LÓGICA

HOJA 6
Semántica de la lógica de primer orden

Ejercicio 1 *Dada la fórmula*

$$\varphi : \exists y(P(y) \vee \forall x(P(x) \to Q(z))),$$

calcula todas las posibles interpretaciones de φ *en el dominio de dos elementos* $D = \{a, b\}$.

Ejercicio 2 *Considera la fórmula* $P(y) \vee (\forall x(q \to P(x)))$*, donde* q *es una proposición atómica. Se pide evaluar la fórmula anterior en la interpretación* $\mathbb{I} = (D, I)$ *donde* $D = \{a, b, c\}$, $q^I = 1$, $P^I = \{a, b\}$ *y con una asignación* A *tal que* $y^A = c$.

Ejercicio 3 *Sea la frase "Todos los del vecindario odian a una persona."*

a) Formaliza la frase dada en lógica de primer orden, siendo el dominio D *el conjunto de las personas.*

b) Sea $D = \{p_1, p_2, p_3\}$ *y sea* I *definida por las condiciones:*

- p_1 *y* p_2 *pertenecen al vecindario, pero* p_3 *no.*

- p_3 *no odia a nadie.*

- p_1 *y* p_2 *sólo odian a* p_3.

Evalúa el valor de la fórmula obtenida en el apartado a) bajo la interpretación (D, I).

Ejercicio 4 *Sea* $\varphi : (P(x) \wedge \forall x(R(x) \wedge P(y))) \to \exists y Q(x, y)$.
Evalúa φ *con* $D = \{a, b\}$, $P^I = \{a\}$, $R^I = \{b\}$, $Q^I = \{(a, a), (b, b)\}$ *y* $x^A = a$, $y^A = b$.

Ejercicio 5 *Dada la fórmula:*

$$\varphi : (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x)) \to \exists x(P(x) \wedge Q(x)),$$

define una interpretación tal que φ *sea válida y una tal que no lo sea. Concluye que esa formula no es semánticamente válida.*

Ejercicio 6 *Tomando como dominio D el conjunto de las personas, formaliza las siguientes frases. Para cada una de ellas halla una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$, con dominio el conjunto de las personas, que la hace falsa.*

1. *Dos hermanos que compartan el mismo coche y tengan la misma edad, necesariamente son amigos y tienen alguna afición en común.*
2. *Los jugadores de fútbol son amigos de los jugadores de pelota vasca.*
3. *Algunos jugadores de fútbol son amigos de los jugadores de pelota vasca.*
4. *Algunos jugadores de fútbol sólo son amigos de jugadores de pelota vasca.*

Ejercicio 7 *Verifica las implicaciones lógicas de la tabla de los apuntes.*

Ejercicio 8 *Formaliza el siguiente argumento a la lógica de primer orden:*

> *Los que salen hoy de viaje cogerán el autobús. Los ejecutivos viajan siempre en avión. Todos los de mi empresa viajan con maletín. Nadie que haya viajado en avión volverá a hacerlo en autobús. Nadie viaja con maletín a no ser que sea un ejecutivo. Por tanto: nadie en mi empresa sale hoy de viaje.*

Prueba la validez semántica de dicho argumento.

Ejercicio 9 *Considera el dominio $D = \{a, b\}$. Sabemos inicialmente que $P(a)$ es cierto y $P(b)$ es falso. Estudia la satisfacibilidad de los siguientes argumentos bajo cualquier interpretación con dominio D:*

$$\begin{array}{l} \forall x(P(x) \to \neg Q(x)) \\ \forall x(P(x) \wedge R(x)) \\ \hline \forall x(R(x) \wedge \neg Q(x)) \end{array}, \quad \begin{array}{l} \exists x(P(x) \to \neg Q(x)) \\ \exists x(P(x) \wedge R(x)) \\ \hline \exists x(R(x) \wedge \neg Q(x)) \end{array}$$

Estudia la satisfacibilidad de los argumentos anteriores eliminando las hipótesis sobre $P(a)$ y $P(b)$. ¿Son razonamientos válidos?

Ejercicio 10 *Consideramos el dominio $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Consideramos la interpretación I sobre el dominio D que viene dada por los símbolos de predicado:*

$$P(x) \ : \ x \ es \ par$$

$$M(x,y) \ : \ x \ es \ múltiplo \ de \ y,$$

el símbolo de función:

$$o(x) \ = \ 11 - x$$

y la constante 3 que representa al número 3.

Evalúa las siguientes fórmulas en esta interpretación. Justifica tu respuesta en cada caso.

$$\varphi_1 \ : \ \exists x\big(x = o(x)\big)$$

$$\varphi_2 \ : \ \forall x\big(x = o(o(x))\big)$$

$$\varphi_3 \ : \ \exists x\big(P(x) \land M(x,3)\big)$$

$$\varphi_4 \ : \ \forall x\big(M(x,3) \longrightarrow P(x)\big)$$

$$\varphi_5 \ : \ \exists x \forall y \ M(x,y)$$

$$\varphi_6 \ : \ \forall x\Big(P\big(o(x)\big) \longrightarrow \exists y\big(P(y) \land M(y,x)\big)\Big)$$

Ejercicio 11 *Consideramos el par de fórmulas*

$$\varphi \ : \ \forall x \forall y \forall z\Big(P(x,y) \land P(y,z) \longrightarrow P(x,z)\Big)$$

$$\psi \ : \ \forall x \forall y\Big(P(x,y) \longrightarrow P(y,x)\Big)$$

donde P es un símbolo de predicado de aridad 2. Consideramos también el dominio formado por tres elementos $D = \{a,b,c\}$. Define cuatro interpretaciones distintas I_1, I_2, I_3, I_4 con dominio D que cumplan:

- $\varphi^{I_1} = 1, \quad \psi^{I_1} = 1$
- $\varphi^{I_2} = 0, \quad \psi^{I_2} = 0$
- $\varphi^{I_3} = 1, \quad \psi^{I_3} = 0$
- $\varphi^{I_4} = 0, \quad \psi^{I_4} = 1$

Ejercicio 12 *Usando las equivalencias estudiadas, simplifica las expresiones halladas como negaciones formales de las frases del ejercicio 5 de la Hoja 5.*

Ejercicio 13 *Verifica que los conjuntos de conectivos*

$$\{\exists, \neg, \wedge\},\ \{\exists, \neg, \vee\}\ \text{ y } \{\forall, \neg, \wedge, \vee\}$$

son completos en la lógica de primer orden.

Ejercicio 14 *En cada apartado, verifica si las dos fórmulas dadas son equivalentes:*

a) $\varphi_1 : P(x) \to \forall x Q(x),\ \ \varphi_2 : \forall x(P(x) \to Q(x))$.
b) $\varphi_1 : \exists x P(x) \wedge Q(x),\ \ \varphi_2 : \exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

Ejercicio 15 *Considera las dos fórmulas de la lógica de primer orden:*

$$\varphi_1 : \forall y\, \exists x\, (P(x) \wedge Q(y) \to R(x))\,,$$

$$\varphi_2 : \exists x\, \forall y\, (P(x) \wedge (Q(y) \to R(x)))\,,$$

donde P, Q y R son símbolos de predicado de aridad 1.
Determina si las dos fórmulas φ_1 y φ_2 son equivalentes.

Ejercicio 16 *Sean P, Q y R tres símbolos de predicado de aridad 1. Demuestra que las siguientes dos fórmulas φ_1 y φ_2 de la lógica de primer orden no son equivalentes:*

$$\varphi_1 = P(x) \leftrightarrow Q(x) \wedge R(x), \qquad \varphi_2 = (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \wedge (P(x) \leftrightarrow R(x)).$$

Ejercicio 17 *Consideramos el dominio D de todas las palabras de 4 letras sobre el alfabeto $\{A, B, C, D\}$. Consideramos la interpretación I sobre el dominio D que viene dada por los símbolos de predicado:*

$P(x)$: x es una palabra cuyas letras están en orden alfabético (por ejemplo, las palabras $BBCD$ y $ADDD$ tienen sus letras ordenadas alfabéticamente),

$Q(x, y)$: la palabra x contiene exactamente una A menos que la palabra y,

y el símbolo de función:

$f(x)$: la palabra inversa de x (es decir, la palabra que resulta al leer x de derecha a izquierda, por ejemplo $f(ABDC) = CDBA$).

Evalúa (es decir, di si son verdaderas o falsas) las siguientes diez fórmulas en esta interpretación. Justifica tu respuesta en cada caso:

$$\begin{array}{llll}
\varphi_1 & : \ \forall x\ (f(f(x)) = x) & \varphi_2 & : \ \exists x\ (P(x) \land P(f(x))) \\
\varphi_3 & : \ \forall x\ (P(x) \leftrightarrow P(f(x))) & \varphi_4 & : \ \forall x \forall y\ Q(x,y) \\
\varphi_5 & : \ \exists x \exists y\ (Q(x,y) \land \neg P(x) \land \neg P(y)) & \varphi_6 & : \ \exists x \exists y\ (Q(x,y) \land P(x) \land P(y)) \\
\varphi_7 & : \ \forall x \exists y\ Q(x,y) & \varphi_8 & : \ \forall y \exists x\ Q(x,y) \\
\varphi_9 & : \ \forall x \forall y\ (Q(x,y) \to Q(f(x),y)) & \varphi_{10} & : \ \forall x \forall y\ (P(x) \lor P(y) \lor Q(x,y))
\end{array}$$