LÓGICA

HOJA 4
Teoría de la demostración de la lógica proposicional

Ejercicio 1 *Usando el sistema de deducción natural, demuestra la idempotencia de la conjunción (T14), la introducción del coimplicador (T20) y la eliminación del coimplicador (T21). Vuelve a comprobar si eres capaz de demostrar todas las reglas derivadas del sistema de Gentzen.*

Ejercicio 2 *Prueba que las siguientes equivalencias semánticas son también coimplicaciones demostrables en el sistema de deducción natural:*

1. $\neg\neg p \equiv p$
2. $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
3. $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
4. $p \to q \equiv \neg p \vee q$
5. $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$

Ejercicio 3 *Formaliza los siguientes razonamientos:*

1. *Si llueve no iré al mercado. Si no iré al mercado, o bien no tendré comida o bien iré al restaurante. Llueve y tengo comida. Por lo tanto: iré al restaurante.*
2. *Si f es diferenciable en $[a,b]$, es continua y acotada en $[a,b]$. Si f no fuese acotada en $[a,b]$ no podría ser diferenciable en $[a,b]$. Por tanto: si f es discontinua y acotada en $[a,b]$, no es diferenciable en $[a,b]$.*

Ejercicio 4 *Usando el sistema de deducción natural, prueba (si es posible) la validez de los razonamientos anteriores.*

Ejercicio 5 *Usando el sistema de deducción natural, demuestra la validez de las siguientes deducciones:*

1. $\{p \wedge q \to r,\ \neg(p \vee r) \to s,\ p \to q\} \vdash \neg s \to r$

2. $\{r \to p,\, \neg q \to \neg r,\, s \to q,\, p \wedge q \to t,\, \neg s \vee p\} \vdash\ r \vee s \to t$

3. $\{p \to q \to r,\, \neg s \vee p,\, q\} \vdash\ s \to r$

4. $\{s \to t \to u,\, u \to \neg u,\, (v \to s) \wedge (p \to t)\} \vdash\ v \to \neg p$

Ejercicio 6 *En el contexto de la lógica proposicional y usando el sistema de deducción natural de Gentzen, demuestra la validez de las deducciones:*

$$\{p \vee q,\, p \to r,\, q \to s \wedge r\} \vdash r,$$

$$\{p \vee q,\, p \to r \vee \neg t,\, q \to s \wedge r\} \vdash t \to r,$$

$$\{p \vee q \to \neg(q \wedge t),\, \neg s \to q\} \vdash p \wedge t \to s.$$

Ejercicio 7 *Demuestra, utilizando el sistema de deducción natural de Gentzen, que el siguiente razonamiento es válido:*

$$\{r \to q,\ u \vee \neg p,\ u \to t,\ r \vee s,\ \neg q \to \neg s\} \vdash q \wedge (p \to t).$$

Ejercicio 8 *Demuestra la siguiente deducción usando el sistema natural de Gentzen. Puedes utilizar libremente los 30 teoremas válidos enunciados en teoría sin necesidad de demostrarlos.*

$$\{p \wedge q \to r,\ \neg p \to s\} \vdash q \to r \vee s.$$

Ejercicio 9 *Formaliza el siguiente razonamiento con el lenguaje de la lógica proposicional y prueba su validez usando el sistema de deducción natural de Gentzen . Puedes utilizar libremente los 30 teoremas válidos enunciados en teoría sin necesidad de demostrarlos.*

Si Beatriz sale de compras, hoy comeremos patatas. Beatriz sale de compras si tiene dinero. Ella no compra marisco a menos que tenga dinero. No ocurre que no tenga dinero y haya cobrado. O ha cobrado o compra marisco. Por tanto, comeremos patatas o carne.

Ejercicio 10 *Demuestra el siguiente par de deducciones (propiedad distributiva de la disyunción respecto de la conjunción) usando el sistema natural de Gentzen. Utiliza sólo las ocho reglas de inferencia del sistema.*

a) $\varphi \vee (\psi \wedge \xi) \vdash (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \xi)$.

b) $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \xi) \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \xi)$.

Ejercicio 11 *En el contexto de la lógica proposicional, utiliza el sistema de deducción natural de Gentzen para probar la validez del siguiente razonamiento:*

$$\{p \vee q \vee r,\ \neg p \vee s,\ s \to r\} \vdash \neg q \to r.$$

Ejercicio 12 *Utiliza el sistema de deducción natural de Gentzen para probar el siguiente razonamiento:*

$$\begin{array}{c} p \to q \vee \neg r \\ r \vee \neg q \\ \neg q \to r \\ r \to \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$$

Ejercicio 13 *Utiliza el sistema de deducción natural de Gentzen para probar el siguiente razonamiento de la lógica proposicional:*

$$(p \to q \wedge r) \wedge \neg q \to \neg p.$$

Ejercicio 14 *Utiliza el sistema de deducción natural de Gentzen para probar la validez del siguiente razonamiento:*

$$\{p \vee q \vee r,\ p \to s,\ \neg r \to \neg s\} \vdash \neg r \to q.$$