EXAMEN PARCIAL DE LÓGICA

Demostración de la lógica de primer orden con Gentzen
Grado en Ingeniería de la Ciberseguridad, URJC
18 de diciembre de 2019
Este examen cuenta 2 puntos en la nota final ordinaria de la asignatura.

Un ejercicio se evaluará con un 0 si cumple alguno de los siguientes criterios:

- Si no se respetan los requisitos del enunciado.
- Si se utilizan reglas básicas que no existen, o reglas derivadas que no hemos visto en clase (es decir: que no aparezcan en la lista adjunta de reglas derivadas)
- Aplicar reglas que sí existen, pero aplicarlas mal, con un resultado incorrecto
- Si se utilizan procedimientos o métodos que no se pueden hacer en Gentzen
- Si se deja a medias una demostración o no se llega a la conclusión a la que se tiene que llegar.
- Cualquier otro fallo grave que el profesor juzgue conveniente

Se restarán puntos en un ejercicio si:

- No se respeta la notación vista en clase
- Se saltan pasos
- No se indican claramente las reglas aplicadas
- Se generan líneas innecesariamente
- Cualquier otro fallo que el profesor juzgue conveniente

1. (0,6 puntos) Demuestra, utilizando Gentzen y sin utilizar el "Teorema de la deducción", el teorema siguiente (nota que, al ser un teorema, no hay premisas): $\vdash \neg\exists x P(x) \rightarrow \forall x \neg P(x)$

2. (0,7 puntos) Demuestra, utilizando Gentzen, la siguiente deducción: $\{\neg\exists x(Q(x) \wedge S(x)), \forall z \neg Q(z) \vee \forall y S(y)\} \vdash \forall z \neg Q(z)$

3. (0,7 puntos) Demuestra, utilizando Gentzen, la siguiente deducción: $\exists y(R(z,a) \wedge S(y,b)) \vdash R(z,a) \wedge \exists y S(y,b)$

REGLAS DERIVADAS DEL SISTEMA DE GENTZEN

T1 (Identidad): $\varphi \vdash \varphi$

T2 (Silogismo): $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \chi$

T3 (Modus Ponens): $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash \psi$

T4 (Excontradictione Quodlibet): $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi$

T5 (Producto condicional): $\{\varphi \to \psi, \varphi \to \chi\} \vdash \varphi \to \psi \wedge \chi$

T6 (Contraposición): T6.1: $\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$ T6.2: $\varphi \to \neg\psi \vdash \psi \to \neg\varphi$

T6.3: $\neg\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \varphi$

T7 (Interdefinición 1): T7.1: $\varphi \to \psi \vdash \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$ T7.2: $\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \vdash \varphi \to \psi$

T8 (Leyes de Morgan): T8.1: $\neg(\varphi \vee \psi) \vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi$ T8.2: $\neg\varphi \wedge \neg\psi \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$

T8.3: $\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$ T8.4: $\neg\varphi \vee \neg\psi \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$

T9 (Interdefinición 2): T9.1: $\varphi \to \psi \vdash \neg\varphi \vee \psi$ T9.2: $\neg\varphi \vee \psi \vdash \varphi \to \psi$

T10 (Conmutativa ∧): T10.1: $\varphi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \varphi$ T10.2: $\psi \wedge \varphi \vdash \varphi \wedge \psi$

T11 (Asociativa ∧): T11.1: $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \vdash (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$ T11.2: $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \vdash \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$

T12 (Distributiva ∧): T12.1: $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \vdash (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ T12.2: $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \vdash \varphi \wedge (\psi \vee \chi)$

T13 (Absorción ∧): T13.1: $\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \vdash \varphi$ T13.2: $\varphi \vdash \varphi \wedge (\varphi \vee \psi)$

T14 (Idempotencia ∧): T14.1: $\varphi \wedge \varphi \vdash \varphi$ T14.2: $\varphi \vdash \varphi \wedge \varphi$

T15 (Conmutativa ∨): T15.1: $\varphi \vee \psi \vdash \psi \vee \varphi$ T15.2: $\psi \vee \varphi \vdash \varphi \vee \psi$

T16 (Asociativa ∨): T16.1: $\varphi \vee (\psi \vee \chi) \vdash (\varphi \vee \psi) \vee \chi$ T16.2: $(\varphi \vee \psi) \vee \chi \vdash \varphi \vee (\psi \vee \chi)$

T17 (Distributiva ∨): T17.1: $\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \vdash (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ T17.2: $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \chi)$

T18 (Absorción ∨): T18.1: $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \vdash \varphi$ T18.2: $\varphi \vdash \varphi \vee (\varphi \wedge \psi)$

T19 (Idempotencia ∨): T19.1: $\varphi \vee \varphi \vdash \varphi$ T19.2: $\varphi \vdash \varphi \vee \varphi$

T20 (Introducción ↔): $\{\varphi \to \psi, \psi \to \varphi\} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$

T21 (Eliminación ↔): T21.1: $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \varphi \to \psi$ T21.2: $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \psi \to \varphi$

T22 (Reflexiva ↔): $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi$

T23 (Transitiva ↔): $\{\varphi \leftrightarrow \psi, \psi \leftrightarrow \chi\} \vdash \varphi \leftrightarrow \chi$

T24 (Simétrica ↔): $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \psi \leftrightarrow \varphi$

T25 (Importación-Exportación): T25.1: $\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \wedge \psi\} \vdash \chi$ T25.2: $\{\varphi \wedge \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi \to \chi$

T26 (Mutación de premisa): $\varphi \to (\psi \to \chi) \vdash \psi \to (\varphi \to \chi)$

T27 (Carga de premisa): $\varphi \vdash (\psi \to \varphi)$

T28 (Modus Tollens): $\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$

T29 (Tollendo ponens): $\{\varphi \vee \psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$

T30 (Dilemas):

T30.1 (Constructivo simple): $\{\varphi \vee \psi, \varphi \to \chi, \psi \to \chi\} \vdash \chi$

T30.2 (Constructivo complejo): $\{\varphi \vee \psi, \varphi \to \chi, \psi \to \sigma\} \vdash \chi \vee \sigma$

T30.3 (Destructivo simple): $\{\neg\varphi \vee \neg\psi, \chi \to \varphi, \chi \to \psi\} \vdash \neg\chi$

T30.4 (Destructivo complejo): $\{\neg\varphi \vee \neg\psi, \chi \to \varphi, \sigma \to \psi\} \vdash \neg\chi \vee \neg\sigma$

REGLAS DERIVADAS DE GENTZEN PARA LPO

T31 (Cambio de variable cuantificada): T31.1: $\forall x\varphi(x) \vdash \forall y\varphi(y)$

T31.2: $\forall y\varphi(y) \vdash \forall x\varphi(x)$, T31.3: $\exists x\varphi(x) \vdash \exists y\varphi(y)$, T31.4 $\exists y\varphi(y) \vdash \exists x\varphi(x)$

T32 (Descenso cuantificacional): $\forall x\varphi(x) \vdash \exists x\varphi(x)$

T33 (Conmutatividad): T33.1: $\exists x\exists y\varphi(x,y) \vdash \exists y\exists x\varphi(x,y)$,

T33.2: $\exists y\exists x\varphi(x,y) \vdash \exists x\exists y\varphi(x,y)$, T33.3: $\forall x\forall y\varphi(x,y) \vdash \forall y\forall x\varphi(x,y)$

T33.4: $\forall y\forall x\varphi(x,y) \vdash \forall x\forall y\varphi(x,y)$

T34 (Reglas de la conjunción):

T34.1: $\exists x(\varphi(x)\wedge\psi(x)) \vdash \exists x\varphi(x)\wedge\exists x\psi(x)$

T34.2: $\forall x\varphi(x)\wedge\forall x\psi(x) \vdash \forall x(\varphi(x)\wedge\psi(x))$ T34.3: $\forall x(\varphi(x)\wedge\psi(x)) \vdash \forall x\varphi(x)\wedge\forall x\psi(x)$

T34.4: $\exists x(\varphi\wedge\psi(x)) \vdash \varphi\wedge\exists x\psi(x)$, T34.5. $\varphi\wedge\exists x\psi(x) \vdash \exists x(\varphi\wedge\psi(x))$

T34.6: $\forall x(\varphi\wedge\psi(x)) \vdash \varphi\wedge\forall x\psi(x)$, T34.7: $\varphi\wedge\forall x\psi(x) \vdash \forall x(\varphi\wedge\psi(x))$

T35 (Reglas de la disyunción):

T35.1: $\exists x(\varphi(x)\vee\psi(x)) \vdash \exists x\varphi(x)\vee\exists x\psi(x)$, T35.2: $\exists x\varphi(x)\vee\exists x\psi(x) \vdash \exists x(\varphi(x)\vee\psi(x))$

T35.3: $\forall x\varphi(x)\vee\forall x\psi(x) \vdash \forall x(\varphi(x)\vee\psi(x))$

T35.4: $\varphi\vee\exists x\psi(x) \vdash \exists x(\varphi\vee\psi(x))$, T35.5: $\exists x(\varphi\vee\psi(x)) \vdash \varphi\vee\exists x\psi(x)$

T35.6: $\varphi\vee\forall x\psi(x) \vdash \forall x(\varphi\vee\psi(x))$, T35.7: $\forall x(\varphi\vee\psi(x)) \vdash \varphi\vee\forall x\psi(x)$

T36 (Reglas de la implicación):

T36.1: $\exists x\varphi(x)\to\exists x\psi(x) \vdash \exists x(\varphi(x)\to\psi(x))$, T36.2: $\forall x(\varphi(x)\to\psi(x)) \vdash \forall x\varphi(x)\to\forall x\psi(x)$

T36.3: $\exists x\psi(x)\to\varphi \vdash \exists x(\psi(x)\to\varphi)$, T36.4: $\forall x(\psi(x)\to\varphi) \vdash \forall x\psi(x)\to\varphi$

T36.5: $\forall x(\varphi\to\psi(x)) \vdash \varphi\to\forall x\psi(x)$

T37 (Reglas de la eliminación de la negación de un cuantificador)

T37.1 ($E\neg\forall$) $\neg\forall x\varphi(x) \vdash \neg\varphi(a)$ a es cte.

T37.2 ($E\neg\exists$): $\neg\exists x\varphi(x) \vdash \neg\varphi(y)$ y es variable libre

1)

1) $\neg \exists x P(x)$ (p.aux)

2) $\neg P(y)$ (T37.2(1))

3) $\forall x \neg P(x)$ (I$\forall$(2))

4) $\neg \exists x P(x) \rightarrow \forall x \neg P(x)$ (I$\rightarrow$(1,3))

2)

1) $\neg\exists x\,(Q(x) \wedge S(x))$ (pr)

2) $\forall z\,\neg Q(z) \vee \forall y\, S(y)$ (pr)

3) $\forall z\,\neg Q(z)$ (p.aux)

4) $\forall z\,\neg Q(z)$ ($T1(3)$)

5) $\forall z\,\neg Q(z) \rightarrow \forall z\,\neg Q(z)$ ($I\rightarrow(3,4)$)

6) $\forall y\, S(y)$ (p.aux)

7) $S(y_1)$ ($E\forall(6)$)

8) $\neg(Q(y_1) \wedge S(y_1))$ ($T37.2(2)$)

9) $\neg Q(y_1) \vee \neg S(y_1)$ ($T8.3(8)$)

10) $\neg S(y_1)$ (p.aux)

11) $\neg S(y_1) \wedge S(y_1)$ ($I\wedge(7,10)$)

12) $\neg S(y_1) \rightarrow \neg S(y_1) \wedge S(y_1)$ ($I\rightarrow(10,11)$)

13) $\neg\neg S(y_1)$ ($I\neg(12)$)

14) $\neg Q(y_1)$ ($T29(9,13)$)

15) $\forall z\,\neg Q(z)$ ($I\forall(14)$)

16) $\forall y\, S(y) \rightarrow \forall z\,\neg Q(z)$ ($I\rightarrow(6,15)$)

17) $\forall z\,\neg Q(z)$ ($E\vee(2,5,16)$)

3)

1) $\exists y\,(R(z,a) \wedge S(y,b))$ (premisa)

2) $R(z,a) \wedge S(x,b)$ (p. aux)

3) $R(z,a)$ $(E\wedge(2))$

4) $S(x,b)$ $(E\wedge(2))$

5) $\exists y\, S(y,b)$ $(I\exists(4))$

6) $R(z,a) \wedge \exists y\, S(y,b)$ $(I\wedge(3,5))$

7) $R(z,a)\wedge S(x,b) \rightarrow R(z,a)\wedge \exists y\, S(y,b)$ $(I\rightarrow(2,6))$

8) $R(z,a) \wedge \exists y\, S(y,b)$ $(E\exists(1,7))$

Como el ejercicio no nos pide que usemos sólo las reglas básicas, también se podría haber resuelto con sólo una línea:

1) $\exists y\,(R(z,a) \wedge S(y,b))$ (premisa)

2) $R(z,a) \wedge \exists y\, S(y,b)$ $(T34.4(1))$