \in D$. *En particular,* $(H(s) \to M(s)))^{I,A} = 1$.
Siendo $H(s)^{I,A}$ *y* $M(s)^{I,A}$ *fórmulas proposicionales, la condición anterior es equivalente a* $(\neg H(s) \vee M(s)))^{I,A} = 1$.
Por hipótesis sabemos que $(H(s))^{I,A} = 1$, *es decir, que* $(\neg H(s))^{I,A} = 0$.
Se sigue que para que se verifique $(\neg H(s) \vee M(s)))^{I,A} = 1$ *tiene que ser* $(M(s))^{I,A} = 1$.
Por tanto Φ *implica lógicamente* φ.

Evaluación semántica de deducciones

Ejemplo

Se puede verificar que las fórmulas de la siguiente tabla son implicaciones lógicas.

$\models t = t$	*Reflexividad de la igualdad*
$t = t' \models t' = t$	*Simetría de la igualdad*
$\{t = t', t' = t''\} \models t = t''$	*Transitividad de la igualdad*
$\{\varphi[x/t], t = t'\} \models \varphi[x/t']$	*Sustitutividad de la igualdad*
$\forall x \varphi(x) \models \varphi[x/t]$	*Hipótesis universal*
$\varphi[x/t] \models \exists x \varphi(x)$	*Tesis existencial*

Contenido

Equivalencia de fórmulas

Sustitución de una variable por un término:
Sea φ una fórmula que contenga una variable x. Si queremos sustituir la variable x por un término t para obtener la nueva fórmula $\varphi[x/t]$, es necesario no modificar el significado de la fórmulas original.

Equivalencia de fórmulas

Sustitución de una variable por un término:
Sea φ una fórmula que contenga una variable x. Si queremos sustituir la variable x por un término t para obtener la nueva fórmula $\varphi[x/t]$, es necesario no modificar el significado de la fórmulas original.
En la nueva fórmula $\varphi[x/t]$,

- sólo las apariciones libres de x en φ se reemplazan por t,

Equivalencia de fórmulas

Sustitución de una variable por un término:
Sea φ una fórmula que contenga una variable x. Si queremos sustituir la variable x por un término t para obtener la nueva fórmula $\varphi[x/t]$, es necesario no modificar el significado de la fórmulas original.
En la nueva fórmula $\varphi[x/t]$,

- sólo las apariciones libres de x en φ se reemplazan por t,
- si algún cuantificador de φ hace que queden ligadas variables de t después de la sustitución, la variable ligada de esa cuantificación se reemplaza por otra.

Equivalencia de fórmulas

Ejemplo

Sea $\varphi : \forall x R(x, y)$ *y sea* $\mathbb{I} = (D, I)$ *la interpretación con dominio* $D = \mathbb{N}$ *(los números naturales) y* $R^I(x, y) = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \leq y\}$ *(la relación de orden usual en* $\mathbb{N}$ *).*

Equivalencia de fórmulas

Ejemplo

Sea $\varphi : \forall x R(x,y)$ *y sea* $\mathbb{I} = (D, I)$ *la interpretación con dominio* $D = \mathbb{N}$ *(los números naturales) y* $R^I(x,y) = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \leq y\}$ *(la relación de orden usual en* $\mathbb{N}$ *).*
Sustituyendo la variable libre y *por* z *obtenemos la fórmula*

$$\varphi[y/z] : \forall x R(x,z),$$

y no se altera el significado de φ. *Las dos fórmulas son falsas bajo* $\mathbb{I} = (D, I)$, *ya que el conjunto* $\mathbb{N}$ *no tiene máximo.*

Equivalencia de fórmulas

Ejemplo

Sea $\varphi : \forall x R(x, y)$ *y sea* $\mathbb{I} = (D, I)$ *la interpretación con dominio* $D = \mathbb{N}$ *(los números naturales) y* $R^I(x, y) = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \leq y\}$ *(la relación de orden usual en* $\mathbb{N}$*).*
Sustituyendo la variable libre y *por* z *obtenemos la fórmula*

$$\varphi[y/z] : \forall x R(x, z),$$

y no se altera el significado de φ*. Las dos fórmulas son falsas bajo* $\mathbb{I} = (D, I)$*, ya que el conjunto* $\mathbb{N}$ *no tiene máximo.*
Sin embargo, si sustituimos y *por* x *obtenemos la fórmula*

$$\varphi[y/x] : \forall x R(x, x)$$

que es verdadera bajo $\mathbb{I} = (D, I)$*, siendo cierto que un cualquier número natural* n *verifica que* $n \leq n$ *(es la propiedad reflexiva de la relación).*

Equivalencia de fórmulas

Ejemplo

Para sustituir y *por* x *sin alterar el significado de la fórmula y el tipo de ocurrencia de sus variables, tendríamos que cambiar de nombre también a la variable* x*. Por ejemplo, se puede sustituir* x *por* v *y, en la nueva fórmula obtenida* $\varphi[x/v]$, y *por* x.

Equivalencia de fórmulas

Ejemplo

Para sustituir y *por* x *sin alterar el significado de la fórmula y el tipo de ocurrencia de sus variables, tendríamos que cambiar de nombre también a la variable* x. *Por ejemplo, se puede sustituir* x *por* v *y, en la nueva fórmula obtenida* $\varphi[x/v]$, y *por* x.
Así se obtiene la fórmula:

$$\varphi[x/v][y/x] = \varphi[x/v, y/x] : \forall v R(v, x).$$

Equivalencia de fórmulas

Ejemplo

Para sustituir y *por* x *sin alterar el significado de la fórmula y el tipo de ocurrencia de sus variables, tendríamos que cambiar de nombre también a la variable* x. *Por ejemplo, se puede sustituir* x *por* v *y, en la nueva fórmula obtenida* $\varphi[x/v]$, y *por* x.
Así se obtiene la fórmula:

$$\varphi[x/v][y/x] = \varphi[x/v, y/x] : \forall v R(v, x).$$

Respetando los dos criterios anteriores, se puede definir recursivamente y rigurosamente la noción de sustitución de una variable por un término. Además, se puede demostrar el **lema de sustitución**, que afirma que interpretar la fórmula $\varphi[x/t]$ en una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ y una asignación A es lo mismo que interpretar la fórmula original φ en la misma interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ y en la asignación $A[x/t]$.

Equivalencia de fórmulas

Ejemplo

Sea $\varphi : \exists z(x \cdot z = y)$ *en el dominio de los números naturales* $\mathbb{N}$ *con el producto y la suma usuales.*

Equivalencia de fórmulas

Ejemplo

Sea $\varphi : \exists z(x \cdot z = y)$ *en el dominio de los números naturales* $\mathbb{N}$ *con el producto y la suma usuales. Para sustituir correctamente la variable libre* y *por* $z + z$*, tendremos que escribir*

$$\varphi[z/u, y/z + z] : \exists u(x \cdot u = z + z).$$

Equivalencia de fórmulas

Observación

En informática, la operación de sustitución es importante en la **verificación de programas**. *La ejecución de un programa tiene como efecto la transformación del estado de unas variables de una condición inicial a una condición final. Verificar un programa consiste en demostrar que, si el estado inicial de las variables cumple una cierta condición inicial, entonces su estado final cumple con la condición final deseada. Las condiciones iniciales y finales se suelen representar por medio de fórmulas de la lógica de primer orden. Para asignar valores a estas condiciones se introduce una interpretación que representa el tipo de datos sobre el cuál se puede operar.*

Equivalencia de fórmulas

Equivalencia de fórmulas:
El último concepto fundamental que vamos a estudiar en este capítulo es el concepto de equivalencia lógica entre fórmulas. Las definiciones y resultados son similares a los ya estudiados para la lógica proposicional.

Equivalencia de fórmulas

Equivalencia de fórmulas:
El último concepto fundamental que vamos a estudiar en este capítulo es el concepto de equivalencia lógica entre fórmulas. Las definiciones y resultados son similares a los ya estudiados para la lógica proposicional. Para la lógica de primer orden tendremos que añadir a nuestra lista las equivalencias relativas a los cuantificadores, que no aparecen en la lógica proposicional.

Equivalencia de fórmulas

Equivalencia de fórmulas:
El último concepto fundamental que vamos a estudiar en este capítulo es el concepto de equivalencia lógica entre fórmulas. Las definiciones y resultados son similares a los ya estudiados para la lógica proposicional. Para la lógica de primer orden tendremos que añadir a nuestra lista las equivalencias relativas a los cuantificadores, que no aparecen en la lógica proposicional.

Definición

Sean φ y ψ dos fórmulas. Se dice que φ **equivale lógicamente** *a ψ si y sólo si*

$$\varphi \models \psi \quad y \quad \psi \models \varphi.$$

Si φ y ψ son equivalentes se escribe $\varphi \equiv \psi$.

Equivalencia de fórmulas

Observación

Se sigue de la definición que si φ y ψ son dos fórmulas equivalentes, entonces tienen los mismos valores de verdad bajo una cualquier interpretación y asignación. Por tanto, no es difícil verificar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

Equivalencia de fórmulas

Observación

Se sigue de la definición que si φ *y* ψ *son dos fórmulas equivalentes, entonces tienen los mismos valores de verdad bajo una cualquier interpretación y asignación. Por tanto, no es difícil verificar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- $\varphi \equiv \psi$.

Equivalencia de fórmulas

Observación

Se sigue de la definición que si φ *y* ψ *son dos fórmulas equivalentes, entonces tienen los mismos valores de verdad bajo una cualquier interpretación y asignación. Por tanto, no es difícil verificar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- $\varphi \equiv \psi$.
- $\models \varphi \leftrightarrow \psi$.

Equivalencia de fórmulas

Observación

Se sigue de la definición que si φ y ψ son dos fórmulas equivalentes, entonces tienen los mismos valores de verdad bajo una cualquier interpretación y asignación. Por tanto, no es difícil verificar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\varphi \equiv \psi$.
- $\models \varphi \leftrightarrow \psi$.
- $\models \varphi \to \psi$ *y* $\models \psi \to \varphi$.

Equivalencia de fórmulas

Observación

Se sigue de la definición que si φ y ψ son dos fórmulas equivalentes, entonces tienen los mismos valores de verdad bajo una cualquier interpretación y asignación. Por tanto, no es difícil verificar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\varphi \equiv \psi$.
- $\models \varphi \leftrightarrow \psi$.
- $\models \varphi \rightarrow \psi$ *y* $\models \psi \rightarrow \varphi$.

Las siguientes tablas contienen las principales equivalencias relativas a conectivos y cuantificadores, respectivamente.

Equivalencia de fórmulas

$\varphi \wedge \top \equiv \varphi \quad \varphi \wedge \bot \equiv \bot$ $\varphi \vee \top \equiv \top \quad \varphi \vee \bot \equiv \varphi$	**Leyes de Identidad**
$\varphi \wedge \neg\varphi \equiv \bot$	**No contradicción**
$\varphi \vee \neg\varphi \equiv \top$	**Tercio excluso**
$\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi \quad \varphi \vee \varphi \equiv \varphi$	**Idempotencia**
$\varphi_1 \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv \varphi_1 \quad \varphi_1 \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \equiv \varphi_1$	**Absorción**
$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \equiv \varphi_2 \wedge \varphi_1 \quad \varphi_1 \vee \varphi_2 \equiv \varphi_2 \vee \varphi_1$ $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) \equiv (\varphi_2 \leftrightarrow \varphi_1)$	**Conmutatividad**
$(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3 \equiv \varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3)$ $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3 \equiv \varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)$	**Asociatividad**
$\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3)$ $\varphi_1 \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_3)$ $\varphi_1 \to (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \to \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \to \varphi_3)$ $\varphi_1 \to (\varphi_2 \vee \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \to \varphi_2) \vee (\varphi_1 \to \varphi_3)$	**Distributividad**
$\neg(\neg\varphi) \equiv \varphi$	**Doble negación**
$(\varphi_1 \to \varphi_2) \equiv (\neg\varphi_2 \to \neg\varphi_1)$	**Ley de contraposición**
$\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \equiv \neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2$ $\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv \neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$	**Leyes de De Morgan**
$\varphi_1 \to \varphi_2 \equiv \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$	**Interdefinición**
$\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \equiv (\varphi_1 \to \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \to \varphi_1)$	**Coimplicación**

Equivalencia de fórmulas

$\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$	$\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$
$\forall x\varphi_1 \wedge \forall x\varphi_2 \equiv \forall x(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$	$\exists x\varphi_1 \vee \exists x\varphi_2 \equiv \exists x(\varphi_1 \vee \varphi_2)$
$\forall x\forall y\varphi \equiv \forall y\forall x\varphi$	$\exists x\exists y\varphi \equiv \exists y\exists x\varphi$
$(\forall x\varphi_1) \vee \varphi_2 \equiv \forall x(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ *	$(\forall x\varphi_1) \wedge \varphi_2 \equiv \forall x(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ *
$(\exists x\varphi_1) \vee \varphi_2 \equiv \exists x(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ *	$(\exists x\varphi_1) \wedge \varphi_2 \equiv \exists x(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ *

* *Sólo si* x *no aparece libre en* φ_2

Equivalencia de fórmulas

$\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$	$\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$
$\forall x\varphi_1 \wedge \forall x\varphi_2 \equiv \forall x(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$	$\exists x\varphi_1 \vee \exists x\varphi_2 \equiv \exists x(\varphi_1 \vee \varphi_2)$
$\forall x\forall y\varphi \equiv \forall y\forall x\varphi$	$\exists x\exists y\varphi \equiv \exists y\exists x\varphi$
$(\forall x\varphi_1) \vee \varphi_2 \equiv \forall x(\varphi_1 \vee \varphi_2)\ *$	$(\forall x\varphi_1) \wedge \varphi_2 \equiv \forall x(\varphi_1 \wedge \varphi_2)\ *$
$(\exists x\varphi_1) \vee \varphi_2 \equiv \exists x(\varphi_1 \vee \varphi_2)\ *$	$(\exists x\varphi_1) \wedge \varphi_2 \equiv \exists x(\varphi_1 \wedge \varphi_2)\ *$

$*$ *Sólo si x no aparece libre en φ_2*

Observación

También en la lógica de primer orden la relación de equivalencia entre fórmulas es reflexiva, simétrica y transitiva. Por tanto es una relación binaria de equivalencia sobre el conjunto de todas las fórmulas. Dos fórmulas pertenecen a la misma clase de equivalencia si y sólo si tienen los mismos valores de verdad bajo una cualquier interpretación y asignación.

Equivalencia de fórmulas

Los siguientes resultados garantizan que la equivalencia lógica se preserva si, en una dada fórmula χ, reemplazamos una subfórmula φ por otra subfórmula ψ, equivalente a φ.

Equivalencia de fórmulas

Los siguientes resultados garantizan que la equivalencia lógica se preserva si, en una dada fórmula χ, reemplazamos una subfórmula φ por otra subfórmula ψ, equivalente a φ.

Teorema

Sea $\chi(\varphi)$ una fórmula que contiene una subfórmula φ y sea $\chi(\psi)$ la fórmula obtenida reemplazando la subfórmula φ por ψ.
Si $\varphi \equiv \psi$, entonces

$$\chi(\varphi) \equiv \chi(\psi).$$

Equivalencia de fórmulas

Los siguientes resultados garantizan que la equivalencia lógica se preserva si, en una dada fórmula χ, reemplazamos una subfórmula φ por otra subfórmula ψ, equivalente a φ.

Teorema

Sea $\chi(\varphi)$ una fórmula que contiene una subfórmula φ y sea $\chi(\psi)$ la fórmula obtenida reemplazando la subfórmula φ por ψ.
Si $\varphi \equiv \psi$, entonces

$$\chi(\varphi) \equiv \chi(\psi).$$

Teorema

Sean χ_1 y χ_2 dos fórmulas equivalentes. Reemplazando en χ_1 y χ_2 unos símbolos de proposiciones $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ por unas fórmulas $\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\}$, se obtiene la equivalencia

$$\chi_1[p_1/\varphi_1, p_2/\varphi_2, \cdots, p_n/\varphi_n] \equiv \chi_2[p_1/\varphi_1, p_2/\varphi_2, \cdots, p_n/\varphi_n].$$

Equivalencia de fórmulas

Ejemplo

Sea $\chi : \forall x(P(x) \wedge p \rightarrow Q(f(y)) \vee q)$. *Sabemos, por interdefinición, que la subfórmula* $\varphi : P(x) \wedge p \rightarrow Q(f(y)) \vee q$ *es equivalente a la fórmula* $\psi : \neg P(x) \vee \neg p \vee Q(f(y)) \vee q$.

Equivalencia de fórmulas

Ejemplo

Sea $\chi : \forall x(P(x) \wedge p \to Q(f(y)) \vee q)$. *Sabemos, por interdefinición, que la subfórmula* $\varphi : P(x) \wedge p \to Q(f(y)) \vee q$ *es equivalente a la fórmula* $\psi : \neg P(x) \vee \neg p \vee Q(f(y)) \vee q$. *Entonces*

$$\forall x(P(x) \wedge p \to Q(f(y)) \vee q) \equiv \forall x(\neg P(x) \vee \neg p \vee Q(f(y)) \vee q).$$

Equivalencia de fórmulas

Ejemplo

Sea $\chi : \forall x(P(x) \wedge p \to Q(f(y)) \vee q)$. *Sabemos, por interdefinición, que la subfórmula* $\varphi : P(x) \wedge p \to Q(f(y)) \vee q$ *es equivalente a la fórmula* $\psi : \neg P(x) \vee \neg p \vee Q(f(y)) \vee q$. *Entonces*

$$\forall x(P(x) \wedge p \to Q(f(y)) \vee q) \equiv \forall x(\neg P(x) \vee \neg p \vee Q(f(y)) \vee q).$$

Además, si en esta última equivalencia sustituimos las proposiciones $\{p, q\}$ *por las fórmulas* $\{R(y), S(u, v)\}$, *se obtiene la equivalencia*

$$\forall x(P(x) \wedge R(y) \to Q(f(y)) \vee S(u, v)) \equiv \forall x(\neg P(x) \vee \neg R(y) \vee Q(f(y)) \vee S(u, v)).$$

Equivalencia de fórmulas

Observación

(Conjuntos de conectivos)

Como vimos para la lógica proposicional, a partir de las equivalencias de las tablas anteriores es posible demostrar que en el lenguaje de la lógica de primer orden es suficiente emplear sólo los conectivos $\{\exists, \neg, \wedge\}$.

Equivalencia de fórmulas

Observación

(Conjuntos de conectivos)
Como vimos para la lógica proposicional, a partir de las equivalencias de las tablas anteriores es posible demostrar que en el lenguaje de la lógica de primer orden es suficiente emplear sólo los conectivos $\{\exists, \neg, \wedge\}$.
De forma similar, los conjuntos $\{\exists, \neg, \vee\}$ *y* $\{\forall, \neg, \wedge, \vee\}$ *permiten representar cualquier fórmula bien construida por medio de una fórmula equivalente, en la cual aparecen sólo los conectivos de los conjuntos indicados.*