

# LÓGICA

## HOJA 5

### Sintaxis de la lógica de predicados de primer orden

**Ejercicio 1** *Determina cuáles de las siguientes fórmulas (en forma abreviada) son abiertas y cuáles son cerradas. En cada caso, identifica las variables libres y ligadas.*

1.  $\forall x(Q(x, y) \rightarrow P(g(x), a, b)),$
2.  $\exists y(\forall x Q(x, y) \rightarrow P(g(x), a, b)),$
3.  $\exists y \forall x Q(x, y) \wedge P(g(x), a, b),$
4.  $\exists y \exists x Q(x, y) \wedge \neg \forall x P(g(x), a, b).$

**Ejercicio 2** *Representa en forma de árbol estructural las fórmulas del ejercicio anterior y los siguientes términos:*

1.  $f(g(a, x), h(x, i(y, b)), c),$
2.  $f(g(x), h(x, y), i(y, b), l(x, c)).$

**Ejercicio 3** (HLR) *Usando el principio de recursión estructural, define la función*

$$Lig : \mathbf{F} \longrightarrow P(\mathbf{Var}),$$

*que a cada fórmula  $\varphi$  asocia el conjunto  $Lig(\varphi)$  de sus variables ligadas.*

**Ejercicio 4** *Define, utilizando recursión estructural, la función*

$$f : F \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$$

*que asigna a cada fórmula  $\varphi \in F$  de la lógica de primer orden el número de veces que aparece el conectivo binario “ $\wedge$ ” en esa fórmula.*

**Ejercicio 5** Formaliza las siguientes oraciones con el lenguaje de la lógica de primer orden. Indica cuál es el dominio elegido y los símbolos de constante, proposición atómica, función y predicado que utilizas.

a) Todos los unicornios, salvo Toby, son azules. No hay centauros verdes. Los pegazos sólo ayudan a los unicornios.

b) En el conjunto de los números enteros se cumple que cualquier número que sea múltiplo de 6 se puede escribir como el producto de un múltiplo de 2 por un múltiplo de 3.

**Ejercicio 6** Sean  $T$  y  $F$  los conjuntos de los términos y de las fórmulas de la lógica de predicados de primer orden.

a) Usando recursión estructural, define la función  $fT : T \rightarrow \mathbb{N}$ , que asocia a todo término  $t \in T$  el número de símbolos (de cualquier tipo) que aparecen en la expresión usual de  $t$  (es decir,  $fT(t)$  es la longitud de la palabra que coincide con  $t$ ).

b) Usando recursión estructural, define la función  $f : F \rightarrow \mathbb{N}$ , que asocia a toda fórmula  $\varphi \in F$  el número de símbolos (de cualquier tipo) que aparecen en la expresión usual de  $\varphi$  (es decir,  $f(\varphi)$  es la longitud de la palabra que coincide con  $\varphi$ ).

**Ejercicio 7** Formaliza las siguientes frases en lógica de primer orden. Para cada una de ellas, escribe su negación y vuelve a traducirla al lenguaje natural.

1. Sólo los científicos que trabajan en áreas aplicadas son famosos.
2. Algunos caballos son salvajes.
3. Todas las personas tienen algún amigo.
4. En los números reales, el producto de cualquier número real no negativo por cualquier número negativo es no negativo. El producto de cualquier número no negativo por cualquier número no negativo es no negativo.
5. En los números naturales, el siguiente de cualquier número par no es par. El siguiente de cualquier número no par es par. El producto de cualquier número par por cualquier natural es par.

6. *Si el producto de dos números naturales es múltiplo de un primo, entonces uno de ellos es múltiplo del primo.*
7. *Sólo las buenas enfermeras atienden con paciencia a los enfermos tísicos.*
8. *Los aficionados del Madrid son amigos de los aficionados del Betis. Algunos aficionados del Madrid son amigos de los aficionados del Betis. Algunos aficionados del Madrid sólo son amigos de aficionados del Betis.*
9. *Dos hermanos nunca tienen la misma opinión respecto a todos los aspectos de la vida.*

**Ejercicio 8** *Formaliza el siguiente argumento en la lógica de primer orden:*

*Dos personas son hermanas si tienen el mismo padre. Dos personas son primas si tienen el mismo abuelo. El padre de Juan es hijo único. Por tanto: sus primos son sus hermanos.*

**Ejercicio 9** *En el lenguaje de la lógica de predicados y tomando como dominio el conjunto  $\mathbb{N}$  de los números naturales, formaliza los siguientes enunciados:*

- a) *Para todo par de números naturales  $x$  e  $y$ , el mínimo común múltiplo de  $x$  e  $y$  es positivo.*
- b) *Todo número natural es menor o igual que cualquiera de sus múltiplos.*
- c) *Para todo par de números naturales  $x$  e  $y$ , el mínimo común múltiplo de  $x$  e  $y$  es menor o igual que  $xy$ .*
- d)  *$y$  no es un múltiplo de  $x$ , a menos que el mínimo común múltiplo entre  $x$  e  $y$  sea igual a  $y$ .*