HOJA 5, EJERCICIO 1

1) x ligada, y libre. Fórmula abierta

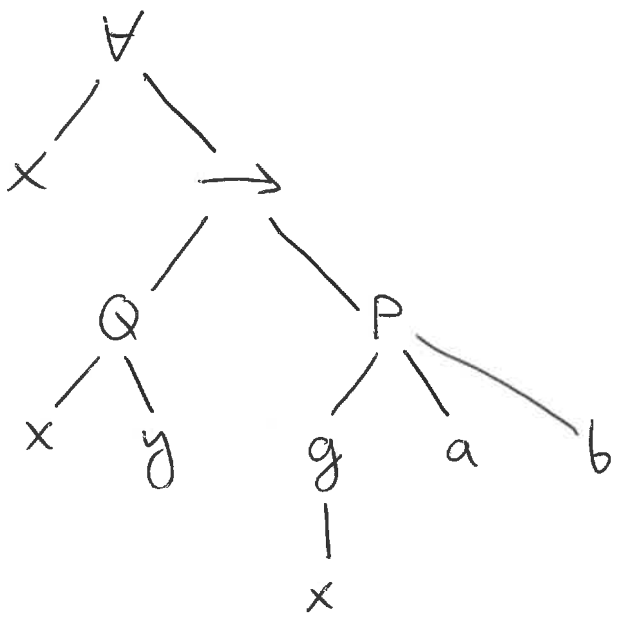
2) y ligada, x ligada en Q y libre en P. Fórmula abierta.

3) y ligada, x ligada en Q y libre en P. Fórmula abierta.

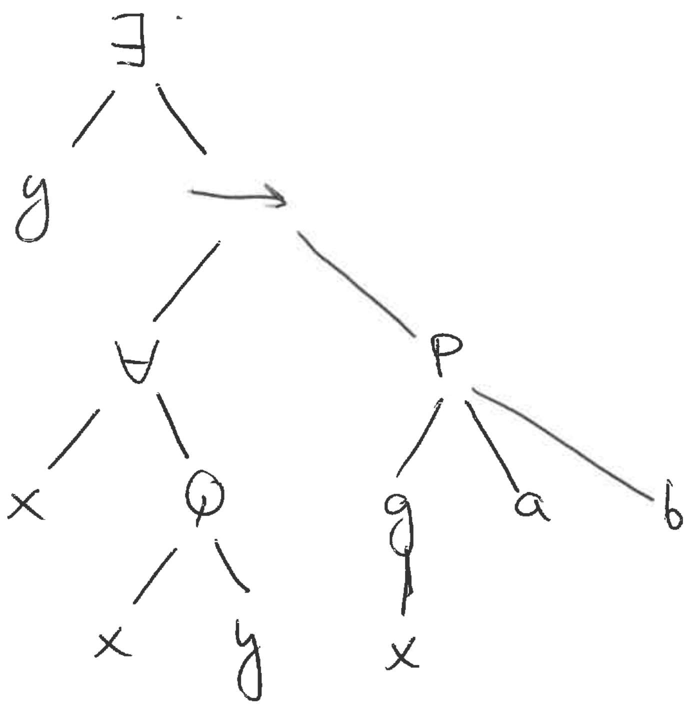
4) x ligada, y ligada. Fórmula cerrada

HOJA 5, EJERCICIO 2

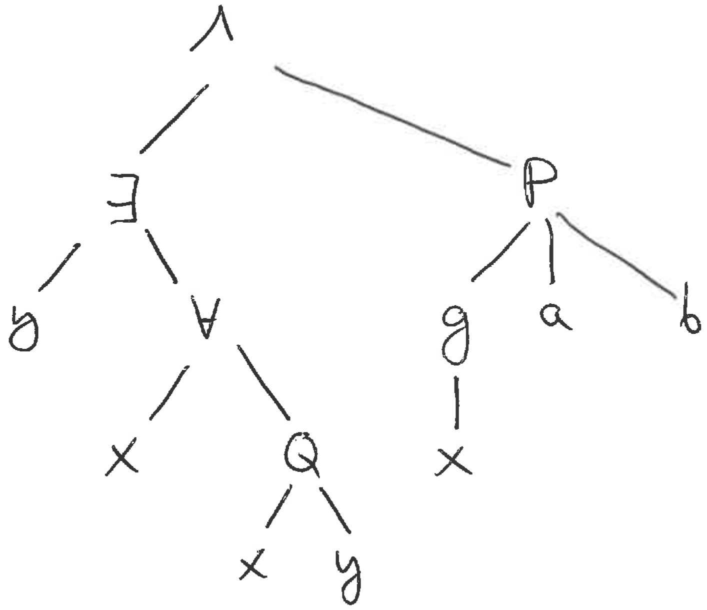
1.1)



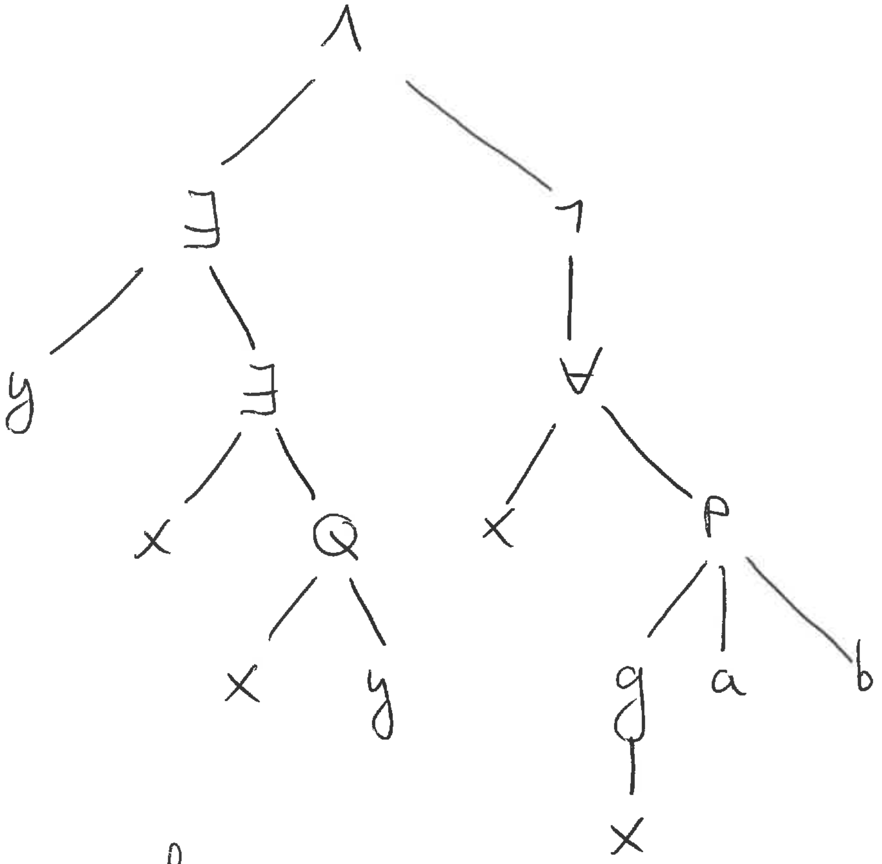
1.2)



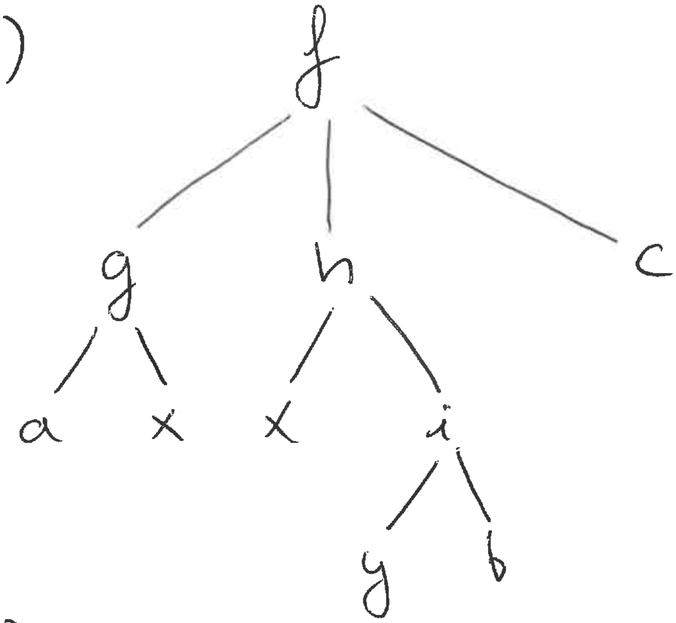
1.3)



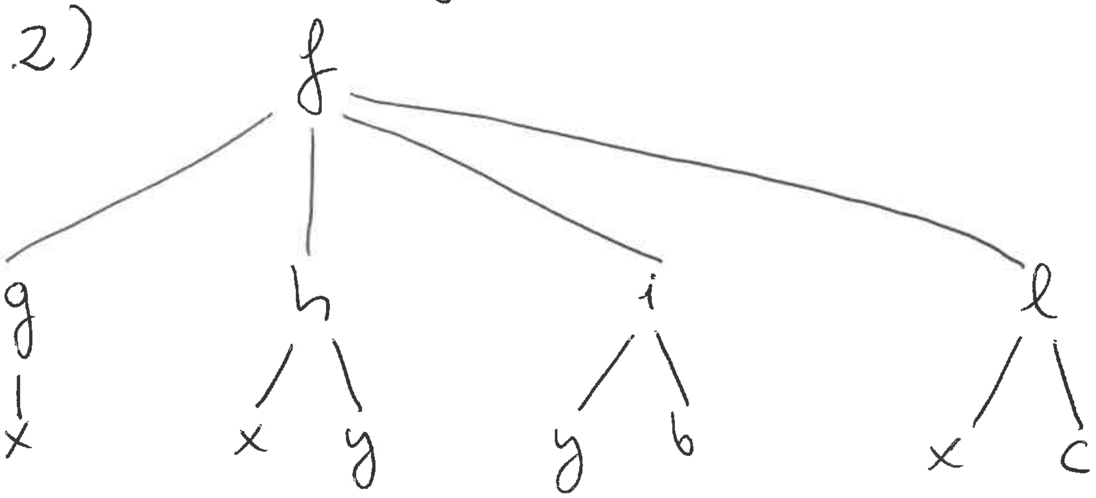
1.4)



2.1)



2.2)



HOJA 5, EJERCICIO 3

Var = { conjunto de variables }

F = { conjunto de fórmulas bien formadas }

$Lig: F \longrightarrow P(Var)$

- Si φ es una fórmula atómica:

  $\rightarrow Lig(\top) = Lig(\bot) = Lig(p) = Lig(s=t) =$
  $= Lig(P(t_1, t_2, \dots, t_n)) = \emptyset$

- Si φ no es una fórmula atómica:

  $\rightarrow Lig(\neg\varphi_1) = Lig(\varphi_1) \qquad (\varphi = \neg\varphi_1)$

  $\rightarrow Lig(\varphi_1 \circ \varphi_2) = Lig(\varphi_1) \cup Lig(\varphi_2) \quad (\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2)$

  $\rightarrow Lig(\forall x \varphi_1) = Lig(\exists x \varphi_1) = Lig(\varphi_1) \cup \{x\}$
  $(\varphi = \forall x \varphi_1 \text{ ó } \varphi = \exists x \varphi_1)$

HOJA 5, EJERCICIO 4

- Si φ es una fórmula atómica:

  $$f(\top) = f(\bot) = f(p) = f(s=t) = f(P(t_1,\dots,t_n)) = 0$$

- Si φ no es atómica:
  - $f(\neg\varphi_1) = f(\varphi_1)$ $\quad(\varphi = \neg\varphi_1)$
  - $f(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = f(\varphi_1) + f(\varphi_2) + 1$ $\quad(\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2)$
  - $f(\varphi_1 \circ \varphi_2) = f(\varphi_1) + f(\varphi_2)$

    "$\circ$" es un conectivo binario cualquiera excepto "$\wedge$".

    $(\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2)$
  - $f(\forall x \varphi_1) = f(\exists x \varphi_1) = f(\varphi_1)$

    $(\varphi = \forall x \varphi_1$ ó $\varphi = \exists x \varphi_1)$

HOJA 5, EJERCICIO 5

a) $D = \{\text{animales mitológicos}\}$

$U(x)$: x es unicornio

$A(x)$: x es azul

$t \in D$: Toby

$P(x)$: x es pegaso

$C(x)$: x es centauro

$V(x)$: x es verde

$Y(x,y)$: x ayuda a y

$\cancel{\forall x(U(x) \land \neg(t = x) \to A(x) \land \neg A(t))}$

$\forall x(U(x) \land \neg(x = t) \to A(x)) \land \neg A(t)$

$\forall x(C(x) \to \neg V(x)) \equiv \neg(\exists x(C(x) \land V(x)))$

$\forall x \forall y(Y(x,y) \land P(x) \to U(y))$

b)

$D = \mathbb{Z}$

$f(x,y) = x \cdot y$

$$\forall x \exists y \exists z(\underbrace{f(x,6)}_{\text{cualquier múltiplo de 6}} = f(\underbrace{f(y,2)}_{\text{un múltiplo de 2}}, \underbrace{f(z,3)}_{\text{un múltiplo de 3}}))$$

HOJA 5, EJERCICIO 6

a) La "expresión usual" es la no abreviada.

- Si t es atómico:

$$fT(x) = fT(a) = 1 \qquad x \text{ variable, } a \text{ constante}$$

- Si t es compuesto:

$$fT(g(t_1, \dots, t_n)) = \underbrace{3}_{\underbrace{1}_{\text{nombre función}} + \underbrace{2}_{\text{los 2 paréntesis}}} + \underbrace{fT(t_1) + \dots + fT(t_n)}_{\text{parámetros de la función}} + \underbrace{(n-1)}_{\text{Las comas}}$$

b)

- Si φ es atómico:

$$f(\top) = f(\bot) = f(p) = 1$$

$$f(s = t) = \underbrace{2}_{\text{los paréntesis (xq no es abreviada)}} + fT(s) + fT(t) + \underbrace{1}_{\text{el "="}}$$

$$f(P(t_1, \dots, t_n)) = \underbrace{1}_{\text{nombre predicado}} + \underbrace{2}_{\text{2 paréntesis}} + \underbrace{(n-1)}_{\text{comas}} + \underbrace{fT(t_1) + \dots + fT(t_n)}_{\text{parámetros del predicado}}$$

- Si φ no es atómico:

$$f(\neg \varphi_1) = 1 + f(\varphi_1)$$

$$f(\varphi_1 \circ \varphi_2) = 3 + f(\varphi_1) + f(\varphi_2)$$

$$f(\forall x \varphi_1) = f(\exists x \varphi_2) = 2 + f(\varphi_1)$$

EJERCICIO 7, HOJA 5

1) Dominio: personas

$C(x)$: x es científico

$A(x)$: x trabaja en áreas aplicadas

$F(x)$: x es famoso

$$\forall x \left(F(x) \longrightarrow C(x) \wedge A(x) \right)$$

Su negación es:

$$\neg \forall x \left(F(x) \rightarrow C(x) \wedge A(x) \right) \equiv \exists x \left(F(x) \wedge \neg \left(C(x) \wedge A(x) \right) \right)$$

No todas las personas famosas son científicos que trabajan en áreas aplicadas

Existe alguna persona que es famosa pero no es científico que trabaja en áreas aplicadas

4) Dominio: $\mathbb{R}$

$f(x,y) = x \cdot y$

$N(x)$: x es negativo

$$\forall x \forall y \left(\neg N(x) \wedge N(y) \rightarrow \neg N(f(x,y)) \right) \wedge$$

$$\wedge \ \forall x \forall y \left(\neg N(x) \wedge \neg N(y) \rightarrow \neg N(f(x,y)) \right) \equiv$$

$$\equiv \forall x \forall y \left(\left(\neg N(x) \wedge N(y) \rightarrow \neg N(f(x,y)) \right) \wedge \left(\neg N(x) \wedge \neg N(y) \rightarrow \neg N(f(x,y)) \right) \right)$$

Su negación es:

$$\neg \left(\forall x \forall y \left(\neg N(x) \wedge N(y) \rightarrow \neg N(f(x,y)) \right) \wedge \right.$$

$$\left. \wedge \ \forall x \forall y \left(\neg N(x) \wedge \neg N(y) \rightarrow \neg N(f(x,y)) \right) \right) \equiv$$

$$\equiv \neg \left(\forall x \forall y \left(\neg N(x) \wedge N(y) \rightarrow \neg N(f(x,y)) \right) \right) \vee$$

$$\vee \ \neg \left(\forall x \forall y \left(\neg N(x) \wedge \neg N(y) \rightarrow \neg N(f(x,y)) \right) \right)$$

No se cumple que el producto de cualquier número real no negativo por cualquier número negativo es no negativo, o no se cumple que el producto de cualquier número no negativo por cualquier número no negativo es no negativo.

2) Dominio : animales

$P(x)$: x es caballo

$Q(x)$: x es salvaje

$$\exists x \, (P(x) \wedge Q(x))$$

Negación:

$$\neg \exists x \, (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x \, \neg (P(x) \wedge Q(x))$$

Todos los animales no son caballos salvajes.

3) Dominio : personas

$P(x,y)$: x es amigo de y

$$\forall x \, \exists y \, (P(x,y) \wedge P(y,x))$$

Otra opción más sencilla:

$P(x,y)$: x e y son amigos

$$\forall x \, \exists y \, P(x,y)$$

Negación de esta última:

$$\neg \forall x \, \exists y \, P(x,y) \equiv \exists x \, \forall y \, \neg P(x,y)$$

Existe alguien que no es amigo de nadie.

5) Dominio: naturales. $P(x)$: x es par. $f(x)$: siguiente de x

$g(x,y)$: $x \cdot y$

$$\forall x\,(P(x) \to \neg P(f(x))) \wedge$$
$$\wedge\ \forall x\,(\neg P(x) \to P(f(x))) \wedge$$
$$\wedge\ \forall x \forall y\,(P(x) \to P(g(x,y)))$$

Negación:

$$\exists x\ \neg(P(x) \to \neg P(f(x))) \vee$$
$$\vee\ \exists x\ \neg(\neg P(x) \to P(f(x))) \vee$$
$$\vee\ \exists x \exists y\ \neg(P(x) \to P(g(x,y)))$$

$$\equiv$$

$$\exists x\,(P(x) \wedge P(f(x))) \vee$$
$$\vee\ \exists x\,(\neg P(x) \wedge \neg P(f(x))) \vee$$
$$\vee\ \exists x \exists y\,(P(x) \wedge \neg P(g(x,y)))$$

Existe al menos un par cuyo sucesor no lo es, o existe al menos un impar cuyo sucesor es impar, o existe al menos un par y un natural cuyo producto es impar.

6) Dominio : naturales

$P(x)$: x es primo

$f(x,y)$: $x \cdot y$

$$\forall x \forall y \forall z \left(P(z) \land \exists w \left(f(x,y) = f(w,z) \right) \rightarrow \right.$$
$$\left. \rightarrow \exists w \left(x = f(w,z) \right) \lor \exists w \left(y = f(w,z) \right) \right)$$

Negación:

$$\exists x \exists y \exists z \left(P(z) \land \exists w \left(f(x,y) = f(w,z) \right) \land \left(\forall w \neg \left(x = f(w,z) \right) \land \forall w \neg \left(y = f(w,z) \right) \right) \right)$$

Existe al menos un par de naturales cuya multiplicación de algún primo y ninguno de esos dos naturales es múltiplo de ese primo

7) Dominio: personas

$P(x)$: x es buena enfermera

$Q(x,y)$: x atiende con paciencia a y

$R(x)$: x es enfermo físico

$$\forall x \forall y \, (Q(x,y) \land R(y) \rightarrow P(x))$$

Negación: $\exists x \exists y \, (Q(x,y) \land R(y) \land \neg P(x))$: Existe alguna persona que atiende con paciencia a algún enfermo físico pero esa persona no es buena enfermer

8) $D_1 = \{\text{personas}\}$

$D_2 = \{\text{equipos de fútbol}\}$

$P(x,y)$: x es aficionado de y $(x \in D_1, \, y \in D_2)$

$Q(x,y)$: x es amigo de y $(x \in D_1, \, y \in D_1)$

$m \in D_2$: Madrid

$b \in D_2$: Betis

$$\forall x \forall y \, (P(x,m) \land P(y,b) \rightarrow Q(x,y)) \land$$
$$\land \, \exists x \forall y \, (P(x,m) \land P(y,b) \rightarrow Q(x,y)) \land$$
$$\land \, \exists x \forall y \, (P(x,m) \land Q(x,y) \rightarrow P(y,b))$$

Negación:

$$\exists x \exists y \, (P(x,m) \land P(y,b) \land \neg Q(x,y)) \lor$$
$$\lor \, \forall x \exists y \, (P(x,m) \land P(y,b) \land \neg Q(x,y)) \lor$$
$$\lor \, \forall x \exists y \, (P(x,m) \land Q(x,y) \land \neg P(y,b))$$

Algún aficionado del Madrid no es amigo de algún aficionado del Betis, o todos los aficionados del Madrid no son amigos de algún aficionado del Betis, o todos los aficionados del Madrid son amigos de alguien que no es aficionado al Betis.

9) ~~El Crim~~ La frase en lenguaje natural puede ser ambigua. La interpretamos como que dos hermanos siempre discrepan en algún aspecto de la vida.

$D_1 = \{\text{personas}\}$

$D_2 = \{\text{aspectos de la vida}\}$

$D_3 = \{\text{opiniones}\}$

$P(x,y)$: x e y son hermanos $(x, y \in D_1)$

$f(x,y)$: opinión de x sobre y

$(x \in D_1,\ y \in D_2,\ f(x,y) \in D_3)$

$$\forall x \forall y \left(P(x,y) \longrightarrow \exists z \neg (f(x,z) = f(y,z)) \right)$$

Negación:

$$\exists x \exists y \left(P(x,y) \wedge \forall z (f(x,z) = f(y,z)) \right)$$

Existe al menos dos hermanos que están de acuerdo en todos los aspectos de la vida