LÓGICA

HOJA 2

Sintaxis de la lógica proposicional

Ejercicio 1 *Demuestra por inducción sobre* $\mathbb{N}$ *las siguientes afirmaciones:*

a) Sea A *un conjunto finito con* $card(A) = n$. *Entonces* $card(P(A)) = 2^n$, *donde* $P(A)$ *es el conjunto de las partes de* A.

b) Para todo número natural n,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ejercicio 2 *Determina cuáles de las siguientes frases son proposiciones:*

a) ¿Puedes ir a la cafetería?

b) Por favor, sea educado.

c) El jardín es muy grande.

d) ¡La organización del evento es un desastre!

e) ¡Échame una mano!

Ejercicio 3 *Identifica cuáles de las siguientes palabras no son fórmulas proposicionales o fórmulas proposicionales abreviadas:*

a) $(p \to q) \wedge r) \vee (s \wedge t)$,

b) $(\neg(\neg(\neg(p \wedge (q \to \neg r))))$,

c) $\neg p$,

d) $p\neg \wedge q$,

e) $\neg p \vee q \vee s$.

Ejercicio 4 *Escribe en forma abreviada las siguientes fórmulas proposicionales:*

a) $(((p \to q) \wedge r) \vee (s \wedge t))$,

b) $((p \to (q \vee r)) \wedge (((s \to t) \wedge r) \to q))$,

c) $((\neg(p \wedge q) \leftrightarrow r) \vee s)$,

d) $(\neg((\neg p \to q) \vee r))$,

e) $(\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q))$.

Ejercicio 5 *Escribe en forma no abreviada las siguientes fórmulas proposicionales:*

a) $\neg r \to q \vee t \vee s$,
b) $p \wedge q \wedge r \to s \to t$,
c) $(p \wedge q) \vee (r \leftrightarrow s) \to p$,
d) $\neg(\neg p \to q \vee r)$,
e) $p \wedge (q \vee r) \to s \vee t$.

Ejercicio 6 *Representa en forma de árbol estructural las siguientes fórmulas:*

a) $((p \vee q) \to r)$,
b) $((p \to q) \to ((r \to p) \to (r \to q)))$,
c) $(\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q))$,
d) $((\neg(\neg(\neg p \vee r) \vee q)) \to (\neg(p \wedge q) \vee r))$,
e) $(((p \vee r) \to (p \vee \neg(r))) \leftrightarrow (r \to p))$,
f) $(p \to (s \to p))$.

Ejercicio 7 *La* **profundidad** *de una fórmula proposicional φ es la longitud máxima de los caminos simples con vértice inicial la raíz del árbol sintáctico de φ.*

Usando el principio de recursión estructural, define recursivamente la función fp que asigna a cada fórmula φ su profundidad.

Sugerencia: *usa la función que calcula el máximo entre dos números enteros.*

Ejercicio 8 (HLR) *a) Usando el principio de recursión estructural, define recursivamente la función fn que asocia a cada fórmula φ el número (entero no negativo) de conectivos, sin contar los conectivos de aridad 0, que aparecen en la estructura sintáctica de φ.*

b) Demuestra por inducción estructural que para toda fórmula φ se verifica que

$$fp(\varphi) \leq fn(\varphi),$$

donde la función fp es la función profundidad del ejercicio anterior.

En los siguientes ejercicios se pide formalizar los razonamientos dados. En cada caso, determinar las condiciones necesarias y las condiciones suficientes del razonamiento y volver a traducir al lenguaje natural la formalización obtenida:

Ejercicio 9 *Voy al bar siempre que me apetezca y tenga tiempo libre.*

Ejercicio 10 *No voy a correr a menos que tu vengas conmigo.*

Ejercicio 11 *Estoy satisfecho sólo si no olvido las cosas importantes.*

Ejercicio 12 *Los alumnos estudian mucho y están alegres. Si los alumnos están alegres, entonces sacan buenas notas. Por tanto, los alumnos estudian mucho sólo si están alegres.*

Ejercicio 13 *Luis y Juan son hermanos o Beatriz y Luis son primos. Si Juan y Beatriz son primos, entonces Luis y Juan son hermanos. Por tanto, Beatriz y Luis son primos.*

Ejercicio 14 (C) *Si llueve las calles estarán vacías. Si las calles están vacías, el comercio obtiene perdidas. Los músicos no podrían sobrevivir si los comerciantes no les contratasen para componer canciones para publicidad. Los comerciantes invierten en canciones publicitarias cuando tienen perdidas. Por tanto, si llueve, los músicos pueden sobrevivir.*

HOJA 2, EJERCICIO 1

a) • Si $|A| = n = 1$, entonces $P(A) = \{\emptyset, \{elem\}\}$.
Por tanto se ve que $|P(A)| = 2^1 = 2 = 2^n$

• Si se cumple que $|P(A)| = 2^n$, siendo $|A| = n$, tenemos que demostrar que $|P(B)| = 2^{n+1}$ siendo $|B| = n+1$. ($B = A \cup \{\text{un nuevo elemento}\}$)

Tenemos: $|P(B)| = 2 \cdot |P(A)| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$

¿por qué?

Ocurre que, cada elemento que tenía P(A) antes, ahora se desdobla en dos: sin el nuevo elemento, y con el nuevo. Por lo tanto hemos duplicado el nº de subconjuntos posibles de A al añadir un elemento más a A

Ej: $A = \{1, 2\}$. $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ $|A| = 2$
$|P(A)| = 2^2 = 4$

$B = A \cup \{3\} = \{1, 2, 3\}$ (B es el resultado de añadir un nuevo elemento a A y por lo tanto aumentar el cardinal de A en 1)

$|B| = 3$ $|P(B)| = 8 = 2 \cdot |P(A)|$

$P(B) = \{\emptyset, \{3\}, \{1\}, \{1,3\}, \{2\}, \{2,3\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$

Para ver que cada elemento de P(A) se convierte en 2 elementos en P(B), podemos enfrentarlos unos a otros en la misma hoja:

Elementos de P(A)	Elementos de P(B)	
$\emptyset$	$\emptyset$	(sin 3)
	$\emptyset \cup \{3\} = \{3\}$	(con 3)
$\{1\}$	$\{1\}$	(sin 3)
	$\{1, 3\}$	(con 3)
$\{2\}$	$\{2\}$	(sin 3)
	$\{2, 3\}$	(con 3)
$\{1, 2\}$	$\{1, 2\}$	(sin 3)
	$\{1, 2, 3\}$	(con 3)

b) • Con $n=1$, $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ ③

• Asumimos $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ como cierto.

Fijémonos en que $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n$

Tenemos que demostrar que: $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$

(hemos cambiado "n" por "n+1")

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \underbrace{1+2+3+\ldots+n}_{\sum_{k=1}^{n} k} + (n+1) = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

HOJA 2, EJERCICIO 2

a) No, xq es una pregunta
b) No, xq es imperativo
c) Sí, xq es una sentencia evaluable como V ó F.
d) Sí, si entendemos q la exclamación es evaluable.
No, si entendemos q no es evaluable
e) No, xq es un imperativo.

HOJA 2, EJERCICIO 3

a) No xq falta un paréntesis al ppio.
b) No, xq falta un paréntesis al ~~ppio.~~ final.
c) Sí
d) No. El "$\neg$" antes del "$\wedge$" no se ajusta a la sintaxis correcta
e) Sí

HOJA 2, EJERCICIO 4

a) $((p \to q) \wedge r) \vee s \wedge t$
b) $(p \to q \vee r) \wedge ((s \to t) \wedge r \to q)$
c) $(\neg(p \wedge q) \leftrightarrow r) \vee s$
d) $\neg((\neg p \to q) \vee r)$
e) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

HOJA 2, EJERCICIO 5

a) $(\neg(r) \rightarrow (q \vee (t \vee s))))$

b) $((p \wedge (q \wedge r)) \rightarrow (s \rightarrow t))$

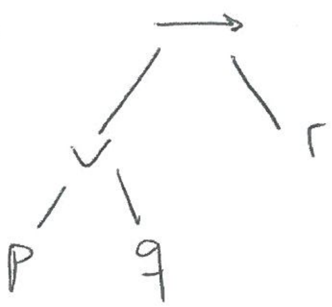
c) $(((p \wedge q) \vee (r \leftrightarrow s)) \rightarrow p)$

d) $(\neg(\neg(p) \rightarrow (q \vee r)))$

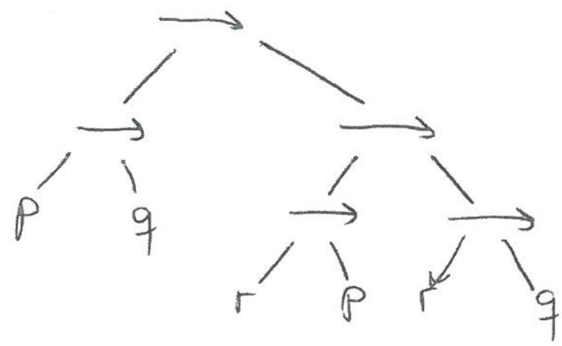
e) $((p \wedge (q \vee r)) \rightarrow (s \vee t))$

HOJA 2, EJERCICIO 6

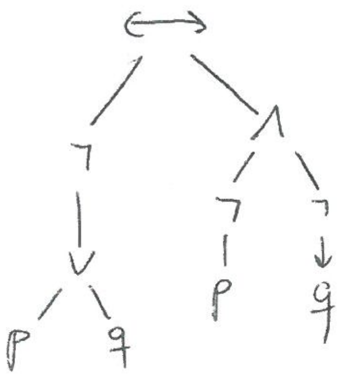
a)



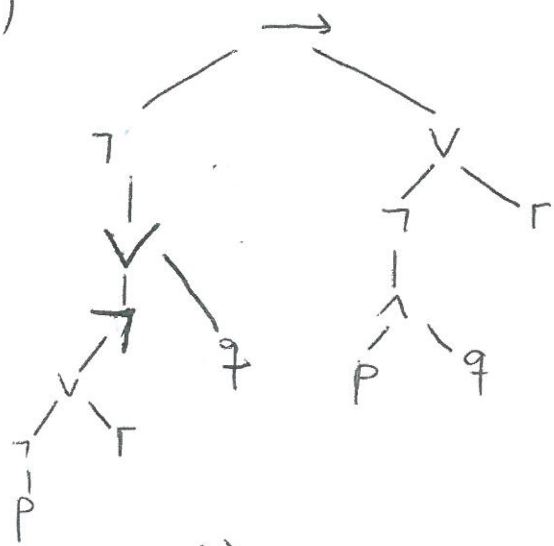
b)



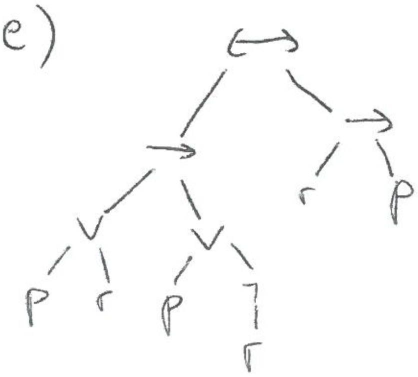
c)



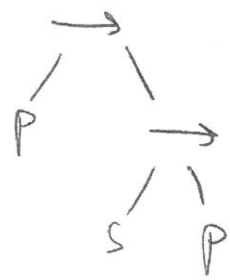
d)



e)



f)



HOJA 2, EJERCICIO 7

$fp: L \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$

$fp(\varphi) = 0$ si φ es proposición atómica ó $\top$ ó $\bot$

$$\left.\begin{array}{l} fp(\neg\varphi) = 1 + fp(\varphi) \\ fp(\underbrace{\varphi_1 \circ \varphi_2}_{}) = 1 + \max(fp(\varphi_1), fp(\varphi_2)) \end{array}\right\} \text{para cualquier fórmula proposicional } \varphi$$

$\circ$ → cualquier conectivo $\wedge, \vee, \rightarrow,$ ó $\leftrightarrow$

HOJA 2, EJERCICIO 8

a) $fn: L \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$

$fn(\varphi) = 0$ si φ es proposición atómica ó $\top$ ó $\bot$

$$\left.\begin{array}{l} fn(\neg\varphi) = fn(\varphi) + 1 \\ fn(\underbrace{\varphi_1 \circ \varphi_2}_{}) = 1 + fn(\varphi_1) + fn(\varphi_2) \end{array}\right\} \varphi, \varphi_1, \varphi_2 \text{ son fórmulas proposicionales}$$

$\circ$ → cualquier conectivo de aridad 2 ($\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$)

b)
- Si φ es proposición atómica (incluyendo $\bot$ y $\top$):

  $fp(\varphi) \leq fn(\varphi)$

  $0 \leq 0$ Se cumple

- Si $fp(\varphi) \leq fn(\varphi)$, ¿ $fp(\neg\varphi) \leq fn(\neg\varphi)$?

  $fp(\neg\varphi) = 1 + fp(\varphi) \leq 1 + fn(\varphi) = fn(\neg\varphi)$

- Si $fp(\varphi_1) \leq fn(\varphi_1)$ y $fp(\varphi_2) \leq fn(\varphi_2)$, ¿ $fp(\varphi_1 \circ \varphi_2) \leq fn(\varphi_1 \circ \varphi_2)$?

  $fp(\varphi_1 \circ \varphi_2) = 1 + \max(fp(\varphi_1), fp(\varphi_2)) \leq 1 + \max(fn(\varphi_1), fn(\varphi_2)) \leq$

  $\leq 1 + fn(\varphi_1) + fn(\varphi_2) = fn(\varphi_1 \circ \varphi_2)$

  xq: $\max(a,b) \leq a+b$, $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

EJERCICIOS 9-14, HOJA 2

9) p: me apetece ir al bar, q: tengo tiempo libre, r: voy al bar

$p \wedge q \rightarrow r$

$p \wedge q$: condición suficiente
r: condición necesaria

10) p: ir a comer, q: vienes conmigo a comer

$p \rightarrow q$

11) p: estoy satisfecho, q: olvido las cosas importantes

$p \rightarrow \neg q$

12) p: alumnos estudian mucho, q: alumnos están alegres
r: alumnos sacan buenas notas

$(p \wedge q \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow q)$

13) p: luis y juan hermanos, q: beatriz y luis primos
r: beatriz y juan ~~hermanos~~ primos

$(p \vee q) \wedge (r \rightarrow p) \rightarrow q$

14) p: llover, q: calles están vacías, r: comercio tiene pérdidas
s: músicos pueden sobrevivir, t: comerciantes invierten contratando músicos para componer canciones publicitarias

$$\underbrace{(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (\neg t \rightarrow \neg s) \wedge (r \rightarrow t)}_{\text{condición suficiente}} \rightarrow \underbrace{(p \rightarrow s)}_{\text{cond. necesaria}}$$