LÓGICA

Problemas de repaso resueltos

Este capítulo contiene los textos y las soluciones de varios exámenes, que incluimos para que puedan ser usados como repaso de todo el material de la asignatura.

Es muy importante que el alumno intente resolver todos los problemas presentados en el tiempo indicado en cada examen.

1. Segundo examen parcial 2006-2007

Fecha: 23 de enero de 2007 **Tiempo: 50 minutos**

El examen está formado por dos problemas. La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

---

1) a) (3 puntos) Identifica las variables libres y ligadas de la fórmula

$$\varphi : \exists x(\exists y P(y,z) \rightarrow P(x,z))$$

y verifica que φ es satisfacible bajo alguna interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ tal que P^I no es el conjunto vacío.

b) (4 puntos) Determina si la fórmula

$$\psi : \exists x(\exists y P(y) \rightarrow P(x))$$

es semánticamente válida.

2) Usando el sistema de deducción natural de Gentzen de la lógica de primer orden, verifica la validez de los siguientes razonamientos:

a) (2 puntos)

$$\varphi \vdash \neg\neg\varphi,$$

b) (6 puntos)

$$\begin{array}{c} \forall x R(x) \vee \forall y \neg P(y) \\ \neg\exists z(P(z) \wedge R(z)) \\ \hline \forall y \neg P(y) \end{array}$$

2. Soluciones del segundo examen parcial 2006-2007

Fecha: 23 de enero de 2007 **Tiempo: 50 minutos**

---

1) a) (3 puntos) Identifica las variables libres y ligadas de la fórmula

$$\varphi : \exists x(\exists y P(y,z) \to P(x,z))$$

y verifica que φ es satisfacible bajo alguna interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ tal que P^I no es el conjunto vacío.

b) (4 puntos) Determina si la fórmula

$$\psi : \exists x(\exists y P(y) \to P(x))$$

es semánticamente válida.

Solución:

a) La fórmula

$$\varphi : \exists x(\exists y P(y,z) \to P(x,z))$$

es abierta, ya que la variable z es libre. Las variables x y y son ligadas.

Sea $\mathbb{I}$ la interpretación con dominio $D = \{a, b\}$ y

$$I : P^I = \{(a,a)\} \subset D \times D.$$

Consideremos, por ejemplo, la asignación

$$A : z^A = b.$$

Se obtiene que

$$\varphi^{I,A} = (\exists x(\exists y P(y,b) \to P(x,b)))^{I,A} = 1$$

ya que

$$(\exists y P(y,b) \to P(a,b))^{I,A} = 1,$$

siendo

$$(\exists y P(y,b))^{I,A} = 0.$$

Se sigue que φ es satisfacible bajo $\mathbb{I} = (D, I)$.

b) Sea $\mathbb{I} = (D, I)$ una interpretación cualquiera de

$$\psi : \exists x(\exists y P(y) \to P(x)).$$

Hay dos casos posibles:

- si $(\exists y P(y))^I = 0$, entonces $(\exists y P(y) \to P(x))^I = 1$ para todo x y ψ^I es verdadera,
- si $(\exists y P(y))^I = 1$, entonces existe al menos un elemento del dominio $a \in D$ tal que $P^I(a) = 1$ y, por tanto, $(\exists y P(y) \to P(a))^I = 1$. También en este caso $\psi^I = 1$.

Podemos concluir que ψ es semánticamente válida.

2) Usando el sistema de deducción natural de Gentzen de la lógica de primer orden, verifica la validez de los siguientes razonamientos:

a) (2 puntos)

$$\varphi \vdash \neg\neg\varphi,$$

b) (6 puntos)

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x R(x) \vee \forall y \neg P(y) \\ \neg\exists z(P(z) \wedge R(z))\end{array}}{\forall y \neg P(y)}$$

<u>Solución:</u>

a)

$$\begin{array}{l}
1)\ \varphi \quad \text{(Premisa)} \\
\boxed{\begin{array}{ll}
2) \vdash \neg\neg\neg\varphi & \text{(Premisa auxiliar)} \\
3) \vdash \neg\varphi & (\text{E}\neg(2)) \\
4) \vdash \neg\varphi \wedge \varphi & (\text{I}\wedge(3{,}1))
\end{array}} \\
5) \vdash \neg\neg\varphi \quad (\text{I}\neg(2{,}4))
\end{array}$$

El razonamiento $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$ es válido.

b)

1) $\forall x R(x) \vee \forall y \neg P(y)$ (Premisa)
2) $\neg \exists z (P(z) \wedge R(z))$ (Premisa)
3) $\vdash \forall z \neg (P(z) \wedge R(z))$ (E$\neg\exists$(2))
4) $\vdash \forall z (\neg P(z) \vee \neg R(z))$ (De Morgan(3))
5) y_1
6) $\vdash \neg P(y_1) \vee \neg R(y_1)$ (E$\forall$(4))

7) $\vdash \forall x R(x)$ (Premisa auxiliar)
8) $\vdash R(y_1)$ (E$\forall$(7))
9) $\vdash \neg\neg R(y_1)$ (Apartado a))
10) $\vdash \neg P(y_1)$ (Tollendo Ponens (9,6))

11) $\vdash \forall y \neg P(y)$ (Premisa auxiliar)
12) $\vdash \neg P(y_1)$ (E$\forall$(11))

13) $\vdash \neg P(y_1)$ (E$\vee$(1,(7,12)))
14)$\vdash \forall y \neg P(y)$ (I$\forall$(5,13))

El razonamiento dado es válido.

3. Examen final A de febrero 2005-2006

Fecha: 1 de febrero de 2006 **Tiempo: 3 horas**

El examen está formado por ocho problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados. ***Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas****.*

Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Ejercicio 1: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural de Gentzen, demuestra por reducción al absurdo la validez de la siguiente deducción:

$$\{p \to \neg q, \, r \to q\} \vdash \neg(p \wedge r).$$

Ejercicio 2: (12 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para verificar la validez del razonamiento anterior.

Ejercicio 3: En el contexto de la lógica proposicional, sea φ la siguiente fórmula:

$$\varphi : (\neg p \to (q \to (p \wedge r))) \to (\neg p \wedge r).$$

a) (6 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para clasificar φ.
b) (4 puntos) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ.
c) (4 puntos) Halla la forma normal conjuntiva de φ, $FNC(\varphi)$.

Ejercicio 4: (10 puntos) En el contexto de la lógica de primer orden, formaliza las siguientes frases. En cada caso, define explícitamente el dominio y los elementos básicos de la formalización.

a) Ningún abrigo es impermeable a menos que haya sido especialmente tratado.
b) Algunas frutas y verduras son nutritivas.
c) En toda pareja de vecinos hay algún envidioso.
d) Hay algunas personas importantes que son conocidas por todos.
e) No hay ninguna persona importante que Luis no conozca.

Ejercicio 5: (12 puntos) Usa el principio de recursión estructural para definir la función

$$f : F \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\},$$

que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica de primer orden le asocia el número $f(\varphi)$ de cuantificadores (existenciales o universales) que aparecen en φ.

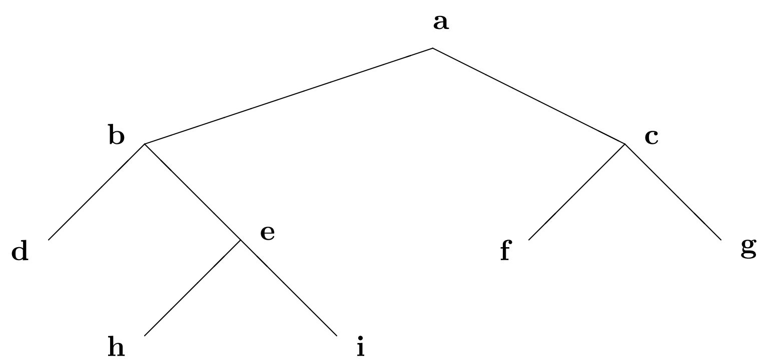


Figura 1. Figura del ejercicio 6

Ejercicio 6: (12 puntos) En un árbol con raíz finito y etiquetado por las letras del dominio

$$D = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\},$$

considera los siguientes predicados:

$P(x)$: el vértice x tiene un padre,
$H(x)$: el vértice x tiene hijos,
$C(x, y)$: el vértice x está conectado por medio de un camino no dirigido con el vértice y,
$D(x, y)$: el vértice y es un descendiente del vértice x.

Evalúa las siguientes fórmulas en la interpretación definida por el árbol de la figura 1, que tiene como raíz el vértice a :

$\varphi_1 : \forall x P(x)$,
$\varphi_2 : \forall x H(x)$,
$\varphi_3 : \exists x \forall y D(x, y)$,
$\varphi_4 : \forall x \exists y D(x, y)$,
$\varphi_5 : \forall x \forall y C(x, y)$,
$\varphi_6 : \forall x (H(x) \to P(x))$.

Ejercicio 7: (12 puntos) En cada apartado demuestra que las fórmulas φ_1 y φ_2 no son lógicamente equivalentes:

a) $\varphi_1 : P(x) \to \forall x Q(x)$ y $\varphi_2 : \forall x (P(x) \wedge Q(x))$,
b) $\varphi_1 : P(x) \to \exists x Q(x)$ y $\varphi_2 : \exists x (P(x) \wedge Q(x))$.

Ejercicio 8: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural, verifica la validez de la regla de la disyunción:

$$\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \vdash \exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x).$$

4. Examen final B de febrero 2005-2006

Fecha: 1 de febrero de 2006 **Tiempo: 3 horas**

El examen está formado por ocho problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados. ***Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas****.*

Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Ejercicio 1: (14 puntos) Usando el sistema de de deducción natural de Gentzen, demuestra por reducción al absurdo la validez de la siguiente deducción:

$$\{q \to \neg s,\, p \to s\} \vdash \neg(q \wedge p).$$

Ejercicio 2: (12 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para verificar la validez del razonamiento anterior.

Ejercicio 3: En el contexto de la lógica proposicional, sea φ la siguiente fórmula:

$$\varphi : (\neg r \to (p \to (r \wedge q))) \to (\neg r \wedge q).$$

a) (6 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para clasificar φ.
b) (4 puntos) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ.
c) (4 puntos) Halla la forma normal conjuntiva de φ, $FNC(\varphi)$.

Ejercicio 4: (10 puntos) En el contexto de la lógica de primer orden, formaliza las siguientes frases. En cada caso, define explícitamente el dominio y los elementos básicos de tu formalización.

a) Ningún abrigo es impermeable a menos que haya sido especialmente tratado.
b) Algunas frutas y verduras son nutritivas.
c) En toda pareja de vecinos hay algún envidioso.
d) Hay algunas personas importantes que son conocidas por todos.
e) No hay ninguna persona importante que Luis no conozca.

Ejercicio 5: (12 puntos) Usa el principio de recursión estructural para definir la función

$$f : F \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\},$$

que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica de primer orden le asocia el número $f(\varphi)$ de cuantificadores (existenciales o universales) que aparecen en φ.

Ejercicio 6: (12 puntos) En un árbol con raíz finito y etiquetado por las letras del dominio

$$D = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\},$$

considera los siguientes predicados:

$P(x)$: el vértice x tiene un padre,
$H(x)$: el vértice x tiene hijos,
$C(x, y)$: el vértice x está conectado por medio de un camino no dirigido con el vértice y,
$D(x, y)$: el vértice y es un descendiente del vértice x.

Evalúa las siguientes fórmulas en la interpretación definida por el árbol de la figura 1, que tiene como raíz el vértice a :

$\varphi_1 : \exists x P(x)$,
$\varphi_2 : \exists x \neg H(x)$,
$\varphi_3 : \forall x \exists y D(x, y)$,
$\varphi_4 : \forall x \exists y \neg C(x, y)$,
$\varphi_5 : \exists x(\neg H(x) \wedge P(x))$.

Ejercicio 7: (12 puntos) En cada apartado demuestra que las fórmulas φ_1 y φ_2 no son lógicamente equivalentes:

a) $\varphi_1 : \forall x(P(x) \wedge Q(x))$ y $\varphi_2 : P(x) \to \forall x Q(x)$,
b) $\varphi_1 : \exists x(P(x) \wedge Q(x))$ y $\varphi_2 : P(x) \to \exists x Q(x)$.

Ejercicio 8: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural, verifica la validez de la regla de la disyunción:

$$\exists x \varphi(x) \vee \exists x \psi(x) \vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)).$$

5. Soluciones de los exámenes finales A y B de febrero 2005-2006

Fecha: 1 de febrero de 2006 **Tiempo: 3 horas**

Ejercicio 1 A: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural de Gentzen, demuestra por reducción al absurdo la validez de la siguiente deducción:

$$\{p \to \neg q,\, r \to q\} \vdash \neg(p \wedge r).$$

Solución: para trabajar por reducción al absurdo, suponemos el conjunto

$$\{p \to \neg q,\, r \to q,\, \neg\neg(p \wedge r)\}$$

satisfacible y llegamos a una contradicción:

1)	$p \to \neg q$	(Premisa)
2)	$r \to q$	(Premisa)
3)	$\neg\neg(p \wedge r)$	(Premisa)
4)	$\vdash p \wedge r$	(E $\neg$(3))
5)	$\vdash p$	(E$\wedge$(4))
6)	$\vdash r$	(E$\wedge$(4))
7)	$\vdash \neg q$	(E$\to$ $(5, 1)$)
8)	$\vdash q$	(E$\to$ $(6, 2)$)
9)	$\vdash \neg q \wedge q$	(I$\wedge$$(7, 8)$)

Por tanto la deducción dada es valida por reducción al absurdo.

Ejercicio 1 B: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural de Gentzen, demuestra por reducción al absurdo la validez de la siguiente deducción:

$$\{q \to \neg s,\, p \to s\} \vdash \neg(q \wedge p).$$

Solución: La solución es la misma que en el ejercicio 1 A, pero ahora p es q, q es s y r es p.

Ejercicio 2 A: (12 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para verificar la validez del razonamiento del ejercicio 1 A.

Solución: Siendo

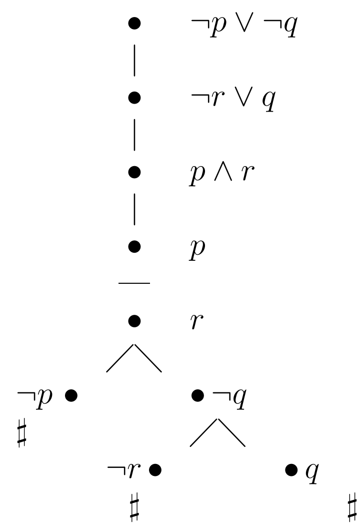
$$\begin{aligned}
&p \to \neg q \equiv \neg p \vee \neg q \\
&p \to s \equiv \neg r \vee q \\
&\neg\neg(p \wedge r) \equiv p \wedge r,
\end{aligned}$$

consideremos el conjunto de fórmulas

$$\Phi = \{\neg p \vee \neg q,\ \neg r \vee q,\ p \wedge r\}.$$

El tableaux asociado acabado es cerrado:

$T(\varphi)$



Se sigue que Φ es insatisfacible y que el razonamiento dado es válido

Ejercicio 2 B: (12 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para verificar la validez del razonamiento del ejercicio 1 B.

Solución: La solución es la misma que en el ejercicio 2 A, pero ahora p es q, q es s y r es p.

Ejercicio 3 A: En el contexto de la lógica proposicional, sea φ la siguiente fórmula:

$$\varphi : (\neg p \to (q \to (p \wedge r))) \to (\neg p \wedge r).$$

a) (6 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para clasificar φ.
b) (4 puntos) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ.
c) (4 puntos) Halla la forma normal conjuntiva de φ, $FNC(\varphi)$.

Solución:
a)

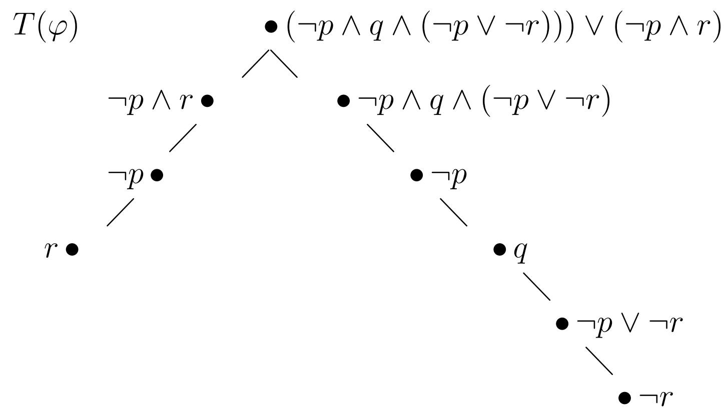
$$(\neg p \to (q \to (p \wedge r))) \to (\neg p \wedge r) \equiv \neg(\neg p \to (q \to (p \wedge r))) \vee (\neg p \wedge r) \equiv$$

$$\equiv \neg(\neg\neg p \vee (q \to (p \wedge r))) \vee (\neg p \wedge r) \equiv \neg(p \vee (\neg q \vee (p \wedge r))) \vee (\neg p \wedge r) \equiv$$

$$\equiv (\neg p \wedge \neg(\neg q \vee (p \wedge r))) \vee (\neg p \wedge r) \equiv (\neg p \wedge (\neg\neg q \wedge \neg(p \wedge r))) \vee (\neg p \wedge r) \equiv$$

$$\equiv (\neg p \wedge q \wedge (\neg p \vee \neg r))) \vee (\neg p \wedge r).$$

El tableaux completo asociado a φ tiene ramas abiertas:

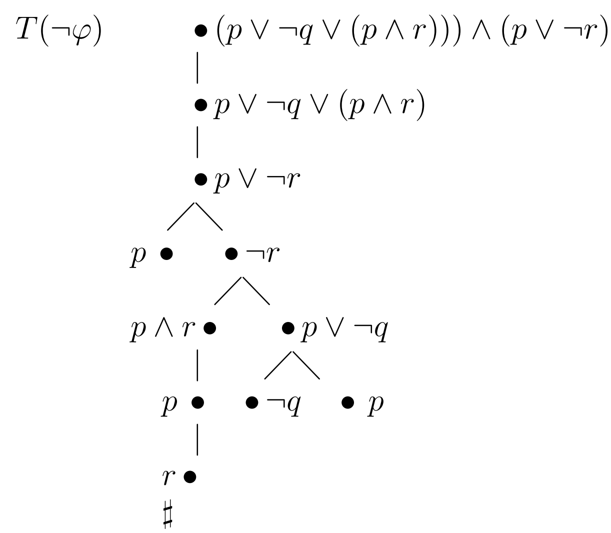


Por tanto φ es satisfacible. Ahora tenemos que verificar si $\neg\varphi$ es una contradicción.

$$\neg\varphi \equiv \neg(\neg p \wedge q \wedge (\neg p \vee \neg r))) \vee (\neg p \wedge r) \equiv (\neg\neg p \vee \neg q \vee \neg(\neg p \vee \neg r))) \wedge \neg(\neg p \wedge r) \equiv$$

$$\equiv (p \vee \neg q \vee (\neg\neg p \wedge \neg\neg r))) \wedge (\neg\neg p \vee \neg r) \equiv (p \vee \neg q \vee (p \wedge r))) \wedge (p \vee \neg r).$$

También el tableaux completo asociado a $\neg\varphi$ tiene ramas abiertas:



Se sigue que φ es una contingencia.

b) Del tableaux $T(\varphi)$ deducimos que la valoración

$$r : 1,\ p : 0,\ q : 0$$

es un modelo de φ.

Del tableaux $T(\neg\varphi)$ deducimos que la valoración

$$r : 0,\ p : 1,\ q : 0$$

es un contraejemplo de φ.

c) Sabemos que $FNC(\varphi) = \neg FND(\neg\varphi)$.

Del tableaux $T(\neg\varphi)$ obtenemos que

$$FND(\neg\varphi) = p \vee (\neg r \wedge p) \vee (\neg q \wedge \neg r).$$

Entonces,

$$FNC(\varphi) = \neg(p \vee (\neg r \wedge p) \vee (\neg q \wedge \neg r)) \equiv \neg p \wedge (r \vee \neg p) \wedge (q \vee r).$$

Ejercicio 3 B: En el contexto de la lógica proposicional, sea φ la siguiente fórmula:

$$\varphi : (\neg r \rightarrow (p \rightarrow (r \wedge q))) \rightarrow (\neg r \wedge q).$$

a) (6 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para clasificar φ.
b) (4 puntos) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ.
c) (4 puntos) Halla la forma normal conjuntiva de φ, $FNC(\varphi)$.

Solución: La solución es la misma que en el ejercicio 3 A, pero ahora p es r, q es p y r es q.

Ejercicio 4 A y B: (10 puntos) En el contexto de la lógica de primer orden, formaliza las siguientes frases. En cada caso, define explícitamente el dominio y los elementos básicos de la formalización.

a) Ningún abrigo es impermeable a menos que haya sido especialmente tratado.
b) Algunas frutas y verduras son nutritivas.
c) En toda pareja de vecinos hay algún envidioso.
d) Hay algunas personas importantes que son conocidas por todos.
e) No hay ninguna persona importante que Luis no conozca.

Solución:

a) D = los abrigos; $I(x) : x$ es impermeable; $T(x) : x$ ha sido especialmente tratado.

$$\forall x(I(x) \rightarrow T(x)).$$

b) D = los vegetales; $F(x)$: x es una fruta; $V(x)$: x es una verdura; $N(x)$: x es nutritiva.

$$\exists x(F(x) \land N(x)) \land \exists x(V(x) \land N(x)).$$

c) D = las personas; $P(x,y)$: x es un vecino de y; $E(x)$: x es envidioso.

$$\forall x \forall y(P(x,y) \rightarrow E(x) \lor E(y)).$$

d) D = las personas; $I(x)$: x es importante; $C(x,y)$: x es una persona conocida por y.

$$\exists x(I(x) \land \forall y C(x,y)).$$

e) D = las personas; $I(x)$: x es importante; $C(x,y)$: x es conocida por y; L : Luis.

$$\neg\exists x(I(x) \land \neg C(x,L)) \equiv \forall x(\neg I(x) \lor \neg\neg C(x,L)) \equiv$$
$$\equiv \forall x(\neg I(x) \lor C(x,L)) \equiv \forall x(I(x) \rightarrow C(x,L)).$$

Ejercicio 5 A y B: (12 puntos) Usa el principio de recursión estructural para definir la función

$$f : F \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\},$$

que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica de primer orden le asocia el número $f(\varphi)$ de cuantificadores (existenciales o universales) que aparecen en φ.

Solución:

Base (FAt):
$f(\top) = f(\bot) = f(p) = 0$,
$f(s = t) = f(s) + f(t) = 0 + 0 = 0$,
$f(P(t_1, t_2, \cdots, t_n)) = f(t_1) + f(t_2) + \cdots + f(t_n) = 0$.

Paso recursivo:
$(F\neg) : f(\neg\varphi) = f(\varphi)$,
$(F\circ) : f(\varphi_1 \circ \varphi_2) = f(\varphi_1) + f(\varphi_2)$,
$(F\forall\exists) : f(\forall\varphi) = f(\exists\varphi) = f(\varphi) + 1$.

Estas definiciones determinan la función f sobre todo F.

Ejercicio 6 A: (12 puntos) En un árbol con raíz finito y etiquetado por las letras del dominio

$$D = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\},$$

considera los siguientes predicados:

$P(x)$: el vértice x tiene un padre,
$H(x)$: el vértice x tiene hijos,

$C(x,y)$: el vértice x está conectado por medio de un camino no dirigido con el vértice y,
$D(x,y)$: el vértice y es un descendiente del vértice x.

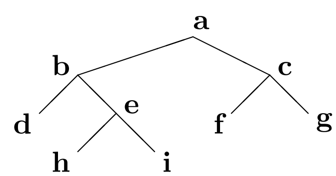


FIGURA 2. Figura de los ejercicios 6, A y B

Evalúa las siguientes fórmulas en la interpretación definida por el árbol de la figura 2, que tiene como raíz el vértice a :

φ_1 : $\forall x P(x)$,
φ_2 : $\forall x H(x)$,
φ_3 : $\exists x \forall y D(x,y)$,
φ_4 : $\forall x \exists y D(x,y)$,
φ_5 : $\forall x \forall y C(x,y)$,
φ_6 : $\forall x (H(x) \to P(x))$.

Solución:

- $\varphi_1^I : 0$ ya que $P^I(a) : 0$;
- $\varphi_2^I : 0$ ya que $H^I(d) : 0$;
- $\varphi_3^I : 0$ ya que $(\forall y D(x,y))^I : 0$, siendo $D^I(x,a) : 0$ para cualquier valor de x;
- $\varphi_4^I : 0$ ya que $(\exists x D(d,y))^I : 0$;
- $\varphi_5^I : 1$ ya que el árbol es un grafo conexo;
- $\varphi_6^I : 0$ ya que $(H(a) \to P(a))^I : 0$.

Ejercicio 6 B: (12 puntos) En un árbol con raíz finito y etiquetado por las letras del dominio

$$D = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\},$$

considera los siguientes predicados:

$P(x)$: el vértice x tiene un padre,
$H(x)$: el vértice x tiene hijos,
$C(x,y)$: el vértice x está conectado por medio de un camino no dirigido con el vértice y,
$D(x,y)$: el vértice y es un descendiente del vértice x.

Evalúa las siguientes fórmulas en la interpretación definida por el árbol de la figura 2, que tiene como raíz el vértice a :

$\varphi_1 : \exists x P(x),$
$\varphi_2 : \exists x \neg H(x),$
$\varphi_3 : \forall x \exists y D(x, y),$
$\varphi_4 : \forall x \exists y \neg C(x, y),$
$\varphi_5 : \exists x(\neg H(x) \wedge P(x)).$

Solución:

- $\varphi_1^I : 1$ ya que $P^I(b) : 1;$
- $\varphi_2^I : 1$ ya que $\neg H^I(d) : 1;$
- $\varphi_3^I : 0$ ya que $(\exists y D(d, y))^I : 0,$ siendo d una hoja del árbol;
- $\varphi_4^I : 0$ ya que $(\exists y \neg C(x, y))^I : 0,$ siendo siempre $(\neg C(x, y))^I : 0$ en un grafo conexo;
- $\varphi_5^I : 1$ ya que $(\neg H(d) \wedge P(d))^I : 1.$

Ejercicio 7 A: (12 puntos) En cada apartado demuestra que las fórmulas φ_1 y φ_2 no son lógicamente equivalentes:

a) $\varphi_1 : P(x) \to \forall x Q(x)$ y $\varphi_2 : \forall x(P(x) \wedge Q(x)),$
b) $\varphi_1 : P(x) \to \exists x Q(x)$ y $\varphi_2 : \exists x(P(x) \wedge Q(x)).$

Solución:
a) Sean D cualquiera y $I : P^I = \emptyset$ (el conjunto vacío). Entonces φ_1 es siempre verdadera y φ_2 es siempre falsa.

b) Como antes, sean D cualquiera y $I : P^I = \emptyset$ (el conjunto vacío). Entonces φ_1 es siempre verdadera y φ_2 es siempre falsa.

Ejercicio 7 B: (12 puntos) En cada apartado demuestra que las fórmulas φ_1 y φ_2 no son lógicamente equivalentes:

a) $\varphi_1 : \forall x(P(x) \wedge Q(x))$ y $\varphi_2 : P(x) \to \forall x Q(x),$
b) $\varphi_1 : \exists x(P(x) \wedge Q(x))$ y $\varphi_2 : P(x) \to \exists x Q(x).$

Solución: Intercambiando φ_1 y $\varphi_2,$ la solución es la misma que en el ejercicio 7 A.

Ejercicio 8 A: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural, verifica la validez de la regla de la disyunción:

$$\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \vdash \exists x \varphi(x) \vee \exists x \psi(x).$$

Solución:

1) $\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x))$ (Premisa)

2) $\varphi(x_1) \vee \psi(x_1)$ (Premisa auxiliar)

3) $\varphi(x_1)$ (Premisa auxiliar)
4) $\vdash \exists x\varphi(x)$ $(I\exists(3))$
5) $\vdash \exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x)$ $(I\vee(4))$

6) $\psi(x_1)$ (Premisa auxiliar)
7) $\vdash \exists x\psi(x)$ $(I\exists(6))$
8) $\vdash \exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x)$ $(I\vee(7))$

9) $\vdash \exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x)$ $(E\vee(2,(3,8)))$

10) $\vdash \exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x)$ $(E\exists(1,(2,9)))$

Ejercicio 8 B: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural, verifica la validez de la regla de la disyunción:

$$\exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x) \vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)).$$

Solución:

1) $\exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x)$ (Premisa)

> 2) $\exists x\varphi(x)$ (Premisa auxiliar)
>
> > 3) $\varphi(x_1)$ (Premisa auxiliar)
> > 4) $\vdash \varphi(x_1) \vee \psi(x_1)$ $(I\vee(3))$
> > 5) $\vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x))$ $(I\exists(4))$
>
> 6) $\vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x))$ $(E\exists(2,(3,5)))$

> 7) $\exists x\psi(x)$ (Premisa auxiliar)
>
> > 8) $\psi(x_1)$ (Premisa auxiliar)
> > 9) $\vdash \varphi(x_1) \vee \psi(x_1)$ $(I\vee(8))$
> > 10) $\vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x))$ $(I\exists(9))$
>
> 11) $\vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x))$ $(E\exists(7,(8,10)))$

12) $\vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x))$ $(E\vee(1,(2,11)))$

6. Examen final de septiembre 2005-2006

Fecha: 8 de septiembre de 2006 **Tiempo: 3 horas**

El examen está formado por ocho problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados. ***Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas***.

Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Ejercicio 1: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural de Gentzen, demuestra la validez del siguiente teorema:

$$\vdash (p \rightarrow (r \rightarrow q)) \wedge (\neg s \vee p) \wedge r \rightarrow (s \rightarrow q).$$

Ejercicio 2: (12 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para estudiar la validez del teorema del ejercicio 1.

Ejercicio 3: En el contexto de la lógica proposicional, sea φ la siguiente fórmula:

$$\varphi : p \vee (r \rightarrow q) \vee (\neg s \wedge p) \rightarrow r.$$

a) (6 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para clasificar φ.
b) (4 puntos) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ.
c) (4 puntos) Halla la forma normal conjuntiva de φ, $FNC(\varphi)$.

Ejercicio 4: (10 puntos) En el contexto de la lógica de primer orden, formaliza el siguiente razonamiento, tomando como dominio "los animales".

: (P1) Ningún plantígrado es un reptil.
: (P2) Los animales van a beber al río a menos que sean plantígrados.
: (P3) No todos los animales son plantígrados.
: (C) No hay animales que vayan a beber al río.

Ejercicio 5: (12 puntos) Usando el principio de recursión estructural y la función profundidad de un término pf, define la función:

$$PF : F \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\},$$

que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica de primer orden le asocia la longitud $PF(\varphi)$ de la rama más larga de su árbol estructural (su profundidad).

Ejercicio 6: Evalúa las siguientes fórmulas en las interpretaciones dadas:

a) (6 puntos)

$$\varphi_1 : \forall x \neg P(x) \to \exists y(\neg Q(y) \land R(y)),$$

en la interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ tal que

$$D = \{a, b\}, \quad P^I = \emptyset, \quad Q^I = \{a\} \quad \text{y} \quad R^I = \{a\}.$$

b) (6 puntos)

$$\varphi_2 : \forall x(T(x) \to \forall y R(x, y)),$$

en la interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ tal que

$$D = \{a, b\}, \quad T^I = \{a\} \quad \text{y} \quad R^I = \{(a, a), (a, b), (b, a)\}.$$

Ejercicio 7: (12 puntos) En cada apartado, define una interpretación tal que la fórmula dada sea verdadera y una tal que no lo sea:

a) $\varphi_1 : \forall x(P(x) \land \exists y Q(x, y))$,
b) $\varphi_2 : \exists x(P(x) \land \forall y Q(x, y))$.

Ejercicio 8: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural, verifica la validez de la regla de la implicación:

$$\exists x \varphi(x) \to \exists x \psi(x) \vdash \exists x(\varphi(x) \to \psi(x)).$$

Sugerencia: usa la regla de interdefinición y la deducción

$$\vdash \neg \exists x \varphi(x) \to \forall x \neg \varphi(x).$$

7. Soluciones del examen final de septiembre 2005-2006

Fecha: 8 de septiembre de 2006 **Tiempo: 3 horas**

Ejercicio 1: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural de Gentzen, demuestra la validez del siguiente teorema:

$$\vdash (p \to (r \to q)) \wedge (\neg s \vee p) \wedge r \to (s \to q).$$

Solución: por el teorema de la deducción, podemos reescribir el teorema en forma de deducción:

$$\{p \to (r \to q),\, \neg s \vee p,\, r,\, s\} \vdash q.$$

Una posible demostración del teorema es:

1)	$p \to (r \to q)$	(Premisa)
2)	$\neg s \vee p$	(Premisa)
3)	r	(Premisa)
4)	s	(Premisa)
5)	$\vdash p$	(Tollendo Ponens (2,4))
6)	$\vdash r \to q$	(E$\to$ $(5,1)$)
7)	$\vdash q$	(E$\to$ $(3,6)$)

Ejercicio 2: (12 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para estudiar la validez del teorema del ejercicio 1.

Solución:
Siendo

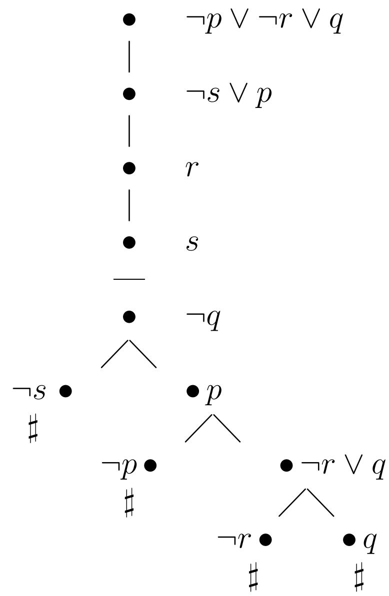
$$p \to (r \to q) \equiv \neg p \vee (\neg r \vee q) \equiv \neg p \vee \neg r \vee q,$$

consideremos el conjunto de fórmulas

$$\Phi = \{\neg p \vee \neg r \vee q,\, \neg s \vee p,\, r,\, s,\, \neg q\}.$$

El tableaux asociado acabado es cerrado:

$T(\Phi)$



Se sigue que Φ es insatisfacible y que el razonamiento dado es válido

Ejercicio 3: En el contexto de la lógica proposicional, sea φ la siguiente fórmula:

$$\varphi : p \vee (r \to q) \vee (\neg s \wedge p) \to r.$$

a) (6 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para clasificar φ.
b) (4 puntos) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ.
c) (4 puntos) Halla la forma normal conjuntiva de φ, $FNC(\varphi)$.

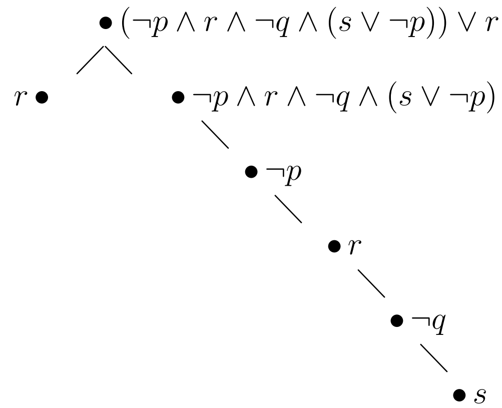
Solución:
a)

$$\varphi \equiv \neg(p \vee (r \to q) \vee (\neg s \wedge p)) \vee r \equiv (\neg p \wedge \neg(\neg r \vee q) \wedge \neg(\neg s \wedge p)) \vee r \equiv$$

$$\equiv (\neg p \wedge r \wedge \neg q \wedge (s \vee \neg p)) \vee r.$$

El tableaux completo asociado a φ tiene ramas abiertas:

$T(\varphi)$

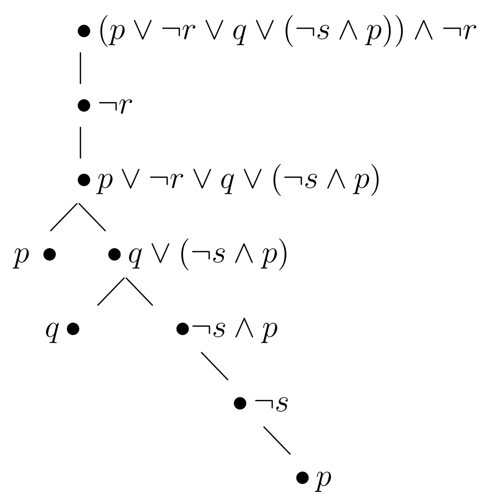


Por tanto φ es satisfacible. Ahora tenemos que verificar si $\neg\varphi$ es una contradicción.

$$\neg\varphi \equiv (p \vee \neg r \vee q \vee (\neg s \wedge p)) \wedge \neg r.$$

También el tableaux completo asociado a $\neg\varphi$ tiene ramas abiertas:

$T(\neg\varphi)$



$\neg\varphi$ es satisfacible y, por tanto, φ es una contingencia.

b) Del tableaux $T(\varphi)$ deducimos que la valoración

$$r : 1,\ s : 1,\ q : 0,\ p : 0$$

es un modelo de φ.

Del tableaux $T(\neg\varphi)$ deducimos que la valoración

$$r : 0,\ s : 0,\ q : 1,\ p : 1$$

es un contraejemplo de φ.

c) Sabemos que $FNC(\varphi) = \neg FND(\neg\varphi)$.
Del tableaux $T(\neg\varphi)$ obtenemos que

$$FND(\neg\varphi) = (p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg s \wedge \neg r).$$

Entonces,

$$FNC(\varphi) = \neg((p\wedge\neg r)\vee(q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg s\wedge\neg r)) \equiv (\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee s\vee r).$$

Ejercicio 4: (10 puntos) En el contexto de la lógica de primer orden, formaliza el siguiente razonamiento, tomando como dominio "los animales".

: (P1) Ningún plantígrado es un reptil.
: (P2) Los animales van a beber al río a menos que sean plantígrados.
: (P3) No todos los animales son plantígrados.
: (C) No hay animales que vayan a beber al río.

Solución:
Dominio: los animales.
Predicados:
P(x): x es un plantígrado,
R(x): x es un reptil,
B(x): x va a beber al río.

La frase (P2) se puede leer como "Los animales no van a beber al río sólo si son plantígrados," así que la formalización del razonamiento puede ser la siguiente:

: (P1) $\forall x[P(x) \rightarrow \neg R(x)]$
: (P2) $\forall x[\neg B(x) \rightarrow P(x)]$ $\quad (\forall x(B(x) \vee P(x)), \forall x[\neg P(x) \rightarrow B(x)])$
: (P3) $\exists x \neg P(x)$
: ______________________
: (C) $\forall x \neg B(x)$

Ejercicio 5: (12 puntos) Usando el principio de recursión estructural y la función profundidad de un término pf, define la función:

$$PF : F \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\},$$

que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica de primer orden le asocia la longitud $PF(\varphi)$ de la rama más larga de su árbol estructural (su profundidad).

Solución:

Sea $pf(t)$ la función profundidad de un término.

La función profundidad de una fórmula se puede definir usando el principio de recursión estructural y la función $pf(t)$:

Base (FAt):

$PF(\top) = PF(\bot) = PF(p) = 0,$
$PF(s = t) = max\{pf(s), pf(t)\} + 1,$
$PF(P(t_1, t_2, \cdots, t_n)) = max\{pf(t_1), pf(t_2), \cdots, pf(t_n)\} + 1.$

Paso recursivo:

$(F\neg) : PF(\neg\varphi) = PF(\varphi) + 1,$
$(F\circ) : PF(\varphi_1 \circ \varphi_2) = max\{PF(\varphi_1), PF(\varphi_2)\} + 1,$
$(F\forall\exists) : PF(\forall\varphi) = PF(\exists\varphi) = PF(\varphi) + 1.$

Estas definiciones determinan la función PF sobre todo F.

Ejercicio 6: Evalúa las siguientes fórmulas en las interpretaciones dadas:

a) (6 puntos)

$$\varphi_1 : \forall x \neg P(x) \to \exists y(\neg Q(y) \wedge R(y)),$$

en la interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ tal que

$$D = \{a, b\}, \quad P^I = \emptyset, \quad Q^I = \{a\} \quad \text{y} \quad R^I = \{a\}.$$

b) (6 puntos)

$$\varphi_2 : \forall x(T(x) \to \forall y R(x, y)),$$

en la interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ tal que

$$D = \{a, b\}, \quad T^I = \{a\} \quad \text{y} \quad R^I = \{(a, a), (a, b), (b, a)\}.$$

Solución:

a) $(\forall x \neg P(x))^I = 1,$ ya que $\neg P^I(a) = \neg P^I(b) = 1,$

$(\exists y(\neg Q(y) \wedge R(y)))^I = 0,$ ya que

$\neg Q^I(a) \wedge R^I(a) = 0,$ siendo $\neg Q^I(a) = 0$ y
$\neg Q^I(b) \wedge R^I(b) = 0,$ siendo $R^I(b) = 0$

Se sigue que $\varphi_1^I = 0,$ es decir, es falsa en la interpretación dada.

b) $(T(a) \to \forall y R(a, y))^I = 1$ ya que

$T^I(a) = 1$ y

$(\forall y R(a, y))^I = 1,$ siendo $R^I(a, a) = R^I(a, b) = 1.$

$(T(b) \to \forall y R(b, y))^I = 1$ ya que

$T^I(b) = 0.$

Se sigue que $\varphi_2^I = 1,$ es decir, es verdadera en la interpretación dada.

Ejercicio 7: (12 puntos) En cada apartado, define una interpretación tal que la fórmula dada sea verdadera y una tal que no lo sea:

a) $\varphi_1 : \forall x(P(x) \wedge \exists y Q(x,y)),$
b) $\varphi_2 : \exists x(P(x) \wedge \forall y Q(x,y)).$

Solución:

a) Sea $\mathbb{I} = (D,\, I)$ definida por

$$D = \{a,b\}, \qquad P = \{a,b\}, \qquad Q = \{(a,a),(b,a)\}.$$

Entonces,

si $x = a:$ $P^I(a) \wedge (\exists y Q(a,y))^I = 1,$ ya que
$P^I(a) = (\exists y Q(a,y))^I = 1$ siendo $Q(a,a)^I = 1,$

si $x = b:$ $P^I(b) \wedge (\exists y Q(b,y))^I = 1,$ ya que
$P^I(b) = (\exists y Q(b,y))^I = 1$ siendo $Q(b,a)^I = 1,$

Se sigue que $\varphi_1^I = 1,$ es decir, es verdadera en la interpretación dada.

Sea ahora $\mathbb{I} = (D,\, I)$ definida por

$$D = \{a,b\}, \qquad P = \{a\}, \qquad Q \text{ cualquiera.}$$

En este caso $\varphi_1^I = 0,$ ya que $P^I(b) = 0.$

b) Sea $\mathbb{I} = (D,\, I)$ definida por

$$D = \{a,b\}, \qquad P = \{a\}, \qquad Q = \{(a,a),\, (a,b)\}.$$

Entonces $\varphi_2^I = 1,$ ya que
$P^I(a) = (\forall y Q(a,y))^I = 1$ siendo $Q(a,a)^I = Q(a,b)^I = 1.$

Sea ahora $\mathbb{I} = (D,\, I)$ definida por

$$D = \{a,b\}, \qquad P = \{a\}, \qquad Q = \{(a,a)\}.$$

En este caso $\varphi_2^I = 0,$ ya que
si $x = a:$ $P^I(a) = 1,$ $(\forall y Q(a,y))^I = 0$ siendo $Q(a,b)^I = 0$ y
si $x = b:$ $P^I(b) = 0.$

Ejercicio 8: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural, verifica la validez de la regla T36.1 de la implicación:

$$\exists x \varphi(x) \to \exists x \psi(x) \vdash \exists x(\varphi(x) \to \psi(x)).$$

Sugerencia: usa la regla de interdefinición y la deducción

$$\vdash \neg \exists x \varphi(x) \to \forall x \neg \varphi(x).$$

Solución:

1) $\exists x\varphi(x) \to \exists x\psi(x)$ (Premisa)
2) $\neg\exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x)$ (Int.(1))

3) $\neg\exists x\varphi(x)$ (Premisa auxiliar)
4) $\vdash \forall x\neg\varphi(x)$ $(\vdash \neg\exists x\varphi(x) \to \forall x\neg\varphi(x))$
5) $\vdash \neg\varphi(a)$ $(E\forall(4))$
6) $\vdash \neg\varphi(a) \vee \psi(a)$ $(I \vee (5))$
7) $\vdash \varphi(a) \to \psi(a)$ (Int.(6))

8) $\exists x\psi(x)$ (Premisa auxiliar)

9) $\psi(a)$ (Premisa auxiliar)
10) $\vdash \neg\varphi(a) \vee \psi(a)$ $(I \vee (9))$
11) $\vdash \varphi(a) \to \psi(a)$ (Int.(10))

12) $\vdash \exists x\psi(x) \to (\varphi(a) \to \psi(a))$ $(E\exists(8, (9, 11)))$

13) $\vdash \varphi(a) \to \psi(a)$ $(E \vee (2, (3, 12)))$
14) $\vdash \exists x(\varphi(x) \to \psi(x))$ $(I\exists(13))$

8. Examen final de febrero 2006-2007

Fecha: 9 de febrero de 2007 **Tiempo: 3 horas**

El examen está formado por siete problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados. ***Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas****.*

Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Ejercicio 1: (6 puntos) Para cada apartado, contesta verdadero o falso (no hace falta justificar tus repuestas):

En la lógica proposicional:

LP1) Toda fórmula proposicional satisfacible admite al menos un modelo.

LP2) La deducción $\{p, q\} \to r$ es válida si y sólo si la fórmula $p \to (q \to r)$ lo es.

LP3) La expresión $p \wedge q \vee r \wedge s$ es una fórmula proposicional escrita en forma abreviada.

En la lógica de primer orden:

LPO1) $\forall x P(x) \wedge \exists y \neg P(y)$ es una fórmula insatisfacible.

LPO2) $\forall x P(x)$ y $\neg(\exists x P(x))$ son fórmulas equivalentes.

LPO3) Dada una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ de la fórmula $\forall x \exists y (P(x, y) \to Q(y))$, es correcto definir una asignación A tal que $x^A = a \in D$.

Ejercicio 2: Considera el conjunto $\Sigma = \{p, q, r, s, t, u, v, z\}$ y su conjunto de las partes $P(\Sigma)$.

a) (10 puntos) Usa el principio de recursión estructural para definir la función

$$f : F \longrightarrow P(\Sigma),$$

que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica proposicional le asocia el conjunto de proposiciones atómicas de Σ que aparecen en la signatura de φ.

b) (8 puntos) Usa inducción estructural para verificar que, para toda $\varphi \in F$, se verifica que el número de elementos de $f(\varphi)$ es menor o igual que 8.

Ejercicio 3: En el contexto de la lógica proposicional, sea φ la siguiente fórmula:

$$\varphi : (p \to q) \to (p \vee q \to p \wedge q).$$

a) (10 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para clasificar φ.
b) (4 puntos) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ.
c) (6 puntos) Halla la forma normal conjuntiva de φ, $FNC(\varphi)$.

Ejercicio 4: (8 puntos) En el contexto de la lógica de primer orden, formaliza las siguientes frases usando como dominio D el conjunto de las piezas de ajedrez y los predicados:

T(x) = x es una torre, C(x) = x es un caballo, MD(x) = x se mueve en diagonal, B(x) = x es blanca, N(x) = x es negra, CP(x,y) = x come a y, A(x,y) = x está alineada con y.

a) Ninguna torre se mueve en diagonal.
b) Toda pieza se mueve en diagonal, salvo si es una torre o un caballo.
c) Una pieza blanca sólo come piezas negras.
d) Para que una torre coma un caballo es necesario que las dos piezas estén alineadas.

Ejercicio 5: Considera la red de seis ordenadores de la figura 3.

En el dominio

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

de los seis ordenadores, considera los siguientes predicados:

$P(x)$: x es par,
$C(x, y)$: x está directamente conectado (a distancia 1) con y (x y y distintos),
$D(x, y, z)$: x está directamente conectado con y y con z (x, y y z todos distintos),

a) (9 puntos) Define la interpretación con dominio D determinada por la red de la figura 3.

b) (15 puntos) Evalúa las siguientes seis fórmulas en la interpretación del apartado a:

$\varphi_1 : \forall x \exists y (P(x) \wedge \neg P(y) \wedge C(x, y))$,
$\varphi_2 : \exists x \forall y (P(x) \wedge \neg P(y) \wedge C(x, y))$,
$\varphi_3 : \forall x \exists y C(x, y)$,
$\varphi_4 : \forall x \forall y \exists z D(x, y, z)$,

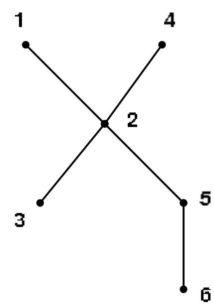


Figura 3. Grafo de la red de ordenadores del ejercicio 5

$\varphi_5 : \exists x \forall y \forall z D(x, y, z)$,
$\varphi_6 : \exists x \forall y (P(x) \land \neg P(y) \to C(x, y))$.

Ejercicio 6: (10 puntos) Verifica si las fórmulas φ y ψ son lógicamente equivalentes:

$$\varphi : P(x) \leftrightarrow Q(x), \qquad \psi : P(x) \lor Q(x) \leftrightarrow P(x) \land Q(x).$$

Ejercicio 7: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural, demuestra la validez de la deducción:

$$\{\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall x(P(x) \land R(x))\} \vdash \exists x(Q(x) \land R(x)).$$

9. Soluciones del examen final de febrero 2006-2007

Fecha: 9 de febrero de 2007 **Tiempo: 3 horas**

Ejercicio 1: (6 puntos) Para cada apartado, contesta verdadero o falso (no hace falta justificar tus repuestas):

En la lógica proposicional:

LP1) Toda fórmula proposicional satisfacible admite al menos un modelo.
LP2) La deducción $\{p, q\} \to r$ es válida si y sólo si la fórmula $p \to (q \to r)$ lo es.
LP3) La expresión $p \wedge q \vee r \wedge s$ es una fórmula proposicional escrita en forma abreviada.

En la lógica de primer orden:

LPO1) $\forall x P(x) \wedge \exists y \neg P(y)$ es una fórmula insatisfacible.
LPO2) $\forall x P(x)$ y $\neg(\exists x P(x))$ son fórmulas equivalentes.
LPO3) Dada una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ de la fórmula $\forall x \exists y (P(x,y) \to Q(y))$, es correcto definir una asignación A tal que $x^A = a \in D$.

Solución:
LP1) Verdadero por definición de fórmula satisfacible.
LP2) Verdadero por el teorema de la deducción.
LP3) Falso. Los conectivos $\wedge$ y $\vee$ tienen el mismo nivel de precedencia. Por tanto la fórmula sería ambigua.
LPO1) Verdadero, siendo $\exists y \neg P(y)$ la negación de $\forall x P(x)$.
LPO2) Falso ya que $\neg(\exists x P(x))$ es equivalente a $\forall x \neg P(x)$.
LPO3) Falso. La fórmula $\forall x \exists y (P(x,y) \to Q(y))$ no contiene variables libres.

Ejercicio 2: Considera el conjunto $\Sigma = \{p, q, r, s, t, u, v, z\}$ y su conjunto de las partes $P(\Sigma)$.

a) (10 puntos) Usa el principio de recursión estructural para definir la función
$$f : F \longrightarrow P(\Sigma),$$
que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica proposicional le asocia el conjunto de proposiciones atómicas de Σ que aparecen en la signatura de φ.

b) (8 puntos) Usa inducción estructural para verificar que, para toda $\varphi \in F$, se verifica que el número de elementos de $f(\varphi)$ es menor o igual que 8.

Solución:

a)

$$f : F \longrightarrow P(\Sigma),$$

que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica proposicional le asocia el conjunto de proposiciones atómicas de Σ que aparecen en la signatura de φ.

1. **Base (At):** $f(\top) = f(\bot) = \emptyset$, $f(p) = \{p\} \cap \Sigma$.
2. **Pasos recursivos:**
   $(\neg)$: $f(\neg(\varphi)) = f(\varphi)$,
   $(\circ)$: $f(\varphi \circ \psi) = (f(\varphi) \cup f(\psi)) \cap \Sigma$, para todo conectivo binario $\circ$ y todo par de fórmulas φ y ψ.

Estas definiciones determinan la función f sobre todo F.

b) Dado un conjunto A, vamos a usar el símbolo $|A|$ para indicar el cardinal de A, es decir, el número de elementos de A.

Usando el principio de inducción estructural podemos probar que para toda fórmula φ se verifica que el número de elementos de $f(\varphi)$ es menor o igual que 8:

Base de inducción (At): $|f(\top)| = |f(\bot)| = 0 \leq 8$, $|f(p)| = |\{p\} \cap \Sigma| \leq 1 \leq 8$.

Pasos de inducción:

$(\neg)$: Si $|f(\varphi)| \leq 8$ para una fórmula cualquiera, entonces $|f(\neg\varphi)| = |f(\varphi)| \leq 8$.

$(\circ)$: Si φ y ψ son dos fórmulas tales que $|f(\varphi)| \leq 8$ y $|f(\psi)| \leq 8$, entonces $|f(\varphi \circ \psi)| = |(f(\varphi) \cup f(\psi)) \cap \Sigma| \leq |\Sigma| \leq 8$.

Se sigue que, por el principio de inducción estructural, que para toda fórmula φ se verifica que el número de elementos de $f(\varphi)$ es menor o igual que 8.

Ejercicio 3: En el contexto de la lógica proposicional, sea φ la siguiente fórmula:

$$\varphi : (p \to q) \to (p \vee q \to p \wedge q).$$

a) (10 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para clasificar φ.
b) (4 puntos) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ.
c) (6 puntos) Halla la forma normal conjuntiva de φ, $FNC(\varphi)$.

Solución:

a)

$$\varphi : (p \to q) \to (p \vee q \to p \wedge q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg(p \vee q) \vee (p \wedge q)) \equiv$$
$$\equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q).$$

$$\neg\varphi \equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q).$$

Los tableaux completos de $\neg\varphi$ y φ tienen ramas abierta (ver figura 4). Se sigue que φ es una contingencia.

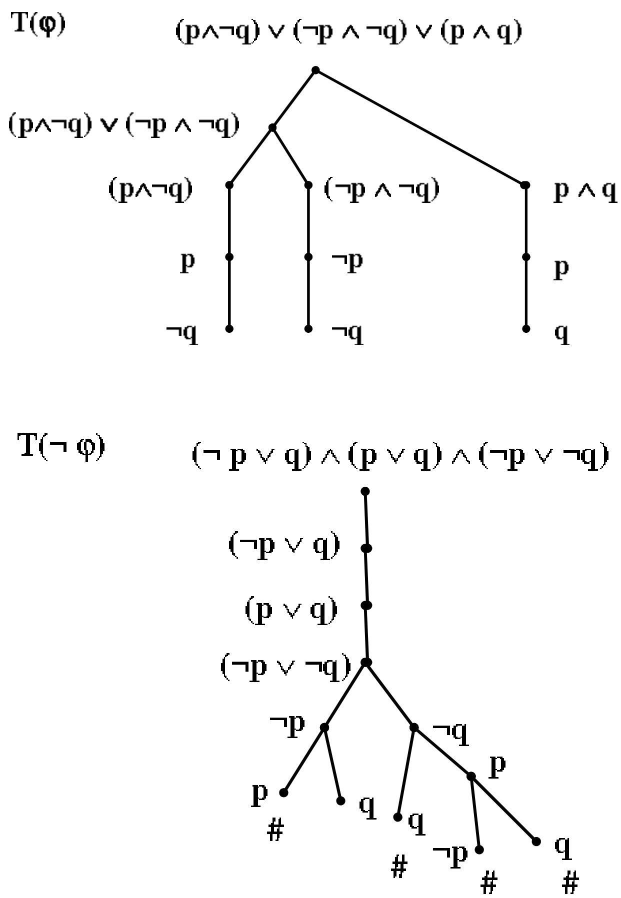


Figura 4. Tableaux de $\neg\varphi$ y φ.

b) Del tableau de φ se deduce que la valoración $\{p = 1, q = 0\}$ es un modelo de φ.

Del tableau de $\neg\varphi$ se deduce que la valoración $\{p = 0, q = 1\}$ es un contraejemplo de φ.

c) Mirando a la única rama abierta del tableau de $\neg\varphi$ se obtiene que:

$$FND(\neg\varphi) = \neg p \wedge q.$$

Entonces,

$$FNC(\varphi) = \neg FND(\neg\varphi) = p \vee \neg q.$$

Ejercicio 4: (8 puntos) En el contexto de la lógica de primer orden, formaliza las siguientes frases usando como dominio D el conjunto de las piezas de ajedrez y los predicados:

T(x) = x es una torre, C(x) = x es un caballo, MD(x) = x se mueve en diagonal, B(x) = x es blanca, N(x) = x es negra, CP(x,y) = x come a y, A(x,y) = x está alineada con y.

a) Ninguna torre se mueve en diagonal.
b) Toda pieza se mueve en diagonal, salvo si es una torre o un caballo.
c) Una pieza blanca sólo come piezas negras.
d) Para que una torre coma un caballo es necesario que las dos piezas estén alineadas.

Solución:

a) $\forall x(T(x) \to \neg MD(x)) \equiv \neg\exists x(T(x) \wedge MD(x)) \equiv \forall x(\neg T(x) \vee \neg MD(x))$.

b) $\forall x(\neg MD(x) \to T(x) \vee C(x)) \equiv \forall x(MD(x) \vee T(x) \vee C(x))$.

c) $\forall x\forall y(B(x) \wedge CP(x,y) \to N(y)) \equiv \forall x\forall y(\neg B(x) \vee \neg CP(x,y) \vee N(y))$.

d) $\forall x\forall y(T(x) \wedge C(y) \wedge CP(x,y) \to A(x,y)) \equiv$
$\equiv \forall x\forall y(\neg T(x) \vee \neg C(y) \vee \neg CP(x,y) \vee A(x,y))$.

Ejercicio 5: Considera la red de seis ordenadores de la figura 5.

En el dominio

$$D = \{1,2,3,4,5,6\}$$

de los seis ordenadores, considera los siguientes predicados:

$P(x)$: x es par,
$C(x,y)$: x está directamente conectado (a distancia 1) con y (x y y distintos),
$D(x,y,z)$: x está directamente conectado con y y con z (x, y y z todos distintos),

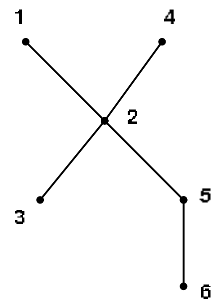


Figura 5. Grafo de la red de ordenadores del ejercicio 5

a) (9 puntos) Define la interpretación con dominio D determinada por la red de la figura 5.

b) (15 puntos) Evalúa las siguientes seis fórmulas en la interpretación del apartado a:

$\varphi_1 : \forall x \exists y (P(x) \wedge \neg P(y) \wedge C(x,y))$,
$\varphi_2 : \exists x \forall y (P(x) \wedge \neg P(y) \wedge C(x,y))$,
$\varphi_3 : \forall x \exists y C(x,y)$,
$\varphi_4 : \forall x \forall y \exists z D(x,y,z)$,
$\varphi_5 : \exists x \forall y \forall z D(x,y,z)$,
$\varphi_6 : \exists x \forall y (P(x) \wedge \neg P(y) \to C(x,y))$.

Solución:

a) La interpretación con dominio D determinada por la red de la figura 5 es $\mathbb{I} = (D, I)$, donde:

$$P^I = \{2,4,6\} \subset D,$$
$$C^I = \{(1,2),(2,1),(2,4),(4,3),(2,3),(3,2),(2,5),(5,2),(5,6),(6,5)\} \subset D \times D,$$

$$D^I = \{(2,1,4),(2,4,1),(2,3,5),(2,5,3),(2,1,3),(2,3,1),(2,4,5),(2,5,4),$$
$$(2,3,4),(2,4,3),(2,1,5),(2,5,1),(5,2,6),(5,6,2)\} \subset D \times D \times D.$$

b)

$(\varphi_1)^I = 0$ ya que, por ejemplo, $(P(1))^I = 0$.
$(\varphi_2)^I = 0$ ya que, para todo x, $(\forall y(P(x) \wedge \neg P(y) \wedge C(x,y)))^I = 0$, siendo, por ejemplo, $(\neg P(3))^I = 0$.
$(\varphi_3)^I = 1$ ya que el grafo de la red es conexo, es decir, todo ordenador está a distancia 1 de al menos otro ordenador.
$(\varphi_4)^I = 0$ ya que, por ejemplo, para todo z, $(D(6,5,z))^I = 0$.
$(\varphi_5)^I = 0$ ya que, para todo x, $(D(x,1,6))^I = 0$.
$(\varphi_6)^I = 1$ ya que $(\forall y(P(1) \wedge \neg P(y) \rightarrow C(1,y)))^I = 1$, siendo la premisa de la implicación siempre falsa.

Ejercicio 6: (10 puntos) Verifica si las fórmulas φ y ψ son lógicamente equivalentes:

$$\varphi : P(x) \leftrightarrow Q(x), \qquad \psi : P(x) \vee Q(x) \leftrightarrow P(x) \wedge Q(x).$$

Solución:

Sean $\mathbb{I} = (D, I)$ y A una interpretación y una asignación cualesquiera. Los posibles casos se pueden representar en la siguiente tabla:

$(P(x))^{I,A}$	$(Q(x))^{I,A}$	$(\varphi)^{I,A}$	$(P(x) \vee Q(y))^{I,A}$	$(P(x) \wedge Q(y))^{I,A}$	$(\psi)^{I,A}$	$(\varphi \leftrightarrow \psi)^{I,A}$
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1

Se sigue que φ y ψ son equivalentes.

Ejercicio 7: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural, demuestra la validez de la deducción:

$$\{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x(P(x) \wedge R(x))\} \vdash \exists x(Q(x) \wedge R(x)).$$

Solución:

1)	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	(Premisa)
2)	$\forall x(P(x) \wedge R(x))$	(Premisa)
3)	$\vdash P(a) \rightarrow Q(a)$	$(E\forall(1))$
4)	$\vdash P(a) \wedge R(a)$	$(E\forall(2))$
5)	$\vdash P(a)$	$(E \wedge (4))$
6)	$\vdash R(a)$	$(E \wedge (4))$
7)	$\vdash Q(a)$	$(E \rightarrow (5,3))$
8)	$\vdash R(a) \wedge Q(a)$	$(I \wedge (6,7))$
9)	$\vdash \exists x(Q(x) \wedge R(x))$	$(I\exists(8))$

10. Examen final de septiembre 2006-2007

Fecha: 10 de septiembre de 2007 **Tiempo: 3 horas**

El examen está formado por siete problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados. ***Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas****.*

Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Ejercicio 1: (6 puntos) Para cada apartado, contesta verdadero o falso (no hace falta justificar tus repuestas):

En la lógica proposicional:

LP1) Toda forma satisfacible admite al menos un contraejemplo.

LP2) La deducción $\{p, q\} \to r$ no es verdadera si $p \wedge q$ es falso y r es falso.

LP3) La expresión $p \to (q \vee r) \wedge s$ es una fórmula proposicional escrita en forma abreviada.

En la lógica de primer orden:

LPO1) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \to \exists y P(y)$ es una fórmula válida.

LPO2) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ y $\neg\exists x(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$ son fórmulas equivalentes.

LPO3) En la fórmula $\forall x P(x, y) \to \exists y Q(y)$ la variable y tiene una ocurrencia de variable libre.

Ejercicio 2: (18 puntos) Considera el conjunto L de las posibles listas ordenadas alfabéticamente, sin repeticiones, de los símbolos del conjunto $A = \{p, q, r, s, t\}$. Así, por ejemplo, la lista vacía $\emptyset$ y las listas $[q, s]$, $[p, s, t]$ y $[p, q, r, s, t]$ son elementos del conjunto L.

Sea $ord : L \times L \longrightarrow L$ la función que a cada par de listas $(l_1, l_2) \in L \times L$ asocia una nueva lista en L formada por la unión de los elementos de l_1 y l_2, ordenados alfabéticamente y sin repeticiones.

Usa la función ord y el principio de recursión estructural para definir la función

$$f : F \longrightarrow L,$$

que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica proposicional asocia la lista ordenada en L formada por sus proposiciones atómicas que pertenecen al conjunto A.

Ejercicio 3: En el contexto de la lógica proposicional, sea φ la siguiente fórmula:

$$\varphi : (p \vee q \to r \wedge s) \wedge (r \to s) \to p \wedge q.$$

a) (10 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para clasificar φ.
b) (4 puntos) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ.
c) (6 puntos) Halla la forma normal conjuntiva de φ, $FNC(\varphi)$.

Ejercicio 4: (8 puntos) En el contexto de la lógica de primer orden, formaliza las siguientes frases usando como dominio $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales $\{1, 2, 3, \dots\}$. Define claramente las constantes, las funciones y los predicados utilizados en tu formalización.

a) El doble de todo número natural es par.
b) Ningún par divide a un impar.
c) Si dos números naturales son divisores el uno del otro, entonces son iguales.
d) Un número natural divide a todos los números naturales sólo si es igual a 1.

Ejercicio 5: Considera las dos tablas de la figura 6.

En el dominio

$$D = \{A, B, C, D, E\}$$

de las cinco letras que ocupan las dos tablas, considera los siguientes predicados:

$A(x, y)$: x está más arriba que y (x y y distintas),
$M(x, y)$: x está en la misma fila que y (x y y distintas).

Sean $\mathbb{I}_1 = (D, I_1)$ $\mathbb{I}_2 = (D, I_2)$ las dos interpretaciones representadas en las tablas 1 y 2 de la figura 6, respectivamente.

a) (12 puntos) Define explícitamente los conjuntos A^{I_1}, M^{I_1} y A^{I_2}, M^{I_2}.

b) (12 puntos) Evalúa las siguientes seis fórmulas en cada una de las dos interpretaciones del apartado a:

$\varphi_1 : \exists x \forall y A(x, y)$,
$\varphi_2 : \forall x \exists y A(y, x)$,
$\varphi_3 : \exists x \forall y \neg M(x, y)$,
$\varphi_4 : \exists x \forall y \neg A(x, y)$,
$\varphi_5 : \exists x \forall y \neg(A(x, y) \vee M(x, y))$,
$\varphi_6 : \exists x \exists y \exists z (M(x, y) \wedge A(x, z))$.

A			E
		B	
		C	
	D		

	A	B	
	C	D	
			E

FIGURA 6. Tablas del ejercicio 5

Ejercicio 6: (10 puntos) Por medio de un contraejemplo verifica que las fórmulas φ y ψ no son lógicamente equivalentes:

$$\varphi : \forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall x \exists y \neg P(x,y), \qquad \psi : \forall x \exists y (P(x,y) \wedge Q(x,y)).$$

Ejercicio 7: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural, demuestra la validez de la deducción:

$$\{\forall x(P(x) \wedge Q(x) \to R(x)), \forall x(P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x) \to S(x)),$$
$$\exists x(S(x) \wedge P(x) \to T(x))\} \vdash \exists x(P(x) \wedge Q(x) \to T(x)).$$

11. Soluciones del examen final de septiembre 2006-2007

Fecha: 10 de septiembre de 2007 **Tiempo: 3 horas**

Ejercicio 1: (6 puntos) Para cada apartado, contesta verdadero o falso (no hace falta justificar tus repuestas):

En la lógica proposicional:

LP1) Toda forma satisfacible admite al menos un contraejemplo.
LP2) La deducción $\{p, q\} \to r$ no es verdadera si $p \wedge q$ es falso y r es falso.
LP3) La expresión $p \to (q \vee r) \wedge s$ es una fórmula proposicional escrita en forma abreviada.

En la lógica de primer orden:

LPO1) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \to \exists y P(y)$ es una fórmula válida.
LPO2) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ y $\neg\exists x(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$ son fórmulas equivalentes.
LPO3) En la fórmula $\forall x P(x, y) \to \exists y Q(y)$ la variable y tiene una ocurrencia de variable libre.

Solución:
LP1) Falso: si una fórmula es una tautología es satisfacible y no admite un contraejemplo.
LP2) Falso: por el teorema de la deducción, la deducción $\{p, q\} \to r$ se puede escribir como una implicación $p \wedge q \to r$. Si $p \wedge q$ es falso, la implicación es verdadera.
LP3) Verdadero: $p \to (q \vee r) \wedge s$ es la forma abreviada de la fórmula $(p \to ((q \vee r) \wedge s))$.
LPO1) Verdadero: $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \vdash \forall x P(x) \vdash \exists x P(x)$.
LPO2) Verdadero: $\neg\exists x(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$ es equivalente a $\forall x \neg(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$, equivalente a $\forall x(P(x) \vee Q(x))$.
LPO3) Verdadero: la variable y tiene una ocurrencia de variable libre en $\forall x P(x, y)$, ya que no hay ningún cuantificador que la afecte.

Ejercicio 2: (18 puntos) Considera el conjunto L de las posibles listas ordenadas alfabéticamente, sin repeticiones, de los símbolos del conjunto $A = \{p, q, r, s, t\}$. Así, por ejemplo, la lista vacía $\emptyset$ y las listas $[q, s]$, $[p, s, t]$ y $[p, q, r, s, t]$ son elementos del conjunto L.

Sea $ord : L \times L \longrightarrow L$ la función que a cada par de listas $(l_1, l_2) \in L \times L$ asocia una nueva lista en L formada por la unión de los elementos de l_1 y l_2, ordenados alfabéticamente y sin repeticiones.

Usa la función ord y el principio de recursión estructural para definir la función
$$f : F \longrightarrow L,$$
que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica proposicional asocia la lista ordenada en L formada por sus proposiciones atómicas que pertenecen al conjunto A.

Solución:

1. **Base (At):** $f(\top) = f(\bot) = \emptyset,\ \ f(p) = \begin{cases} [p] & \text{si}\, p \in A, \\ \emptyset & \text{si}\, p \notin A. \end{cases}.$

2. **Pasos recursivos:**
   $(\neg)$: $f(\neg(\varphi)) = f(\varphi)$,
   $(\circ)$: $f(\varphi \circ \psi) = ord(f(\varphi), f(\psi))$, para todo conectivo binario $\circ$ y todo par de fórmulas φ y ψ.

Estas definiciones determinan la función f sobre todo F.

Ejercicio 3: En el contexto de la lógica proposicional, sea φ la siguiente fórmula:
$$\varphi : (p \vee q \to r \wedge s) \wedge (r \to s) \to p \wedge q.$$

a) (10 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para clasificar φ.
b) (4 puntos) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ.
c) (6 puntos) Halla la forma normal conjuntiva de φ, $FNC(\varphi)$.

Solución:

a)
$$\begin{gathered}\varphi : (p \vee q \to r \wedge s) \wedge (r \to s) \to p \wedge q \equiv \\ \equiv \neg(\neg(p \vee q) \vee (r \wedge s)) \vee \neg(\neg r \vee s) \vee (p \wedge q) \equiv \\ \equiv ((p \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg s)) \vee (r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q).\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\neg\varphi \equiv (\neg(p \vee q) \vee \neg(\neg r \vee \neg s)) \wedge \neg(r \wedge \neg s) \wedge \neg(p \wedge q) \equiv \\ \equiv ((\neg p \wedge \neg q) \vee (r \wedge s)) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg q).\end{gathered}$$

Los tableaux completos de $\neg\varphi$ y φ tienen ramas abierta (ver figuras 11 y 8). Se sigue que φ es una contingencia.

b) Del tableau de φ se deduce que la valoración $\{p = 1, q = 1, r = 0, s = 0\}$ es un modelo de φ.
Del tableau de $\neg\varphi$ se deduce que la valoración $\{p = 0, q = 0, r = 1, s = 1\}$ es un contraejemplo de φ.

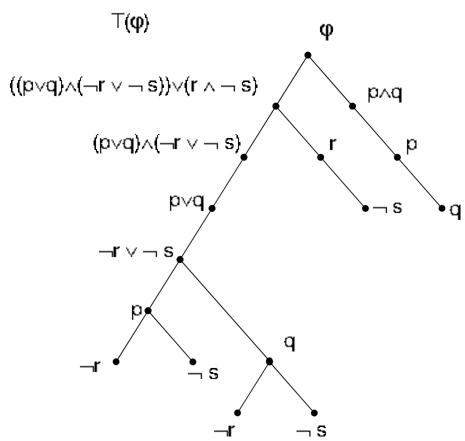


FIGURA 7. Tableaux de φ del ejercicio 3.

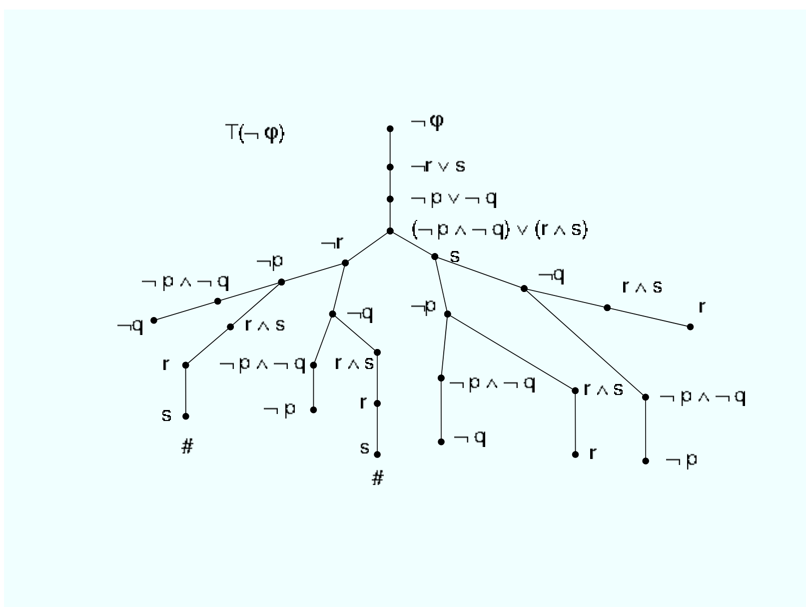


FIGURA 8. Tableaux de $\neg\varphi$ del ejercicio 3.

c) Mirando a la única rama abierta del tableau de $\neg\varphi$ se obtiene que:

$FND(\neg\varphi) = (\neg q\wedge\neg p\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge\neg p\wedge s)\vee(r\wedge\neg p\wedge s)\vee$

$\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge s)\vee(r\wedge\neg q\wedge s) \equiv (\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge\neg p\wedge s)\vee(r\wedge\neg q\wedge s).$

Entonces,

$$FNC(\varphi) = \neg FND(\neg\varphi) = (p \vee q \vee r) \wedge (q \vee p \vee \neg s) \wedge (r \vee p \vee \neg s).$$

Ejercicio 4: (8 puntos) En el contexto de la lógica de primer orden, formaliza las siguientes frases usando como dominio $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales $\{1, 2, 3, \dots\}$. Define claramente las constantes, las funciones y los predicados utilizados en tu formalización.

a) El doble de todo número natural es par.
b) Ningún par divide a un impar.
c) Si dos números naturales son divisores el uno del otro, entonces son iguales.
d) Un número natural divide a todos los números naturales sólo si es igual a 1.

Solución:

Constantes: $1 \in \mathbb{N}$,

Funciones: $M2(n) = 2n$, que es la función que a todo número natural n le asocia su doble $2n$,

Predicados: $P(n) = n$ es par, $D(n,m) = n$ es un divisor de m y $I(n,m) = n$ es igual a m.

Notar que no haría falta definir el predicado $I(n,m) = n$, siendo el símbolo de igualdad ya definido en nuestro sistema de la lógica de predicados.

Con las definiciones anteriores, la formalización de las frases dadas es:

a) El doble de todo número natural es par.

$$\forall n P(M2(n)).$$

b) Ningún par divide a un impar.

$$\forall n\forall m(P(n)\wedge\neg P(m) \to \neg D(n,m)) \equiv \forall n\forall m(\neg P(n)\vee P(m)\vee\neg D(n,m)).$$

c) Si dos números naturales son divisores el uno del otro, entonces son iguales.

$$\forall n\forall m(D(n,m)\wedge D(m,n) \to I(n,m)) \equiv \forall n\forall m(\neg D(n,m)\vee\neg D(m,n)\vee I(n,m)).$$

d) Un número natural divide a todos los números naturales sólo si es igual a 1.

$$\forall n(\forall m D(n,m) \to I(n,1)) \equiv \forall n(\exists m\neg D(n,m) \vee I(n,1)).$$

A			E
		B	
		C	
	D		

	A	B	
	C	D	
			E

FIGURA 9. Tablas del ejercicio 5

Ejercicio 5: Considera las dos tablas de la figura 9.

En el dominio

$$D = \{A, B, C, D, E\}$$

de las cinco letras que ocupan las dos tablas, considera los siguientes predicados:

$A(x, y)$: x está más arriba que y (x y y distintas),
$M(x, y)$: x está en la misma fila que y (x y y distintas).

Sean $\mathbb{I}_1 = (D, I_1)$ $\mathbb{I}_2 = (D, I_2)$ las dos interpretaciones representadas en las tablas 1 y 2 de la figura 9, respectivamente.

a) (12 puntos) Define explícitamente los conjuntos A^{I_1}, M^{I_1} y A^{I_2}, M^{I_2}.

b) (12 puntos) Evalúa las siguientes seis fórmulas en cada una de las dos interpretaciones del apartado a:

φ_1 : $\exists x \forall y A(x, y)$,
φ_2 : $\forall x \exists y A(y, x)$,
φ_3 : $\exists x \forall y \neg M(x, y)$,
φ_4 : $\exists x \forall y \neg A(x, y)$,
φ_5 : $\exists x \forall y \neg(A(x, y) \vee M(x, y))$,
φ_6 : $\exists x \exists y \exists z (M(x, y) \wedge A(x, z))$.

Solución:

a)

$$A^{I_1} = \{(A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (B, D), (C, D), (E, B), (E, C), (E, D)\},$$

$$M^{I_1} = \{(A, E), (E, A)\},$$

$$A^{I_2} = \{(A, C), (A, D), (A, E), (B, C), (B, D), (B, E), (C, E), (D, E)\},$$

$$M^{I_2} = \{(A, B), (B, A), (C, D), (D, C)\}.$$

b)

$(\varphi_1)^{I_1} = (\varphi_1)^{I_2} = 0$, ya que en las dos tablas no existe ninguna letra que esté más arriba de todas las demás letras.
$(\varphi_2)^{I_1} = (\varphi_2)^{I_2} = 0$, ya que si $x = A$, en las dos tablas no hay otras letras más arriba de A.

$(\varphi_3)^{I_1} = 1$, ya que si $x = D$, $(\forall y \neg M(D, y))^{I_1} = 1$, siendo $(D, y) \notin M^{I_1}$ para todo y,
$(\varphi_3)^{I_2} = 1$, ya que si $x = E$, $(\forall y \neg M(E, y))^{I_2} = 1$, siendo $(E, y) \notin M^{I_2}$ para todo y,
$(\varphi_4)^{I_1} = 1$, ya que si $x = D$, $(\forall y \neg A(D, y))^{I_1} = 1$, siendo $(D, y) \notin A^{I_1}$ para todo y,
$(\varphi_4)^{I_2} = 1$, ya que si $x = E$, $(\forall y \neg A(E, y))^{I_2} = 1$, siendo $(E, y) \notin A^{I_2}$ para todo y,
$(\varphi_5)^{I_1} = 1$, ya que si $x = D$, $(\forall y \neg A(D, y))^{I_1} = 1$, siendo $(D, y) \notin A^{I_1}$ para todo y y $(\forall y \neg M(D, y))^{I_1} = 1$, siendo $(D, y) \notin M^{I_1}$ para todo y,
$(\varphi_5)^{I_2} = 1$, ya que si $x = E$, $(\forall y \neg A(E, y))^{I_2} = 1$, siendo $(E, y) \notin A^{I_2}$ para todo y y $(\forall y \neg M(E, y))^{I_2} = 1$, siendo $(E, y) \notin M^{I_2}$ para todo y,
$(\varphi_6)^{I_1} = 1$, ya que, por ejemplo, $(M(A, E) \wedge A(A, B))^{I_1} = 1$,
$(\varphi_6)^{I_2} = 1$, ya que, por ejemplo, $(M(A, B) \wedge A(A, C))^{I_2} = 1$.

Ejercicio 6: (10 puntos) Por medio de un contraejemplo verifica que las fórmulas φ y ψ no son lógicamente equivalentes:

$$\varphi : \forall x \exists y P(x, y) \wedge \forall x \exists y \neg P(x, y), \qquad \psi : \forall x \exists y (P(x, y) \wedge Q(x, y)).$$

Solución:

Siendo las dos fórmulas φ y ψ cerradas, para verificar que no son equivalentes basta con definir una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ tal que los valores φ^I y ψ^I sean distintos.

Sea, por ejemplo, $\mathbb{I} = (D, I)$ la interpretación definida como:

$$D = \{a, b, c\},$$
$$I: \quad P^I = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}, \quad Q^I = \{(a, c), (b, a), (c, b)\}.$$

Sabemos que $\varphi \equiv \forall x (\exists y P(x, y) \wedge \exists z \neg P(x, z))$. Entonces $\varphi^I = 1$ ya que todo elemento $x \in D$ se relaciona con al menos otro elemento (el dominio de la relación es todo D) y no se relaciona con si mismo.

Por el otro lado, $\psi^I = 0$, ya que, si $x = a$, ninguna asignación de la y es tal que $(a, y) \in P^I$ y $(a, y) \in Q^I$. En efecto, para que sea $(a, y) \in P^I$, tiene que ser $y = b$, pero $(a, b) \notin Q^I$.

Ejercicio 7: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural, demuestra la validez de la deducción:

$$\{\forall x (P(x) \wedge Q(x) \rightarrow R(x)), \forall x (P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x) \rightarrow S(x)),$$
$$\exists x (S(x) \wedge P(x) \rightarrow T(x)\} \vdash \exists x (P(x) \wedge Q(x) \rightarrow T(x)).$$

Solución:

1)$\forall x(P(x) \wedge Q(x) \rightarrow R(x))$ (Premisa)
2)$\forall x(P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x) \rightarrow S(x))$ (Premisa)
3)$\exists x(S(x) \wedge P(x) \rightarrow T(x))$ (Premisa)
4)$\vdash S(y) \wedge P(y) \rightarrow T(y)$ (Premisa auxiliar)
5)$P(y) \wedge Q(y)$ (Premisa auxiliar)
6)$\vdash P(y) \wedge Q(y) \rightarrow R(y)$ $(E\forall(1))$
7)$\vdash R(y)$ $(E \rightarrow (5,6))$
8)$\vdash P(y) \wedge Q(y) \wedge R(y) \rightarrow S(y)$ $(E\forall(2))$
9)$\vdash P(y) \wedge Q(y) \wedge R(y)$ $(I \wedge (5,7))$
10)$\vdash S(y)$ $(E \rightarrow (9,8))$
11)$\vdash P(y)$ $(E \wedge (9))$
12) $\vdash S(y) \wedge P(y)$ $(I \wedge (10,11))$
13) $\vdash T(y)$ $(E \rightarrow (12,4))$
14)$\vdash P(y) \wedge Q(y) \rightarrow T(y)$ $(I \rightarrow (5,13))$
15) $\vdash (S(y) \wedge P(y) \rightarrow T(y)) \rightarrow (P(y) \wedge Q(y) \rightarrow T(y))$ $(I \rightarrow (4,14))$
16) $\vdash P(y) \wedge Q(y) \rightarrow T(y)$ $(E\exists(3,(4,14)))$
17) $\vdash \exists x(P(x) \wedge Q(x) \rightarrow T(x))$ $(I\exists(16))$

12. Examen final de febrero 2007-2008

Fecha: 12 de febrero de 2008 **Tiempo: 3 horas**

El examen está formado por siete problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados. ***Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas****.*

Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Ejercicio 1: (6 puntos)

En la lógica proposicional: Para cada apartado, contesta verdadero o falso. No necesitas justificar tus respuestas.

LP1) La expresión $(\neg p \wedge \neg r \rightarrow p \vee q \wedge s) \rightarrow \neg s$ es una fórmula proposicional en forma abreviada.

LP2) Usando formas abreviadas, la fórmula proposicional $\neg(p \wedge \neg(r \rightarrow s)) \wedge t$ es equivalente a las fórmula proposicional $(\neg p \vee \neg r \vee s) \wedge t$.

LP3) Sea φ una fórmula proposicional. Si el tableau acabado de la fórmula $\neg\varphi$ no está cerrado, entonces φ no es una tautología.

En la lógica de primer orden: Contesta a las siguientes cuestiones. No necesitas justificar tus respuestas.

LPO1) ¿Es la fórmula $\forall x\, P(x) \rightarrow \exists\, y P(y)$ válida?

LPO2) ¿Es la fórmula $\exists x\, \forall y\, Q(x,y) \vee \exists z\, Q(x,z)$ abierta?

LPO3) Si $D = \{a\}$ es un dominio con un elemento y R es un símbolo de predicado de aridad 3, ¿cuántas interpretaciones distintas para R existen sobre D?

Ejercicio 2: En el contexto de la lógica proposicional, sea φ la siguiente fórmula:

$$\varphi : (p \wedge \neg q) \vee (r \rightarrow (s \vee q)) \rightarrow p \wedge q.$$

a) (8 puntos) Por medio de tableaux semánticos acabados clasifica φ.

b) (3 puntos) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ.

c) (3 puntos) Halla la forma normal conjuntiva de φ, $FNC(\varphi)$.

Ejercicio 3: (20 puntos) En el contexto de la lógica proposicional y usando el sistema de deducción natural de Gentzen, demuestra la validez de la deducción:

$$\{\neg r \to \neg p \wedge \neg s,\ q \to s\} \vdash p \vee q \to r.$$

Ejercicio 4: (20 puntos) Usa el principio de recursión estructural para definir las siguientes funciones:

a) La función $ar_1 : T \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que a cada término $t \in T$ de la lógica de primer orden le asocia el número de aristas de su árbol estructural.

b) La función $ar_2 : F \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica de primer orden le asocia el número de aristas de su árbol estructural (puedes apoyarte en la función ar_1 del apartado anterior).

Ejercicio 5: (10 puntos) Formaliza en el lenguaje de la lógica de primer orden los siguientes enunciados escritos en lenguaje natural. En cada caso indica cuáles son el dominio y los símbolos de función y predicado (incluidas constantes y proposiciones atómicas) que estás usando.

a) Sólo los hombres son mortales y algunos mortales son cobardes.

b) Todo el mundo da limosna a Pedro, pero Pedro no da limosna a nadie.

c) En el conjunto de los números reales, dado un número positivo siempre hay otro número positivo menor que el primero.

d) En el conjunto de los números naturales, todos los números primos distintos de dos son impares.

Ejercicio 6: (10 puntos) Considera las siguientes fórmulas, donde P es un símbolo de predicado de aridad 3:

$\varphi_1 \ : \ \forall x \forall y \exists z P(x, y, z)$

$\varphi_2 \ : \ \exists z \forall x \forall y P(x, y, z)$

Demuestra que no son equivalentes. Para ello encuentra una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ en la cual una de ellas sea verdadera y la otra falsa. Justifica por qué en cada uno de los dos casos.

Ejercicio 7: (20 puntos) Consideremos P, Q y R símbolos de predicado de aridades 1, 1 y 2 respectivamente. Consideramos una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ tal que el dominio es $D = \{a, b, c, d, e\}$ y tal que
$P^I = \{b, e\}$
$Q^I = \{c, d, e\}$
$R^I = \{(a, a), (b, b), (c, d), (d, c), (d, d), (e, e), (a, e)\}$

Evalúa las siguientes fórmulas en la interpretación $\mathbb{I}$. Justifica tus respuestas.

$\varphi_1 \,:\, \forall x\, (R(x, x) \to Q(x))$

$\varphi_2 \,:\, \exists x\, (\neg\, P(x) \,\wedge\, Q(x))$

$\varphi_3 \,:\, \exists x\, \exists y\, (R(x, y) \to P(x))$

$\varphi_4 \,:\, \forall x\, (P(x) \,\vee\, Q(x) \,\vee\, R(x, x))$

$\varphi_5 \,:\, \forall x\, \exists y\, R(x, y)$

$\varphi_6 \,:\, \exists x\, \forall y\, (R(x, y) \,\vee\, R(y, x))$

13. Soluciones del examen final de febrero 2007-2008

Fecha: 12 de febrero de 2008 **Tiempo: 3 horas**

Ejercicio 1: (6 puntos)

En la lógica proposicional: Para cada apartado, contesta verdadero o falso. No necesitas justificar tus respuestas.

LP1) La expresión $(\neg p \wedge \neg r \rightarrow p \vee q \wedge s) \rightarrow \neg s$ es una fórmula proposicional en forma abreviada.

LP2) Usando formas abreviadas, la fórmula proposicional $\neg(p \wedge \neg(r \rightarrow s)) \wedge t$ es equivalente a las fórmula proposicional $(\neg p \vee \neg r \vee s) \wedge t$.

LP3) Sea φ una fórmula proposicional. Si el tableau acabado de la fórmula $\neg\varphi$ no está cerrado, entonces φ no es una tautología.

En la lógica de primer orden: Contesta a las siguientes cuestiones. No necesitas justificar tus respuestas.

LPO1) ¿Es la fórmula $\forall x\, P(x) \rightarrow \exists\, y P(y)$ válida?

LPO2) ¿Es la fórmula $\exists x\, \forall y\, Q(x, y) \vee \exists z\, Q(x, z)$ abierta?

LPO3) Si $D = \{a\}$ es un dominio con un elemento y R es un símbolo de predicado de aridad 3, ¿cuántas interpretaciones distintas para R existen sobre D?

Solución:

LP1) FALSO: $(\neg p \wedge \neg r \rightarrow p \vee q \wedge s) \rightarrow \neg s$ no es una expresión sintácticamente correcta ya que $p \vee q \wedge s$ no es una fórmula bien construida, ni una forma reducida de una fórmula proposicional: los conectivos $\wedge$ y $\vee$ tienen el mismo nivel de precedencia.

LP2) VERDADERO: $\neg(p \wedge \neg(r \rightarrow s)) \wedge t \equiv (\neg p \vee (\neg r \vee s)) \wedge t \equiv (\neg p \vee \neg r \vee s) \wedge t$.

LP3) VERDADERO: Si el tableau acabado de $\neg\varphi$ tiene una rama abierta, dando valor 1 a los literales que aparecen en esa rama se obtiene un contraejemplo de la fórmula φ.

LPO1) VERDADERO: $\forall x\, P(x) \rightarrow \exists\, y P(y)$ es una fórmula cerrada y, para cualquier interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$, si $(\forall x\, P(x))^I$ es verdadera, necesariamente $(\exists\, y P(y))^I$ también lo es, ya que $P^I(a)$ es verdadera para todo $a \in D$.

LPO2) VERDADERO: la fórmula $\exists x\, \forall y\, Q(x, y) \vee \exists z\, Q(x, z)$ es abierta, siendo la variable x libre en $\exists z\, Q(x, z)$.

LPO3) Si $D = \{a\}$ es un dominio con un elemento y R es un símbolo de predicado de aridad 3, R es un cualquier subconjunto del producto cartesiano $D^3 = D \times D \times D = \{(a, a, a)\}$. Los subconjuntos de D^3 son dos: $\emptyset$ y D^3.

Ejercicio 2: En el contexto de la lógica proposicional, sea φ la siguiente fórmula:

$$\varphi : (p \wedge \neg q) \vee (r \to (s \vee q)) \to p \wedge q.$$

a) (8 puntos) Por medio de tableaux semánticos acabados clasifica φ.
b) (3 puntos) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ.
c) (3 puntos) Halla la forma normal conjuntiva de φ, $FNC(\varphi)$.

Solución:

a)

$$\begin{aligned} \varphi = (p \wedge \neg q) \vee (r \to (s \vee q)) \to p \wedge q \equiv \\ \equiv (\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(\neg r \vee (s \vee q))) \vee (p \wedge q) \\ \equiv ((\neg p \vee q) \wedge r \wedge \neg s \wedge \neg q) \vee (p \wedge q). \\ \neg\varphi \equiv ((p \wedge \neg q) \vee \neg r \vee s \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q). \end{aligned}$$

Los tableaux acabados de $\neg\varphi$ y de φ están representados en la figura 10.

Ya que los dos tableaux no están cerrados, la fórmula φ es una contingencia.

b) De la segunda rama abierta del tableau de φ se deduce que, por ejemplo, la valoración $\{p = 1,\ q = 1,\ r = 0,\ s = 1\}$ es un modelo de φ.

De la primera rama abierta del tableau de $\neg\varphi$ se deduce que, por ejemplo, la valoración $\{p = 0,\ q = 0,\ r = 0,\ s = 0\}$ es un contraejemplo de φ.

c)

$$\begin{aligned} FNC(\varphi) = \neg FND(\neg\varphi) \equiv \\ \equiv \neg((\neg r \wedge \neg p) \vee (s \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge \neg q) \vee (s \wedge \neg q)) \equiv \\ \equiv (r \vee p) \wedge (\neg s \vee p) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (r \vee q) \wedge (\neg s \vee q). \end{aligned}$$

Ejercicio 3: (20 puntos) En el contexto de la lógica proposicional y usando el sistema de deducción natural de Gentzen, demuestra la validez de la deducción:

$$\{\neg r \to \neg p \wedge \neg s,\ q \to s\} \vdash p \vee q \to r.$$

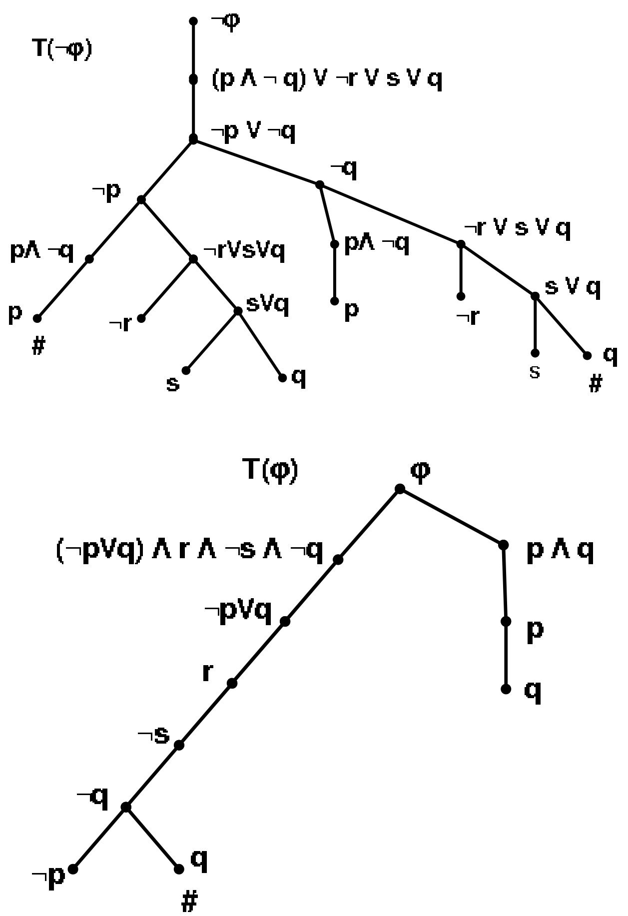


FIGURA 10. Tableaux acabados de $\neg\varphi$ y de φ del problema 2

<u>Solución:</u>

Por el teorema de la deducción, para verificar la validez del razonamiento dado podemos verificar la validez del razonamiento:

$$\{\neg r \to \neg p \wedge \neg s,\, q \to s,\, p \vee q\} \vdash r.$$

1) $\neg r \to \neg p \wedge \neg s$ (Premisa)
2) $q \to s$ (Premisa)
3) $p \vee q$ (Premisa)

$$\boxed{\begin{array}{l} 4) \vdash \neg r \quad \text{(Premisa auxiliar)} \\ 5) \vdash \neg p \wedge \neg s \quad (E \to (4,1)) \\ 6) \vdash \neg p \quad (E \wedge (5)) \\ 7) \vdash q \quad (TolendoPonens(6,3)) \\ 8) \vdash s \quad (E \to (7,2)) \\ 9) \vdash \neg s \quad (E \wedge (5)) \\ 10) \vdash s \wedge \neg s \quad (I \wedge (8,9)) \end{array}}$$

11) $\vdash r$ $(I\neg(4,10))$

Se sigue que el razonamiento dado es válido.

Solución:

a) Base: Si t es un término atómico (es decir, t es una variable o una constante) su árbol estructural no tiene aristas. Por tanto:

$$ar_1(t) = 0$$

Paso recursivo: Si t es el término compuesto $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, entonces aparecen n nuevas aristas:

$$ar_1(t) = ar_1(t_1) + ar_1(t_2) + \cdots + ar_1(t_n) + n$$

b) Base: Si la fórmula es una proposición atómica p, el símbolo $\top$ o el símbolo $\perp$, entonces su árbol no tiene aristas:

$$ar_2(\top) = 0$$

$$ar_2(\perp) = 0$$

$$ar_2(p) = 0$$

Para los otros dos tipos de fórmulas atómicas, que se construyen a partir de términos, necesitamos usar la función ar_1 definida en el apartado anterior.

Si φ es una igualdad de términos $(t = s)$, entonces:

$$ar_2(\varphi) = ar_1(t) + ar_1(s) + 2$$

Si φ es $P(t_1, \ldots, t_n)$ donde P es un símbolo de predicado y los t_i son términos, entonces:

$$ar_2(\varphi) = ar_1(t_1) + \cdots + ar_1(t_n) + n$$

Paso recursivo: Si φ y ψ son fórmulas, x es un símbolo de variable y $\circ$ es una conectiva binaria, entonces:

$$ar_2(\neg\varphi) = ar_2(\varphi) + 1$$

$$ar_2(\varphi \circ \psi) = ar_2(\varphi) + ar_2(\psi) + 2$$

$$ar_2(\forall\, x\, \varphi) = ar_2(\varphi) + 2$$

$$ar_2(\exists\, x\, \varphi) = ar_2(\varphi) + 2$$

(Nótese que, en el caso de los cuantificadores, aparecen dos aristas nuevas, una para la variable x y otra para la fórmula φ).

Ejercicio 5: (10 puntos) Formaliza en el lenguaje de la lógica de primer orden los siguientes enunciados escritos en lenguaje natural. En cada caso indica cuáles son el dominio y los símbolos de función y predicado (incluidas constantes y proposiciones atómicas) que estás usando.

a) Sólo los hombres son mortales y algunos mortales son cobardes.

b) Todo el mundo da limosna a Pedro, pero Pedro no da limosna a nadie.

c) En el conjunto de los números reales, dado un número positivo siempre hay otro número positivo menor que el primero.

d) En el conjunto de los números naturales, todos los números primos distintos de dos son impares.

Solución: (La formalización indicada es una de las posibles, pero hay otras que también son correctas).

a) Dominio $D = \{\text{seres}\}$

Símbolos de predicado:
$H(x)$: x es un hombre.
$M(x)$: x es mortal.
$C(x)$: x es cobarde.

$$\forall\, x\, (M(x) \rightarrow H(x)) \;\wedge\; \exists\, x\, (M(x) \wedge C(x))$$

b) Dominio $D = \{\text{personas}\}$

Símbolos de predicado:
$L(x, y)$: x da limosna a y.

Símbolos de constante:
p : Pedro.

$$\forall x\, L(x, p) \,\wedge\, \forall x\, \neg L(p, x)$$

c) Dominio $D = \mathbb{R}$

Símbolos de predicado:
$P(x)$: x es positivo.
$M(x, y)$: x es menor que y.

$$\forall x\, (P(x) \rightarrow \exists\, y\, (P(y) \wedge M(y, x)))$$

d) Dominio $D = \mathbb{N}$

Símbolos de predicado:
$P(x)$: x es primo.
$I(x)$: x es impar.

Símbolos de constante:
d : 2

$$\forall x\, (P(x) \wedge \neg(x = d) \rightarrow I(x))$$

Ejercicio 6: (10 puntos) Considera las siguientes fórmulas, donde P es un símbolo de predicado de aridad 3:

$\varphi_1 \;:\; \forall x \forall y \exists z P(x, y, z)$

$\varphi_2 \;:\; \exists z \forall x \forall y P(x, y, z)$

Demuestra que no son equivalentes. Para ello encuentra una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ en la cual una de ellas sea verdadera y la otra falsa. Justifica por qué en cada uno de los dos casos.

Solución: El hecho de que las dos fórmulas no sean equivalentes se debe a que para que φ_2 sea verdadera necesitamos que el mismo z aparezca combinado con todos los x, y posibles. En cambio en φ_1 nos basta con que cada pareja x, y aparezca combinada con algún z, que no tiene por qué ser el mismo para cada pareja.

Hay muchas interpretaciones (D, I) que hacen que $\varphi_1^I = 1$ y que $\varphi_2^I = 0$. Una de las más sencillas sea la siguiente:

$D = \{a, b\}$

$P^I = \{(a, a, a), (a, b, a), (b, a, b), (b, b, b)\}$

<u>Ejercicio 7:</u> (20 puntos) Consideremos P, Q y R símbolos de predicado de aridades 1, 1 y 2 respectivamente. Consideramos una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ tal que el dominio es $D = \{a, b, c, d, e\}$ y tal que
$P^I = \{b, e\}$
$Q^I = \{c, d, e\}$
$R^I = \{(a, a), (b, b), (c, d), (d, c), (d, d), (e, e), (a, e)\}$

Evalúa las siguientes fórmulas en la interpretación $\mathbb{I}$. Justifica tus respuestas.

$\varphi_1 \,:\, \forall x\, (R(x, x) \to Q(x))$

$\varphi_2 \,:\, \exists x\, (\neg\, P(x) \,\wedge\, Q(x))$

$\varphi_3 \,:\, \exists x\, \exists y\, (R(x, y) \to P(x))$

$\varphi_4 \,:\, \forall x\, (P(x) \,\vee\, Q(x) \,\vee\, R(x, x))$

$\varphi_5 \,:\, \forall x\, \exists y\, R(x, y)$

$\varphi_6 \,:\, \exists x\, \forall y\, (R(x, y) \,\vee\, R(y, x))$

<u>Solución:</u>
$\varphi_1^I = 0$

Si tomamos $x = a$, tenemos $(R(a, a) \to Q(a))^I = 0$, luego el $\forall$ es falso.

$\varphi_2^I = 1$

Si tomamos $x = c$, tenemos $(\neg P(c) \wedge Q(c))^I = 1$, luego el $\exists$ es verdadero.

$\varphi_3^I = 1$

Tomando $x = a$, $y = b$, tendremos $(R(a,b))^I = 0$,
por lo cual $(R(a,b) \to P(a))^I = 1$, luego el doble $\exists$ es verdadero.

$\varphi_4^I = 1$

Sea quien sea x una de las tres cláusulas de $(P(x) \vee Q(x) \vee R(x,x))$ es verdadera. Como estamos ante una disyunción, la fórmula será cierta para cualquier valor de x. Por tanto, el $\forall$ es verdadero.

$\varphi_5^I = 1$

$(R(a,a))^I = 1$
$(R(b,b))^I = 1$
$(R(c,d))^I = 1$
$(R(d,c))^I = 1$
$(R(e,e))^I = 1$

Es decir, todos los x de D están emparejados mediante R con al menos un elemento y perteneciente a D. Luego φ_5 es cierta.

$\varphi_6^I = 0$

Consideremos la fórmula $\psi\, :\, R(x,y) \,\vee\, R(y,x)$

Si $x = a$, entonces la asignación $y = b$ hace que ψ sea falsa.
Si $x = b$, entonces la asignación $y = a$ hace que ψ sea falsa.
Si $x = c$, entonces la asignación $y = a$ hace que ψ sea falsa.
Si $x = d$, entonces la asignación $y = a$ hace que ψ sea falsa.
Si $x = e$, entonces la asignación $y = b$ hace que ψ sea falsa.

Luego el $\exists$ es falso, no hemos conseguido encontrar ningún valor de x que haga cierta la fórmula que va a continuación.

14. Examen final de septiembre 2007-2008

Fecha: 8 de septiembre de 2008 **Tiempo: 3 horas**

El examen está formado por siete problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados. ***Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas****.*

Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Ejercicio 1: (6 puntos)

En la lógica proposicional: Para cada apartado, contesta verdadero o falso. No necesitas justificar tus respuestas.

LP1) La expresión $(\neg p \wedge r \rightarrow (p \wedge q \wedge s)) \vee \neg s$ es una fórmula proposicional en forma abreviada.

LP2) Usando formas abreviadas, la fórmula proposicional $\neg(p \rightarrow r \vee s) \vee t$ es equivalente a las fórmula proposicional $(p \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee t$.

LP3) Si el tableau acabado de una fórmula φ no está cerrado, entonces φ es satisfacible.

En la lógica de primer orden: Contesta a las siguientes cuestiones. No necesitas justificar tus respuestas.

LPO1) ¿Es la fórmula $\forall x\, P(x) \vee \neg \exists\, y P(y)$ válida?

LPO2) ¿Cuántas apariciones de variable libre hay en la siguiente fórmula?

$$\exists x\, P(f(x)) \wedge \forall y\, Q(x,y) \rightarrow P(y)$$

LPO3) Si $D = \{a, b, c\}$ es un dominio con tres elementos y P es un símbolo de predicado de aridad 1, ¿cuántas interpretaciones distintas para P existen sobre D?

Ejercicio 2: En el contexto de la lógica proposicional, sea φ la siguiente fórmula:

$$\varphi : (\neg p \vee r) \vee ((r \rightarrow q) \wedge s) \rightarrow s \wedge q.$$

a) (8 puntos) Por medio de tableaux semánticos acabados clasifica φ.

b) (3 puntos) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ.

c) (3 puntos) Halla la forma normal conjuntiva de φ, $FNC(\varphi)$.

Ejercicio 3: (20 puntos) En el contexto de la lógica proposicional y usando el sistema de deducción natural de Gentzen, demuestra la validez de la deducción:

$$\{p \vee r \to \neg(q \wedge t),\, \neg s \to q\} \vdash p \wedge t \to s.$$

Ejercicio 4: (20 puntos) Usa el principio de recursión estructural para definir las siguientes funciones:

a) La función $ver_1 : T \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que a cada término $t \in T$ de la lógica de primer orden le asocia el número de vértices de su árbol estructural.

b) La función $ver_2 : F \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica de primer orden le asocia el número de vértices de su árbol estructural (puedes apoyarte en la función ver_1 del apartado anterior).

Ejercicio 5: (10 puntos) Formaliza en el lenguaje de la lógica de primer orden los siguientes enunciados escritos en lenguaje natural. En cada caso indica cuáles son el dominio y los símbolos de función y predicado (incluidas constantes y proposiciones atómicas) que estás usando.

a) Si dos personas se odian, uno de ellos es un héroe y el otro es un villano.

b) Carlos se sentó entre Arantxa y Bárbara pero nadie se sentó entre Darío y Ernesto.

c) En el conjunto de los números reales, el cuadrado de cualquier número negativo es un número positivo.

d) En el conjunto de los números naturales, hay números primos que no son suma de dos números pares.

Ejercicio 6: (10 puntos) Considera las siguientes fórmulas, donde P, Q y R son símbolos de predicado de aridad 1:

$\varphi_1 \;:\; \exists x(P(x) \wedge Q(x) \to R(x))$

$\varphi_2\ :\ \exists x(P(x) \wedge (Q(x) \to R(x)))$

Demuestra que no son equivalentes. Para ello encuentra una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ en la cual una de ellas sea verdadera y la otra falsa. Justifica por qué en cada uno de los dos casos.

Ejercicio 7: (20 puntos) Consideremos P, Q y R símbolos de predicado de aridades 1, 1 y 2 respectivamente. Consideramos una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ tal que el dominio es $D = \{a, b, c, d\}$ y tal que
$P^I = \{a, c\}$
$Q^I = \{c, d\}$
$R^I = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, d), (d, d)\}$

Evalúa las siguientes fórmulas en la interpretación $\mathbb{I}$. Justifica tus respuestas.

$\varphi_1\ :\ \forall x\,(P(x) \to Q(x))$

$\varphi_2\ :\ \exists x\,(P(x)\ \vee\ \neg\, R(x, x))$

$\varphi_3\ :\ \forall x\,\forall y\,(R(x, y) \to R(y, x))$

$\varphi_4\ :\ \exists x\, P(x)\ \wedge\ \exists x\, \neg\, Q(x)\ \wedge\ \exists x\, R(x, x)$

$\varphi_5\ :\ \exists x\,\forall y\, R(x, y)$

$\varphi_6\ :\ \forall x\,\exists y\,(P(x) \to R(x, y))$

15. Soluciones del examen final de septiembre 2007-2008

Fecha: 8 de septiembre de 2008 **Tiempo: 3 horas**

Ejercicio 1: (6 puntos)

En la lógica proposicional: Para cada apartado, contesta verdadero o falso. No necesitas justificar tus respuestas.

LP1) La expresión $(\neg p \wedge r \rightarrow (p \wedge q \wedge s)) \vee \neg s$ es una fórmula proposicional en forma abreviada.

LP2) Usando formas abreviadas, la fórmula proposicional $\neg(p \rightarrow r \vee s) \vee t$ es equivalente a las fórmula proposicional $(p \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee t$.

LP3) Si el tableau acabado de una fórmula φ no está cerrado, entonces φ es satisfacible.

En la lógica de primer orden: Contesta a las siguientes cuestiones. No necesitas justificar tus respuestas.

LPO1) ¿Es la fórmula $\forall x\, P(x) \vee \neg \exists\, y P(y)$ válida?

LPO2) ¿Cuántas apariciones de variable libre hay en la siugiente fórmula?

$$\exists x\, P(f(x)) \wedge \forall y\, Q(x,y) \rightarrow P(y)$$

LPO3) Si $D = \{a,b,c\}$ es un dominio con tres elementos y P es un símbolo de predicado de aridad 1, ¿cuántas interpretaciones distintas para P existen sobre D?

Solución:

LP1) FALSO: su forma abreviada es $(\neg p \wedge r \rightarrow p \wedge q \wedge s) \vee \neg s$.

LP2) VERDADERO: $\neg(p \rightarrow r \vee s) \vee t \equiv \neg(\neg p \vee r \vee s) \vee t \equiv (p \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee t$.

LP3) VERDADERO: Si el tableau acabado de φ tiene una rama abierta, dando valor 1 a los literales que aparecen en esa rama se obtiene un modelo de la fórmula.

Ejercicio 2: En el contexto de la lógica proposicional, sea φ la siguiente fórmula:

$$\varphi : (\neg p \vee r) \vee ((r \rightarrow q) \wedge s) \rightarrow s \wedge q.$$

a) (8 puntos) Por medio de tableaux semánticos acabados clasifica φ.

b) (3 puntos) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ.

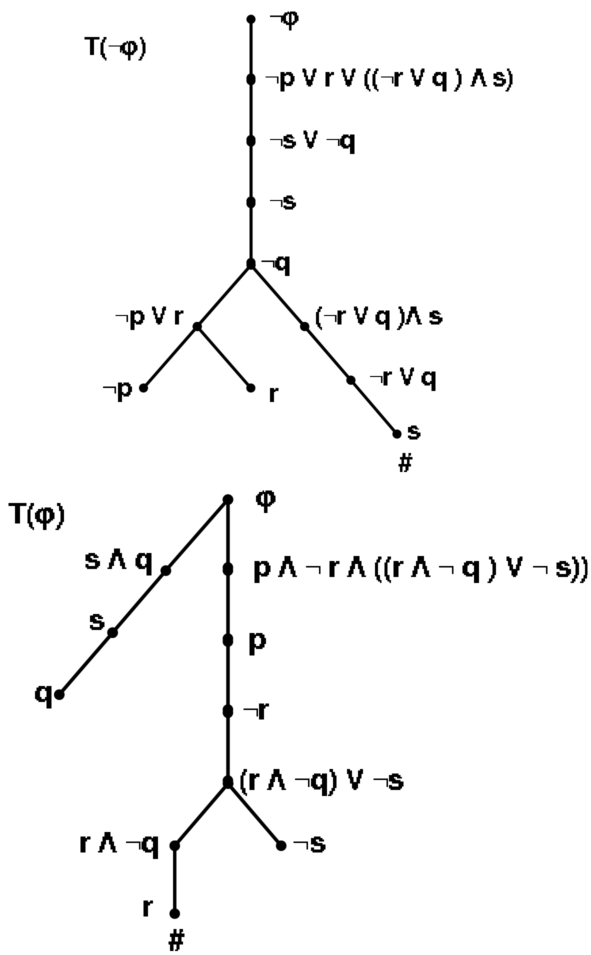


FIGURA 11. Tableaux acabados de $\neg\varphi$ y de φ del problema 2

c) (3 puntos) Halla la forma normal conjuntiva de φ, $FNC(\varphi)$.

Solución:

a)

$$\varphi = (\neg p \vee r) \vee ((r \to q) \wedge s) \to s \wedge q \equiv$$
$$\equiv \neg((\neg p \vee r) \vee ((\neg r \vee q) \wedge s)) \vee (s \wedge q) \equiv$$
$$\equiv (p \wedge \neg r \wedge ((r \wedge \neg q) \vee \neg s)) \vee (s \wedge q).$$

$$\neg\varphi \equiv (\neg p \vee r \vee ((\neg r \vee q) \wedge s)) \wedge (\neg s \vee \neg q).$$

Los tableaux acabados de $\neg\varphi$ y de φ están representados en la figura 11.

Ya que los dos tableaux no están cerrados, la fórmula φ es una contingencia.

b) De la primera rama abierta del tableau de φ se deduce que, por ejemplo, la valoración $\{p = 0,\ q = 1,\ r = 0,\ s = 1\}$ es un modelo de φ.

De la primera rama abierta del tableau de $\neg\varphi$ se deduce que, por ejemplo, la valoración $\{p = 0,\ q = 0,\ r = 1,\ s = 0\}$ es un contraejemplo de φ.

c)

$$FNC(\varphi) = \neg FND(\neg\varphi) \equiv \neg((q \wedge s) \vee (\neg s \wedge \neg r \wedge p)) \equiv$$
$$\equiv (\neg q \vee \neg s) \wedge (s \vee r \vee \neg p).$$

Ejercicio 3: (20 puntos) En el contexto de la lógica proposicional y usando el sistema de deducción natural de Gentzen, demuestra la validez de la deducción:

$$\{p \vee r \to \neg(q \wedge t),\ \neg s \to q\} \vdash p \wedge t \to s.$$

Solución: Por el teorema de la deducción, para verificar la validez del razonamiento dado podemos verificar la validez del razonamiento:

$$\{p \vee r \to \neg(q \wedge t),\ \neg s \to q,\ p \wedge t\} \vdash s.$$

1) $p \vee r \to \neg(q \wedge t)$ (Premisa)
2) $\neg s \to q$ (Premisa)
3) $p \wedge t$ (Premisa)
4) $\vdash p$ $(E \wedge (3))$
5) $\vdash t$ $(E \wedge (3))$
6) $\vdash p \vee r$ $(I \vee (4))$
7) $\vdash \neg(q \wedge t)$ $(E \to (6, 1))$
8) $\vdash \neg q \vee \neg t$ (Ley de Morgan (7))

9) $\vdash \neg s$ (Premisa auxiliar)
10) $\vdash q$ $(E \to (9, 2))$
11) $\vdash \neg t$ (Tollendo Ponens (8,10))
12) $\vdash t \wedge \neg t$ $(I \wedge (5, 11))$

13) $\vdash s$ $(I\neg(9, 12))$

Se sigue que el razonamiento dado es válido.

Ejercicio 4: (20 puntos) Usa el principio de recursión estructural para definir las siguientes funciones:

a) La función $ver_1 : T \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que a cada término $t \in T$ de la lógica de primer orden le asocia el número de vértices de su árbol estructural.

b) La función $ver_2 : F \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica de primer orden le asocia el número de vértices de su árbol estructural (puedes apoyarte en la función ver_1 del apartado anterior).

Solución:
a) Definimos la función ver_1 por recursión:

Para términos atómicos:

- $ver_1(c) = 1$, donde c es un símbolo de constante.
- $ver_1(x) = 1$, donde x es un símbolo de variable.

Paso recursivo:

- $ver_1(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = ver_1(t_1) + ver_1(t_2) + \cdots + ver_1(t_n) + 1$, donde f es un símbolo de función de aridad n y $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son términos.

b) Definimos la función ver_2 por recursión apoyándonos en la función ver_1 del apartado anterior:

Para fórmulas atómicas:

- $ver_2(\top) = ver_2(\bot) = 1$.
- $ver_2(p) = 1$, donde p es un símbolo de proposición atómica.
- $ver_2(t_1 = t_2) = ver_1(t_1) + ver_1(t_2) + 1$, donde t_1 y t_2 son términos.
- $ver_2(P(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = ver_1(t_1) + ver_1(t_2) + \cdots + ver_1(t_n) + 1$, donde P es un símbolo de predicado de aridad n y $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son términos.

Paso recursivo:

- $ver_2(\neg\varphi) = ver_2(\varphi) + 1$,
- $ver_2(\varphi \circ \psi) = ver_2(\varphi) + ver_2(\psi) + 1$,
- $ver_2(\forall x\varphi) = ver_2(\exists x\varphi) = ver_2(\varphi) + 2$,

donde φ y ψ son fórmulas, $\circ$ es una conectiva binaria y x es un símbolo de variable.

Ejercicio 5: (10 puntos) Formaliza en el lenguaje de la lógica de primer orden los siguientes enunciados escritos en lenguaje natural. En cada caso indica cuáles son el dominio y los símbolos de función y predicado (incluidas constantes y proposiciones atómicas) que estás usando.

a) Si dos personas se odian, uno de ellos es un héroe y el otro es un villano.

b) Carlos se sentó entre Arantxa y Bárbara pero nadie se sentó entre Darío y Ernesto.

c) En el conjunto de los números reales, el cuadrado de cualquier número negativo es un número positivo.

d) En el conjunto de los números naturales, hay números primos que no son suma de dos números pares.

Solución:
a) Dominio: $D = \{personas\}$.
Símbolos de predicados:
$O(x, y) = x$ odia a y,
$H(x) = x$ es un héroe,
$V(x) = x$ es un villano.

$$\forall x \forall y (O(x, y) \vee O(y, x) \to (H(x) \wedge V(y)) \vee (H(y) \wedge V(x))).$$

b) Dominio: $D = \{personas\}$.
Símbolos de predicados:
$S(x, y, z) = y$ se sienta entre x y z.
Símbolos de constantes:
A=Arantxa, B=Bárbara, C=Carlos, D= Darío, E=Ernesto.

$$S(A, C, B) \wedge \forall x \neg S(D, x, E).$$

c) Dominio: $D = \mathbb{R}$.
Símbolos de predicados:
$P(x) = x$ es positivo,
$N(x) = x$ es negativo.
Símbolos de funciones:
$f(x) = x^2$.

$$\forall x (N(x) \to P(f(x))).$$

d) Dominio: $D = \mathbb{N}$.
Símbolos de predicados:
$Pr(x) = x$ es primo,
$P(x) = x$ es par.
Símbolos de funciones:

$f(x, y) = x + y$.

$$\exists x(Pr(x) \wedge \forall y \forall z(P(y) \wedge P(z) \to \neg(x = f(y, z)))).$$

Ejercicio 6: (10 puntos) Considera las siguientes fórmulas, donde P, Q y R son símbolos de predicado de aridad 1:

$\varphi_1 \ : \ \exists x(P(x) \wedge Q(x) \to R(x))$

$\varphi_2 \ : \ \exists x(P(x) \wedge (Q(x) \to R(x)))$

Demuestra que no son equivalentes. Para ello encuentra una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ en la cual una de ellas sea verdadera y la otra falsa. Justifica por qué en cada uno de los dos casos.

Solución: Sea $\mathbb{I} = (D, I)$ la interpretación definida por:
$D = \{a, b\}$ y
$P^I = \{a\}$, $Q^I = \{a, b\}$, $R^I = \emptyset$.
Entonces:
$\varphi_1^I = 1$, ya que $(P(b) \wedge Q(b) \to R(b))^I = 1$ siendo una implicación con premisa falsa y
$\varphi_2^I = 0$ ya que $(P(a) \wedge (Q(a) \to R(a)))^I = 0$, siendo $Q^I(a) = 1$ y $R^I(a) = 0$ y $(P(b) \wedge (Q(b) \to R(b)))^I = 0$, siendo $P^I(b) = 0$.
Se sigue que φ_1 y φ_2 no son equivalentes.

Ejercicio 7: (20 puntos) Consideremos P, Q y R símbolos de predicado de aridades 1, 1 y 2 respectivamente. Consideramos una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ tal que el dominio es $D = \{a, b, c, d\}$ y tal que
$P^I = \{a, c\}$
$Q^I = \{c, d\}$
$R^I = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, d), (d, d)\}$

Evalúa las siguientes fórmulas en la interpretación $\mathbb{I}$. Justifica tus respuestas.

$\varphi_1 \ : \ \forall x \, (P(x) \to Q(x))$

$\varphi_2 \ : \ \exists x \, (P(x) \ \vee \ \neg \, R(x, x))$

$\varphi_3 \ : \ \forall x \, \forall y \, (R(x, y) \to R(y, x))$

$\varphi_4 \ : \ \exists x \, P(x) \ \wedge \ \exists x \, \neg \, Q(x) \ \wedge \ \exists x \, R(x, x)$

$\varphi_5 \,:\, \exists x\, \forall y\, R(x,y)$

$\varphi_6 \,:\, \forall x\, \exists y\, (P(x) \to R(x,y))$

Solución:

$\varphi_1^I = 0$ ya que, si $x = a$, $(P(a) \to Q(a))^I = 0$, siendo $P^I(a) = 1$ y $Q^I(a) = 0$,

$\varphi_2^I = 1$ ya que, si $x = a$, $(P(a) \vee \neg R(a,a))^I = 1$, siendo $P^I(a) = 1$.

$\varphi_3^I = 0$ ya que, si $x = c$ y $y = d$, $(R(c,d) \to R(d,c))^I = 0$, siendo $R^I(c,d) = 1$ y $R^I(d,c) = 0$.

$\varphi_4^I = 1$ ya que, $(\exists x\, P(x))^I = 1$ (si $x = a$, $P^I(a) = 1$), $(\exists x\, \neg Q(x))^I = 1$ (si $x = a$, $(\neg Q)^I(a) = 1$) y $(\exists x\, R(x,x))^I = 1$ (si $x = a$, $R^I(a,a) = 1$).

$(\varphi_5)^I = 0$ ya que $R^I(x,c) = 0$ para todo valor de x.

$(\varphi_6)^I = 1$ ya que $P^I(b) = P^I(d) = 0$ y $(P(a) \to R(a,b))^I = (P(c) \to R(c,d))^I = 1$.

16. Examen final de febrero 2008-2009

Fecha: 10 de febrero de 2009 **Tiempo: 3 horas**

El examen está formado por 6 problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados. ***Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas****.*

Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Ejercicio 1:

En la lógica proposicional:

a) (2 puntos) Expresa en forma usual (no abreviada) la fórmula proposicional:

$$\varphi = (p \wedge q \to r \vee s) \wedge p \to q \wedge s.$$

b) (2 puntos) Usando equivalencias lógicas, halla la forma normal disyuntiva de la fórmula φ del apartado anterior.

c) (2 puntos) Halla una fórmula φ que sea la formalización de la frase: *No voy a casa sólo si no tengo que estudiar.*

En la lógica de primer orden:

d) (2 puntos) Construye el árbol estructural de la siguiente fórmula:

$$\neg Q(f(a,b),c) \to \forall x Q(a,g(x)) \wedge P(f(g(b),x))$$

e) (2 puntos) Indica cuántas interpretaciones distintas admite un símbolo de predicado de aridad 3 en un dominio con 5 elemenos.

f) (2 puntos) Indica si es o no correcto el siguiente razonamiento

$$\exists x \exists y P(x,y) \models \exists z P(z,z)$$

Ejercicio 2: (16 puntos) En el contexto de la lógica proposicional, clasifica la siguiente fórmula por medio de tableaux semánticos acabados:

$$(p \vee q \to r) \wedge t \wedge (p \to \neg s) \to q \wedge \neg t.$$

Ejercicio 3: (20 puntos) En el contexto de la lógica proposicional y usando el sistema de deducción natural de Gentzen, demuestra la validez de la deducción:

$$\{s \to (r \to t),\, p \vee s, \neg(r \to p)\} \vdash t.$$

Ejercicio 4: Usa el principio de recursión estructural para definir las siguientes funciones:

a) (6 puntos) La función $lt : T \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que a cada término $t \in T$ de la lógica de primer orden le asocia su **longitud**, entendida como el número de caracteres que aparecen en ese término, **excluyendo** paréntesis y comas.

b) (10 puntos) La función $lf : F \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica de primer orden le asocia su **longitud**, entendida como el número de caracteres que aparecen en ese término, **excluyendo** paréntesis y comas (apóyate en la función lt del apartado anterior).

Nota: Se considerará que todos los símbolos de variable, constante, función y predicado constan de un único carácter.

Ejercicio 5: (12 puntos, 2 por apartado) Formaliza en el lenguaje de la lógica de primer orden los siguientes enunciados escritos en lenguaje natural. El dominio para todos ellos es $\mathbb{N}$, el conjunto de los números naturales. En cada caso indica cuáles son los símbolos de función y predicado (incluidas constantes y proposiciones atómicas) que estás usando.

a) Los números naturales son pares o impares, pero no las dos cosas a la vez.

b) Si un número es par, entonces su siguiente es impar.

c) Ningún número es igual a su siguiente.

d) El producto de un número y su siguiente es siempre par.

e) Todo número es menor que su siguiente.

f) Dado un número cualquiera distinto de uno siempre hay otro número menor.

Ejercicio 6: Se considera la siguiente lista ordenada de caracteres

$$AABADCCDADABBAC$$

y la interpretación (Dom, I) cuyo dominio es $Dom = \{A, B, C, D\}$ y en la cual se tienen los siguientes símbolos de predicado:

$P(x)$: x aparece en la lista dos o más veces consecutivas.
$Q(x, y)$: x aparece en la lista inmediatamente antes de y.
$R(x, y, z)$: y aparece en la lista inmediatamente antes de z e inmediatamente después de x.

Se considera también la función f de aridad 1 que intercambia A con B e intercambia C con D.

a) (6 puntos) Escribe explícitamente los conjuntos P^I y Q^I.

b) (18 puntos, 3 por fórmula) En la interpretación dada, evalúa las siguientes fórmulas. Justifica tus respuestas:

φ_1 : $\forall x \left(P\big(f(x)\big) \rightarrow Q(x, x)\right)$

φ_2 : $\exists x\, R\big(x, f(x), f(x)\big)$

φ_3 : $\exists x\, \exists y\, \big(Q(x, x) \rightarrow R(y, y, y)\big)$

φ_4 : $\forall x\, P(x) \ \vee \ \forall x\, \neg P(x)$

φ_5 : $\forall x\, \neg \forall y\, \neg R(x, y, x)$

φ_6 : $\exists x\, \forall y\, Q(x, y)$

17. Soluciones del examen final de febrero 2008-2009

Fecha: 10 de febrero de 2009 **Tiempo: 3 horas**

Ejercicio 1:

En la lógica proposicional:

a) (2 puntos) Expresa en forma usual (no abreviada) la fórmula proposicional:

$$\varphi = (p \wedge q \to r \vee s) \wedge p \to q \wedge s.$$

b) (2 puntos) Usando equivalencias lógicas, halla la forma normal disyuntiva de la fórmula φ del apartado anterior.

c) (2 puntos) Halla una fórmula φ que sea la formalización de la frase: *No voy a casa sólo si no tengo que estudiar.*

En la lógica de primer orden:

d) (2 puntos) Construye el árbol estructural de la siguiente fórmula:

$$\neg Q(f(a,b),c) \to \forall x Q(a, g(x)) \wedge P(f(g(b),x))$$

e) (2 puntos) Indica cuántas interpretaciones distintas admite un símbolo de predicado de aridad 3 en un dominio con 5 elemenos.

f) (2 puntos) Indica si es o no correcto el siguiente razonamiento

$$\exists x \exists y P(x,y) \models \exists z P(z,z)$$

Solución:

a)

$$\varphi = ((((p \wedge q) \to (r \vee s)) \wedge p) \to (q \wedge s)).$$

b)

$$\varphi = (p \wedge q \to r \vee s) \wedge p \to q \wedge s \equiv \neg((p \wedge q \to r \vee s) \wedge p) \vee (q \wedge s) \equiv$$

$$\equiv \neg((\neg(p \wedge q) \vee r \vee s) \wedge p) \vee (q \wedge s) \equiv (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee \neg p \vee (q \wedge s) = FND(\varphi).$$

c) Sean $p =$ voy a casa y $q =$ tengo que estudiar. Entonces,

$$\varphi = \neg p \to \neg q \equiv q \to p.$$

d) La figura 12 representa el árbol estructural de la fórmula $\neg Q(f(a,b),c) \to \forall x Q(a, g(x)) \wedge P(f(g(b),x))$.

e) Llamemos D al dominio de 5 elementos y P al símbolo de predicado de aridad 3. Una interpretación de P consiste en un subconjunto de $D \times D \times D$, que consta de $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$ elementos. Por tanto, el número de interpretaciones distintas para P coincide con el número de subconjuntos distintos que tiene un conjunto de 125 elementos, es decir 2^{125} interpretaciones.

f) El razonamiento no es correcto. Para demostrarlo vamos a construir una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ que haga cierta la fórmula de la izquierda y falsa la fórmula de la derecha. Tomamos, por ejemplo, $D = \{a, b\}$ y $P^I = \{(a, b), (b, a)\}$. La fórmula de la izquierda es cierta, ya que $P(a, b)^I = 1$. Sin embargo, la fórmula de la derecha es falsa, ya que tanto $P(a, a)^I = 0$ como $P(b, b)^I = 0$.

<u>Ejercicio 2:</u> (16 puntos) En el contexto de la lógica proposicional, clasifica la siguiente fórmula por medio de tableaux semánticos <u>acabados</u>:

$$(p \vee q \to r) \wedge t \wedge (p \to \neg s) \to q \wedge \neg t.$$

<u>Solución:</u>

$$\varphi = (p \vee q \to r) \wedge t \wedge (p \to \neg s) \to q \wedge \neg t \equiv \neg((\neg(p \vee q) \vee r) \wedge t \wedge (\neg p \vee \neg s)) \vee (q \wedge \neg t) \equiv$$
$$\equiv ((p \vee q) \wedge \neg r) \vee \neg t \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge \neg t).$$

$$\neg\varphi \equiv ((\neg p \wedge \neg q) \vee r) \wedge t \wedge (\neg p \vee \neg s) \wedge (\neg q \vee t).$$

La figura 13 representa los tableaux de $\neg\varphi$ y φ.

Ya que el tableau acabado de $\neg\varphi$ tiene ramas abiertas, la fórmula φ no es una tautología. El tableau acabado de φ también contiene ramas abiertas. Por tanto φ es una contingencia.

<u>Ejercicio 3:</u> (20 puntos) En el contexto de la lógica proposicional y usando el sistema de deducción natural de Gentzen, demuestra la

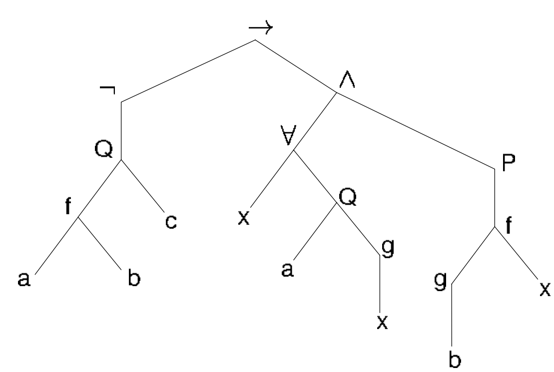


FIGURA 12. Árbol estructural de $\neg Q(f(a, b), c) \to \forall x Q(a, g(x)) \wedge P(f(g(b), x))$ del ejercicio 1d.

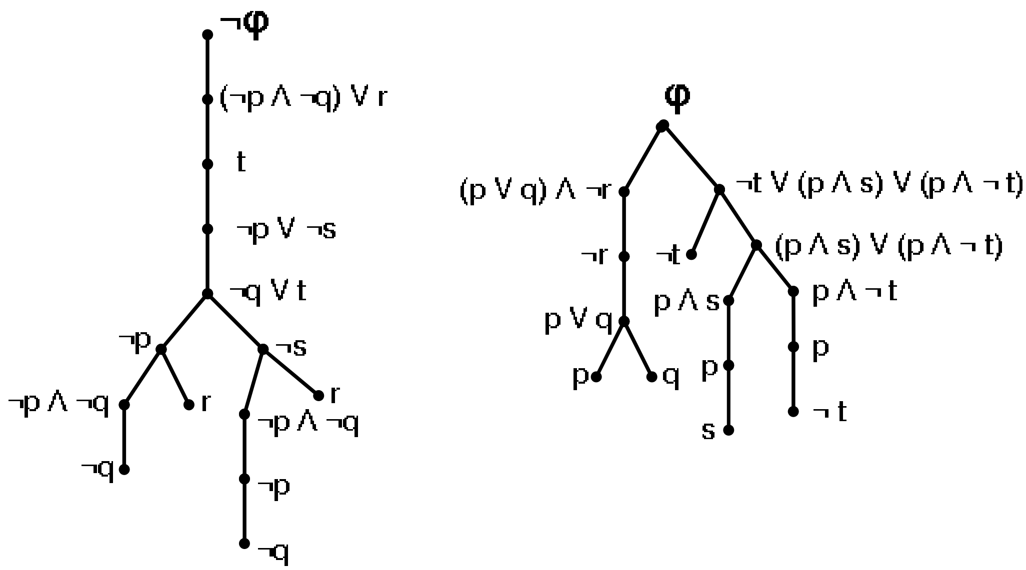


FIGURA 13. Tableaux de $\neg\varphi$ y φ del ejercicio 2.

validez de la deducción:

$$\{s \to (r \to t),\, p \vee s, \neg(r \to p)\} \vdash t.$$

Solución:

1) $s \to (r \to t)$ (Premisa)
2) $p \vee s$ (Premisa)
3) $\vdash \neg(r \to p)$ (Premisa)
4) $\vdash \neg(\neg r \vee p)$ (Interdefinición 2 (3))
5) $\vdash \neg\neg r \wedge \neg p$ (De Morgan (4))
6) $\vdash r \wedge \neg p$ ($E\neg$ (5))
7) $\vdash r$ ($E\wedge$ (6))
8) $\vdash \neg p$ ($E\wedge$ (6))
9) $\vdash s$ (TP (8,2))
10) $\vdash r \to t$ ($E\to$ (9,1))
11) $\vdash t$ ($E\to$ (7,10))

Ejercicio 4: Usa el principio de recursión estructural para definir las siguientes funciones:

a) (6 puntos) La función $lt : T \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que a cada término $t \in T$ de la lógica de primer orden le asocia su **longitud**, entendida como el número de caracteres que aparecen en ese término, **excluyendo** paréntesis y comas.

b) (10 puntos) La función $lf : F \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica de primer orden le asocia su **longitud**, entendida como el número de caracteres que aparecen en ese término, **excluyendo** paréntesis y comas (apóyate en la función lt del apartado anterior).

Nota: Se considerará que todos los símbolos de variable, constante, función y predicado constan de un único carácter.

Solución:
a) Definimos la función lt por recursión:

Para términos atómicos:

- $lt(c) = 1$, donde c es un símbolo de constante.
- $lt(x) = 1$, donde x es un símbolo de variable.

Paso recursivo:

- $lt(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = lt(t_1) + lt(t_2) + \cdots + lt(t_n) + 1$,
  donde f es un símbolo de función de aridad n y $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son términos.

b) Definimos la función lf por recursión apoyándonos en la función lt del apartado anterior:

Para fórmulas atómicas:

- $lf(\top) = lf(\bot) = 1$.
- $lf(p) = 1$, donde p es un símbolo de proposición atómica.
- $lf(t_1 = t_2) = lt(t_1) + lt(t_2) + 1$, donde t_1 y t_2 son términos.
- $lf(P(t_1, t_2, \ldots, t_n))) = lt(t_1) + lt(t_2) + \cdots + lt(t_n) + 1$,
  donde P es un símbolo de predicado de aridad n y $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son términos.

Paso recursivo:

- $lf(\neg\varphi) = lf(\varphi) + 1$.
- $lf(\varphi \circ \psi) = lf(\varphi) + lf(\psi) + 1$.
- $lf(\forall x\varphi) = lf(\exists x\varphi) = lf(\varphi) + 2$,

donde φ y ψ son fórmulas, $\circ$ es una conectiva binaria y x es un símbolo de variable.

Ejercicio 5: (12 puntos, 2 por apartado) Formaliza en el lenguaje de la lógica de primer orden los siguientes enunciados escritos en lenguaje natural. El dominio para todos ellos es $\mathbb{N}$, el conjunto de los números naturales. En cada caso indica cuáles son los símbolos de función y predicado (incluidas constantes y proposiciones atómicas) que estás usando.

a) Los números naturales son pares o impares, pero no las dos cosas a la vez.

b) Si un número es par, entonces su siguiente es impar.

c) Ningún número es igual a su siguiente.

d) El producto de un número y su siguiente es siempre par.

e) Todo número es menor que su siguiente.

f) Dado un número cualquiera distinto de uno siempre hay otro número menor.

Solución:

Usaremos los siguientes símbolos de predicado:

- $P(x)$: x es par.
- $I(x)$: x es impar.
- $M(x, y)$: x es menor que y.

Símbolos de función:

- $s(x)$: el siguiente de x.
- $p(x, y)$: el producto de x e y.

Símbolo de constante:

- u : el número 1.

Una de las posibles formalizaciones correctas es:

a) $\forall x\Big(\big(P(x) \vee I(x)\big) \wedge \neg\big(P(x) \wedge I(x)\big)\Big)$

b) $\forall x\big(P(x) \longrightarrow I(s(x))\big)$

c) $\neg\exists x\big(x = s(x)\big)$

d) $\forall x\Big(P\big(p(x, s(x))\big)\Big)$

e) $\forall x\big(M(x, s(x))\big)$

f) $\forall x\big(\neg(x = u) \longrightarrow \exists y\ M(y, x)\big)$

Ejercicio 6: Se considera la siguiente lista ordenada de caracteres

$$AABADCCDADABBAC$$

y la interpretación (Dom, I) cuyo dominio es $Dom = \{A, B, C, D\}$ y en la cual se tienen los siguientes símbolos de predicado:

$P(x)$: x aparece en la lista dos o más veces consecutivas.
$Q(x, y)$: x aparece en la lista inmediatamente antes de y.
$R(x, y, z)$: y aparece en la lista inmediatamente antes de z e inmediatamente después de x.

Se considera también la función f de aridad 1 que intercambia A con B e intercambia C con D.

a) (6 puntos) Escribe explícitamente los conjuntos P^I y Q^I.

b) (18 puntos, 3 por fórmula) En la interpretación dada, evalúa las siguientes fórmulas. Justifica tus respuestas:

φ_1 : $\forall x\,\big(P\big(f(x)\big) \to Q(x, x)\big)$

φ_2 : $\exists x\, R\big(x, f(x), f(x)\big)$

φ_3 : $\exists x\, \exists y\, \big(Q(x, x) \to R(y, y, y)\big)$

φ_4 : $\forall x\, P(x) \ \vee\ \forall x\, \neg P(x)$

φ_5 : $\forall x\, \neg\forall y\, \neg R(x, y, x)$

φ_6 : $\exists x\, \forall y\, Q(x, y)$

Solución:
a)

$P^I = \{A, B, C\}$

$Q^I = \{(A, A), (A, B), (A, C), (A, D), (B, A), (B, B), (C, C), (C, D), (D, A), (D, C)\}$

b)

- $\varphi_1^I = 0$, ya que tomando $x = D$ se tiene

$P(f(D))^I = P(C)^I$	$Q(D, D)^I$	$(P(f(D)) \to Q(D, D))^I$
1	0	0

  y, por tanto, la fórmula que empieza con el $\forall$ es falsa.
- $\varphi_2^I = 1$, porque tomando $x = A$ se tiene

$$R(A, f(A), f(A))^I = R(A, B, B)^I = 1$$

  por lo cual la fórmula que empieza con el $\exists$ es cierta.
- $\varphi_3^I = 1$, porque tomando $x = D$ y, por ejemplo, $y = A$, se tiene

$Q(D, D)^I$	$R(A, A, A)^I$	$(Q(D, D) \to R(A, A, A))^I$
0	0	1

  así que la formula que empieza con el doble $\exists$ es cierta.
- $\varphi_4^I = 0$, ya que

$P(D)^I$	$(\forall x\, P(x))^I$	$\neg P(A)^I$	$(\forall x\, \neg P(x))^I$	$(\forall x\, P(x)\ \vee\ \forall x\, \neg P(x))^I$
0	0	0	0	0

- $\varphi_5^I = 0$. Por las equivalencias lógicas estudiadas se tiene

$$\varphi_5 \equiv \forall x\, \exists y\, R(x, y, x)$$

  Para la asignación $x = B$ se tiene que la fórmula $\exists y\, R(B, y, B)$ es falsa, ya que en ningún momento en la secuencia de caracteres aparece la subsecuencia ByB para ninguno de los valores posibles de y. Por tanto, la fórmula que empieza con el $\forall$, equivalente a φ_5, es falsa.
- $\varphi_6^I = 1$. Si tomamos $x = A$ observamos que la fórmula $\forall y\, Q(A, y)$ es cierta, ya que las cuatro subsecuencias AA, AB, AC, AD aparecen dentro de la secuencia de caracteres. Así pues, la fórmula que empieza con el $\exists$ es cierta.

18. Examen final de septiembre 2008-2009

Fecha: 7 de septiembre de 2009 **Tiempo: 3 horas**

El examen está formado por 6 problemas. La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados. ***Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas****.*

Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Ejercicio 1: En la lógica proposicional y usando un sólo conjunto de proposiciones atómicas, **formaliza** cada una de las siguientes frases y sus negaciones:

a) (4 puntos) φ es satisfacible sólo si tiene modelos.

b) (4 puntos) φ es una tautología si y sólo si no tiene contraejemplos.

c) (4 puntos) Si φ tiene modelos y contraejemplos, entonces es una contingencia.

d) (4 puntos) φ no tiene modelos, a menos que no sea una contradicción.

Ejercicio 2: (12 puntos) En el contexto de la lógica proposicional verifica si las siguientes fórmulas son equivalentes:

$$\varphi_1 = (p \vee q) \wedge r \to r, \quad \varphi_2 = p \vee r \vee q \vee \neg p.$$

Ejercicio 3: (20 puntos) En el contexto de la lógica proposicional y usando el sistema de deducción natural de Gentzen, demuestra la validez de la deducción:

$$\{t \to q \vee r,\ s \to \neg r,\ \neg t \to r\} \vdash \neg q \to \neg s.$$

Ejercicio 4: Denotamos con Σ el alfabeto de la lógica de primer orden (es decir, el conjunto de todos los símbolos que utilizamos). Usa el principio de recursión estructural para definir las siguientes funciones:

a) (4 puntos) La función $pr_1 : T \longrightarrow \Sigma$ que a cada término $t \in T$ de la lógica de primer orden le asocia su **primer símbolo que no sea un paréntesis**.

b) (12 puntos) La función $pr_2 : F \longrightarrow \Sigma$ que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica de primer orden le asocia su **primer símbolo que no sea un paréntesis** (apóyate en la función pr_1 del apartado anterior).

Ejercicio 5: (16 puntos) Consideramos el par de fórmulas

$$\begin{aligned} \varphi &: \forall x\big(P(x) \longrightarrow Q(x)\big) \\ \psi &: \exists x\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \end{aligned}$$

donde P y Q son símbolos de predicado de aridad 1. Consideramos también el dominio formado por dos elementos $D = \{a, b\}$. Define cuatro interpretaciones distintas I_1, I_2, I_3, I_4 con dominio D que cumplan:

- $\varphi^{I_1} = 1, \quad \psi^{I_1} = 1$
- $\varphi^{I_2} = 0, \quad \psi^{I_2} = 0$
- $\varphi^{I_3} = 1, \quad \psi^{I_3} = 0$
- $\varphi^{I_4} = 0, \quad \psi^{I_4} = 1$

Ejercicio 6: (20 puntos) Consideramos el dominio

$$D = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Consideramos la interpretación I sobre el dominio D que viene dada por los símbolos de predicado

$P(x)$: x es estrictamente mayor que 0.
$S(x, y, z)$: z es la suma de x e y.

y los símbolos de función

$a(x) = |x|$ (el valor absoluto de x).
$o(x)$: el opuesto de x (es decir, x cambiado de signo).

Evalúa las siguientes diez fórmulas en esta interpretación. Justifica tu respuesta en cada caso.

$\varphi_1 : \forall x\ P(x), \qquad \varphi_2 : \exists x\ P(x),$
$\varphi_3 : \forall x\ P(a(x)), \qquad \varphi_4 : \exists x\ S(x, x, x),$
$\varphi_5 : \exists x\ P(x) \wedge \exists x\ \neg P(x), \qquad \varphi_6 : \forall x\ \big(P(o(x)) \to P(x)\big),$
$\varphi_7 : \exists x \forall y\ S(x, y, x), \qquad \varphi_8 : \forall x \exists y\ S(x, y, x),$
$\varphi_9 : \forall x \forall y \big(P(o(x)) \vee P(a(y)) \vee (x = 0)\big), \qquad \varphi_{10} : \forall x \forall y \exists z\ S(x, y, z).$

19. Soluciones del examen final de septiembre 2008-2009

Fecha: 7 de septiembre de 2009 **Tiempo: 3 horas**

Ejercicio 1: En la lógica proposicional y usando un sólo conjunto de proposiciones atómicas, **formaliza** cada una de las siguientes frases y sus negaciones:

a) (4 puntos) φ es satisfacible sólo si tiene modelos.
b) (4 puntos) φ es una tautología si y sólo si no tiene contraejemplos.
c) (4 puntos) Si φ tiene modelos y contraejemplos, entonces es una contingencia.
d) (4 puntos) φ no tiene modelos, a menos que no sea una contradicción.

Solución: Consideremos el siguiente conjunto de proposiciones atómicas:

p= φ es satisfacible, q= φ tiene modelos,
r= φ es una tautología, s= φ tiene contraejemplos,
t= φ es una contingencia, u= φ es una contradicción.

Entonces la formalización de las frases del ejercicio y de sus negaciones es:

a) $p \to q, \quad p \wedge \neg q,$
b) $r \leftrightarrow \neg s, \quad (r \wedge s) \vee (\neg s \wedge \neg r),$
c) $q \wedge s \to t, \quad q \wedge s \wedge \neg t,$
d) $q \to \neg u, \quad q \wedge u.$

Ejercicio 2: (12 puntos) En el contexto de la lógica proposicional verifica si las siguientes fórmulas son equivalentes:

$$\varphi_1 = (p \vee q) \wedge r \to r, \quad \varphi_2 = p \vee r \vee q \vee \neg p.$$

Solución: La equivalencia de las dos fórmulas se puede demostrar observando que φ_1 y φ_2 son tautologías: si $(p \vee q) \wedge r$ es verdadera, entonces r es verdadera y $p \vee \neg p$ es siempre verdadera.

También, se puede observar que:

$$\varphi_1 \equiv \neg((p\vee q)\wedge r)\vee r \equiv (\neg p\wedge\neg q)\vee\neg r\vee r \equiv \top \quad (\text{siendo } \neg r\vee r \equiv \top) \quad \text{y}$$

$$\varphi_1 \equiv \top \quad (\text{siendo } p \vee \neg p \equiv \top).$$

Ejercicio 3: (20 puntos) En el contexto de la lógica proposicional y usando el sistema de deducción natural de Gentzen, demuestra la validez de la deducción:

$$\{t \to q \vee r,\, s \to \neg r,\, \neg t \to r\} \vdash \neg q \to \neg s.$$

Solución: Usando el teorema de la deducción podemos reescribir nuestro razonamiento como:

$$\{t \to q \vee r,\, s \to \neg r,\, \neg t \to r,\, \neg q\} \vdash \neg s.$$

Usando reducción al absurdo, se obtiene la siguiente demostración de la deducción dada:

1) $t \to q \vee r$		(Premisa)
2) $s \to \neg r$		(Premisa)
3) $\neg t \to r$		(Premisa)
4) $\neg q$		(Premisa)
5) $\neg\neg s$	(Premisa auxiliar)	
6) $\vdash s$	(E$\neg$(5))	
7) $\vdash \neg r$	(E$\to$(6,2))	
8) $\vdash \neg\neg t$	(Modus Tollens (7,3))	
9) $\vdash t$	(E$\neg$(8))	
10) $\vdash q \vee r$	(E$\to$(9,1))	
11) $\vdash q$	(Tollendo Ponens (4,10))	
12) $\vdash q \wedge \neg q$	(I$\wedge$(11,4))	
13) $\vdash \neg s$		(I$\neg$(5,12))

Ejercicio 4: Denotamos con Σ el alfabeto de la lógica de primer orden (es decir, el conjunto de todos los símbolos que utilizamos). Usa el principio de recursión estructural para definir las siguientes funciones:

a) (4 puntos) La función $pr_1 : T \longrightarrow \Sigma$ que a cada término $t \in T$ de la lógica de primer orden le asocia su **primer símbolo que no sea un paréntesis**.

b) (12 puntos) La función $pr_2 : F \longrightarrow \Sigma$ que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica de primer orden le asocia su **primer símbolo que no sea un paréntesis** (apóyate en la función pr_1 del apartado anterior).

Solución:

a) Para términos atómicos:

- Si c es un símbolo de constante, entonces $pr_1(c) = c$.

- Si x es un símbolo de variable, entonces $pr_1(x) = x$.

Para términos compuestos:

- Si f es un símbolo de función de aridad n y $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, entonces $pr_1(t) = f$.

b) Para fórmulas atómicas:

- $pr_2(\top) = \top$.
- $pr_2(\bot) = \bot$.
- Si p es un símbolo de proposición atómica, entonces $pr_2(p) = p$.
- Si t_1 y t_2 son términos, entonces $pr_2(t_1 = t_2) = pr_1(t_1)$.
- Si P es un símbolo de predicado de aridad n y $\varphi = P(t_1, \ldots, t_n)$, entonces $pr_2(\varphi) = P$.

Para fórmulas compuestas, supongamos que φ y ψ son fórmulas y que $\circ$ es un conectivo binario:

- $pr_2(\neg\varphi) = \neg$.
- $pr_2(\varphi \circ \psi) = pr_2(\varphi)$.
- $pr_2(\forall x\varphi) = \forall$.
- $pr_2(\exists x\varphi) = \exists$.

Ejercicio 5: (16 puntos) Consideramos el par de fórmulas

$$\begin{aligned} \varphi &: \forall x\big(P(x) \longrightarrow Q(x)\big) \\ \psi &: \exists x\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \end{aligned}$$

donde P y Q son símbolos de predicado de aridad 1. Consideramos también el dominio formado por dos elementos $D = \{a, b\}$. Define cuatro interpretaciones distintas I_1, I_2, I_3, I_4 con dominio D que cumplan:

- $\varphi^{I_1} = 1, \quad \psi^{I_1} = 1$
- $\varphi^{I_2} = 0, \quad \psi^{I_2} = 0$
- $\varphi^{I_3} = 1, \quad \psi^{I_3} = 0$
- $\varphi^{I_4} = 0, \quad \psi^{I_4} = 1$

Solución:

- $P^{I_1} = \{a, b\}, \; Q^{I_1} = \{a, b\}$. Con esta interpretación, las dos fórmulas son, claramente, ciertas, ya que tanto a como b cumplen P y Q.
- $P^{I_2} = \{a\}, \; Q^{I_2} = \emptyset$. Con esta interpretación φ es falsa, ya que a cumple P pero no Q. La fórmula ψ también es falsa ya que ningún elemento del dominio cumple P y Q a la vez.
- $P^{I_3} = \emptyset, \; Q^{I_3} = \emptyset$. Con esta interpretación φ es cierta, ya que la implicación no falla en ningún elemento del dominio. La fórmula ψ es falsa ya que ningún elemento del dominio cumple P y Q a la vez.

- $P^{I_4} = \{a, b\}$, $Q^{I_4} = \{a\}$. Con esta interpretación φ es falsa, ya que b cumple P pero no Q. En cambio, ψ es cierta, ya que a cumple simultáneamente P y Q.

Ejercicio 6: (20 puntos) Consideramos el dominio

$$D = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Consideramos la interpretación I sobre el dominio D que viene dada por los símbolos de predicado

$P(x)$: x es estrictamente mayor que 0.
$S(x, y, z)$: z es la suma de x e y.

y los símbolos de función

$a(x) = |x|$ (el valor absoluto de x).
$o(x)$: el opuesto de x (es decir, x cambiado de signo).

Evalúa las siguientes diez fórmulas en esta interpretación. Justifica tu respuesta en cada caso.

$\varphi_1 : \forall x\ P(x)$, $\quad\varphi_2 : \exists x\ P(x)$,
$\varphi_3 : \forall x\ P(a(x))$, $\quad\varphi_4 : \exists x\ S(x, x, x)$,
$\varphi_5 : \exists x\ P(x) \wedge \exists x\ \neg P(x)$, $\quad\varphi_6 : \forall x\ \big(P(o(x)) \to P(x)\big)$,
$\varphi_7 : \exists x \forall y\ S(x, y, x)$, $\quad\varphi_8 : \forall x \exists y\ S(x, y, x)$,
$\varphi_9 : \forall x \forall y \big(P(o(x)) \vee P(a(y)) \vee (x = 0)\big)$, $\quad\varphi_{10} : \forall x \forall y \exists z\ S(x, y, z)$.

Solución:

- $\varphi_1^I = 0$. $P(x)$ falla, por ejemplo, con $x = -1$.
- $\varphi_2^I = 1$. $P(x)$ es cierta, por ejemplo, con $x = 1$.
- $\varphi_3^I = 0$. Un contraejemplo es $x = 0$. El valor absoluto de 0 no es estrictamente mayor que 0.
- $\varphi_4^I = 1$. Tomando $x = 0$.
- $\varphi_5^I = 1$. Por ejemplo tomando $x = 1$ en la primera parte de la conjunción y $x = -1$ en la segunda parte de la conjunción.
- $\varphi_6^I = 0$. Tomando $x = -1$ tenemos que la premisa de la implicación es cierta mientras que la conclusión es falsa.
- $\varphi_7^I = 0$. Con $y = 1$ no es cierto que $x + 1 = x$, sea quien sea x.
- $\varphi_8^I = 1$. $y = 0$ hace la fórmula cierta valga lo que valga x.
- $\varphi_9^I = 0$. Un contraejemplo es $x = 1$, $y = 0$.
- $\varphi_{10}^I = 0$. Tomando $x = 2$, $y = 3$, no existe z en D tal que $z = 2 + 3$.

20. Examen final de enero 2009-2010

Fecha: 8 de enero de 2010 **Tiempo: 3 horas**

El examen está formado por 6 problemas.
La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados. ***Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas****.*
Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Ejercicio 1: (6 puntos) En el contexto de la lógica proposicional, formaliza el siguiente razonamiento:

> Si un camión fuese capaz de mover una tonelada y tuviera gasolina, no tendríamos problemas. Si el camión no fuese capaz de mover una tonelada sería débil. Si no tuviera gasolina sería inútil. El camión no es capaz de mover una tonelada a menos que no sea débil ni inútil. El camión no es capaz de mover una tonelada. Por lo tanto, tenemos un problema.

Ejercicio 2: En el contexto de la lógica proposicional,

a) (3 puntos) Define la función $f : F \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que a cada fórmula $\varphi \in F$ le asocia el número de veces que aparece el símbolo de proposición atómica p en φ.
b) (3 puntos) Define la función $g : F \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que a cada fórmula $\varphi \in F$ le asocia el número de conectivos que aparecen en φ, contando todas las apariciones de cada conectivo.
c) (4 puntos) Demuestra que para cada $\varphi \in F$ se verifica la siguiente desigualdad:

$$f(\varphi) \leq 1 + g(\varphi).$$

Ejercicio 3: (12 puntos) En el contexto de la lógica proposicional, clasifica las siguientes fórmulas por medio de tableaux semánticos acabados:

a) $(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r) \to r$,
b) $(p \vee q) \wedge (p \to r) \to r$

Ejercicio 4: (12 puntos) En el contexto de la lógica de primer orden, **formaliza** las siguientes frases usando como dominio las palabras formadas con los símbolos del alfabeto de la lógica de primer orden

(Nota: recuerda que una palabra es una cadena cualquiera de longitud finita de símbolos de un alfabeto):

a) Si un término no es atómico entonces no es compuesto.
b) Una fórmula no es atómica si es la negación de una fórmula atómica.
c) Una palabra no es correcta a menos que sea un término o una fórmula.
d) No existen palabras que sean términos y fórmulas a la vez.
e) No toda palabra es un término o una fórmula.
f) No toda concatenación de dos fórmulas es una fórmula.

Ejercicio 5: (10 puntos) Determina la validez de las siguientes fórmulas de la lógica de primer orden:

a) $\exists z(\exists x Q(x) \to Q(z))$
b) $\forall z(\exists x Q(x) \to Q(z))$

Ejercicio 6: (10 puntos) Considera el dominio $D = \mathbb{Z}$ del conjunto de los números enteros. Y considera la siguiente interpretación (D, I) para $P(x), Q(x)$ predicados unarios y $R(x, y)$ predicado binario: $P^I \subseteq \mathbb{Z}$ es el conjunto de los múltiplos de 3; $Q^I \subseteq \mathbb{Z}$ es el conjunto de los enteros mayores que 17; y finalmente $R^I = \{(x, y) : x - y \text{ es un múltiplo de } 5\}$. Determina el valor de las siguientes fórmulas en esta interpretación (D, I):

$$\varphi_1 = \forall x \forall y(R(x, y) \to R(y, x))$$
$$\varphi_2 = \exists x \forall y(Q(x) \wedge R(x, y))$$
$$\varphi_3 = \forall y \exists x(Q(x) \wedge R(x, y))$$
$$\varphi_4 = \forall x(Q(x) \vee R(x, x))$$
$$\varphi_5 = \exists x \exists y(P(y) \wedge Q(y) \wedge R(x, y))$$

21. Soluciones del examen final de enero 2009-2010

Fecha: 8 de enero de 2010 **Tiempo: 3 horas**

Ejercicio 1: (6 puntos) En el contexto de la lógica proposicional, formaliza el siguiente razonamiento:

> Si un camión fuese capaz de mover una tonelada y tuviera gasolina, no tendríamos problemas. Si el camión no fuese capaz de mover una tonelada sería débil. Si no tuviera gasolina sería inútil. El camión no es capaz de mover una tonelada al menos que no sea débil ni inútil. El camión no es capaz de mover una tonelada. Por lo tanto, tenemos un problema.

Solución: Considerando las siguientes proposiciones atómicas:

p= el camión es capaz de mover una tonelada,
q= el camión tiene gasolina,
r= tenemos problemas,
s= el camión es débil,
t= el camión es inútil,

la formalización del razonamiento en lógica proposicional es:

$$(p \wedge q \to \neg r) \wedge (\neg p \to s) \wedge (\neg q \to t) \wedge (p \to \neg s \wedge \neg t) \wedge \neg p \to r.$$

Ejercicio 2: En el contexto de la lógica proposicional,

a) (3 puntos) Define la función $f : F \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que a cada fórmula $\varphi \in F$ le asocia el número de veces que aparece el símbolo de proposición atómica p en φ.

b) (3 puntos) Define la función $g : F \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que a cada fórmula $\varphi \in F$ le asocia el número de conectivos que aparecen en φ, contando todas las apariciones de cada conectivo.

c) (4 puntos) Demuestra que para cada $\varphi \in F$ se verifica la siguiente desigualdad:

$$f(\varphi) \leq 1 + g(\varphi).$$

Solución:

a) Vamos a definir la función $f : F \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ usando el principio de recursión estructural.

Base: $f(\bot) = f(\top) = 0, \quad f(q) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad q = p \\ 0 & \text{si} \quad q \neq p \end{cases}$, para todo símbolo de proposición atómica q.

Pasos recursivos: Sean $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ símbolos de fórmulas, entonces
$(\neg) : f(\neg\varphi) = f(\varphi)$,
$(\circ) : f(\varphi_1 \circ \varphi_2) = f(\varphi_1) + f(\varphi_2)$.

Con estas definiciones, la función f queda definida sobre todo F.

b) Ahora vamos a definir la función $g : F \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ usando el principio de recursión estructural.

Base: $g(\bot) = g(\top) = 1, \quad g(q) = 0$ para todo símbolo de proposición atómica q.

Pasos recursivos: Sean $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ símbolos de fórmulas, entonces
$(\neg) : g(\neg\varphi) = g(\varphi) + 1$,
$(\circ) : g(\varphi_1 \circ \varphi_2) = g(\varphi_1) + g(\varphi_2) + 1$.
Con estas definiciones, la función g queda definida sobre todo F.

c) Finalmente, podemos usar el principio de inducción estructural para verificar que la propiedad $f(\varphi) \leq 1 + g(\varphi)$ se verifica para toda fórmula $f \in F$.

Base: por definición de f y g, $f(\bot) = 0 \leq 2 = g(\bot) + 1, \quad f(\top) = 0 \leq 2 = g(\top) + 1, \quad f(q) \leq 1 = g(q) + 1$, para todo símbolo de proposición atómica q.

Pasos recursivos: Sean $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ símbolos de fórmulas, entonces
$(\neg)$: Si $f(\varphi) \leq 1 + g(\varphi)$, entonces $f(\neg\varphi) = f(\varphi) \leq 1 + g(\varphi) = g(\neg\varphi) \leq 1 + g(\neg\varphi)$,
$(\circ)$: Si $f(\varphi_1) \leq 1 + g(\varphi_1)$ y $f(\varphi_2) \leq 1 + g(\varphi_2)$, entonces $f(\varphi_1 \circ \varphi_2) = f(\varphi_1) + f(\varphi_2) \leq 1 + g(\varphi_1) + 1 + g(\varphi_2) = 1 + g(\varphi_1 \circ \varphi_2)$.

Con estos pasos, la desigualdad $f(\varphi) \leq 1 + g(\varphi)$ queda verificada para toda $\varphi \in F$.

Ejercicio 3: (12 puntos) En el contexto de la lógica proposicional, clasifica las siguientes fórmulas por medio de tableaux semánticos acabados:

a) $(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r) \to r$,
b) $(p \vee q) \wedge (p \to r) \to r$

Solución:

a) Sea $\varphi_a = (p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r) \to r$. Entonces, $\neg\varphi_a \equiv (p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r) \wedge \neg r \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \wedge \neg r$.

La figura 14 representa el tableau acabado de $\neg\varphi_a$. Siendo un tableau cerrado, $\neg\varphi_a$ es una contradicción y φ_a es una tautología.

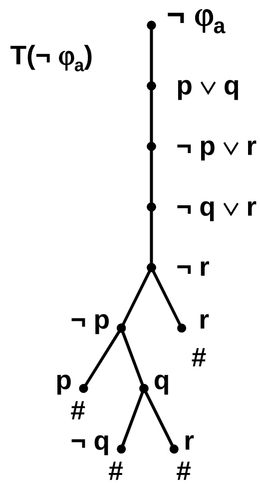


FIGURA 14. Tableau de $\neg\varphi_a$ del ejercicio 3

b) Sea ahora $\varphi_b = (p \vee q) \wedge (p \to r) \to r$. Entonces $\neg\varphi_b \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge \neg r$ y $\varphi_b \equiv \neg(p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee r) \vee r \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r) \vee r$.
La figura 15 representa los tableaux acabados de $\neg\varphi_b$ y φ_b. Siendo el tableau de $\neg\varphi_b$ abierto, $\neg\varphi_b$ no es una contradicción y φ_b no es una tautología. Siendo el tableau de φ_b abierto, φ_b tampoco es una contradicción. Se sigue que φ_b es una contingencia.

Ejercicio 4: (12 puntos) En el contexto de la lógica de primer orden, **formaliza** las siguientes frases usando como dominio las palabras sobre el alfabeto de la lógica de primer orden:

a) Si un término no es atómico entonces no es compuesto.
b) Una fórmula no es atómica si es la negación de una fórmula atómica.
c) Una palabra no es correcta al menos que sea un término o una fórmula.

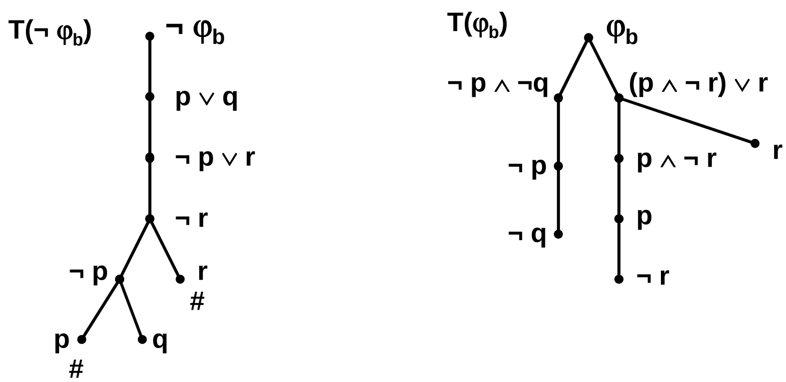


FIGURA 15. Tableaux de $\neg\varphi_b$ y φ_b del ejercicio 3

d) No existen palabras que sean términos y fórmulas a la vez.
e) No toda palabra es un término o una fórmula.
f) No toda concatenación de dos fórmulas es una fórmula.

Solución: Para formalizar las frases dadas, podemos definir los siguientes elementos:

Dominio: $D =$ el conjunto de las palabras sobre el alfabeto de la lógica de primer orden.
Predicados: $T(x) = x$ es un término,
$A(x) = x$ es atómica
$C(x) = x$ es compuesto,
$Cor(x) = x$ es correcta,
$F(x) = x$ es una fórmula,
Funciones: $f(x) =$ la negación de x,
$g(x, y) =$ la concatenación de x con y.

Con las anteriores definiciones, la formalización es:

a) $\forall x(T(x) \wedge \neg A(x) \to T(x) \wedge \neg C(x))$,

b) $\forall x \forall y(F(x) \wedge F(y) \wedge A(y) \wedge (x = f(y)) \rightarrow F(x) \wedge \neg A(x))$,
c) $\forall x(Cor(x) \rightarrow T(x) \vee F(x))$,
d) $\forall x(\neg T(x) \vee \neg F(x))$,
e) $\exists x(\neg T(x) \wedge \neg F(x))$,
f) $\exists x \exists y(F(x) \wedge F(y) \wedge \neg F(g(x, y)))$.

Ejercicio 5: (10 puntos) Determina la validez de las siguientes fórmulas de la lógica de primer orden:

a) $\exists z(\exists x Q(x) \rightarrow Q(z))$

b) $\forall z(\exists x Q(x) \rightarrow Q(z))$

Solución:
a) Primero podemos observar que la fórmula dada es cerrada. Su valor de verdad no depende de asignaciones de variable.
Dada una interpretación cualquiera, $\mathbb{I} = (D, I)$, hay dos posibles casos:
Si $Q^I = \emptyset$, $\quad (\exists z(\exists x Q(x) \rightarrow Q(z)))^I = 1$, ya que la premisa de la implicación es falsa.
Si $Q^I \neq \emptyset$, entonces existe al menos un elemento del dominio, $a \in D$, tal que $Q^I(a) = 1$ y $(\exists x Q(x))^I = 1$. Se sigue que $(\exists z(\exists x Q(x) \rightarrow Q(z)))^I = 1$ ya que (para $z = a$) $\quad (\exists x Q(x) \rightarrow Q(a))^I = 1$.
Entonces $\exists z(\exists x Q(x) \rightarrow Q(z))$ es una fórmula válida.

b) También la segunda fórmula es cerrada. Dada la interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$, con $D = \{a, b\}$ y $Q^I = \{a\}$, se obtiene que $(\exists x Q(x))^I = 1$, siendo $Q^I(a) = 1$. Pero, si $z = b$ se obtiene que $(\exists x Q(x) \rightarrow Q(b)))^I = 0$, siendo la premisa de la implicación verdadera y la conclusión falsa.
Se sigue que, bajo esta interpretación, $(\exists z(\exists x Q(x) \rightarrow Q(z)))^I = 0$ y que la fórmula no es válida.

Ejercicio 6: (10 puntos) Considera el dominio $D = \mathbb{Z}$ del conjunto de los números enteros. Y considera la siguiente interpretación (D, I) para $P(x), Q(x)$ predicados unarios y $R(x, y)$ predicado binario: $P^I \subseteq \mathbb{Z}$ es el conjunto de los múltiplos de 3; $Q^I \subseteq \mathbb{Z}$ es el conjunto de los enteros mayores que 17; y finalmente $R^I = \{(x, y) : x - y$ es un múltiplo de $5\}$. Determina el valor de las siguientes fórmulas en esta interpretación (D, I):

$$\varphi_1 = \forall x \forall y(R(x, y) \rightarrow R(y, x))$$
$$\varphi_2 = \exists x \forall y(Q(x) \wedge R(x, y))$$
$$\varphi_3 = \forall y \exists x(Q(x) \wedge R(x, y))$$
$$\varphi_4 = \forall x(Q(x) \vee R(x, x))$$
$$\varphi_5 = \exists x \exists y(P(y) \wedge Q(y) \wedge R(x, y))$$

<u>**Solución:**</u>

$(\varphi_1)^I = 1$: dados dos números enteros x e y, si $R^I(x,y) = 1$, entonces $x-y = 5k$, para un cierto entero k. Siendo $y-x = -5k$, se verifica que $R^I(y,x) = 1$.

$(\varphi_2)^I = 0$: si $a \in \mathbb{Z}$ es mayor que 17, entonces $Q^I(a) = 1$. $R^I(a,y)$ no puede ser 1 para todo entero y ya que, si $a - y = 5k$ (para cierto entero k), entonces $k = \frac{a-y}{5}$ tendría que ser un número entero para todo y. Esto no se verifica, por ejemplo, si $y = a-1$ ($k = \frac{1}{5}$ no es entero).

$(\varphi_3)^I = 1$: Sea y un número entero. $R^I(x,y) = 1$ si y sólo si $x - y = 5k$ (para un cierto entero k), es decir, si y sólo si $x = y + 5k$. Pero dado y, existe siempre un entero k tal que $x = y + 5k > 17$ (k tiene que ser mayor que $\frac{17-y}{5}$.)

$(\varphi_4)^I = 1$: para todo entero x se verifica que $R^I(x,x) = 1$, siendo $x - x = 0$, que es múltiplo de 5.

$(\varphi_5)^I = 1$: basta con considerar, por ejemplo, $x = 26$ e $y = 21$.

22. Examen final de junio 2009-2010

Fecha: 17 de junio de 2010 **Tiempo: 3 horas**

El examen está formado por 6 problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados.

La evaluación en esta convocatoria de junio es únicamente la nota de este examen.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

Se pueden consultar los apuntes de la asignatura.

No se pueden usar libros.

Los teléfonos móviles deben desconectarse y guardarse en bolsos o mochilas.

El uso de calculadoras no está permitido, deben también guardarse.

El incumplimiento de esta normativa puede suponer la invalidación del examen.

Ejercicio 1: (12 puntos) En el contexto de la lógica proposicional, formaliza el siguiente razonamiento:

> Si un alumno estudia mucho, entonces aprobará este examen. Un alumno no entiende la Lógica a menos que el profesor la explique bien. Si Juan entiende la Lógica, entonces el profesor la explica bien. Por lo tanto: si Juan suspende este examen, el profesor explica mal.

Ejercicio 2: (12 puntos) Verifica si las dos siguientes fórmulas de la lógica proposicional son equivalentes:

$$\varphi_1 = (\neg(p \vee q) \wedge r \to s) \to (p \vee \neg r) \quad \text{y} \quad \varphi_2 = p \vee q \vee \neg r \vee s.$$

Ejercicio 3: En el contexto de la lógica proposicional, considera la fórmula

$$\varphi = (p \wedge q \to \neg(p \vee r) \vee s \to \neg r) \wedge s.$$

a) (12 puntos) Clasifica φ por medio de tableaux semánticos acabados.
b) (4 puntos) Si existen, usa los tableaux del apartado a para hallar algunos modelos y/o contraejemplos de φ.
c) (3 puntos) Halla la forma normal conjuntiva de φ.

Ejercicio 4: (15 puntos) En el contexto de la lógica de primer orden, **formaliza** las siguientes frases usando como dominio de los viajeros de cierto avión:

a) Todos los que viajan en el avión tienen que tener una carta de embarque.
b) Pepe estará tranquilo sólo si está sentado al lado de su madre.
c) Hay niños que no viajan sentados al lado de su madre y tienen carta de embarque.

Ejercicio 5: (24 puntos) Una cierta empresa busca personas que:

1) tengan un título de Grado y
2) tengan menos que 30 años o tengan tres años de experiencia laboral en el sector.

Sabemos que: Alberto no tiene un título de Grado, tiene 26 años y cuatro años de experiencia laboral en el sector. Beatriz tiene un título de Grado, 32 años y tres años de experiencia laboral en el sector. Carlos tiene un título de Grado, 29 años y dos años de experiencia laboral en el sector.

Condidera el dominio $D = \{A, B, C\}$ (los símbolos A, B y C representan Alberto, Beatriz y Carlos, respectivamente) y los siguientes símbolos de predicados:
$P(x)$: x tiene un título de grado,
$Q(x)$: x puede obtener un trabajo en la empresa,
$R(x, y)$: para esta empresa x tiene mejor curriculum que y, esto es, x cumple las condiciones para ser seleccionado por dicha empresa mientras que y no las cumple.

Calcula el valor de las siguientes fórmulas de la lógica de primer orden bajo la interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ obtenida usando el contexto dado (**justifica tus respuestas**):

a) $\varphi_a = \exists x \forall y(\neg(x = y) \vee R(y, x))$,
b) $\varphi_b = \forall x \forall y(P(x) \vee \neg Q(y))$,
c) $\varphi_c = \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$,
d) $\varphi_d = \forall x(P(x) \vee Q(B) \to R(x, B))$,
e) $\varphi_e = \exists x \exists y(P(x) \wedge \neg Q(y) \wedge R(x, y))$,
f) $\varphi_f = \forall x \forall y(P(x) \vee \neg(x = y) \vee \neg Q(y))$.

Ejercicio 6: (18 puntos) Sean T y F los conjuntos de términos y de fórmulas de la lógica de primer orden, respectivamente. Sea a el símbolo de una constante distinguida.

a) Define por recursión estructural la función $\alpha : T \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ que asigna a cada término t el número $\alpha(t)$ de veces que aparece el símbolo de constante a en dicho término t.

b) Define por recursión estructural la función $\beta : F \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ que asigna a cada fórmula φ el número $\beta(\varphi)$ de veces que aparece el símbolo de constante a en dicha fórmula φ.

c) Determina razonadamente si es verdadera la siguiente afirmación: $\varphi \equiv \psi$ si y solamente si $\beta(\varphi) = \beta(\psi)$ (donde el símbolo $\equiv$ significa equivalencia lógica).

23. Soluciones del examen final de junio 2009-2010

Fecha: 17 de junio de 2010 **Tiempo: 3 horas**

Ejercicio 1: (12 puntos) En el contexto de la lógica proposicional, formaliza el siguiente razonamiento:

> Si un alumno estudia mucho, entonces aprobará este examen. Un alumno no entiende la Lógica a menos que el profesor la explique bien. Si Juan entiende la Lógica, entonces el profesor la explica bien. Por lo tanto: si Juan suspende este examen, el profesor explica mal.

Solución: Usamos la siguiente notación:
p:=*un alumno estudia mucho*
q:=*un alumno aprueba este examen*
r:=*un alumno entiende la Lógica*
s:=*el profesor explica bien*
t:=*Juan entiende la Lógica*
u:=*Juan suspende este examen*
Y el razonamiento queda formalizado así:

$$\begin{array}{c} p \to q \\ r \to s \\ t \to s \\ \hline u \to \neg s \end{array}$$

Ejercicio 2: (12 puntos) Verifica si las dos siguientes fórmulas de la lógica proposicional son equivalentes:

$$\varphi_1 = (\neg(p \vee q) \wedge r \to s) \to p \vee \neg r \quad \text{y} \quad \varphi_2 = p \vee q \vee \neg r \vee s.$$

Solución: Si elegimos una valoración v tal que $v(s) = 1$ entonces $(\neg(p \vee q) \wedge r \to s)^v = 1$ y $\varphi_2^v = 1$. Tomando $v(p) = 0$ y $v(r) = 1$ tenemos que $\varphi_1^v = 0$. Por tanto las fórmulas no son lógicamente equivalentes.

Notar también que $\varphi_1 = (\neg(p \vee q) \wedge r \to s) \to p \vee \neg r \equiv \varphi_2 \to p \vee \neg r$. Si $\varphi_2 = 0$, entonces $\varphi_1 = 1$.

Ejercicio 3: En el contexto de la lógica proposicional, considera la fórmula

$$\varphi = (p \wedge q \to \neg(p \vee r) \vee s \to \neg r) \wedge s.$$

a) (12 puntos) Clasifica φ por medio de tableaux semánticos acabados.

b) (4 puntos) Si existen, usa los tableaux del apartado a para hallar algunos modelos y/o contraejemplos de φ.

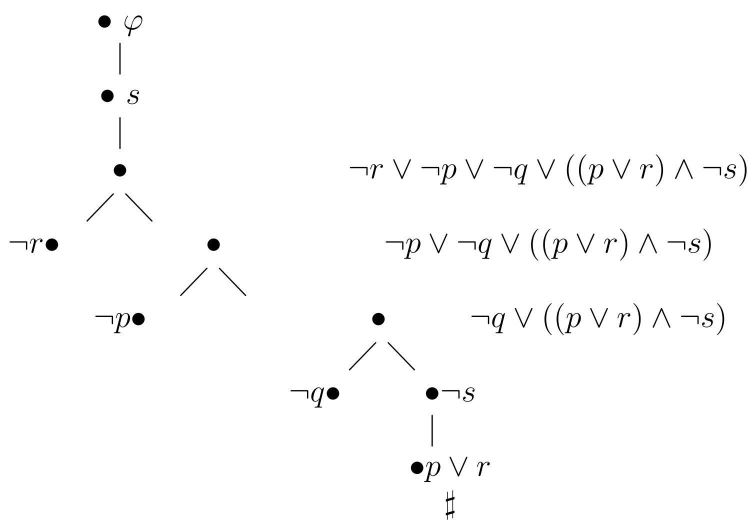
c) (3 puntos) Halla la forma normal conjuntiva de φ.

Solución:

a) Llamamos φ a la fórmula en cuestión. Usando las equivalencias lógicas habituales tenemos que

$$\varphi \equiv s \wedge (\neg r \vee \neg p \vee \neg q \vee ((p \vee r) \wedge \neg s)).$$

Tableaux de φ:

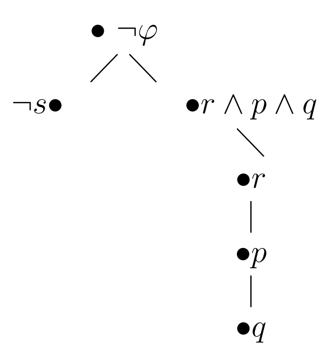


El tableau de φ tiene ramas abiertas y acabadas de modo que φ tiene modelos: no es una contradicción.

Usando las equivalencias lógicas habituales obtenemos que:

$$\neg\varphi \equiv \neg s \vee (r \wedge p \wedge q)$$

Tableaux de $\neg\varphi$:



El tableau de $\neg\varphi$ también tiene ramas abiertas y acabadas. φ es por tanto una contingencia.

b) La primera rama y acabada del tableau de $\neg\varphi$ nos indica que cualquier valoración con $v(s) = 0$ es un contraejemplo de φ. La primera rama abierta y acabada del tableau de φ nos indica que cualquier valoración con $v(s) = 1$ y $v(r) = 0$ es un modelo de de φ.

c) El tableaux de φ construido da la forma normal disyuntiva: $\varphi \equiv (s \wedge \neg r) \vee (s \wedge \neg p) \vee (s \wedge \neg q)$. Usando la propiedad asociativa tenemos una forma conjuntiva:

$$\varphi \equiv s \wedge (\neg r \vee \neg p \vee \neg q).$$

Notar que para halla la forma normal conjuntiva de φ podemos usar la fórmula $FNC(\varphi) = \neg FND(\neg\varphi)$, pero en este caso no hace falta.

Ejercicio 4: (15 puntos) En el contexto de la lógica de primer orden, **formaliza** las siguientes frases usando como dominio los viajeros de cierto avión:

a) Todos los que viajan en el avión tienen que tener una carta de embarque.
b) Pepe estará tranquilo sólo si está sentado al lado de su madre.
c) Hay niños que no viajan sentados al lado de su madre y tienen carta de embarque.

Solución: Usamos la siguiente notación:
$E(x)$:=*x tiene carta de embarque*
$T(x)$:=*x está tranquilo*
$A(x)$:=*x se sienta al lado de su madre*
a :=*Pepe*
$N(x)$:=*x es un niño.*
De modo que
a) $\forall x\ E(x)$,
b) $T(a) \to A(a)$,
c) $\exists x\ (N(x) \wedge \neg A(x) \wedge E(x))$.

Ejercicio 5: (24 puntos) Una cierta empresa busca personas que:

1) tengan un título de Grado y
2) tengan menos que 30 años o tengan al menos tres años de experiencia laboral en el sector.

Sabemos que: Alberto no tiene un título de Grado, tiene 26 años y cuatro años de experiencia laboral en el sector. Beatriz tiene un título de Grado, 32 años y tres años de experiencia laboral en el sector. Carlos tiene un título de Grado, 29 años y dos años de experiencia laboral en el sector.

Considera el dominio $D = \{A, B, C\}$ (los símbolos A, B y C representan Alberto, Beatriz y Carlos, respectivamente) y los siguientes símbolos de predicados:
$P(x)$: x tiene un título de grado,
$Q(x)$: x puede obtener un trabajo en la empresa,
$R(x, y)$: para esta empresa x tiene mejor curriculum que y, esto es, x cumple las condiciones para ser seleccionado por dicha empresa mientras que y no las cumple.

Calcula el valor de las siguientes fórmulas de la lógica de primer orden bajo la interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ obtenida usando el contexto dado (**justifica tus respuestas**):

a) $\varphi_a = \exists x \forall y(\neg(x = y) \vee R(y, x))$,
b) $\varphi_b = \forall x \forall y(P(x) \vee \neg Q(y))$,
c) $\varphi_c = \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$,
d) $\varphi_d = \forall x(P(x) \vee Q(B) \to R(x, B))$,
e) $\varphi_e = \exists x \exists y(P(x) \wedge \neg Q(y) \wedge R(x, y))$,
f) $\varphi_f = \forall x \forall y(P(x) \vee \neg(x = y) \vee \neg Q(y))$.

<u>**Solución:**</u> La interpretacóin I es:

$$P^I = \{B, C\} \subset D, \quad Q^I = \{B, C\} \subset D, \quad R^I = \{(B, A), (C, A)\} \subset D \times D.$$

a) $\varphi_a = \exists x \forall y(\neg(x = y) \vee R(y, x))$,
$\varphi_a^I = 0$: sea x un generico elemento de D. Si $y \in D$ e $y = x$, entonces $(\neg(x = y))^I = 0$ y $R^I(y, x) = 0$. Por tanto, para todo elemento x de D, se obtiene que $(\forall y(\neg(x = y) \vee R(y, x)))^I = 0$.
b) $\varphi_b = \forall x \forall y(P(x) \vee \neg Q(y))$,
$\varphi_b^I = 0$: tomando $x = A$ e $y = B$ tenemos que $P(A)^I = 0$ y $Q(B)^I = 1$.
c) $\varphi_c = \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$,
$\varphi_c^I = 1$: como $P(A)^I = 0$ entonces la premisa de esta implicación es falsa.
d) $\varphi_d = \forall x(P(x) \vee Q(B) \to R(x, B))$,
$\varphi_d^I = 0$: como $Q(B)^I = 1$ entonces la premisa de la implicación es siempre verdadera. Sin embargo la conclusión es falsa cuando, por ejemplo, $x = A$.
e) $\varphi_e = \exists x \exists y(P(x) \wedge \neg Q(y) \wedge R(x, y))$,
$\varphi_e^I = 1$: basta tomar $x = B$ e $y = A$.
f) $\varphi_f = \forall x \forall y(P(x) \vee \neg(x = y) \vee \neg Q(y))$.

$\varphi_f^I = 1$: cuando $x \neq y$ se tiene que $\neg(x = y)$ es verdadera. Como $P(B)^I = P(C)^I = 1$ y $Q(A)^I = 0$ se tiene que cuando $x = y$ también $P(x) \vee \neg(x = y) \vee \neg Q(y)$ es verdadera.

Ejercicio 6: (18 puntos) Sean T y F los conjuntos de términos y de fórmulas de la lógica de primer orden, respectivamente. Sea a el símbolo de una constante distinguida.

a) Define por recursión estructural la función $\alpha : T \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ que asigna a cada término t el número $\alpha(t)$ de veces que aparece el símbolo de constante a en dicho término t.

b) Define por recursión estructural la función $\beta : F \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ que asigna a cada fórmula φ el número $\beta(\varphi)$ de veces que aparece el símbolo de constante a en dicha fórmula φ.

c) Determina razonadamente si es verdadera la siguiente afirmación: $\varphi \equiv \psi$ si y solamente si $\beta(\varphi) = \beta(\psi)$ (donde el símbolo $\equiv$ significa equivalencia lógica).

Solución:

a) Para los términos atómicos: $\alpha(x) = 0$ si x es un símbolo de variable, $\alpha(b) = 0$ si b es un símbolo de constante distinto de a y $\alpha(a) = 1$.

Para los términos compuestos se tiene que $\alpha(f(t_1, \ldots, t_n)) = \alpha(t_1) + \cdots + \alpha(t_n)$.

b) Para las fórmulas atómicas se tiene:

Si son proposiciones atómicas, entonces $\beta(p) = 0$.

Si son predicados n-arios con $n > 0$ entonces $\beta(P(t_1, \ldots, t_n)) = \alpha(t_1) + \cdots + \alpha(t_n)$.

Además: $\beta(\top) = \beta(\bot) = 0$,

Y finalmente para igualdades entre términos: $\beta(s = t) = \alpha(s) + \alpha(t)$.

Para las fórmulas compuestas se tiene:

$\beta(\neg(\varphi)) = \beta(\varphi)$,

$\beta(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \beta(\varphi_1) + \beta(\varphi_2)$,

$\beta(\forall x \varphi) = \beta(\exists x \varphi) = \beta(\varphi)$.

c) No es cierto en ninguna dirección. Sean las siguientes tautologías:

$\varphi_1 = P(a) \vee \neg P(a)$,

$\varphi_2 = \forall x (P(x) \vee \neg P(x))$.

Se tiene que $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ mientras que $\beta(\varphi_1) \neq \beta(\varphi_2)$. Por el contrario $\beta(\neg(\varphi_1)) = \beta(\varphi_1)$ y sin embargo no son equivalentes.

24. Examen final de diciembre 2010-2011

Fecha: 15 de diciembre de 2010 **Tiempo: 3 horas**

El examen está formado por cuatro partes. La primera es obligatoria y se valorará sobre 40 puntos. Las otras tres partes se valorarán sobre 20 puntos cada una y el alumno puede decidir si entregarlas o no, dependiendo de sus resultados parciales. **El alumno tiene que entregar cada parte del examen en hojas separadas.** *La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.* **Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas**.

Podéis consultar los apuntes de la asignatura. No está permitido el uso de calculadoras y de teléfonos móviles.

PARTE I (OBLIGATORIA): Semántica y teoría de la demostración de la lógica de primer orden.

Ejercicio 1: (15 puntos) En un aula se reúnen 33 estudiantes: 1 estudiante de matemáticas de primer curso, 12 estudiantes de matemáticas de segundo curso, 15 estudiantes de informática de segundo, 2 estudiantes de matemáticas de tercero, 2 estudiantes de magisterio de tercero y un estudiante de magisterio de cuarto.

Tomando como dominio el conjunto D de los estudiantes reunidos en el aula, formaliza las siguientes frases y determina su valor de verdad según la interpretación definida por el enunciado de este ejercicio:

1. Hay un estudiante en el aula que es de tercer curso.
2. Todo estudiante del aula es de informática.
3. Hay un estudiante en el aula que ni es de matemáticas ni de tercero.
4. Todo estudiante en el aula es o bien de segundo o bien de informática.
5. Existe al menos un estudiante para cada uno de los cuatro cursos de la titulación de matemáticas.

Ejercicio 2: (15 puntos) Sea $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y sea $f^I : D \to D$ la función que asigna $f^I(1) = 2$, $f^I(2) = 3$, $f^I(3) = 3$, $f^I(4) = 5$ y $f^I(5) = 1$. Considera el predicado de dos variables $P(x, y)$ que significa *x es estrictamente mayor que y*. Y el símbolo de constante a que es interpretado como $a^I = 3$. Determina si las siguientes fórmulas son verdaderas bajo esta interpretación (D, I):

1. $\forall x \exists y P(f(x), y)$.

2. $\exists x(f(f(x)) = x)$.
3. $\forall x \forall y P(x, f(y))$.
4. $\forall x(P(f(x), x) \to \neg(x = a))$
5. $\exists x \exists y((f(x) = f(f(y))) \wedge P(x, y))$

Ejercicio 3: (10 puntos) Realiza las siguientes deducciones usando el sistema de deducción natural de Gentzen:

a) $\exists x(P(y) \wedge Q(x)) \vdash P(y) \wedge \exists x Q(x)$,
b) $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \vdash \forall x(P(x) \vee Q(x))$.

PARTE II: Algunas nociones de teorías de conjuntos, relaciones y funciones.

Ejercicio 1: (10 puntos) Sean A y B dos conjuntos.

a) Verifica que $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$.

b) ¿Si se verifica que $A \cup B = (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$, qué puedes deducir sobre A y B?

Ejercicio 2: (10 puntos) Considera el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales y el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ ($\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es el conjunto de las partes de $\mathbb{N}$). Definimos la siguiente relación R en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: dados $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, A se relaciona con B si y solamente si $A \cap B \neq \emptyset$.

1. Verifica que R no es reflexiva.
2. Verifica que R es simétrica.
3. Verifica que R no es antisimétrica.
4. Verifica que R no es transitiva.
5. ¿Es R una relación de equivalencia? ¿Y de orden?

PARTE III: Sintaxis y semántica de la lógica proposicional.

Ejercicio 1: (10 puntos) Formaliza el siguiente razonamiento usando la lógica proposicional.

> *Una fórmula es semánticamente válida si y solamente si cumple la condición (A). Una fórmula no cumple la condición (A) a menos que sea una tautología. Si una fórmula es semánticamente válida entonces o bien cumple la condición (B) o bien es una tautología. Entonces podemos concluir que, para una fórmula, la condición de cumplir (B) es necesaria y suficiente para que sea una tautología.*

Ejercicio 2: (10 puntos) Clasifica mediante tableaux la siguiente fórmula:

$$\varphi = (q \to t) \land (q \to \neg p \lor s) \land (\neg p \to s \land \neg t) \to ((t \to \neg s) \to \neg q).$$

PARTE IV: Teoría de la demostración de la lógica proposicional. Sintaxis de la lógica de primer orden.

Ejercicio 1: (10 puntos) Usa el sistema de deducción de Gentzen para demostrar que:

$$\{p \lor q, \neg t \to \neg p \land \neg s\} \vdash (q \to s) \to t.$$

Ejercicio 2:

a) **(3 puntos)** Sea T el conjunto de los términos de la lógica de predicados. Construye una función $A : T \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ que asigna a cada término t el número de aristas de su árbol estructural.

b) **(7 puntos)** Sea F el conjunto de fórmulas de la lógica de predicados. Construye una función $Ar : F \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ que asigna a cada fórmula φ el número de aristas de su árbol estructural.

25. Soluciones del examen final de diciembre 2010-2011

Fecha: 15 de diciembre de 2010 **Tiempo: 3 horas**

PARTE I (OBLIGATORIA): Semántica y teoría de la demostración de la lógica de primer orden.

Ejercicio 1: (15 puntos) En un aula se reúnen 33 estudiantes: 1 estudiante de matemáticas de primer curso, 12 estudiantes de matemáticas de segundo curso, 15 estudiantes de informática de segundo, 2 estudiantes de matemáticas de tercero, 2 estudiantes de magisterio de tercero y un estudiante de magisterio de cuarto.

Tomando como dominio el conjunto D de los estudiantes reunidos en el aula, formaliza las siguientes frases y determina su valor de verdad según la interpretación definida por el enunciado de este ejercicio:

1. Hay un estudiante en el aula que es de tercer curso.
2. Todo estudiante del aula es de informática.
3. Hay un estudiante en el aula que ni es de matemáticas ni de tercero.
4. Todo estudiante en el aula es o bien de segundo o bien de informática.
5. Existe al menos un estudiante para cada uno de los cuatro cursos de la titulación de matemáticas.

Solución: Sea D el conjunto de los estudiantes reunidos en el aula y definimos los siguientes símbolos de predicados: $P(x) = x$ es de primer curso, $S(x) = x$ es de segundo curso, $T(x) = x$ es de tercer curso, $C(x) = x$ es de cuarto curso, $M(x) = x$ es de matemáticas, $I(x) = x$ es de informática, $Ma(x) = x$ es de magisterio.

Con estos símbolos la formalización y los valores de verdad son los siguientes:

1. $\varphi_1 = \exists x T(x)$, $\varphi_1^I = 1$ (sabemos que hay un estudiante de tercero de matemáticas),
2. $\varphi_2 = \forall x I(x)$, $\varphi_2^I = 0$ (hay estudiantes de matemáticas en el aula),
3. $\varphi_3 = \exists x(\neg M(x) \wedge \neg T(x))$, $\varphi_3^I = 1$ (hay un estudiante de cuarto de magisterio),
4. $\varphi_4 = \forall x(S(x) \vee I(x))$, $\varphi_4^I = 0$ (hay un estudiante de primero de matemáticas),
5. $\varphi_5 = \exists x(M(x) \wedge P(x)) \wedge \exists x(M(x) \wedge S(x)) \wedge \exists x(M(x) \wedge T(x)) \wedge \exists x(M(x) \wedge C(x))$, $\varphi_5^I = 0$ (no hay estudiantes de cuarto de matemáticas).

Ejercicio 2: (15 puntos) Sea $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y sea $f^I : D \to D$ la función que asigna $f^I(1) = 2$, $f^I(2) = 3$, $f^I(3) = 3$, $f^I(4) = 5$ y $f^I(5) = 1$. Considera el predicado de dos variables $P(x, y)$ que significa *x es estrictamente mayor que y*. Y el símbolo de constante a que es interpretado como $a^I = 3$. Determina si las siguientes fórmulas son verdaderas bajo esta interpretación (D, I):

1. $\forall x \exists y P(f(x), y)$.
2. $\exists x(f(f(x)) = x)$.
3. $\forall x \forall y P(x, f(y))$.
4. $\forall x(P(f(x), x) \to \neg(x = a))$
5. $\exists x \exists y((f(x) = f(f(y))) \wedge P(x, y))$

Solución: Todas las fórmulas son cerradas y

1. $(\forall x \exists y P(f(x), y))^I = 0$, (si $x = 5$, no existe ningún elemento del dominio estrictamente menor que 1),
2. $(\exists x(f(f(x)) = x))^I = 1$, ($x = 3$ es tal que $f^I(f^I(3)) = 3$),
3. $(\forall x \forall y P(x, f(y)))^I = 0$, (si $x = y = 1$, 1 es menor que $f^I(1) = 2$),
4. $(\forall x(P(f(x), x) \to \neg(x = a)))^I = 1$, (los elementos $b \in D$ tales que $P^I(f^I(b), b) = 1$ son 1, 2 y 4, que son distintos de 3),
5. $(\exists x \exists y((f(x) = f(f(y))) \wedge P(x, y)))^I = 1$, (si $x = 3$ y $y = 2$, entonces $3 = f^I(3) = f^I(f^I(2))$ y 3 es estrictamente mayor que 2).

Ejercicio 3: (10 puntos) Realiza las siguientes deducciones usando el sistema de deducción natural de Gentzen:

a) $\exists x(P(y) \wedge Q(x)) \vdash P(y) \wedge \exists x Q(x)$,
b) $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \vdash \forall x(P(x) \vee Q(x))$.

Solución:

a)

$$\begin{array}{l}
1)\ \exists x(P(y) \wedge Q(x)) \quad \text{(Premisa)} \\
\begin{array}{|l|}
\hline
2)\ P(y) \wedge Q(z) \quad \text{(Premisa auxiliar)} \\
3) \vdash P(y) \quad (\text{E}\wedge\ (2)) \\
4) \vdash Q(z) \quad (\text{E}\wedge\ (2)) \\
5) \vdash \exists x Q(x) \quad (\text{I}\exists\ (4)) \\
6) \vdash P(y) \wedge \exists x Q(x) \quad (\text{I}\wedge\ (3{,}5)) \\
\hline
\end{array} \\
7) \vdash P(y) \wedge \exists x Q(x) \quad (\text{E}\exists(1,(2,6)))
\end{array}$$

b)

1) $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ (Premisa)
2) z
3) $\vdash \forall x P(x)$ (Premisa auxiliar)
4) $\vdash P(z)$ (E$\forall$(3))
5) $\vdash P(z) \vee Q(z)$ (I$\vee$(4))
6) $\vdash \forall x Q(x)$ (Premisa auxiliar)
7) $\vdash Q(z)$ (E$\forall$(6))
8) $\vdash P(z) \vee Q(z)$ (I$\vee$(7))
9) $\vdash P(z) \vee Q(z)$ (E$\vee$(1,(3,8)))
10) $\vdash \forall x (P(x) \vee Q(x))$ (I$\forall$(2,9))

PARTE II: Algunas nociones de teorías de conjuntos, relaciones y funciones.

Ejercicio 1: (10 puntos) Sean A y B dos conjuntos.

a) Verifica que $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$.

b) ¿Si se verifica que $A \cup B = (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$, qué puedes deducir sobre A y B?

Solución:

a) Por reducción al absurdo: si x es un elemento de $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$ entonces $x \in A, x \notin B, x \in B, x \notin A$. Por tanto $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$ tiene que ser vacío.

b) Para todo par de conjuntos A y B es cierto que $A \cup B = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) \cup (A \cap B)$. Si $A \cup B = (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$, entonces tiene que ser $A \cap B = \emptyset$, es decir, los dos conjuntos tienen que ser disjuntos.

Ejercicio 2: (10 puntos) Considera el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales y el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ ($\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es el conjunto de las partes de $\mathbb{N}$). Definimos la siguiente relación R en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: dados $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, A se relaciona con B si y solamente si $A \cap B \neq \emptyset$.

1. Verifica que R no es reflexiva.
2. Verifica que R es simétrica.
3. Verifica que R no es antisimétrica.
4. Verifica que R no es transitiva.
5. ¿Es R una relación de equivalencia? ¿Y de orden?

Solución:

1. R no es reflexiva: $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$.
2. R es simétrica: dados $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, si $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $B \cap A = A \cap B \neq \emptyset$,
3. R no es antisimétrica: sean $A = \{1, 2\}$ y $B = \{2, 3\}$. Entonces A se relaciona con B, B se relaciona con A (siendo $A \cap B = \{2\} \neq \emptyset$), pero $A \neq B$.
4. R no es transitiva: sean A y B como en el partado anterior y sea $C = \{2, 3\}$. Entonces B se relaciona con C (siendo $B \cap C = \{3\} \neq \emptyset$), pero A no se relaciona con C (siendo $A \cap C = \emptyset$).
5. Ya que no es reflexiva, R ni es de equivalencia, ni de orden.

PARTE III: Sintaxis y semántica de la lógica proposicional.

Ejercicio 1: (10 puntos) Formaliza el siguiente razonamiento usando la lógica proposicional.

> *Una fórmula es semánticamente válida si y solamente si cumple la condición (A). Una fórmula no cumple la condición (A) a menos que sea una tautología. Si una fórmula es semánticamente válida entonces o bien cumple la condición (B) o bien es una tautología. Entonces podemos concluir que, para una fórmula, la condición de cumplir (B) es necesaria y suficiente para que sea una tautología.*

Solución: Sean $p =$ una fórmula es semánticamente válida, $q =$ una fórmula cumple la condición (A), $r =$ una fórmula es una tautología, $s =$ una fórmula cumple la condición (B). Entonces, la formalización del razonamiento dado es:

$$(p \leftrightarrow q) \wedge (q \to r) \wedge (p \to s \vee r) \to (s \leftrightarrow r).$$

Ejercicio 2: (10 puntos) Clasifica mediante tableaux la siguiente fórmula:

$$\varphi = (q \to t) \wedge (q \to \neg p \vee s) \wedge (\neg p \to s \wedge \neg t) \to ((t \to \neg s) \to \neg q).$$

Solución:

$$\neg\varphi \equiv (\neg q \vee t) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee s) \wedge (p \vee (s \wedge \neg t)) \wedge \neg(\neg(\neg t \vee \neg s) \vee \neg q) \equiv$$

$$\equiv (\neg q \vee t) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee s) \wedge (p \vee (s \wedge \neg t)) \wedge (\neg t \vee \neg s) \wedge q.$$

La figura 16 representa el tableau de $\neg\varphi$, que es cerrado. φ es una tautología.

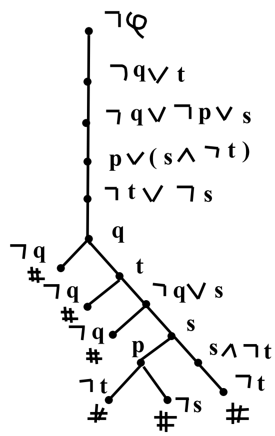


Figura 16. Tableaux de $\neg\varphi$ del ejercicio 2, Parte III

PARTE IV: Teoría de la demostración de la lógica proposicional. Sintaxis de la lógica de primer orden.

Ejercicio 1: (10 puntos) Usa el sistema de deducción de Gentzen para demostrar que:

$$\{p \vee q, \neg t \to \neg p \wedge \neg s\} \vdash (q \to s) \to t.$$

<u>**Solución:**</u> Por el teorema de la deducción podemos estudiar la validez de la deducción:

$$\{p \vee q, \neg t \to \neg p \wedge \neg s, q \to s\} \vdash t.$$

1) $p \vee q$ (Premisa)
2) $\neg t \to \neg p \wedge \neg s$ (Premisa)
3) $q \to s$ (Premisa)
4) $\vdash \neg t$ (Premisa auxiliar)
5) $\vdash \neg p \wedge \neg s$ (E$\to$(4,2))
6) $\vdash \neg p$ (E$\wedge$(5))
7) $\vdash q$ (Tollendo Ponens(6,1))
8) $\vdash s$ (E$\to$(7,3))
9) $\vdash \neg s$ (E$\wedge$(5))
10) $\vdash s \wedge \neg s$ (I$\wedge$(8,9))
11) $\vdash t$ (I$\neg$(4,10))

Ejercicio 2:

a) **(3 puntos)** Sea T el conjunto de los términos de la lógica de predicados. Construye una función $A : T \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ que asigna a cada término t el número de aristas de su árbol estructural.

b) **(7 puntos)** Sea F el conjunto de fórmulas de la lógica de predicados. Construye una función $Ar : F \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ que asigna a cada fórmula φ el número de aristas de su árbol estructural.

Solución:

a) Por recursión estructural:

Base (TAt):

$A(x) = A(a) = 0.$

Paso recursivo:

$A(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = A(t_1) + A(t_2) + \cdots + A(t_n) + n.$

b) Por recursión estructural:

Base (FAt):

$Ar(\top) = Ar(\bot) = Ar(p) = 0,$
$Ar(s = t) = A(s) + A(t) + 2,$
$Ar(P(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = A(t_1) + A(t_2) + \cdots + A(t_n) + n.$

Pasos recursivos:

$(F\neg) : Ar(\neg\varphi) = Ar(\varphi) + 1,$
$(F\circ) : Ar(\varphi_1 \circ \varphi_2) = Ar(\varphi_1) + Ar(\varphi_2) + 2,$
$(F\forall\exists) : Ar(\forall x\varphi) = Ar(\exists x\varphi) = Ar(\varphi) + 2.$

Estas definiciones determinan la función f sobre todo F.

26. Examen final de junio 2010-2011

Fecha: 18 de junio de 2011 **Tiempo: 3 horas**

El examen está formado por cuatro partes. La primera es obligatoria y se valorará sobre 40 puntos. Las otras tres partes se valorarán sobre 20 puntos cada una y el alumno puede decidir si entregarlas o no, dependiendo de sus resultados parciales. **El alumno tiene que entregar cada parte del examen en hojas separadas.** *La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.* **Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas**.

Podéis consultar los apuntes de la asignatura. No está permitido el uso de calculadoras y de teléfonos móviles.

PARTE I (OBLIGATORIA): Semántica y teoría de la demostración de la lógica de primer orden.

Consideramos el dominio $\mathbb{D}$ de todas las palabras de 4 letras sobre el alfabeto $\{A, B, C, D\}$ y la interpretación I sobre el dominio $\mathbb{D}$ que viene dada por <u>los símbolos de predicado</u>:

$P(x)$: x es una palabra que contiene repeticiones de al menos una letra (por ejemplo, las palabras BBCD, ADDD o CCCC contienen repeticiones de la letra B, D o C, respectivamente),

$Q(x, y)$: la palabra y contiene exactamente una C menos que la palabra x,

y <u>el símbolo de función</u>:

$f(x, y)$ es la palabra que se obtiene juntando las primeras dos letras de x con las últimas dos letras de y (por ejemplo $f(ABDC, DBCA) = ABCA$).

Ejercicio 1: (15 puntos) Usando el dominio $\mathbb{D}$ y la interpretación anterior, formaliza y determina el valor de verdad de las siguientes frases:

1. Existen dos palabras x e y tales que: x contiene repeticiones de al menos una letra y la palabra que se obtiene juntando las primeras dos letras de x con las últimas dos letras de y contiene repeticiones de al menos una letra.
2. Para todo par de palabras, la primera contiene exactamente una C menos que la segunda.

3. Existen dos palabras x e y tales que: la palabra y contiene exactamente una C menos que la palabra x y ambas x e y contienen repeticiones de al menos una letra.
4. Para toda palabra existe una palabra que contiene exactamente una C menos que ella.
5. Para todo par de palabras, o bien al menos una de las dos contiene repeticiones de al menos una letra o bien una de las dos contiene exactamente una C menos que la otra.

Ejercicio 2: (15 puntos) Usando los mismos dominio $\mathbb{D}$ e interpretación anteriores, evalúa (es decir, di si son verdaderas o falsas) las siguientes fórmulas. Justifica tu respuesta en cada caso:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 & : & \exists x \forall\ (P(x) \wedge P(f(x,y))) \\ \varphi_2 & : & \forall x \exists y (P(x) \leftrightarrow P(f(x,y))) \\ \varphi_3 & : & \exists x \exists y (Q(x,y) \wedge \neg P(x) \wedge \neg P(y)) \\ \varphi_4 & : & \forall x \exists y Q(x,y) \\ \varphi_5 & : & \forall x \forall y (Q(x,y) \to Q(f(x,y),y)) \end{array}$$

Ejercicio 3: (10 puntos) Usa el sistema de deducción natural de Gentzen para verificar la validez de la siguiente deducción:

$$\{\exists x(P(x) \wedge Q(x,a)),\ \forall x(Q(x,a) \to R(x))\} \vdash \exists x(P(x) \wedge R(x)).$$

PARTE II: Algunas nociones de teorías de conjuntos, relaciones y funciones.

Ejercicio 1: Considera las siguientes relaciones binarias sobre $\mathbb{R}$:

1. (10 puntos) $R_1 = \{(x,y) : x^2 = (y+1)^5\}$,
2. (10 puntos) $R_3 = \{(x,y) : x = \sqrt{y}\}$.

En cada apartado halla el dominio de la relación y verifica si es una función, una relación de equivalencia o una relación de orden. Recuerda que $\sqrt{a^2} = |a|$.

PARTE III: Sintaxis y semántica de la lógica proposicional.

Ejercicio 1: (10 puntos) Formaliza el siguiente razonamiento usando la lógica proposicional:

> *No se resuelve el problema y se le abandona, a menos que se tengan todos los datos. Si se resuelve el problema, entonces se obtendrán los resultados queridos. Se obtienen los resultados queridos sólo si se tienen todos los datos.*

Por lo tanto: o bien no se abandona el problema, o bien se tienen todos los datos.

Ejercicio 2: (10 puntos) Verifica **mediante tableaux** si las siguientes fórmulas son equivalentes:

$$\varphi_1 = r \leftrightarrow (p \wedge q), \quad \varphi_2 = (r \leftrightarrow p) \wedge (r \leftrightarrow q).$$

PARTE IV: Teoría de la demostración de la lógica proposicional. Sintaxis de la lógica de primer orden.

Ejercicio 1: (10 puntos) Usa el sistema de deducción de Gentzen para demostrar que:

$$\{p \vee r \vee s, \neg r \vee q, q \to p\} \vdash \neg q \to p.$$

Ejercicio 2:

a) **(3 puntos)** Sea T el conjunto de los términos de la lógica de predicados. Construye una función $VT : T \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ que asigna a cada término t el número de vértices de su árbol estructural de grado mayor o igual que 2.

b) **(7 puntos)** Sea F el conjunto de fórmulas de la lógica de predicados. Construye una función $VF : F \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ que asigna a cada fórmula φ el número de vértices de su árbol estructural de grado mayor o igual que 2.

27. Soluciones del examen final de junio 2010-2011

Fecha: 18 de junio de 2011 **Tiempo: 3 horas**

PARTE I: Algunas nociones de teorías de conjuntos, relaciones y funciones.

Ejercicio 1: Considera las siguientes relaciones binarias sobre $\mathbb{R}$:

1. (10 puntos) $R_1 = \{(x, y) : x^2 = (y + 1)^5\} \subseteq \mathbb{R}^2$,
   El dominio de esta relación es el conjunto de los números reales pues despejamos y y obtenemos $y = x^{2/5} - 1$, lo que a su vez demuestra que es un función. Como no es reflexiva pues $(1, 1) \notin R_1$ no es una relación de orden ni de equivalencia.

2. (10 puntos) $R_2 = \{(x, y) : x^2 = y^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
   El dominio es nuevamente el conjunto de los números reales pues tomando $y = x$ se tiene $(x, y) \in R_2$. Esto además demuestra que es reflexiva. No es una función pues $(x, y), (x, -y) \in R_2$. Podemos reescribirla como $R_2 = \{(x, y) : |x| = |y|\} \subseteq \mathbb{R}^2$, de modo que es simétrica: $|x| = |y|$ si y solamente si $|y| = |x|$. Y también es transitiva: $|x| = |y|$ e $|y| = |z|$ implica $|x| = |z|$. Por tanto es una relación de equivalencia y no es de orden al no ser antisimétrica: $(1, -1), (-1, 1) \in R_2$, pero $1 \neq -1$.

PARTE II: Sintaxis y semántica de la lógica proposicional.

Ejercicio 1: (10 puntos) Formaliza el siguiente razonamiento usando la lógica proposicional:

> *No se resuelve el problema y no se le abandona, a menos que se tengan todos los datos. Si se resuelve el problema, entonces se obtendrán los resultados queridos. Se obtienen los resultados queridos sólo si se tienen todos los datos. Por lo tanto: o bien no se abandona el problema, o bien se tienen todos los datos.*

Usamos las siguientes variables proposicionales:

p :=se resuelve el problema,
q := se abandona el problema,
r := se tienen todos los datos del problema,
s := se obtienen los resultados queridos.

De modo que el razonamiento queda así:

$$(p \vee q \to r) \wedge (p \to s) \wedge (s \to r) \to (\neg q \vee r)$$

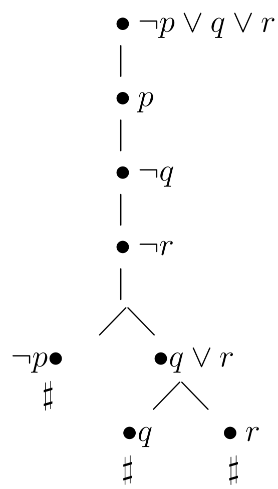
Ejercicio 2: (10 puntos) Clasifica **mediante tableaux** la siguiente fórmula de la lógica proposicional:

$$\varphi = (p \wedge \neg q \to r) \wedge p \to q \vee r.$$

Usando las equivalencias usuales escribimos $\neg\varphi$ como:

$$\neg\varphi \equiv (p \wedge \neg q \to r) \wedge p \wedge \neg(q \vee r) \equiv (\neg p \vee q \vee r) \wedge p \wedge \neg q \wedge \neg r$$

y verificamos que el tableaux sale cerrado de modo que $\neg\varphi$ es una contradicción y φ una tautología.



PARTE III: Teoría de la demostración de la lógica proposicional. Sintaxis de la lógica de primer orden.

Ejercicio 1: (10 puntos) Usa el sistema de deducción de Gentzen para demostrar que:

$$\{(p \vee s) \vee r, \neg r \vee q, q \to p\} \vdash \neg s \to p.$$

Usaremos la regla *Tollendo ponens* denotada como (TP): $\{p \vee q, \neg p\} \vdash q$.

(1) $(p \vee s) \vee r$	(Premisa)
(2) $\neg r \vee q$	(Premisa)
(3) $q \to p$	(Premisa)
(4) $\neg s$	(Premisa)

(5) $\neg r$	(Premisa aux.)	(5) q	(Premisa aux.)
(6) $p \vee s$	(TP(1,5))	(6) p	(E$\to$(3,5))
(7) p	(TP(4,6))		

(8) p	(E$\vee$(1,(5-7)))

Ejercicio 2:

a) **(3 puntos)** Sea T el conjunto de los términos de la lógica de predicados. Construye una función $VT : T \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ que asigna a cada término t el grado de la raíz de su árbol estructural (recuerda que el grado de un vértice es el número de aristas incidentes en él).

Para t **término atómico** se tiene que $VT(t) = 0$. Si tenemos un **término compuesto** entonces:

$$VT(f(t_1, \ldots, t_n)) = n.$$

Así la función VT queda definida para cada término por recursión estructural.

b) **(7 puntos)** Sea F el conjunto de fórmulas de la lógica de predicados. Construye una función $VF : F \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ que asigna a cada fórmula φ el grado de la raíz de su árbol estructural.

Para **fórmulas atómicas** tenemos:
$VF(\top) = VF(\bot) = 0$;
$VF(p) = 0$ para p una proposición atómica;
$VF(s = t) = 2$;
$VF(P(t_1, \ldots, t_n)) = n$.
Para **fórmulas compuestas** tenemos:
$VF(\neg\varphi) = 1$;
$VF(\varphi \circ \psi) = 2$, donde $\circ$ denota un conectivo binario;
$VF(\exists x\varphi) = VF(\forall x\varphi) = 2$.

La función VF queda así definida para cada fórmula por recursión estructural.

PARTE IV: Semántica y teoría de la demostración de la lógica de primer orden.

Consideramos el dominio $\mathbb{D}$ de todas las palabras de 4 letras sobre el alfabeto $\{A, B, C, D\}$ y la interpretación I sobre el dominio $\mathbb{D}$ que viene dada por los símbolos de predicado:

$P(x)$: x es una palabra que contiene letras repetidas (por ejemplo, las palabras BBCD, ADAC, CCCB o DAAD contienen letras repetidas mientras que CABD no las contiene),
$Q(x, y)$: la palabra y contiene exactamente una C menos que la palabra x,

y el símbolo de función:

$f(x,y)$ es la palabra que se obtiene juntando las primeras dos letras de x con las últimas dos letras de y (por ejemplo $f(ABDC, DBCA) = ABCA$).

Ejercicio 1: (15 puntos) Usando el dominio $\mathbb{D}$ y la interpretación anterior, formaliza las siguientes frases:

1. Existen dos palabras x e y tales que: x contiene letras repetidas y la palabra que se obtiene juntando las primeras dos letras de x con las últimas dos letras de y contiene letras repetidas.

$$\exists x \exists y (P(x) \land P(f(x,y)))$$

2. Para todo par de palabras, la primera contiene exactamente una C menos que la segunda.

$$\forall x \forall y Q(y,x) \quad (\text{o} \quad \forall x \forall y Q(x,y))$$

3. Existen dos palabras x e y tales que: la palabra y contiene exactamente una C menos que la palabra x y ambas x e y contienen letras repetidas.

$$\exists x \exists y (Q(x,y) \land P(x) \land P(y))$$

4. Para toda palabra existe una palabra que contiene exactamente una C menos que ella.

$$\forall x \exists y Q(x,y)$$

5. Para todo par de palabras, o bien al menos una de las dos contiene letras repetidas o bien una de las dos contiene exactamente una C menos que la otra.

$$\forall x \forall y (P(x) \lor P(y) \lor Q(x,y) \lor Q(y,x))$$

Ejercicio 2: (15 puntos) Usando los mismos dominio $\mathbb{D}$ e interpretación anteriores, evalúa (es decir, di si son verdaderas o falsas) las siguientes fórmulas. Justifica tu respuesta en cada caso:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &: \exists x \forall y\ (P(x) \land P(f(x,y))) \\
\varphi_2 &: \forall x \exists y (P(x) \leftrightarrow P(f(x,y))) \\
\varphi_3 &: \exists x \exists y (Q(x,y) \land \neg P(x) \land \neg P(y)) \\
\varphi_4 &: \forall x \exists y Q(x,y) \\
\varphi_5 &: \forall x \forall y (Q(x,y) \rightarrow Q(f(x,y),y))
\end{aligned}$$

Tenemos $\varphi_1^I = 1$, basta tomar $x =$AAAA.

Tenemos $\varphi_2^I = 1$: si $P(x)^I = 0$ basta tomar y que tenga las dos últimas letras iguales a las de x y $f(x,y) = x$; si $P(x)^I = 1$ basta tomar y con las dos últimas letras repetidas.

Tenemos $\varphi_3^I = 0$: si x e y no tienen letras repetidas entonces ambas tienen una C.

Tenemos $\varphi_4^I = 0$, basta tomar $x =$AAAA.

Tenemos $\varphi_5^I = 0$, basta tomar $x =$AACA e $y =$AAAA.

Ejercicio 3: (10 puntos) Usa el sistema de deducción natural de Gentzen para verificar la validez de la siguiente deducción:

$$\{\exists x(P(x) \wedge Q(x,a)), \forall x(Q(x,a) \to R(x))\} \vdash \exists x(P(x) \wedge R(x)).$$

(1) $\exists x(P(x) \wedge Q(x,a))$	(premisa)
(2) $\forall x(Q(x,a) \to R(x))$	(premisa)
(3) $P(y) \wedge Q(y,a)$	(premisa auxiliar)
(4) $Q(y,a)$	(E$\wedge$ (3))
(5) $Q(y,a) \to R(y)$	(E$\forall$ (2))
(6) $R(y)$	(E$\to$ (4,5))
(7) $P(y)$	(E$\wedge$ (3))
(8) $P(y) \wedge R(y)$	(I$\wedge$ (6,7))
(9) $\exists x(P(x) \wedge R(x))$	(I$\exists$ (9))
(10) $\exists x(P(x) \wedge R(x))$	(E$\exists$ (1),(3-9))

28. Tercer examen parcial 2011-2012. Versión A

Fecha: 29 de noviembre de 2011 **Tiempo: 50 min**

El examen está formado por tres problemas y se valorará sobre 20 puntos. La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Podéis consultar una hoja resumen de contenidos de la asignatura de formato A4.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

---

1) (8 puntos) Usando el sistema de deducción natural de Gentzen en el contexto de la lógica proposicional, verifica la validez de la siguiente deducción:

$$\{p \to q \vee r,\, q \to r,\, r \to s\} \vdash p \to s.$$

2) (4 puntos) En el contexto de la lógica de primer orden, formaliza el siguiente razonamiento:

> Existen pacientes a quienes sus médicos fuerzan a dejar de fumar. Los buenos médicos hacen lo mejor para sus pacientes, pero los que no fuerzan a dejar de fumar a otras personas no hacen lo mejor para ellas. Por lo tanto, existen malos médicos.

3) (8 puntos) Sean F el conjunto de las fórmulas de la lógica de primer orden y $A = \{0, 1\}$. Define la función $f : F \to A$ que asocia a cada fórmula $\varphi \in F$ el valor 1 si φ contiene una subfórmula que sea la negación de una proposición atómica, y el valor 0 si no contiene una tal subfórmula.

29. Tercer examen parcial 2011-2012. Versión B

Fecha: 29 de noviembre de 2011 **Tiempo: 50 min**

El examen está formado por tres problemas y se valorará sobre 20 puntos. La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Podéis consultar una hoja resumen de contenidos de la asignatura de formato A4.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

---

1) (8 puntos) Usando el sistema de deducción natural de Gentzen en el contexto de la lógica proposicional, verifica la validez de la siguiente deducción:

$$\{p \to q \vee s,\, q \to s,\, s \to r\} \vdash p \to r.$$

2) (4 puntos) En el contexto de la lógica de primer orden, formaliza el siguiente razonamiento:

> Existen pacientes a quienes sus médicos fuerzan a dejar de fumar. Los buenos médicos hacen lo mejor para sus pacientes, pero los que no fuerzan a dejar de fumar a otras personas no hacen lo mejor para ellas. Por lo tanto, existen malos médicos.

3) (8 puntos) Sean F el conjunto de las fórmulas de la lógica de primer orden y $A = \{0, 1\}$. Define la función $f : F \to A$ que asocia a cada fórmula $\varphi \in F$ el valor 0 si φ contiene una subfórmula que sea la negación de una proposición atómica, y el valor 1 si no contiene una tal subfórmula.

30. Soluciones del tercer examen parcial 2011-2012

Fecha: 29 de noviembre de 2011 **Tiempo: 50 min**

---

1) (8 puntos) Usando el sistema de deducción natural de Gentzen en el contexto de la lógica proposicional, verifica la validez de la siguiente deducción:
VERSIÓN A: $\{p \to q \vee r,\ q \to r,\ r \to s\} \vdash p \to s$.
VERSIÓN B: $\{p \to q \vee s,\ q \to s,\ s \to r\} \vdash p \to r$.

Solución:
VERSIÓN A: Por el teorema de la deducción podemos demostrar la validez de la deducción $\{p \to q \vee r,\ q \to r,\ r \to s,\ p\} \vdash s$.

1) $p \to q \vee r$	(Premisa)
2) $q \to r$	(Premisa)
3) $r \to s$	(Premisa)
4) p	(Premisa)
5) $\vdash q \vee r$	(E$\to$(4,1))
6) q (Premisa auxiliar)	
7) $\vdash r$ (E$\to$(6,2))	
8) r (Premisa auxiliar)	
9) $\vdash r$ (Teorema de la identidad)	
10) $\vdash r$	(E$\vee$(5,(6,9)))
11) $\vdash s$	(E$\to$(10,3))

VERSIÓN B: Es la misma deducción que en la versión A, intercambiando los símbolos s y r.

2) (4 puntos) **VERSIÓN A y B:** En el contexto de la lógica de primer orden, formaliza el siguiente razonamiento:

> Existen pacientes a quienes sus médicos fuerzan a dejar de fumar. Los buenos médicos hacen lo mejor para sus pacientes, pero los que no fuerzan a dejar de fumar a otras personas no hacen lo mejor para ellas. Por lo tanto, existen malos médicos.

Solución: Definamos el dominio D como el conjunto de las personas y los siguientes predicados: $P(x) = x$ es médico, $Q(x, y) = x$ es un paciente de y, $R(x, y) = x$ fuerza a dejar de fumar a y, $S(x) = x$ es bueno, $T(x, y) = x$ hace lo mejor para y.

Una formalización del razonamiento es:

$\exists x \forall y (Q(x, y) \wedge P(y) \to R(y, x)) \wedge \forall x \forall y (P(x) \wedge S(x) \wedge Q(y, x) \to T(x, y)) \wedge$

$$\wedge \forall x \forall y (P(x) \wedge \neg R(x,y) \rightarrow \neg T(x,y)) \rightarrow \exists x (P(x) \wedge \neg S(x)).$$

3) (8 puntos) Sean F el conjunto de las fórmulas de la lógica de primer orden y $A = \{0, 1\}$.

VERSIÓN A: Define la función $f : F \rightarrow A$ que asocia a cada fórmula $\varphi \in F$ el valor 1 si φ contiene una subfórmula que sea la negación de una proposición atómica, y el valor 0 si no contiene una tal subfórmula.

VERSIÓN B: Define la función $f : F \rightarrow A$ que asocia a cada fórmula $\varphi \in F$ el valor 0 si φ contiene una subfórmula que sea la negación de una proposición atómica, y el valor 1 si no contiene una tal subfórmula.

Solución:

VERSIÓN A: Para definir la función f sobre todo F vamos a usar el principio de recursión estructural.

Base: (At): $f(\perp) = f(\top) = f(p) = f(P(t_1, t_2, \cdots, t_n)) = f(s = t) = 0$.

Pasos recursivos:

(¬): $f(\neg\varphi) = \begin{cases} f(\varphi) & \text{si } \varphi \text{ no es una proposición atómica,} \\ 1 & \text{si } \varphi \text{ es una proposición atómica,} \end{cases}$

(∘): $f(\varphi_1 \circ \varphi_2) = max\{f(\varphi_1),\ f(\varphi_2)\}$,

(∀, ∃): $f(\forall x\varphi) = f(\exists x\varphi) = f(\varphi)$.

VERSIÓN B:

Base: (At): $f(\perp) = f(\top) = f(p) = f(P(t_1, t_2, \cdots, t_n)) = f(s = t) = 1$.

Pasos recursivos:

(¬): $f(\neg\varphi) = \begin{cases} f(\varphi) & \text{si } \varphi \text{ no es una proposición atómica,} \\ 0 & \text{si } \varphi \text{ es una proposición atómica,} \end{cases}$

(∘): $f(\varphi_1 \circ \varphi_2) = min\{f(\varphi_1),\ f(\varphi_2)\}$,

(∀, ∃): $f(\forall x\varphi) = f(\exists x\varphi) = f(\varphi)$.

31. Examen final de diciembre 2011-2012. Versión A

Fecha: 15 de diciembre de 2011 **Tiempo: 3 horas**

El examen está formado por cuatro partes correspondientes a las cuatro pruebas parciales de la asignatura: las tres primeras valen 20 puntos cada una y la cuarta 40 puntos. El alumno debe obligatoriamente entregar cada una de las partes en que no alcanzó la nota mínima (3,5 sobre 10) durante el curso. El alumno puede, según su criterio, entregar cualquiera de las otras partes de manera que la nota obtenida en este examen sustituirá a la nota obtenida durante el curso. Para aprobar la asignatura la suma de las notas de las cuatro partes debe ser mayor o igual que 50.
El alumno tiene que entregar cada parte del examen en hojas separadas. *La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.* **Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas**. *Podéis consultar 4 hojas resumen formato A4, una para cada parte del examen. No está permitido el uso de calculadoras y de teléfonos móviles.*

PARTE I: Algunas nociones de teorías de conjuntos, relaciones y funciones.

Ejercicio 1: (5 puntos) Sean A, B y C conjuntos no vacíos y tales que $A \cap B \neq \emptyset$ y $A \cap B \subseteq C$. Entonces, Àa qué conjunto es igual $A \cap (B \setminus C)$?

Ejercicio 2: (15 puntos) Considera la relación binaria R sobre el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ definida por: $(n, m) \in R$ si y sólo si $n-2$ es un múltiplo entero de m.

Halla el dominio y la imagen de la relación. Verifica si es una función, una relación de equivalencia o una relación de orden.

PARTE II: Sintaxis y semántica de la lógica proposicional.

Ejercicio 1: (8 puntos) Formaliza el siguiente razonamiento usando la lógica proposicional:

> *Mario no vota sólo si Andrea y Beatriz no votan. A pesar de que Andrea y Beatriz no hayan votado, Mario ha votado. Andrea no vota a menos que Mario y Carlos voten. Por lo tanto Beatriz no ha votado.*

Ejercicio 2: (12 puntos) Clasifica **mediante tableaux** la siguiente fórmula de la lógica proposicional:

$$\varphi = (p \to q) \wedge (p \to r) \to (p \to q \wedge r).$$

Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ.

PARTE III: Teoría de la demostración de la lógica proposicional. Sintaxis de la lógica de primer orden.

Ejercicio 1: (8 puntos) Usa el sistema de deducción de Gentzen para demostrar que:

$$\{p \to q \vee r,\, q \to r\} \vdash p \vee r \to r.$$

Ejercicio 2: (5 puntos) Usando el dominio D de las personas de esta clase (no son sólo los alumnos), formaliza las siguientes frases en el contexto de la lógica de primer orden:

1. Javier está más cerca de la pizarra que los demás alumnos.
2. El alumno que está más cerca de la pizarra que los demás puede leer más claramente los ejercicios que el profesor.
3. Para todo par de alumnos, o bien al menos uno de los dos está más cerca de la pizarra que el otro, o bien uno de los dos se sienta justo detrás del otro.
4. Existen tres alumnos x, y e z tales que: el alumno z se sienta justo detrás de x e y se sienta justo detrás de z.
5. Existen dos alumnos x e y tales que: y no está más cerca de la pizarra que x a menos que x esté sentado justo detrás de y.

Ejercicio 3: (7 puntos) Sea F el conjunto de fórmulas de la lógica de predicados. Construye una función $cF : F \to \{0, 1\}$ que asigna a cada fórmula φ el valor 1 si φ contiene al menos un símbolo de constante en su expresión sintáctica y el valor 0 si φ no contiene símbolos de constantes.

PARTE IV: Semántica y teoría de la demostración de la lógica de primer orden.

Ejercicio 1: (10 puntos) Considera la interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$, donde el dominio es $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, los símbolos de predicados son $P^I(x) = \{2, 3, 6\}$ y $Q^I(x, y) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 6)\}$, y el símbolo de función es $f(x) = \text{máx}\ \{x - 1, 1\}$.

Usando el dominio D y la interpretación anterior, evalúa (es decir, di si son verdaderas o falsas) las siguientes fórmulas. Justifica tu respuesta en cada caso:

$\varphi_1 \ : \ \exists x \forall y\ (P(x) \wedge P(f(y)))$ $\quad$ $\varphi_2 \ : \ \forall x \exists y (Q(x, y) \leftrightarrow Q(x, f(y)))$

$\varphi_3 \ : \ \exists x \exists y (Q(x, y) \wedge \neg P(y) \wedge \neg P(x))$ $\quad$ $\varphi_4 \ : \ \forall x \exists y (Q(x, y) \wedge P(y))$

$\varphi_5 \ : \ \forall x \forall y (Q(x, y) \rightarrow Q(f(x), y))$

Ejercicio 2: (15 puntos) Consideramos el dominio $\mathbb{D}$ de los jugadores de los dos equipos de fútbol representados en el esquema del partido de la figura 17 (http://peru.com). Identificados por sus nombres y por el número de sus camisetas, en el medio campo inferior aparecen lo jugadores rusos y en la parte superior los jugadores japoneses.

Definimos la interpretación I sobre el dominio $\mathbb{D}$ que viene dada por los símbolos de predicado:

$P(x)$: x es un jugador del equipo ruso,
$Q(x)$: x es un jugador del equipo japonés,
$R(x, y)$: el jugador y está más alejado de la portería de sus rivales que x,
los símbolos de funciones:
$f(x)$ es el jugador con número de dorsal más alto del equipo de x,
$g(x)$ es el jugador con número de dorsal más alto del equipo rival de x,
y los símbolos de constantes:
a es el jugador japonés Ono (número 18),
b es el jugador ruso Onopko (número 7)

Usando el dominio $\mathbb{D}$ e interpretación anteriores, evalúa (es decir, di si son verdaderas o falsas) las siguientes fórmulas. Justifica tu respuesta en cada caso:

$\varphi_1 \ : \ \exists x \forall y\ (P(x) \wedge P(f(y)))$ $\quad$ $\varphi_2 \ : \ \forall x \exists y (Q(x) \leftrightarrow Q(f(y)))$

$\varphi_3 \ : \ \exists x \exists y (R(x, y) \wedge \neg(x = y) \wedge \neg P(y) \wedge \neg P(a))$ $\quad$ $\varphi_4 \ : \ \forall x \exists y (R(x, y) \wedge \neg(x = y) \wedge Q(y))$

$\varphi_5 \ : \ \forall x \forall y (R(x, y) \wedge \neg(x = y) \rightarrow R(g(x), y))$

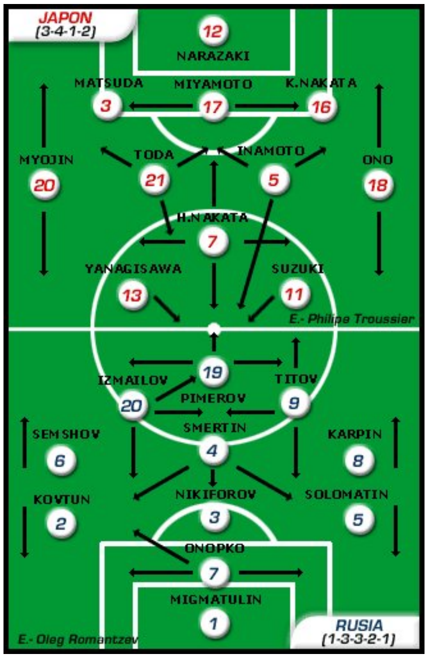


Figura 17. http://peru.com/

Ejercicio 3: (15 puntos) Usa el sistema de deducción natural de Gentzen para verificar la validez de la siguiente deducción:

$$\{\exists x(P(x) \vee Q(x)), \forall x(P(x) \to R(x,x))\} \vdash \neg\exists x Q(x) \to \exists x R(x,x).$$

32. Examen final de diciembre 2011-2012. Versión B.

Fecha: 15 de diciembre de 2011 **Tiempo: 3 horas**

El examen está formado por cuatro partes correspondientes a las cuatro pruebas parciales de la asignatura: las tres primeras valen 20 puntos cada una y la cuarta 40 puntos. El alumno debe obligatoriamente entregar cada una de las partes en que no alcanzó la nota mínima (3,5 sobre 10) durante el curso. El alumno puede, según su criterio, entregar cualquiera de las otras partes de manera que la nota obtenida en este examen sustituirá a la nota obtenida durante el curso. Para aprobar la asignatura la suma de las notas de las cuatro partes debe ser mayor o igual que 50.
El alumno tiene que entregar cada parte del examen en hojas separadas. *La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.* **Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas**. *Podéis consultar 4 hojas resumen formato A4, una para cada parte del examen. No está permitido el uso de calculadoras y de teléfonos móviles.*

PARTE I: Algunas nociones de teorías de conjuntos, relaciones y funciones.

Ejercicio 1: (5 puntos) Sean A, B y C conjuntos no vacíos y tales que $A \cap B \neq \emptyset$ y $A \cap B \subseteq C$. Entonces, À a qué conjunto es igual $A \cap (B \setminus C)$?

Ejercicio 2: (15 puntos) Considera la relación binaria R sobre el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ definida por: $(n, m) \in R$ si y sólo si $n - 2$ es un múltiplo entero de m.

Halla el dominio y la imagen de la relación. Verifica si es una función, una relación de equivalencia o una relación de orden.

PARTE II: Sintaxis y semántica de la lógica proposicional.

Ejercicio 1: (8 puntos) Formaliza el siguiente razonamiento usando la lógica proposicional:

> *Mario no vota sólo si Andrea y Beatriz no votan. A pesar de que Andrea y Beatriz non hayan votado, Mario ha votado. Andrea non vota a menos que Mario y Carlos voten. Por lo tanto Beatriz no ha votado.*

Ejercicio 2: (12 puntos) Clasifica **mediante tableaux** la siguiente fórmula de la lógica proposicional:

$$\varphi = (p \to q) \wedge (p \to r) \to (p \to q \wedge r).$$

Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ.

PARTE III: Teoría de la demostración de la lógica proposicional. Sintaxis de la lógica de primer orden.

Ejercicio 1: (8 puntos) Usa el sistema de deducción de Gentzen para demostrar que:

$$\{p \to q \vee r,\, q \to r\} \vdash p \vee r \to r.$$

Ejercicio 2: (5 puntos) Usando el dominio D de las personas de esta clase, formaliza las siguientes frases en el contexto de la lógica de primer orden:

1. El alumno Javier está más cerca de la pizarra que los demás alumnos.
2. El alumno que está más cerca de la pizarra que los demás puede leer más claramente los ejercicios que el profesor.
3. Para todo par de alumnos, o bien al menos uno de los dos está más cerca de la pizarra que el otro, o bien uno de los dos se sienta justo detrás del otro.
4. Existen tres alumnos x, y e z tales que: el alumno z se sienta justo detrás de x e y se sienta justo detrás de z.
5. Existen dos alumnos x e y tales que: y no está más cerca de la pizarra que x, a menos que x esté sentado justo detrás de y.

Ejercicio 3: (7 puntos) Sea F el conjunto de fórmulas de la lógica de predicados. Construye una función $cF : F \to \{0, 1\}$ que asigna a cada fórmula φ el valor 1 si φ contiene al menos un símbolo de constante en su expresión sintáctica y el valor 0 si φ no contiene símbolos de constantes.

PARTE IV: Semántica y teoría de la demostración de la lógica de primer orden.

Ejercicio 1: (10 puntos) Considera la interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$, donde el dominio es $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, los símbolos de predicados son $P^I(x) = \{2, 3, 6\}$ y $Q^I(x, y) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 6)\}$, y hay el símbolo de función $f(x) =$máx $\{x - 1, 1\}$.

Usando el dominio $\mathbb{D}$ e interpretación anteriores, evalúa (es decir, di si son verdaderas o falsas) las siguientes fórmulas. Justifica tu respuesta en cada caso:

$\varphi_1 \ : \ \exists x \forall y \ (P(x) \wedge P(f(y)))$ $\qquad$ $\varphi_2 \ : \ \forall x \exists y (Q(x, y) \leftrightarrow Q(x, f(y)))$
$\varphi_3 \ : \ \exists x \exists y (Q(x, y) \wedge \neg P(y) \wedge \neg P(x))$ $\qquad$ $\varphi_4 \ : \ \forall x \exists y (Q(x, y) \wedge P(y))$
$\varphi_5 \ : \ \forall x \forall y (Q(x, y) \rightarrow Q(f(x), y))$

Ejercicio 2: (15 puntos) Consideramos el dominio $\mathbb{D}$ de los jugadores de los dos equipos de fútbol representados en el esquema del partido de la figura 17 (http://peru.com). Identificados por sus nombres y por el número de sus camisetas, en el medio campo inferior aparecen lo jugadores rusos y en la parte superior los jugadores japoneses.

Definimos la interpretación I sobre el dominio $\mathbb{D}$ que viene dada por los símbolos de predicado:
$P(x)$: x es un jugador del equipo ruso,
$Q(x)$: x es un jugador del equipo japonés,
$R(x, y)$: el jugador y está más alejado de la portería de sus rivales que x,
los símbolos de funciones:
$f(x)$ es el jugador con número de dorsal más alto del equipo de x,
$g(x)$ es el jugador con número de dorsal más alto del equipo rival de x,
y los símbolos de constantes:
a es el jugador japonés Ono (número 18),
b es el jugador ruso Onopko (número 7)

Usando el dominio $\mathbb{D}$ e interpretación anteriores, evalúa (es decir, di si son verdaderas o falsas) las siguientes fórmulas. Justifica tu respuesta en cada caso:

$\varphi_1 \ : \ \exists x \forall y \ (P(x) \wedge P(f(y)))$ $\qquad$ $\varphi_2 \ : \ \forall x \exists y (Q(x) \leftrightarrow Q(f(y)))$
$\varphi_3 \ : \ \exists x \exists y (R(x, y) \wedge \neg(x = y) \wedge \neg P(y) \wedge \neg P(a))$ $\qquad$ $\varphi_4 \ : \ \forall x \exists y (R(x, y) \wedge \neg(x = y) \wedge Q(y))$
$\varphi_5 \ : \ \forall x \forall y (R(x, y) \wedge \neg(x = y) \rightarrow R(g(x), y))$

Ejercicio 3: (15 puntos) Usa el sistema de deducción natural de Gentzen para verificar la validez de la siguiente deducción:

$$\{\exists x (P(x) \vee Q(x)), \forall x (P(x) \rightarrow R(x, x))\} \vdash \neg \exists x Q(x) \rightarrow \exists x R(x, x).$$

33. Soluciones del examen final de diciembre 2011-2012

Fecha: 15 de diciembre de 2011 **Tiempo: 3 horas**

PARTE I: Algunas nociones de teorías de conjuntos, relaciones y funciones.

Ejercicio 1: (5 puntos) Sean A, B y C conjuntos no vacíos y tales que $A \cap B \neq \emptyset$ y $A \cap B \subseteq C$. Entonces, Àa qué conjunto es igual $A \cap (B \setminus C)$?

Solución: Por definición, los elementos x del conjunto $A \cap (B \setminus C)$ satisfacen las condiciones: $x \in A$, $x \in B$ y $x \notin C$. Por tanto, $x \in (A \cap B) \setminus C$. Pero el último conjunto es vacío, ya que $A \cap B \subseteq C$. Se sigue que $A \cap (B \setminus C) = \emptyset$.

Ejercicio 2: (15 puntos) Considera la relación binaria R sobre el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ definida por: $(n, m) \in R$ si y sólo si $n - 2$ es un múltiplo entero de m.

Halla el dominio y la imagen de la relación. Verifica si es una función, una relación de equivalencia o una relación de orden.

Solución: $(n, m) \in R$ si y sólo si $n - 2 = k \cdot m$ par cierto $k \in \mathbb{Z}$. Ahora, para todo n y m se verifica que $(n, 1), (2, m) \in R$, ya que $n - 2 = (n - 2) \cdot 1$ y $(2 - 2) = 0 = 0 \cdot m$. Por tanto el dominio y la imagen de esta relación binaria son todo $\mathbb{Z}$. R no es una función, ya que, por ejemplo, 2 se relaciona con 1 y con 2.

R no es reflexiva: por ejemplo, $(3, 3) \notin R$, ya que 1 no es un múltiplo entero de 3. Por tanto no puede ser una relación de equivalencia o de orden.

Se puede observar también que R no es simétrica: por ejemplo, $(2, 5) \in R$ y $(5, 2) \notin R$, siendo 3 impar. R no es antisimétrica: por ejemplo, $(4, 2) \in R$, $(2, 4) \in R$ pero $2 \neq 4$. Tampoco es transitiva: por ejemplo, $(7, 5) \in R$, $(5, 3) \in R$, $(7, 3) \notin R$.

PARTE II: Sintaxis y semántica de la lógica proposicional.

Ejercicio 1: (8 puntos) Formaliza el siguiente razonamiento usando la lógica proposicional:

> *Mario no vota sólo si Andrea y Beatriz no votan. A pesar de que Andrea y Beatriz no hayan votado, Mario ha votado. Andrea no vota a menos que Mario y Carlos voten. Por lo tanto Beatriz no ha votado.*

Solución: Con la proposiciones atómicas $p = Mario\, vota$, $q = Andrea\, vota$, $r = Beatriz\, vota$, $s = Carlos\, vota$, la formalización del razonamiento es

$$(\neg p \to \neg q \land \neg r) \land (\neg q \land \neg r \land p) \land (q \to p \land s) \to \neg r$$

Ejercicio 2: (12 puntos) Clasifica **mediante tableaux** la siguiente fórmula de la lógica proposicional:

$$\varphi = (p \to q) \wedge (p \to r) \to (p \to q \wedge r).$$

Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ.

Solución:

$$\neg\varphi \equiv (p \to q) \wedge (p \to r) \wedge \neg(p \to q \wedge r) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge \neg(\neg p \vee (q \wedge r)) \equiv$$

$$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge p \wedge (\neg q \vee \neg r).$$

El tableau de $\neg\varphi$ de la figura 18 es cerrado. Se sigue que φ es una tautología. Todas las posibles valoraciones son modelos y no hay contraejemplos.

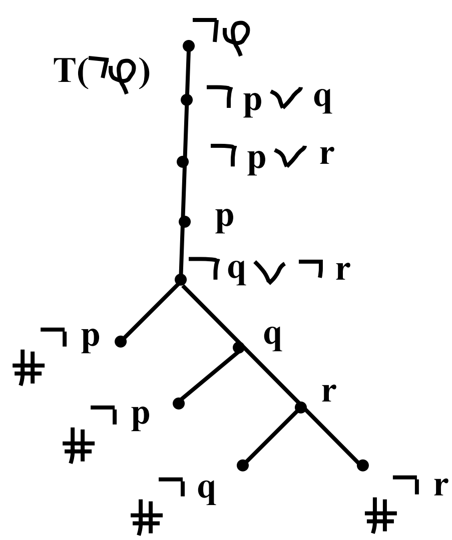


FIGURA 18. Tableau de $\neg\varphi$ del ejercicio 2, parte II

PARTE III: Teoría de la demostración de la lógica proposicional. Sintaxis de la lógica de primer orden.

Ejercicio 1: (8 puntos) Usa el sistema de deducción de Gentzen para demostrar que:

$$\{p \to q \vee r,\, q \to r\} \vdash p \vee r \to r.$$

Solución: Por el teorema de la deducción, podemos verificar que

$$\{p \to q \vee r,\, q \to r,\, p \vee r\} \vdash r.$$

1) $p \to q \vee r$		(Premisa)
2) $q \to r$		(Premisa)
3) $p \vee r$		(Premisa)
4) $\neg r$	(Premisa auxiliar)	
5) $\vdash p$	(TP(3,4))	
6) $\vdash q \vee r$	(E$\to$(5,1))	
7) $\vdash q$	(TP(6,4))	
8) $\vdash r$	(E$\to$(7,2))	
9) $\vdash r \wedge \neg r$	(I$\wedge$(8,4))	
10) $\vdash r$		(I$\neg$(4,9))

Ejercicio 2: (5 puntos) Usando el dominio D de las personas de esta clase (no son sólo los alumnos), formaliza las siguientes frases en el contexto de la lógica de primer orden:

1. Javier está más cerca de la pizarra que los demás alumnos.
2. El alumno que está más cerca de la pizarra que los demás puede leer más claramente los ejercicios que el profesor.
3. Para todo par de alumnos, o bien al menos uno de los dos está más cerca de la pizarra que el otro, o bien uno de los dos se sienta justo detrás del otro.
4. Existen tres alumnos x, y e z tales que: el alumno z se sienta justo detrás de x e y se sienta justo detrás de z.
5. Existen dos alumnos x e y tales que: y no está más cerca de la pizarra que x a menos que x esté sentado justo detrás de y.

Solución: Siendo D el conjunto de las personas de esta clase, podemos definir los siguientes **predicados**: $P(x) = x$ es un alumno, $Q(x,y) = x$ está más cerca de la pizarra que y, $R(x,y) = x$ puede leer más claramente los ejercicios que y y $S(x,y) = x$ se sienta justo detrás de y; y los símbolos de **constantes**: $a =$Javier y $b =$ el profesor.

Con los símbolos anteriores, la formalización es:

1. Javier está más cerca de la pizarra que los demás alumnos: $\forall x(P(x) \to Q(a,x))$,
2. El alumno que está más cerca de la pizarra que los demás puede leer más claramente los ejercicios que el profesor: $\forall x(P(x) \wedge \forall y Q(x,y) \to R(x,b))$,
3. Para todo par de alumnos, o bien al menos uno de los dos está más cerca de la pizarra que el otro, o bien uno de los dos se sienta justo detrás del otro: $\forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \to Q(x,y) \vee Q(y,x) \vee S(x,y) \vee S(y,x))$,
4. Existen tres alumnos x, y e z tales que: el alumno z se sienta justo detrás de x e y se sienta justo detrás de z : $\exists x \exists y \exists z(P(x) \wedge P(y) \wedge P(z) \wedge S(z,x) \wedge S(y,z))$,

5. Existen dos alumnos x e y tales que: y no está más cerca de la pizarra que x a menos que x esté sentado justo detrás de y : $\exists x \exists y (P(x) \wedge P(y) \wedge (Q(y,x) \rightarrow S(x,y)))$.

Ejercicio 3: (7 puntos) Sea F el conjunto de fórmulas de la lógica de predicados. Construye una función $cF : F \rightarrow \{0,1\}$ que asigna a cada fórmula φ el valor 1 si φ contiene al menos un símbolo de constante en su expresión sintáctica y el valor 0 si φ no contiene símbolos de constantes.

Solución: Antes de definir la función cF sobre todo F vamos a usar el principio de recursión estructural para términos para definir la función cT sobre todo el conjunto de los términos T, $cT : T \rightarrow \{0,1\}$, que asigna a cada término t el valor 1 si t contiene al menos un símbolo de constante en su expresión sintáctica y el valor 0 si t no contiene símbolos de constantes.

Base: (TAt): $cT(x) = 0, cT(a) = 1$,

Paso recursivo:
(Tf): $cT(f(t_1, t_2, \cdots, t_n))$=máx$\{cT(t_1), cT(t_2), \cdots, cT(t_n)\}$.

Para definir la función cF sobre todo F vamos a usar el principio de recursión estructural y la función cT :

Base: (At): $cF(\perp) = cF(\top) = cF(p) = 0, cF(s = t)$=máx$\{cT(s), cT(t)\}$, $cF(P(t_1, t_2, \cdots, t_n))$=máx$\{cT(t_1), cT(t_2), \cdots, cT(t_n)\}$,

Pasos recursivos:
($\neg$): $cF(\neg\varphi) = cF(\varphi)$,

($\circ$): $cF(\varphi_1 \circ \varphi_2)$=máx$\{cF(\varphi_1),\ cF(\varphi_2)\}$,

($\forall, \exists$): $cF(\forall x \varphi) = cF(\exists x \varphi) = cF(\varphi)$.

PARTE IV: Semántica y teoría de la demostración de la lógica de primer orden.

Ejercicio 1: (10 puntos) Considera la interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$, donde el dominio es $D = \{1,2,3,4,5,6\}$, los símbolos de predicados son $P^I(x) = \{2,3,6\}$ y $Q^I(x,y) = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,6)\}$, y el símbolo de función es $f(x)$ =máx $\{x-1, 1\}$.

Usando el dominio D y la interpretación anterior, evalúa (es decir, di si son verdaderas o falsas) las siguientes fórmulas. Justifica tu respuesta en cada caso:

$$\begin{array}{lcl} \varphi_1 & : & \exists x \forall y\ (P(x) \wedge P(f(y))) \\ \varphi_2 & : & \forall x \exists y (Q(x,y) \leftrightarrow Q(x, f(y))) \\ \varphi_3 & : & \exists x \exists y (Q(x,y) \wedge \neg P(y) \wedge \neg P(x)) \\ \varphi_4 & : & \forall x \exists y (Q(x,y) \wedge P(y)) \\ \varphi_5 & : & \forall x \forall y (Q(x,y) \rightarrow Q(f(x), y)) \end{array}$$

Solución:

$\varphi_1^I = 0$ ya que, para todo $x \in D$, $\forall y P^I(f^I(y)) = 0$ (por ejemplo, $P^I(f^I(1)) = P^I(1) = 0$).
$\varphi_2^I = 1$ ya que, $\forall x \in D$, $y = 1$ es tal que $Q^I(x, 1) = 0 = Q^I(x, f^I(1))$.
$\varphi_3^I = 1$ ya que, para $x = 4$ e $y = 5$, $Q(4, 5) \wedge \neg P(5) \wedge \neg P(4) = 1$.
$\varphi_4^I = 0$ ya que, si $x = 4$, $Q^I(4, y) = 1$ si y sólo si $y = 5$. Pero $P^I(5) = 0$.
$\varphi_5^I = 0$ ya que, si $x = 2$ e $y = 3$, $Q^I(2, 3) = 1$ pero $Q^I(f^I(2), 3) = Q^I(1, 3) = 0$.

Ejercicio 2: (15 puntos) Consideramos el dominio $\mathbb{D}$ de los jugadores de los dos equipos de fútbol representados en el esquema del partido de la figura 17 (http://peru.com). Identificados por sus nombres y por el número de sus camisetas, en el medio campo inferior aparecen lo jugadores rusos y en la parte superior los jugadores japoneses.

Definimos la interpretación I sobre el dominio $\mathbb{D}$ que viene dada por los símbolos de predicado:
$P(x)$: x es un jugador del equipo ruso,
$Q(x)$: x es un jugador del equipo japonés,
$R(x, y)$: el jugador y está más alejado de la portería de sus rivales que x,
los símbolos de funciones:
$f(x)$ es el jugador con número de dorsal más alto del equipo de x,
$g(x)$ es el jugador con número de dorsal más alto del equipo rival de x,
y los símbolos de constantes:
a es el jugador japonés Ono (número 18),
b es el jugador ruso Onopko (número 7)

Usando el dominio $\mathbb{D}$ e interpretación anteriores, evalúa (es decir, di si son verdaderas o falsas) las siguientes fórmulas. Justifica tu respuesta en cada caso:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &: \exists x \forall y\ (P(x) \wedge P(f(y))) \\
\varphi_2 &: \forall x \exists y (Q(x) \leftrightarrow Q(f(y))) \\
\varphi_3 &: \exists x \exists y (R(x, y) \wedge \neg(x = y) \wedge \neg P(y) \wedge \neg P(a)) \\
\varphi_4 &: \forall x \exists y (R(x, y) \wedge \neg(x = y) \wedge Q(y)) \\
\varphi_5 &: \forall x \forall y (R(x, y) \wedge \neg(x = y) \rightarrow R(g(x), y))
\end{aligned}$$

Solución:
$\varphi_1^I = 0$ ya que si $y = Ono$, entonces $f^I(y) =$Toda y $P^I(f^I(y)) = 0$.
$\varphi_2^I = 1$, ya que si $y = x$, entonces $Q^I(x)$ y $Q^I(f^I(x))$ toman siempre el mismo valor.
$\varphi_3^I = 1$ ya que, si $x =$ Inamoto e $y =$ Nakazaki, entonces $R^I(x, y) \wedge \neg(x = y)^I \wedge \neg P^I(y) \wedge \neg P^I(a)) = 1$.
$\varphi_4^I = 0$ ya que, si $x =$ Narazaki, no existe ningún otro jugador japonés (que no sea él mismo) que esté más alejado que él de la portería rusa.
$\varphi_5^I = 0$ ya que, si $x = Pimerov$ e $y = Migmatulin$, entonces $g^I(x) =$ Toda. En este caso se verifica que $R^I(x, y) \wedge \neg(x = y)^I = 1$ pero $R^I(g^I(x), y) = 0$.

Ejercicio 3: (15 puntos) Usa el sistema de deducción natural de Gentzen para verificar la validez de la siguiente deducción:

$$\{\exists x(P(x) \vee Q(x)),\, \forall x(P(x) \to R(x,x))\} \vdash \neg\exists x Q(x) \to \exists x R(x,x).$$

Solución: Por el teorema de la deducción podemos demostrar que

$$\{\exists x(P(x) \vee Q(x)),\, \forall x(P(x) \to R(x,x)),\, \neg\exists x Q(x)\} \vdash \exists x R(x,x).$$

1) $\exists x(P(x) \vee Q(x))$		(Premisa)
2) $\forall x(P(x) \to R(x,x))$		(Premisa)
3) $\neg\exists x Q(x)$		(Premisa)
4) $\vdash \forall x \neg Q(x)$		(Regla de la neg. de $\exists$(3))
5) $P(t) \vee Q(t)$	(Premisa auxiliar)	
6) $\vdash \neg Q(t)$	(E$\forall$(4))	
7) $\vdash P(t)$	(TP(5,6))	
8) $\vdash P(t) \to R(t,t)$	(E$\forall$(2))	
9) $\vdash R(t,t)$	(E$\to$(7,8))	
10) $\vdash \exists x R(x,x)$	(I$\exists$(9))	
11) $\vdash \exists x R(x,x)$		(E$\exists$(1,(5,10)))

34. Examen final de junio 2011-2012

Fecha: 14 de junio de 2012 **Tiempo: 2 h. y 50 min.**

El examen está formado por cuatro partes correspondientes a las cuatro pruebas parciales de la asignatura: las tres primeras valen 20 puntos cada una y la cuarta 40 puntos. El alumno debe obligatoriamente entregar cada una de las partes en que no alcanzó la nota mínima (3,5 sobre 10) durante el curso. El alumno puede, según su criterio, entregar cualquiera de las otras partes de manera que la nota obtenida en este examen sustituirá a la nota obtenida durante el curso. Para aprobar la asignatura la suma de las notas de las cuatro partes debe ser mayor o igual que 50.
El alumno tiene que entregar cada parte del examen en hojas separadas. *La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.* **Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas**. *Podéis consultar 4 hojas resumen formato A4, una para cada parte del examen. No está permitido el uso de calculadoras y de teléfonos móviles.*

PARTE I: Algunas nociones de teorías de conjuntos, relaciones y funciones.

Ejercicio 1: (20 puntos) Considera los siguientes conjuntos:

$$A = \{3n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad B = \{6n : n \in \mathbb{N}\}$$

y la siguiente relación entre A y B

$$R := \{(m, 2m) : m \in A\} \subseteq A \times B.$$

a) Determina $A \cap B$ y $A \cup B$.
b) Verifica que R define una función $f : A \to B$.
c) Determina si f es inyectiva.
d) Determina si f es biyectiva.
e) Calcula la imagen inversa del conjunto $C = \{b \in B : b^2 \leq 145\}$.

PARTE II: Sintaxis y semántica de la lógica proposicional.

Ejercicio 1: (10 puntos) Formaliza el siguiente razonamiento en el lenguaje de la lógica proposicional:

> La motocicleta no arrancará a menos que tenga gasolina. Tiene gasolina si y solamente si rellenamos el depósito. Sólo cuando rellenamos el depósito la motocicleta va a más de 100 km/h. Ni rellenamos el depósito ni la motocicleta arranca. Conclusión: si llenamos el depósito y vamos a más de 100 km/h entonces la motocicleta tiene gasolina.

Ejercicio 2: (10 puntos) En la lógica proposicional, determina mediante tableaux si se verifica la siguiente implicación lógica:

$$\{\neg t \to \neg p \wedge \neg s, p \vee q\} \vDash (q \to s) \to t.$$

PARTE III: Teoría de la demostración de la lógica proposicional. Sintaxis de la lógica de primer orden.

Ejercicio 1: (8 puntos) Usa el sistema de deducción de Gentzen de la lógica proposicional para demostrar:

$$\{\neg s \to q, r \vee q \to \neg(q \wedge t)\} \vdash r \wedge t \to s.$$

Ejercicio 2: (5 puntos) Formaliza las siguientes frases usando la lógica de predicados en el **dominio D de los utensilios tecnológicos**.

a) Sólo los ordenadores pueden ser conectados a una impresora.
b) Todas las impresoras admiten un ordenador al cual pueden ser conectadas.
c) Todas las impresoras salvo la mía son silenciosas.
d) No todas las impresoras pueden conectarse a todos los ordenadores.
e) Para cada ordenador existe un único utensilio tecnológico que puede ser conectado a dicho ordenador.

Ejercicio 3: (7 puntos) Sea F el conjunto de fórmulas de la lógica de predicados. Asignamos un precio a cada símbolo de la siguiente manera:

- los símbolos de constante o símbolos de variable tienen un precio de 2;
- los símbolos de función o predicado tienen un precio de 3;
- los símbolos de proposición atómica y los símbolos de conectivo 0-ario tienen un precio de 4;
- los símbolos de igualdad y ortográficos (paréntesis o comas) tienen un precio de 1,5;
- los conectivos monarios, binarios y los cuantificadores tienen un precio de 5.

Construye una función $Pr : L \to \mathbb{Q}$ que determina el precio $Pr(\varphi)$ de una fórmula φ calculado sumando todos los precios de los símbolos que forman φ (contados todas las veces que aparezcan: si hay por ejemplo tres comas, valen $3 \times 1{,}5$).

PARTE IV: Semántica y teoría de la demostración de la lógica de primer orden.

Ejercicio 1: (10 puntos) Considera la interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ donde el dominio es $D = \{\alpha, \beta, \gamma, \epsilon\}$ y se tienen los siguientes predicados:

- $P^I = \{\alpha, \epsilon\}$
- $Q^I = \{(\alpha,\alpha), (\alpha,\beta), (\alpha,\gamma), (\alpha,\epsilon)\}$.

Y la función f definida como $f(\alpha) = \beta$, $f(\beta) = \gamma$, $f(\gamma) = \epsilon$ y $f(\epsilon) = \alpha$.

Determina el valor de verdad de las siguientes fórmulas en esta interpretación.

a) $\exists x \exists y((f(x) = f(y)) \wedge \neg(x = y))$;
b) $\forall x \exists y Q(x, y)$;
c) $\exists x \forall y(\neg P(x) \wedge Q(x, y))$;
d) $\exists x P(x) \to \exists x \exists y Q(x, y)$
e) $\neg \exists x(P(f(x)) \wedge Q(x, f(x)))$

Ejercicio 2: (16 puntos) Recuerda que un entero mayor que 1 es un número primo si no tiene más divisores positivos que el propio número y el 1. Recuerda que dados dos números enteros x e y, decimos que x es múltiplo de y si existe un entero z tal que $x = y \cdot z$. En este caso diremos que y es factor de x.

Considera el dominio $D = \{2, 3, 4, 5, 7, 11\}$ donde definimos los siguientes predicados y funciones:

- $P(x, y) :=$ x es menor o igual que y;
- $Q(x) :=$ x es primo;
- $R(x, y) :=$ x es múltiplo de y;
- $f(x) =$ el menor factor primo de x;
- $g(x, y) = \text{máx}\{x, y\}$.

Interpreta las siguientes fórmulas según la interpretación sugerida arriba:

a) $\forall x \exists y R(x, y)$;
b) $\exists x \forall y P(x, y)$;
c) $\forall x Q(f(x))$;
d) $\forall y \exists x(f(y) = g(x, y))$;
e) $\exists x \exists y(g(x, y) = f(x))$;
f) $\forall y \forall x(Q(x) \to (R(y, x) \to (y = x)))$;
g) $\forall x \forall y(R(x, y) \vee P(x, y))$.
h) $\neg \forall x Q(x)$

Ejercicio 3: (14 puntos) Realiza la siguientes deducción usando el sistema de deducción natural de Gentzen de la lógica de predicados:

$$\{\forall x(P(x) \vee Q(x)), \exists x \neg Q(x), \forall x(R(x) \to \neg P(x))\} \vdash \exists x \neg R(x).$$

35. Soluciones del examen final de junio 2011-2012

Fecha: 14 de junio de 2012 **Tiempo: 2 h. y 50 min.**

PARTE I: Algunas nociones de teorías de conjuntos, relaciones y funciones.

Ejercicio 1: (20 puntos) Considera los siguientes conjuntos:

$$A = \{3n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad B = \{6n : n \in \mathbb{N}\}$$

y la siguiente relación entre A y B

$$R := \{(m, 2m) : m \in A\} \subseteq A \times B.$$

a) Determina $A \cap B$ y $A \cup B$.
b) Verifica que R define una función $f : A \to B$.
c) Determina si f es inyectiva.
d) Determina si f es biyectiva.
e) Calcula la imagen inversa del conjunto $C = \{b \in B : b^2 \leq 145\}$.

Solución:

a) Como $6n = 3(2n)$ entonces $B \subset A$ de modo que $A \cap B = B$ y $A \cup B = A$.
b) Todo elemento de A, digamos $3n_0$ se relaciona con un único elemento de B que es $f(3n_0) = 2(3n_0) = 6n_0$.
c) Lo es puesto que $\forall a, a' \in A$, $f(a) = 2a = 2a' = f(a')$ implica que $a = a'$.
d) Lo es, pues la imagen de f es B. En efecto, tomemos un elemento $b \in B$ que por tanto es $6n_0$ con $n_0 \in \mathbb{N}$. Entonces $6n_0 = f(3n_0)$ y $3n_0 \in A$.
e) Para que $b^2 \leq 145$ se necesita $b \leq 12$ de modo que $C = \{6, 12\}$ y $f^{-1}(C) = \{3, 6\}$.

PARTE II: Sintaxis y semántica de la lógica proposicional.

Ejercicio 1: (10 puntos) Formaliza el siguiente razonamiento en el lenguaje de la lógica proposicional:

> La motocicleta no arrancará a menos que tenga gasolina. Tiene gasolina si y solamente si rellenamos el depósito. Sólo cuando rellenamos el depósito la motocicleta va a más de 100 km/h. Ni rellenamos el depósito ni la motocicleta arranca. Conclusión: si llenamos el depósito y vamos a más de 100 km/h entonces la motocicleta tiene gasolina.

Solución: Definimos las siguientes proposiciones atómicas:

- $p =$ la motocicleta arranca,
- $q =$ la motocicleta tiene gasolina,

- r = rellenamos el depósito de la motocicleta,
- s = la motocicleta va a más de 100 km/h.

De modo que la fórmula que modela el razonamiento es:

$$(p \to q) \land (q \leftrightarrow r) \land (s \to r) \land (\neg r \land \neg p) \to (r \land s \to q)$$

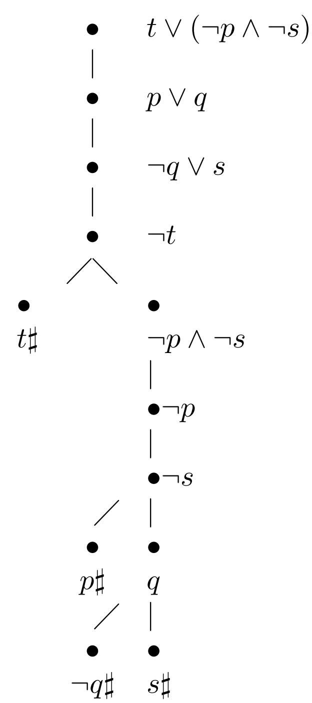
Ejercicio 2: (10 puntos) En la lógica proposicional, determina mediante tableaux si se verifica la siguiente implicación lógica:

$$\{\neg t \to \neg p \land \neg s, p \lor q\} \vDash (q \to s) \to t.$$

Solución: Sea $\varphi = (\neg t \to \neg p \land \neg s) \land (p \lor q) \to (q \to s) \to t$.
Usamos el teorema de la deducción y las equivalencias lógicas habituales para concluir que debemos verificar, mediante tableaux, si la negación de φ es una contradicción:

$$\neg\varphi = (t \lor (\neg p \land \neg s)) \land (p \lor q) \land (\neg q \lor s) \land \neg t$$

Su tableau es efectivamente cerrado:



Por tanto, φ es una tautología y se verifica la implicación lógica del ejercicio.

PARTE III: Teoría de la demostración de la lógica proposicional. Sintaxis de la lógica de primer orden.

Ejercicio 1: (8 puntos) Usa el sistema de deducción de Gentzen de la lógica proposicional para demostrar:

$$\{\neg s \to q, r \vee q \to \neg(q \wedge t)\} \vdash r \wedge t \to s.$$

Solución:

1) $\neg s \to q$	(Premisa)
2) $r \vee q \to \neg(q \wedge t)$	(Premisa)
3) $r \wedge t$	(Premisa)
(4) $\neg s$	(Premisa Auxiliar)
(5) q	(E$\to$(1,4))
(6) $r \vee q$	(I$\vee$(5))
(7) $\neg(q \wedge t)$	(E$\to$(2,6))
(8) t	(E$\wedge$(3))
(9) $q \wedge t$	(I$\wedge$(5,8))
(10) $\neg(q \wedge t) \wedge (q \wedge t)$	(I$\wedge$(7,9))
11) $\neg\neg s$	(I$\neg$(4-10))

Ejercicio 2: (5 puntos) Formaliza las siguientes frases usando la lógica de predicados en el **dominio D de los utensilios tecnológicos**.

a) Sólo los ordenadores pueden ser conectados a una impresora.
b) Todas las impresoras admiten un ordenador al cual pueden ser conectadas.
c) Todas las impresoras salvo la mía son silenciosas.
d) No todas las impresoras pueden conectarse a todos los ordenadores.
e) Para cada ordenador existe un único utensilio tecnológico que puede ser conectado a dicho ordenador.

Solución: Utilizamos el dominio D de los utensilios tecnológicos y los siguientes símbolos de predicados:

- $P(x) = x$ es un ordenador,
- $Q(x) = x$ es una impresora,
- $R(x) = x$ es silencioso,
- $S(x, y) = x$ puede ser conectado a y,

y el símbolo de constante

- $a =$ mi impresora.

Estas son las formalizaciones:

a) $\forall x \forall y (S(x, y) \wedge Q(y) \to P(x))$,
b) $\forall x (Q(x) \to \exists y (P(y) \wedge S(x, y)))$,
c) $\forall x (Q(x) \wedge \neg(x = a) \to R(x))$,
d) $\exists x \exists y (Q(x) \wedge P(y) \wedge \neg S(x, y))$,
e) $\forall x (P(x) \to \exists y (S(y, x) \wedge \forall z (\neg(z = x) \to \neg S(z, x))))$.

Ejercicio 3: (7 puntos) Sea F el conjunto de fórmulas de la lógica de predicados. Asignamos un precio a cada símbolo de la siguiente manera:

- los símbolos de constante o símbolos de variable tienen un precio de 2;
- los símbolos de función o predicado tienen un precio de 3;
- los símbolos de proposición atómica y los símbolos de conectivo 0-ario tienen un precio de 4;
- los símbolos de igualdad y ortográficos (paréntesis o comas) tienen un precio de 1,5;
- los conectivos monarios, binarios y los cuantificadores tienen un precio de 5.

Construye una función $Pr : L \to \mathbb{Q}$ que determina el precio $Pr(\varphi)$ de una fórmula φ calculado sumando todos los precios de los símbolos que forman φ (contados todas las veces que aparezcan: si hay por ejemplo tres comas, valen $3 \times 1{,}5$).

Solución: Comenzamos con los **términos atómicos**:

$$Pr(t) = 2$$

y continuamos con los **compuestos**:

$$Pr(f(t_1, \ldots, t_n)) = 3 + 1{,}5(n+1) + Pr(t_1) + \cdots + Pr(t_n),$$

lo que define por inducción estructural el precio de cualquier término.

Pasamos ahora a las **fórmulas atómicas**:

$$Pr(\varphi) = \begin{cases} 4 \quad \text{si} \quad \varphi = \top, \bot \\ 4 \quad \text{si} \quad \varphi \text{ es una proposición atómica} \\ 4{,}5 + Pr(s) + Pr(t) \quad \text{si} \quad \varphi = (s = t) \\ 3 + 1{,}5(n+1) + Pr(t_1) + \cdots + Pr(t_n) \quad \text{si} \quad \varphi = P(t_1, \cdots, t_n) \end{cases}$$

Y finalmente a las **fórmulas compuestas**:

$$Pr(\neg\varphi) = Pr(\varphi) + 5$$

$$Pr((\varphi \circ \psi)) = 3 + 5 + Pr(\varphi) + Pr(\psi)$$

$$Pr(\forall x\varphi) = Pr(\exists x\varphi) = 5 + 2 + Pr(\varphi).$$

Lo que determina el precio de cualquier fórmula por inducción estructural.

PARTE IV: Semántica y teoría de la demostración de la lógica de primer orden.

Ejercicio 1: (10 puntos) Considera la interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ donde el dominio es $D = \{\alpha, \beta, \gamma, \epsilon\}$ y se tienen los siguientes predicados:

- $P^I = \{\alpha, \epsilon\}$
- $Q^I = \{(\alpha, \alpha), (\alpha, \beta), (\alpha, \gamma), (\alpha, \epsilon)\}$.

Y la función f definida como $f(\alpha) = \beta$, $f(\beta) = \gamma$, $f(\gamma) = \epsilon$ y $f(\epsilon) = \alpha$.

Determina el valor de verdad de las siguientes fórmulas en esta interpretación.

a) $\exists x \exists y((f(x) = f(y)) \wedge \neg(x = y))$;
b) $\forall x \exists y Q(x, y)$;
c) $\exists x \forall y(\neg P(x) \wedge Q(x, y))$;
d) $\exists x P(x) \rightarrow \exists x \exists y Q(x, y)$
e) $\neg \exists x(P(f(x)) \wedge Q(x, f(x)))$

Solución:

a) Se tiene que $(\exists x \exists y((f(x) = f(y)) \wedge \neg(x = y)))^I = 0$ ya que la función es inyectiva.
b) Se tiene que $(\forall x \exists y Q(x, y))^I = 0$ ya que el dominio de Q^I es el conjunto $\{\alpha\}$.
c) Se tiene que $(\exists x \forall y(\neg P(x) \wedge Q(x, y)))^I = 0$ ya que el único elemento de D que se relaciona con todos los demás por la relación Q^I es α y $\neg P^I(\alpha) = 0$.
d) Se tiene que $(\exists x P(x) \rightarrow \exists x \exists y Q(x, y))^I = 1$ ya que la conlusión es verdadera ($Q^I \neq \emptyset$).
e) Se tiene que $(\neg \exists x(P(f(x)) \wedge Q(x, f(x))))^I = 1$ ya que $P^I(f^I(x)) = 1$ si y solo si $x \in \{\gamma, \epsilon\}$, y $Q^I(\gamma, \epsilon) = 0 = Q^I(\epsilon, \alpha)$.

Ejercicio 2: (16 puntos) Recuerda que un entero mayor que 1 es un número primo si no tiene más divisores positivos que el propio número y el 1. Recuerda que dados dos números enteros x e y, decimos que x es múltiplo de y si existe un entero z tal que $x = y \cdot z$. En este caso diremos que y es factor de x.

Considera el dominio $D = \{2, 3, 4, 5, 7, 11\}$ donde definimos los siguientes predicados y funciones:

- $P(x, y) := x$ es menor o igual que y;
- $Q(x) := x$ es primo;
- $R(x, y) := x$ es múltiplo de y;
- $f(x) =$ el menor factor primo de x;
- $g(x, y) = \text{máx}\{x, y\}$.

Interpreta las siguientes fórmulas según la interpretación sugerida arriba:

a) $\forall x \exists y R(x, y)$;
b) $\exists x \forall y P(x, y)$;
c) $\forall x Q(f(x))$;
d) $\forall y \exists x(f(y) = g(x, y))$;
e) $\exists x \exists y(g(x, y) = f(x))$;
f) $\forall y \forall x(Q(x) \rightarrow (R(y, x) \rightarrow (y = x)))$;
g) $\forall x \forall y(R(x, y) \vee P(x, y))$.
h) $\neg \forall x Q(x)$

Solución:

a) Se tiene que $(\forall x \exists y R(x,y))^I = 1$, basta tomar $y = x$.
b) Se tiene que $(\exists x \forall y P(x,y))^I = 1$, basta tomar $x = 2$.
c) Se tiene que $f(x)$ es siempre primo, por lo que $(\forall x Q(f(x)))^I = 1$.
d) Tomemos $y = 4$ de modo que $f(y) = 2 < y \leq g(x,y) = \text{máx}\{x,y\}$ para cualquier x. De este modo $(\forall y \exists x(f(y) = g(x,y)))^I = 0$.
e) Se tiene que $(\exists x \exists y(g(x,y) = f(x)))^I = 1$, basta tomar por ejemplo $x = y = 2$.
f) Se tiene que $(\forall y \forall x(Q(x) \to (R(y,x) \to (y = x))))^I = 0$, basta tomar por ejemplo $x = 2$ e $y = 4$.
g) Se tiene que $(\forall x \forall y(R(x,y) \vee P(x,y)))^I = 0$, basta tomar por ejemplo $x = 3$ e $y = 2$.
h) Se tiene que $(\neg \forall x Q(x))^I = 1$, basta tomar por ejemplo $x = 4$.

Ejercicio 3: (14 puntos) Realiza la siguientes deducción usando el sistema de deducción natural de Gentzen de la lógica de predicados:

$$\{\forall x(P(x) \vee Q(x)), \exists x \neg Q(x), \forall x(R(x) \to \neg P(x))\} \vdash \exists x \neg R(x).$$

Solución:

1) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ (Premisa)
2) $\exists x \neg Q(x)$ (Premisa)
3) $\forall x(R(x) \to \neg P(x))$ (Premisa)

4) $\neg Q(y)$ (Premisa Auxiliar)
5) $\vdash P(y) \vee Q(y)$ (E$\forall$(1))
6) $\vdash P(y)$ (TP(4,5))
7) $\vdash R(y) \to \neg P(y)$ (E$\forall$(3))
8) $\vdash P(y) \to \neg R(y)$ (Contap.(7))
9) $\vdash \neg R(y)$ (E$\to$(6,8))
10) $\vdash \exists x \neg R(x)$ (I$\exists$(9))

11) $\vdash \exists x \neg R(x)$ (E$\exists$(2,(4,10)))