BLOQUE II:

Tema 3

TEORÍA DE LA DEMOSTRACIÓN Y SISTEMA DE DEDUCCIÓN NATURAL DE GENZEN.

Lógica

Grado en Ingeniería Informática

Alessandra Gallinari

URJC

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Teoría de la demostración

En este capítulo estudiaremos la extensión del sistema de deducción natural a la lógica de primer orden.

Teoría de la demostración

En este capítulo estudiaremos la extensión del sistema de deducción natural a la lógica de primer orden.
Recordamos que la **teoría de la demostración** nos proporciona métodos alternativos a los métodos semánticos para averiguar

- **la validez de una fórmula**: si φ es una fórmula válida se dice que es **demostrable** y se escribe $\vdash \varphi$.

Teoría de la demostración

En este capítulo estudiaremos la extensión del sistema de deducción natural a la lógica de primer orden.
Recordamos que la **teoría de la demostración** nos proporciona métodos alternativos a los métodos semánticos para averiguar

- **la validez de una fórmula**: si φ es una fórmula válida se dice que es **demostrable** y se escribe $\vdash \varphi$.
- **si una fórmula φ es consecuencia lógica de un conjunto de premisas Φ**: si φ es consecuencia lógica de Φ se dice que φ es **deducible** en el sistema a partir de Φ y se escribe $\Phi \vdash \varphi$.

Las definiciones generales de sistema formal axiomático, teorema, deducción, métodos directos y por refutación son las mismas estudiadas en el caso de la lógica proposicional. Las iremos empleando a lo largo de todo el capítulo.

Teoría de la demostración

Teorema

(Teorema de la deducción) *Sean* $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ *un conjunto de fórmulas y* φ *una fórmula. Entonces*

Teoría de la demostración

Teorema

(Teorema de la deducción) *Sean* $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ *un conjunto de fórmulas y* φ *una fórmula. Entonces*

$a) \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi$ *implica que* $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}\} \vdash (\varphi_n \to \varphi)$

siempre que φ *no se deduzca de* φ_n *por medio de una regla de generalización condicional universal o existencial:*

- **Generalización universal condicional** *(*y *no aparece libre en* φ *y aparece libre en* ψ *):*

$$\frac{\vdash \varphi \to \psi(y)}{\vdash \varphi \to \forall x \psi(x)}$$

- **Generalización existencial condicional** *(*y *aparece libre en* φ *y no aparece libre en* ψ *):*

$$\frac{\vdash \varphi(y) \to \psi}{\vdash \exists x \varphi(x) \to \psi}$$

Teoría de la demostración

Teorema

$b)$ $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}\} \vdash (\varphi_n \to \varphi)$ *implica que* $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \vdash \varphi.$

Teoría de la demostración

Teorema

$b) \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}\} \vdash (\varphi_n \rightarrow \varphi)$ *implica que* $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi$.

La restricción sobre la validez de la implicación en el apartado a) del teorema de la deducción tiene como importante consecuencia el hecho de que, en la lógica de primer orden, no es siempre posible encontrar una fórmula válida que represente a una deducción correcta.

Teoría de la demostración

Teorema

$b)$ $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}\} \vdash (\varphi_n \rightarrow \varphi)$ *implica que* $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi$.

La restricción sobre la validez de la implicación en el apartado a) del teorema de la deducción tiene como importante consecuencia el hecho de que, en la lógica de primer orden, no es siempre posible encontrar una fórmula válida que represente a una deducción correcta.

Ya comentamos que en la lógica de primer orden no existe ningún método de demostración que sea decidible. Por tanto, la extensión de la teoría de los tableaux sintácticos a la lógica de primer orden no puede proporcionar un método eficaz y finito para establecer la satisfacibilidad de una fórmula.

Contenido

Definición del sistema de deducción natural de Gentzen

La extensión del sistema de deducción natural de la lógica proposicional a la lógica de predicados mantiene su carácter intuitivo, ya que se basa en deducciones. Las ocho reglas de inferencia de la definición de este sistema para la lógica proposicional siguen valiendo y tienen ahora que ser completadas por reglas de inferencia para los cuantificadores.

Definición del sistema de deducción natural de Gentzen

La extensión del sistema de deducción natural de la lógica proposicional a la lógica de predicados mantiene su carácter intuitivo, ya que se basa en deducciones. Las ocho reglas de inferencia de la definición de este sistema para la lógica proposicional siguen valiendo y tienen ahora que ser completadas por reglas de inferencia para los cuantificadores.

Reglas del sistema de deducción natural para los cuantificadores:

Definición del sistema de deducción natural de Gentzen

La extensión del sistema de deducción natural de la lógica proposicional a la lógica de predicados mantiene su carácter intuitivo, ya que se basa en deducciones. Las ocho reglas de inferencia de la definición de este sistema para la lógica proposicional siguen valiendo y tienen ahora que ser completadas por reglas de inferencia para los cuantificadores.

Reglas del sistema de deducción natural para los cuantificadores:

(I $\forall$): Regla de introducción del cuantificador universal

$$\varphi(y) \vdash \forall x \varphi(x).$$

Definición del sistema de deducción natural de Gentzen

La extensión del sistema de deducción natural de la lógica proposicional a la lógica de predicados mantiene su carácter intuitivo, ya que se basa en deducciones. Las ocho reglas de inferencia de la definición de este sistema para la lógica proposicional siguen valiendo y tienen ahora que ser completadas por reglas de inferencia para los cuantificadores.

Reglas del sistema de deducción natural para los cuantificadores:

(I ∀): Regla de introducción del cuantificador universal

$$\varphi(y) \vdash \forall x \varphi(x).$$

NOTA: la forma de interpretar esta regla NO es que de la validez de $\varphi(y)$ para un elemento del dominio y se deduce la validez de $\varphi(x)$ para todo elemento x.

Definición del sistema de deducción natural de Gentzen

La extensión del sistema de deducción natural de la lógica proposicional a la lógica de predicados mantiene su carácter intuitivo, ya que se basa en deducciones. Las ocho reglas de inferencia de la definición de este sistema para la lógica proposicional siguen valiendo y tienen ahora que ser completadas por reglas de inferencia para los cuantificadores.

Reglas del sistema de deducción natural para los cuantificadores:

(I ∀): Regla de introducción del cuantificador universal

$$\varphi(y) \vdash \forall x \varphi(x).$$

NOTA: la forma de interpretar esta regla NO es que de la validez de $\varphi(y)$ para un elemento del dominio y se deduce la validez de $\varphi(x)$ para todo elemento x.
Lo que se entiende con la notación empleada es que en $\varphi(y)$ la variable y representa un cualquier elemento del dominio, no un elemento especificado.

Definición del sistema de deducción natural de Gentzen

Con la notación de Fitting (I $\forall$) se representa como:

$$\boxed{\begin{array}{l} y \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdash \varphi(y) \end{array}}$$

$$\vdash \forall x \varphi(x)$$

Definición del sistema de deducción natural de Gentzen

Con la notación de Fitting (I $\forall$) se representa como:

$$\boxed{\begin{array}{l} y \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdash \varphi(y) \end{array}}$$

$$\vdash \forall x \varphi(x)$$

Notar también que y NO es una premisa auxiliar de una subdeducción. La notación de Fitting que estamos empleando es de una subdeducción sin premisa y se interpreta como: si y es un símbolo de variable que no ha aparecido antes en la deducción madre y resulta que $\varphi(y)$ es válida, entonces $\forall x \varphi(x)$ es válida.

Definición del sistema de deducción natural de Gentzen

Ejemplo

Para poder deducir que "Todos los leones son carnívoros" en el dominio D *de los leones, siendo* $C(x) : x$ *es carnívoro, se puede usar la regla (I* $\forall$*) y escribir*

$$\boxed{\begin{array}{l} \quad y \\ \quad \vdots \\ \quad \vdots \\ \quad \vdash C(y) \end{array}}$$

$$\vdash \forall x C(x)$$

Definición del sistema de deducción natural de Gentzen

(E $\forall$): Regla de eliminación del cuantificador universal

$$\forall x \varphi(x) \vdash \varphi(t)$$

para cualquier término t.

Definición del sistema de deducción natural de Gentzen

(E $\forall$): Regla de eliminación del cuantificador universal

$$\forall x \varphi(x) \vdash \varphi(t)$$

para cualquier término t.
Una fórmula que se verifica para todo elemento del dominio, se verifica para cualquier t.

Definición del sistema de deducción natural de Gentzen

(E $\forall$): Regla de eliminación del cuantificador universal

$$\forall x \varphi(x) \vdash \varphi(t)$$

para cualquier término t.
Una fórmula que se verifica para todo elemento del dominio, se verifica para cualquier t.

Ejemplo

Queremos demostrar la deducción

$$\{\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)), \varphi(a)\} \vdash \psi(a).$$

Definición del sistema de deducción natural de Gentzen

(E $\forall$): Regla de eliminación del cuantificador universal

$$\forall x \varphi(x) \vdash \varphi(t)$$

para cualquier término t.
Una fórmula que se verifica para todo elemento del dominio, se verifica para cualquier t.

Ejemplo

Queremos demostrar la deducción

$$\{\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)), \varphi(a)\} \vdash \psi(a).$$

1) $\forall x(\varphi(x) \to \psi(x))$ *(Premisa)*
2) $\varphi(a)$ *(Premisa)*
3) $\vdash \varphi(a) \to \psi(a)$ *(E $\forall$(1))*
4) $\vdash \psi(a)$ *(E$\to$(2,3)).*

Definición del sistema de deducción natural de Gentzen

(I $\exists$): Regla de introducción del cuantificador existencial

$$\varphi(t) \vdash \exists x \varphi(x),$$

para cualquier término t.

Definición del sistema de deducción natural de Gentzen

(I $\exists$): Regla de introducción del cuantificador existencial

$$\varphi(t) \vdash \exists x \varphi(x),$$

para cualquier término t.
Si $\varphi(t)$ es verdadera, entonces $\exists x \varphi(x)$ es verdadera.

Definición del sistema de deducción natural de Gentzen

(I $\exists$): Regla de introducción del cuantificador existencial

$$\varphi(t) \vdash \exists x \varphi(x),$$

para cualquier término t.
Si $\varphi(t)$ es verdadera, entonces $\exists x \varphi(x)$ es verdadera.

Ejemplo

Queremos demostrar la deducción

$$\{\varphi(b), \exists x \varphi(x) \to \psi(a)\} \vdash \psi(a),$$

siendo a y b constantes del dominio.

Definición del sistema de deducción natural de Gentzen

(I $\exists$): Regla de introducción del cuantificador existencial

$$\varphi(t) \vdash \exists x \varphi(x),$$

para cualquier término t.
Si $\varphi(t)$ es verdadera, entonces $\exists x \varphi(x)$ es verdadera.

Ejemplo

Queremos demostrar la deducción

$$\{\varphi(b), \exists x \varphi(x) \rightarrow \psi(a)\} \vdash \psi(a),$$

siendo a y b constantes del dominio.

1) $\varphi(b)$ *(Premisa)*
2) $\exists x \varphi(x) \rightarrow \psi(a)$ *(Premisa)*
3) $\vdash \exists x \varphi(x)$ *(I $\exists$(1))*
4) $\vdash \psi(a)$ *(E$\rightarrow$(3,2)).*

Definición del sistema de deducción natural de Gentzen

(E $\exists$): Regla de eliminación del cuantificador existencial

$$\{\exists x \varphi(x), \varphi(y) \to \psi\} \vdash \psi,$$

donde ψ no contiene la variable libre y.

Definición del sistema de deducción natural de Gentzen

(E $\exists$): Regla de eliminación del cuantificador existencial

$$\{\exists x\varphi(x), \varphi(y) \to \psi\} \vdash \psi,$$

donde ψ no contiene la variable libre y.

NOTA: (E $\exists$) NO tiene la forma $\exists x\varphi(x) \vdash \varphi(y)$, ya que no sabemos si y hace que $\varphi(y)$ sea verdadera.

Definición del sistema de deducción natural de Gentzen

(E $\exists$): Regla de eliminación del cuantificador existencial

$$\{\exists x\varphi(x), \varphi(y) \rightarrow \psi\} \vdash \psi,$$

donde ψ no contiene la variable libre y.

NOTA: (E $\exists$) NO tiene la forma $\exists x\varphi(x) \vdash \varphi(y)$, ya que no sabemos si y hace que $\varphi(y)$ sea verdadera.
También en este caso, lo que se entiende con la notación empleada es que en $\varphi(y)$ la variable y representa un cualquier elemento del dominio, no un elemento especificado.

Definición del sistema de deducción natural de Gentzen

Con la notación de Fitting (E $\exists$) se representa como:

1) $\exists x \varphi(x)$

2) $\varphi(y)$ (Premisa auxiliar)
$\vdots$
$\vdots$
k) $\vdash \psi$

k+1) $\vdash \varphi(y) \to \psi$ (I $\to$(2,k))
k+2) $\vdash \psi$ (E $\exists$(1,(2,k))).

Definición del sistema de deducción natural de Gentzen

Ejemplo

Queremos demostrar la deducción

$$\{\exists x\varphi(x), \exists x\psi(x)\} \vdash \exists x\exists y(\varphi(x) \wedge \psi(y)).$$

Definición del sistema de deducción natural de Gentzen

Ejemplo

Queremos demostrar la deducción

$$\{\exists x\varphi(x), \exists x\psi(x)\} \vdash \exists x\exists y(\varphi(x) \wedge \psi(y)).$$

1) $\exists x\varphi(x)$ ***(Premisa)***
2) $\exists x\psi(x)$ ***(Premisa)***

3) $\varphi(z)$ ***(Premisa auxiliar)***

4) $\psi(u)$ ***(Premisa auxiliar)***
5) $\vdash \varphi(z) \wedge \psi(u)$ ***(I*** $\wedge$***(3,4))***
6) $\vdash \exists x\exists y(\varphi(x) \wedge \psi(y))$ ***(I*** $\exists$***(5))***

7) $\vdash \psi(u) \rightarrow \exists x\exists y(\varphi(x) \wedge \psi(y))$ ***(I*** $\rightarrow$***(4,6))***
8) $\vdash \exists x\exists y(\varphi(x) \wedge \psi(y))$ ***(E*** $\exists$***(2,7))***

9) $\vdash \varphi(z) \rightarrow \exists x\exists y(\varphi(x) \wedge \psi(y))$ ***(I*** $\rightarrow$***(3,8))***
10) $\vdash \exists x\exists y(\varphi(x) \wedge \psi(y))$ ***(E*** $\exists$***(1,9))***.

Contenido

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

A partir de las reglas de introducción y eliminación relativas a los cuantificadores, podemos obtener nuevos resultados.

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

A partir de las reglas de introducción y eliminación relativas a los cuantificadores, podemos obtener nuevos resultados.
A continuación enunciamos algunos de ellos:

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

A partir de las reglas de introducción y eliminación relativas a los cuantificadores, podemos obtener nuevos resultados.
A continuación enunciamos algunos de ellos:

- **T31: (Cambio de variable cuantificada)**

$$\mathbf{T31,1}: \forall x \varphi(x) \vdash \forall y \varphi(y),$$

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

A partir de las reglas de introducción y eliminación relativas a los cuantificadores, podemos obtener nuevos resultados.
A continuación enunciamos algunos de ellos:

- **T31: (Cambio de variable cuantificada)**

$$\mathbf{T31{,}1}: \forall x \varphi(x) \vdash \forall y \varphi(y),$$

$$\mathbf{T31{,}2}: \forall y \varphi(y) \vdash \forall x \varphi(x),$$

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

A partir de las reglas de introducción y eliminación relativas a los cuantificadores, podemos obtener nuevos resultados.
A continuación enunciamos algunos de ellos:

- **T31: (Cambio de variable cuantificada)**

$$\mathbf{T31{,}1}: \forall x\varphi(x) \vdash \forall y\varphi(y),$$

$$\mathbf{T31{,}2}: \forall y\varphi(y) \vdash \forall x\varphi(x),$$

$$\mathbf{T31{,}3}: \exists x\varphi(x) \vdash \exists y\varphi(y),$$

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

A partir de las reglas de introducción y eliminación relativas a los cuantificadores, podemos obtener nuevos resultados.
A continuación enunciamos algunos de ellos:

- **T31: (Cambio de variable cuantificada)**

$$\mathbf{T31,1}: \forall x \varphi(x) \vdash \forall y \varphi(y),$$

$$\mathbf{T31,2}: \forall y \varphi(y) \vdash \forall x \varphi(x),$$

$$\mathbf{T31,3}: \exists x \varphi(x) \vdash \exists y \varphi(y),$$

$$\mathbf{T31,4}: \exists y \varphi(y) \vdash \exists x \varphi(x).$$

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

Demostración de T31.1 y T31.2:

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

Demostración de T31.1 y T31.2:

1) $\forall x \varphi(x)$ (Premisa)

$$\boxed{\begin{array}{ll} 2)\ z & \\ 3)\ \vdash \varphi(z) & (\text{E}\forall(1)) \end{array}}$$

4) $\vdash \forall y \varphi(y)$ (I$\forall$(2,3))

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

Demostración de T31.1 y T31.2:

1) $\forall x \varphi(x)$ (Premisa)

2) z
3) $\vdash \varphi(z)$ (E$\forall$(1))

4) $\vdash \forall y \varphi(y)$ (I$\forall$(2,3))

La demostración de **T31.3** y **T31.4** es similar.

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

- **T32: Descenso cuantificacional**

$$\forall x\varphi(x) \vdash \exists x\varphi(x).$$

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

- **T32: Descenso cuantificacional**

$$\forall x \varphi(x) \vdash \exists x \varphi(x).$$

- **T33: Conmutatividad**

$$\mathbf{T33{,}1} : \exists x \exists y \varphi(x, y) \vdash \exists y \exists x \varphi(x, y),$$

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

- **T32: Descenso cuantificacional**

$$\forall x \varphi(x) \vdash \exists x \varphi(x).$$

- **T33: Conmutatividad**

$$\mathbf{T33{,}1}: \exists x \exists y \varphi(x,y) \vdash \exists y \exists x \varphi(x,y),$$

$$\mathbf{T33{,}2}: \exists y \exists x \varphi(x,y) \vdash \exists x \exists y \varphi(x,y).$$

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

- **T32: Descenso cuantificacional**

$$\forall x \varphi(x) \vdash \exists x \varphi(x).$$

- **T33: Conmutatividad**

$$\mathbf{T33{,}1}: \exists x \exists y \varphi(x,y) \vdash \exists y \exists x \varphi(x,y),$$

$$\mathbf{T33{,}2}: \exists y \exists x \varphi(x,y) \vdash \exists x \exists y \varphi(x,y).$$

$$\mathbf{T33{,}3}: \forall x \forall y \varphi(x,y) \vdash \forall y \forall x \varphi(x,y),$$

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

- **T32: Descenso cuantificacional**

$$\forall x \varphi(x) \vdash \exists x \varphi(x).$$

- **T33: Conmutatividad**

$$\mathbf{T33{,}1}: \exists x \exists y \varphi(x,y) \vdash \exists y \exists x \varphi(x,y),$$

$$\mathbf{T33{,}2}: \exists y \exists x \varphi(x,y) \vdash \exists x \exists y \varphi(x,y).$$

$$\mathbf{T33{,}3}: \forall x \forall y \varphi(x,y) \vdash \forall y \forall x \varphi(x,y),$$

$$\mathbf{T33{,}4}: \forall y \forall x \varphi(x,y) \vdash \forall x \forall y \varphi(x,y).$$

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

- **T34: Reglas de la conjunción**

$$\mathbf{T34{,}1}: \exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \vdash \exists x\varphi(x) \wedge \exists x\psi(x).$$

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

- **T34: Reglas de la conjunción**

$$\mathbf{T34{,}1}: \exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \vdash \exists x\varphi(x) \wedge \exists x\psi(x).$$

$$\mathbf{T34{,}2}: \forall x\varphi(x) \wedge \forall x\psi(x) \vdash \forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)),$$

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

- **T34: Reglas de la conjunción**

$$\mathbf{T34{,}1} : \exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \vdash \exists x\varphi(x) \wedge \exists x\psi(x).$$

$$\mathbf{T34{,}2} : \forall x\varphi(x) \wedge \forall x\psi(x) \vdash \forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)),$$

$$\mathbf{T34{,}3} : \forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \vdash \forall x\varphi(x) \wedge \forall x\psi(x).$$

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

- **T34: Reglas de la conjunción**

$$\mathbf{T34{,}1}: \exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \vdash \exists x\varphi(x) \wedge \exists x\psi(x).$$

$$\mathbf{T34{,}2}: \forall x\varphi(x) \wedge \forall x\psi(x) \vdash \forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)),$$

$$\mathbf{T34{,}3}: \forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \vdash \forall x\varphi(x) \wedge \forall x\psi(x).$$

$$\mathbf{T34{,}3}: \exists x(\varphi \wedge \psi(x)) \vdash \varphi \wedge \exists x\psi(x),$$

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

- **T34: Reglas de la conjunción**

$$\mathbf{T34{,}1}: \exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \vdash \exists x\varphi(x) \wedge \exists x\psi(x).$$

$$\mathbf{T34{,}2}: \forall x\varphi(x) \wedge \forall x\psi(x) \vdash \forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)),$$

$$\mathbf{T34{,}3}: \forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \vdash \forall x\varphi(x) \wedge \forall x\psi(x).$$

$$\mathbf{T34{,}3}: \exists x(\varphi \wedge \psi(x)) \vdash \varphi \wedge \exists x\psi(x),$$

$$\mathbf{T34{,}4}: \varphi \wedge \exists x\psi(x) \vdash \exists x(\varphi \wedge \psi(x)).$$

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

- **T34: Reglas de la conjunción**

$$\mathbf{T34{,}1}: \exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \vdash \exists x\varphi(x) \wedge \exists x\psi(x).$$

$$\mathbf{T34{,}2}: \forall x\varphi(x) \wedge \forall x\psi(x) \vdash \forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)),$$

$$\mathbf{T34{,}3}: \forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \vdash \forall x\varphi(x) \wedge \forall x\psi(x).$$

$$\mathbf{T34{,}3}: \exists x(\varphi \wedge \psi(x)) \vdash \varphi \wedge \exists x\psi(x),$$

$$\mathbf{T34{,}4}: \varphi \wedge \exists x\psi(x) \vdash \exists x(\varphi \wedge \psi(x)).$$

$$\mathbf{T34{,}5}: \forall x(\varphi \wedge \psi(x)) \vdash \varphi \wedge \forall x\psi(x),$$

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

- **T34: Reglas de la conjunción**

$$\mathbf{T34{,}1}: \exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \vdash \exists x\varphi(x) \wedge \exists x\psi(x).$$

$$\mathbf{T34{,}2}: \forall x\varphi(x) \wedge \forall x\psi(x) \vdash \forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)),$$

$$\mathbf{T34{,}3}: \forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \vdash \forall x\varphi(x) \wedge \forall x\psi(x).$$

$$\mathbf{T34{,}3}: \exists x(\varphi \wedge \psi(x)) \vdash \varphi \wedge \exists x\psi(x),$$

$$\mathbf{T34{,}4}: \varphi \wedge \exists x\psi(x) \vdash \exists x(\varphi \wedge \psi(x)).$$

$$\mathbf{T34{,}5}: \forall x(\varphi \wedge \psi(x)) \vdash \varphi \wedge \forall x\psi(x),$$

$$\mathbf{T34{,}6}: \varphi \wedge \forall x\psi(x) \vdash \forall x(\varphi \wedge \psi(x)).$$

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

- **T35: Reglas de la disyunción**

$$\mathbf{T35{,}1} : \exists x(\varphi(x) \lor \psi(x)) \vdash \exists x\varphi(x) \lor \exists x\psi(x),$$

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

- **T35: Reglas de la disyunción**

$$\mathbf{T35{,}1}: \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \vdash \exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x),$$

$$\mathbf{T35{,}2}: \exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x) \vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)).$$

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

- **T35: Reglas de la disyunción**

$$\mathbf{T35,1}: \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \vdash \exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x),$$

$$\mathbf{T35,2}: \exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x) \vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)).$$

$$\mathbf{T35,3}: \forall x\varphi(x) \vee \forall x\psi(x) \vdash \forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)).$$

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

- **T35: Reglas de la disyunción**

$$\mathbf{T35{,}1}:\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \vdash \exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x),$$

$$\mathbf{T35{,}2}:\exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x) \vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)).$$

$$\mathbf{T35{,}3}:\forall x\varphi(x) \vee \forall x\psi(x) \vdash \forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)).$$

$$\mathbf{T35{,}4}:\varphi \vee \exists x\psi(x) \vdash \exists x(\varphi \vee \psi(x)),$$

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

- **T35: Reglas de la disyunción**

$$\mathbf{T35{,}1}: \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \vdash \exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x),$$

$$\mathbf{T35{,}2}: \exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x) \vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)).$$

$$\mathbf{T35{,}3}: \forall x\varphi(x) \vee \forall x\psi(x) \vdash \forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)).$$

$$\mathbf{T35{,}4}: \varphi \vee \exists x\psi(x) \vdash \exists x(\varphi \vee \psi(x)),$$

$$\mathbf{T35{,}5}: \exists x(\varphi \vee \psi(x)) \vdash \varphi \vee \exists x\psi(x).$$

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

- **T35: Reglas de la disyunción**

$$\mathbf{T35{,}1}: \exists x(\varphi(x) \lor \psi(x)) \vdash \exists x\varphi(x) \lor \exists x\psi(x),$$

$$\mathbf{T35{,}2}: \exists x\varphi(x) \lor \exists x\psi(x) \vdash \exists x(\varphi(x) \lor \psi(x)).$$

$$\mathbf{T35{,}3}: \forall x\varphi(x) \lor \forall x\psi(x) \vdash \forall x(\varphi(x) \lor \psi(x)).$$

$$\mathbf{T35{,}4}: \varphi \lor \exists x\psi(x) \vdash \exists x(\varphi \lor \psi(x)),$$

$$\mathbf{T35{,}5}: \exists x(\varphi \lor \psi(x)) \vdash \varphi \lor \exists x\psi(x).$$

$$\mathbf{T35{,}6}: \varphi \lor \forall x\psi(x) \vdash \forall x(\varphi \lor \psi(x)),$$

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

- **T35: Reglas de la disyunción**

$$\mathbf{T35{,}1}: \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \vdash \exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x),$$

$$\mathbf{T35{,}2}: \exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x) \vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)).$$

$$\mathbf{T35{,}3}: \forall x\varphi(x) \vee \forall x\psi(x) \vdash \forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)).$$

$$\mathbf{T35{,}4}: \varphi \vee \exists x\psi(x) \vdash \exists x(\varphi \vee \psi(x)),$$

$$\mathbf{T35{,}5}: \exists x(\varphi \vee \psi(x)) \vdash \varphi \vee \exists x\psi(x).$$

$$\mathbf{T35{,}6}: \varphi \vee \forall x\psi(x) \vdash \forall x(\varphi \vee \psi(x)),$$

$$\mathbf{T35{,}7}: \forall x(\varphi \vee \psi(x)) \vdash \varphi \vee \forall x\psi(x).$$

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

- **T36: Reglas de la implicación**

$$\mathbf{T36{,}1}: \exists x\varphi(x) \rightarrow \exists x\psi(x) \vdash \exists x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)),$$

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

- **T36: Reglas de la implicación**

$$\mathbf{T36{,}1} : \exists x\varphi(x) \to \exists x\psi(x) \vdash \exists x(\varphi(x) \to \psi(x)),$$

$$\mathbf{T36{,}2} : \forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \vdash \forall x\varphi(x) \to \forall x\psi(x).$$

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

- **T36: Reglas de la implicación**

$$\mathbf{T36{,}1}:\exists x\varphi(x)\rightarrow\exists x\psi(x)\vdash\exists x(\varphi(x)\rightarrow\psi(x)),$$

$$\mathbf{T36{,}2}:\forall x(\varphi(x)\rightarrow\psi(x))\vdash\forall x\varphi(x)\rightarrow\forall x\psi(x).$$

$$\mathbf{T36{,}3}:\exists x\psi(x)\rightarrow\varphi\vdash\exists x(\psi(x)\rightarrow\varphi),$$

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

- **T36: Reglas de la implicación**

$$\mathbf{T36{,}1}: \exists x\varphi(x) \to \exists x\psi(x) \vdash \exists x(\varphi(x) \to \psi(x)),$$

$$\mathbf{T36{,}2}: \forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \vdash \forall x\varphi(x) \to \forall x\psi(x).$$

$$\mathbf{T36{,}3}: \exists x\psi(x) \to \varphi \vdash \exists x(\psi(x) \to \varphi),$$

$$\mathbf{T36{,}4}: \forall x(\psi(x) \to \varphi) \vdash \forall x\psi(x) \to \varphi.$$

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

- **T36: Reglas de la implicación**

$$\mathbf{T36{,}1}: \exists x\varphi(x) \to \exists x\psi(x) \vdash \exists x(\varphi(x) \to \psi(x)),$$

$$\mathbf{T36{,}2}: \forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \vdash \forall x\varphi(x) \to \forall x\psi(x).$$

$$\mathbf{T36{,}3}: \exists x\psi(x) \to \varphi \vdash \exists x(\psi(x) \to \varphi),$$

$$\mathbf{T36{,}4}: \forall x(\psi(x) \to \varphi) \vdash \forall x\psi(x) \to \varphi.$$

$$\mathbf{T36{,}5}: \forall x(\varphi \to \psi(x)) \vdash \varphi \to \forall x\psi(x).$$

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

- **T37: Reglas de eliminación de la negación de un cuantificador**

$$\mathbf{T37{,}1}\ (\mathbf{E}\neg\forall) : \neg\forall x\varphi(x) \vdash \neg\varphi(a),$$

Reglas derivadas del sistema de deducción natural

- **T37: Reglas de eliminación de la negación de un cuantificador**

$$\mathbf{T37{,}1}\,(\mathbf{E}\neg\forall) :\neg\forall x\varphi(x) \vdash \neg\varphi(a),$$

$$\mathbf{T37{,}2}\,(\mathbf{E}\neg\exists) :\neg\exists x\varphi(x) \vdash \neg\varphi(y),$$

donde a es una constante e y es un cualquier elemento del dominio.

Contenido

Corrección, completitud y decidibilidad

Vimos que los sistemas de demostración estudiados para la lógica proposicional cumplen las tres propiedades de completitud, corrección y decidibilidad.

Corrección, completitud y decidibilidad

Vimos que los sistemas de demostración estudiados para la lógica proposicional cumplen las tres propiedades de completitud, corrección y decidibilidad.
Existen varios sistemas de demostración en lógica de primer orden que son completos y correctos (la completitud fue demostrada por Gödel en 1930).

Corrección, completitud y decidibilidad

Vimos que los sistemas de demostración estudiados para la lógica proposicional cumplen las tres propiedades de completitud, corrección y decidibilidad.
Existen varios sistemas de demostración en lógica de primer orden que son completos y correctos (la completitud fue demostrada por Gödel en 1930).
Sin embargo, no existe ningún sistema de demostración en LPO que sea decidible.

Corrección, completitud y decidibilidad

La coherencia entre teoría interpretativa y teoría de la demostración axiomática sigue valiendo para la lógica de primer orden:

Corrección, completitud y decidibilidad

La coherencia entre teoría interpretativa y teoría de la demostración axiomática sigue valiendo para la lógica de primer orden:

Teorema

Una fórmula de la lógica de primer orden es semánticamente válida en teoría interpretativa si y sólo si es formalmente válida en teoría de la demostración axiomática.

Corrección, completitud y decidibilidad

La coherencia entre teoría interpretativa y teoría de la demostración axiomática sigue valiendo para la lógica de primer orden:

Teorema

Una fórmula de la lógica de primer orden es semánticamente válida en teoría interpretativa si y sólo si es formalmente válida en teoría de la demostración axiomática.

A continuación veremos como este teorema implica la completitud y la coherencia de los sistemas de demostración de la lógica de primer orden.

Corrección, completitud y decidibilidad

La coherencia entre teoría interpretativa y teoría de la demostración axiomática sigue valiendo para la lógica de primer orden:

Teorema

Una fórmula de la lógica de primer orden es semánticamente válida en teoría interpretativa si y sólo si es formalmente válida en teoría de la demostración axiomática.

A continuación veremos como este teorema implica la completitud y la coherencia de los sistemas de demostración de la lógica de primer orden.

- **Completitud**
  Recordamos que se dice que un sistema de demostración axiomático es **completo** si es capaz de demostrar cualquier fórmula semánticamente válida y deducir cualquier consecuencia lógica.

Corrección, completitud y decidibilidad

La coherencia entre teoría interpretativa y teoría de la demostración axiomática sigue valiendo para la lógica de primer orden:

Teorema

Una fórmula de la lógica de primer orden es semánticamente válida en teoría interpretativa si y sólo si es formalmente válida en teoría de la demostración axiomática.

A continuación veremos como este teorema implica la completitud y la coherencia de los sistemas de demostración de la lógica de primer orden.

- **Completitud**
  Recordamos que se dice que un sistema de demostración axiomático es **completo** si es capaz de demostrar cualquier fórmula semánticamente válida y deducir cualquier consecuencia lógica. Por tanto, el teorema anterior tiene como consecuencia la completitud del cálculo de predicados de primer orden.

Corrección, completitud y decidibilidad

- **Corrección**
  Recordamos que se dice que un sistema de demostración es **correcto (consistente, coherente)** si todas las fórmulas demostrables en el sistema son semánticamente válidas y todas las fórmulas deducibles en el sistema a partir de un conjunto de premisas son consecuencia lógica de dichas premisas.

Corrección, completitud y decidibilidad

- **Corrección**
  Recordamos que se dice que un sistema de demostración es **correcto (consistente, coherente)** si todas las fórmulas demostrables en el sistema son semánticamente válidas y todas las fórmulas deducibles en el sistema a partir de un conjunto de premisas son consecuencia lógica de dichas premisas.

  Por tanto, el teorema anterior tiene como consecuencia también la corrección del cálculo de predicados de primer orden.

Corrección, completitud y decidibilidad

- **Decidibilidad**
  Finalmente, recordamos que se dice que un sistema de demostración es **decidible** si proporciona un procedimiento general y finito (aplicable a cualquier fórmula y que termine) que permita decidir si una fórmula es válida o deducible a partir de un conjunto de fórmulas.

Corrección, completitud y decidibilidad

- **Decidibilidad**
  Finalmente, recordamos que se dice que un sistema de demostración es **decidible** si proporciona un procedimiento general y finito (aplicable a cualquier fórmula y que termine) que permita decidir si una fórmula es válida o deducible a partir de un conjunto de fórmulas.
  No existe ningún sistema de demostración en LPO que sea decidible: Church demostró en 1936 que no existe ningún algoritmo que permita decidir si una fórmula cualquiera de la lógica de primer orden es o no es válida, es decir, la validez de fórmulas en LPO es un problema indecidible (obsérvese que el mismo problema en lógica de proposiciones sí es decidible: en este caso, para saber si una fórmula es válida basta con calcular su tabla de verdad).

Corrección, completitud y decidibilidad

Aunque la validez de las fórmulas en LPO no es decidible en general, sí lo es en los siguientes casos particulares:

Corrección, completitud y decidibilidad

Aunque la validez de las fórmulas en LPO no es decidible en general, sí lo es en los siguientes casos particulares:

- cuando se consideran exclusivamente dominios finitos,

Corrección, completitud y decidibilidad

Aunque la validez de las fórmulas en LPO no es decidible en general, sí lo es en los siguientes casos particulares:

- cuando se consideran exclusivamente dominios finitos,
- cuando se admiten exclusivamente predicados monádicos,

Corrección, completitud y decidibilidad

Aunque la validez de las fórmulas en LPO no es decidible en general, sí lo es en los siguientes casos particulares:

- cuando se consideran exclusivamente dominios finitos,
- cuando se admiten exclusivamente predicados monádicos,
- incluso en el caso de dominios infinitos y predicados poliádicos, existen algunas clases particulares de fórmulas para las que su validez sí es decidible.

Corrección, completitud y decidibilidad

Aunque la validez de las fórmulas en LPO no es decidible en general, sí lo es en los siguientes casos particulares:

- cuando se consideran exclusivamente dominios finitos,
- cuando se admiten exclusivamente predicados monádicos,
- incluso en el caso de dominios infinitos y predicados poliádicos, existen algunas clases particulares de fórmulas para las que su validez sí es decidible.

Por otro lado, la validez de las fórmulas en LPO, aunque indecidible, es un problema *semi-decidible* en el siguiente sentido: existen sistemas de demostración tales que

- si una fórmula es válida, son capaces de demostrar que lo es,

Corrección, completitud y decidibilidad

Aunque la validez de las fórmulas en LPO no es decidible en general, sí lo es en los siguientes casos particulares:

- cuando se consideran exclusivamente dominios finitos,
- cuando se admiten exclusivamente predicados monádicos,
- incluso en el caso de dominios infinitos y predicados poliádicos, existen algunas clases particulares de fórmulas para las que su validez sí es decidible.

Por otro lado, la validez de las fórmulas en LPO, aunque indecidible, es un problema *semi-decidible* en el siguiente sentido: existen sistemas de demostración tales que

- si una fórmula es válida, son capaces de demostrar que lo es,
- para fórmulas no válidas, el proceso puede no terminar nunca.