EXAMEN PARCIAL DE LÓGICA

Sintaxis y semántica de la lógica proposicional
Grado en Ingeniería de la Ciberseguridad, URJC
21 de octubre de 2019
Este examen cuenta 2 puntos en la nota final ordinaria de la asignatura.

1. (0,5 puntos) Define una función que a cada fórmula de la lógica proposicional le asocie el número total de nodos y arcos que hay en el árbol sintáctico asociado a dicha fórmula. Ejemplo:

- Tenemos la fórmula: $\varphi = \neg(\neg(\neg p \vee r) \vee q) \rightarrow \neg(p \wedge q) \vee r$
- Su función nos daría un resultado de: $f(\varphi) = 29$

$f : L \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$

- Casos base:

$f(\perp) = 1$

$f(\top) = 1$

$f(p) = 1$, p es proposición atómica

- Casos recursivos:

$f(\neg\varphi) = 2 + f(\varphi)$ φ es cualquier fórmula

$f(\varphi_1 \circ \varphi_2) = 3 + f(\varphi_1) + f(\varphi_2)$ φ_1 y φ_2 son cualquier fórmulas

2. (0,5 puntos) Formaliza lo siguiente: "Si tuvieran que justificarse ciertos ataques informáticos por su enorme facilidad entonces, si estos ataques son inofensivos y respetan la integridad del atacado y su software, no habría ningún problema. Pero si los ataques no son inofensivos o no son respetuosos con la integridad del atacado o su software, entonces habría que dejar de justificarlos o no podríamos considerarnos hackers éticos"

Solución:

- p: justificar ciertos ataques por su facilidad
- q: ataque es inofensivo
- r: ataque es respetuoso con la integridad del atacado
- s: ataque es respetuoso con el software del atacado
- t: haber problemas
- u: considerarse hacker ético

$(p \rightarrow (q \wedge r \wedge s \rightarrow \neg t)) \wedge ((\neg q \vee \neg(r \vee s)) \rightarrow (\neg p \vee \neg u))$

3. (1 punto) Tenemos el siguiente razonamiento (justifica claramente todos los pasos que des en todo lo que se te pregunta):

$\neg q \rightarrow \neg p$
$\neg q \vee r$
$\neg s \rightarrow p$

$\neg t \rightarrow r$

a) (0,25 puntos) Sin utilizar tableaux ni tablas de verdad, verifica si es correcto el razonamiento.

Solución:

Que un razonamiento sea correcto significa que es una tautología. Si conseguimos encontrar un contraejemplo, entonces no sería una tautología. Para que fuera un contraejemplo, todas las premisas deberían ser 1 y la conclusión debería ser 0. Para que la conclusión sea 0, es necesario que t=0 y r=0. Para que la segunda premisa sea 1, es necesario que q=0, pues ya sabemos que r=0. Para que la primera premisa sea 1, y sabiendo que q=0, necesariamente p=0. Finalmente, para que la tercera premisa sea 1, y sabiendo que p=0, necesariamente s=1. Por lo tanto hemos encontrado un contraejemplo, por lo que el razonamiento no es una tautología, no es válido.

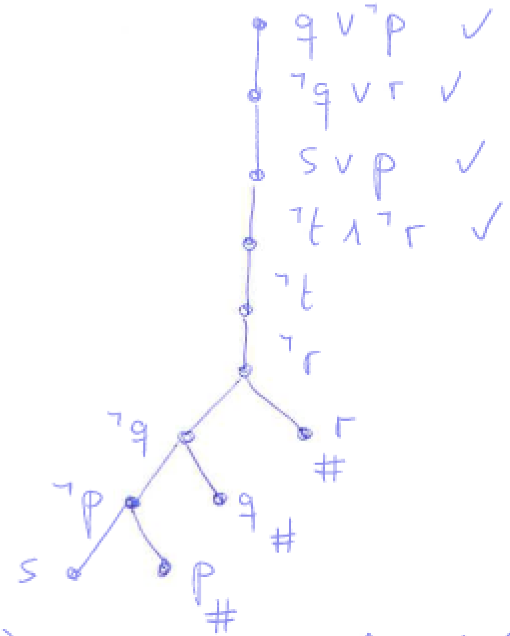
b) (0,25 puntos) Utilizando tableaux, verifica si es correcto el razonamiento.

Solución:

$$\neg\varphi = (\neg q \to \neg p) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg s \to p) \wedge \neg(\neg t \to r) \equiv$$

$$\equiv (q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (s \vee p) \wedge (\neg t \wedge \neg r)$$

$T(\neg\varphi)$:



Como $T(\neg\varphi)$ no es cerrado, $\neg\varphi$ no es una contradicción y por lo tanto φ no es una tautología. Por tanto φ no es correcta.

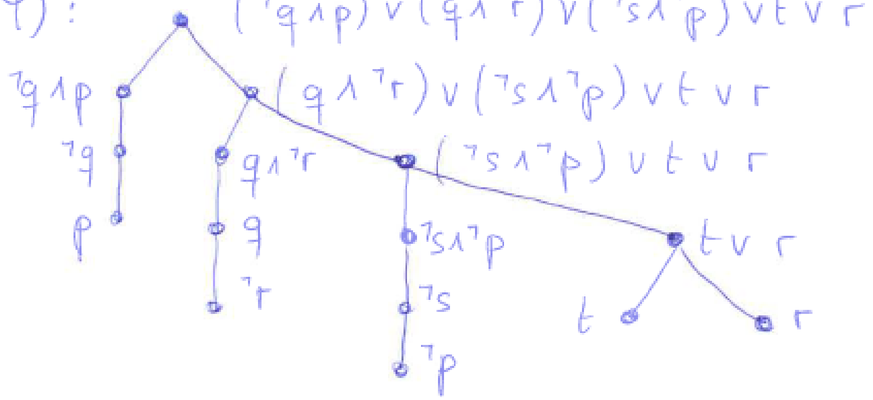
c) (0,25 puntos) Utilizando tableaux, clasifica la fórmula que representa al razonamiento. Con esta misma técnica, halla un modelo y un contraejemplo de la fórmula.

$$\varphi = (\neg q \to \neg p) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg s \to p) \to (\neg t \to r) \equiv$$

$$\equiv \neg(q \vee \neg p) \vee \neg(\neg q \vee r) \vee \neg(s \vee p) \vee (t \vee r) \equiv$$

$$\equiv (\neg q \wedge p) \vee (q \wedge \neg r) \vee (\neg s \wedge \neg p) \vee t \vee r$$

$T(\varphi)$:



Como $T(\varphi)$ no es cerrado, φ no es una contradicción. Ahora hay dos posibilidades: que φ sea tautología o que sea contingencia. Para saberlo, miramos $T(\neg\varphi)$, que ya está hecho en el anterior apartado.

Como $T(\neg\varphi)$ no es cerrado, $\neg\varphi$ no es contradicción y por lo tanto φ no es tautología. Por lo tanto φ debe de ser una contingencia, pues es la única opción que queda.

Un modelo sería una rama abierta de $T(\varphi)$. Por ejemplo: $\{p=1,\ q=\emptyset,\ r=?,\ s=?,\ t=?\}$

Un contraejemplo sería una rama abierta de $T(\neg\varphi)$. Por ejemplo: $\{s=1,\ p=\emptyset,\ q=\emptyset,\ r=\emptyset,\ t=\emptyset\}$.

d) (0,25 puntos) Utilizando tableaux, halla una forma normal disyuntiva y otra conjuntiva de la fórmula que representa al razonamiento.

De $T(\varphi)$, obtenemos:

- $\phi_1 = p \wedge \neg q$
- $\phi_2 = q \wedge \neg r$
- $\phi_3 = \neg s \wedge \neg p$
- $\phi_4 = t$
- $\phi_5 = r$
- $FND(\varphi) = \phi_1 \vee \phi_2 \vee \phi_3 \vee \phi_4 \vee \phi_5 =$
  $= (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee (\neg s \wedge \neg p) \vee t \vee r$

De $T(\neg\varphi)$, obtenemos:

- $\phi_1 = s \wedge \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg t$
- $FND(\neg\varphi) = \phi_1 = s \wedge \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg t$
- $FNC(\varphi) = \neg FND(\neg\varphi) = \neg s \vee p \vee q \vee r \vee t$