HOJA 3, EJERCICIO 1

Se trata de hacer la tabla de verdad de cada fórmula y ver si todas las filas son 1 (tautología), 0 (contradicción) o hay de todo (contingencia). En este último caso, los modelos serán las valoraciones que den 1, y los contraejemplos las que den 0.

a) $\neg r \rightarrow q \vee t \vee s$

r	q	t	s	$\neg r$	$q\vee t\vee s$	$\neg r \rightarrow q \vee t \vee s$	
0	0	0	0	1	0	0	} contraejemplo
0	0	0	1	1	1	1	
0	0	1	0	1	1	1	
0	0	1	1	1	1	1	
0	1	0	0	1	1	1	
0	1	0	1	1	1	1	
0	1	1	0	1	1	1	
0	1	1	1	1	1	1	modelos
1	0	0	0	0	0	1	
1	0	0	1	0	1	1	
1	0	1	0	0	1	1	
1	0	1	1	0	1	1	
1	1	0	0	0	1	1	
1	1	0	1	0	1	1	
1	1	1	0	0	1	1	
1	1	1	1	0	1	1	

Es una contingencia

En vez de hacer la tabla de verdad, también podríamos haber razonado del siguiente modo:

- Al ser la fórmula una implicación, la única forma de hacerla falsa será cuando la premisa sea 1 y la consecuencia sea $\emptyset$.
- Sólo hay una manera de que la premisa sea 1: cuando $r = \emptyset$.
- Sólo hay una manera de que la consecuencia sea $\emptyset$: cuando ocurre simultáneamente que $q = \emptyset$, $t = \emptyset$ y $s = \emptyset$, pues las tres están unidas por "$\vee$".
- Por tanto, la única valoración que hace que la fórmula sea $\emptyset$ es $\{r = \emptyset, q = \emptyset, t = \emptyset, s = \emptyset\}$. Es el único contraejemplo.
- Como sólo hay ese contraejemplo y las demás valoraciones son modelos, estamos ante una contingencia.

b) $p \wedge q \wedge r \to s \to t \equiv (p \wedge q \wedge r) \to (s \to t)$

Podemos hacer la tabla de verdad, y tendríamos 32 filas.

En vez de eso, vamos a intentar razonar:

- Como se trata de una implicación, las únicas valoraciones que la hacen falsa (contraejemplos) es cuando la premisa es 1 y la conclusión $\emptyset$.
- La premisa es 1 en aquellas valoraciones en las cuales $p=1$, $q=1$ y $r=1$.
- La conclusión es $\emptyset$ si $s=1$ y $t=\emptyset$.
- Por lo tanto el único contraejemplo es: $\{p=1, q=1, r=1, s=1, t=\emptyset\}$. ~~Las dem~~
- Si el único contraejemplo es ese, las demás valoraciones son modelos.
- Como hay modelos y contraejemplos, la fórmula es una contingencia.

En el apartado "a" podríamos haber hecho un razonamiento similar para evitar el hacer latabla.

c) $(p \wedge q) \vee (r \leftrightarrow s) \rightarrow p$

p	q	r	s	$p \wedge q$	$r \leftrightarrow s$	$(p\wedge q)\vee(r\leftrightarrow s)$	$(p\wedge q)\vee(r\leftrightarrow s)\rightarrow p$	
0	0	0	0	0	1	1	0	c
0	0	0	1	0	0	0	1	m
0	0	1	0	0	0	0	1	
0	0	1	1	0	1	1	0	c
0	1	0	0	0	1	1	0	
0	1	0	1	0	0	0	1	m
0	1	1	0	0	0	0	1	
0	1	1	1	0	1	1	0	c
1	0	0	0	0	1	1	1	
1	0	0	1	0	0	0	1	
1	0	1	0	0	0	0	1	m
1	0	1	1	0	1	1	1	
1	1	0	0	1	1	1	1	
1	1	0	1	1	0	1	1	
1	1	1	0	1	0	1	1	
1	1	1	1	1	1	1	1	

Es una contingencia. Los modelos están marcados con "m" y los contraejemplos con "c".

En este apartado no podemos razonar como en el "b" porque, para que la premisa sea 1, hay muchas posibilidades debido a que es un "v".

d) $\neg(\neg p \rightarrow q \vee r)$

Aquí sería fácil evitar hacer la tabla y razonar como en el apartado b. La implicación sólo será 0 (y por lo tanto la fórmula será 1) si sólo si la valoración es $\{p=0, q=0, r=0\}$. En el resto de casos la implicación será 1 y la fórmula 0. Por lo tanto tenemos una contingencia con un sólo modelo.

Ya que la tabla de verdad es pequeña, la hacemos igualmente:

p	q	r	$\neg p$	$q \vee r$	$\neg p \rightarrow q \vee r = \varphi$	$\neg\varphi$	
0	0	0	1	0	0	1	modelo
0	0	1	1	1	1	0	contraejemplo
0	1	0	1	1	1	0	
0	1	1	1	1	1	0	
1	0	0	0	0	1	0	
1	0	1	0	1	1	0	
1	1	0	0	1	1	0	
1	1	1	0	1	1	0	

e) $p \wedge (q \vee r) \rightarrow s \vee t$

Como la tabla nos quedaría muy grande (32 filas), vamos a razonar. ~~Parag~~ Para que la implicación sea $\emptyset$:

- ~~Para que~~ La conclusión debe ser $\emptyset$, lo cual se consigue con $s = \emptyset$ y $t = \emptyset$.
- La premisa tiene que ser 1, lo cual se consigue con $p = 1$ y tres posibles combinaciones de q y r: $\{q=1, r=1\}$, $\{q=\emptyset, r=1\}$ y $\{q=1, r=\emptyset\}$
- Por lo tanto, los contraejemplos son 3:

  $\{s=\emptyset, t=\emptyset, p=1, q=\emptyset, r=1\}$

  $\{s=\emptyset, t=\emptyset, p=1, q=1, r=\emptyset\}$

  $\{s=\emptyset, t=\emptyset, p=1, q=1, r=1\}$
- El resto son modelos.
- Como hay contraejemplos y modelos, tenemos una contingencia.

Si no hubiéramos podido razonar así, no nos quedaría + remedio que hacer la tabla de verdad.

HOJA 3, EJERCICIO 3

a) Verdadera. Si todas las valoraciones de φ son ~~[illegible]~~ $\emptyset$ (insatisfacible o contradicción), al negar φ nos saldrá que todas son 1 (tautología).

b) Verdadera. El razonamiento en sentido contrario también se cumple, invirtiendo la justificación de "a".

c) Verdadera. Los modelos de φ se convertirán en contraejemplos en $\neg\varphi$, y los contraejemplos de φ se convertirán en modelos en $\neg\varphi$.

d) Falsa. Contraejemplo: φ es tautología (y por lo tanto satisfacible), y por lo tanto $\neg\varphi$ es contradicción (y por lo tanto no satisfacible).

e) Verdadero. φ es satisfacible si sólo si es contingencia o tautología. Examinemos que en los dos casos es verdadero el razonamiento:

- Si φ es tautología, $\neg\varphi$ es contradicción. Una contradicción no es una tautología. Por tanto, verdadero.
- Si φ es contingencia, $\neg\varphi$ es contingencia también. Una contingencia no es una tautología, por lo tanto verdadero.

HOJA 3, EJERCICIO 5

Hay que ver si cada uno de los razonamientos son tautologías, usando, por ejemplo, tablas de verdad.

a) $\begin{array}{l} p \to \neg r \\ q \to r \\ \hline \neg(p \wedge q) \end{array} \equiv \varphi = (p \to \neg r) \wedge (q \to r) \to \neg(p \wedge q)$

p	q	r	$\neg r$	$p \to \neg r$	$q \to r$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$(p \to \neg r) \wedge (q \to r)$	φ
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1	0	0	1

Es tautología, por tanto el razonamiento es válido.

También lo podríamos haber hecho sin necesidad de hacer la tabla de verdad, al estilo de algunos apartados del ejercicio 1. Como buscamos demostrar que sea una tautología, basta con encontrar un contraejemplo para que no lo sea. Como es una implicación, ésta sólo es falsa si la premisa es verdadera (todas las premisas tienen que ser verdaderas, pues están unidas por "$\wedge$") y la conclusión falsa. Para que la conclusión sea falsa, en este caso ~~tanto~~ p como q tienen que ser verdaderas.

Como p y q ~~son~~ son verdaderas, las dos premisas empiezan por 1, por tanto para que ambas sean verdaderas lo que hay después de la flecha en ambas también tiene que ser 1. Pero si hacemos que $r = 1$, una de las premisas ~~será verd 1 pero la ot~~ (la segunda) será 1, pero la otra (la primera) será $\emptyset$ y por lo tanto la unión de ambas con "1" será $\emptyset$, lo cual hace que todo el razonamiento sea 1. Igualmente, si hacemos que $r = \emptyset$, tenemos el mismo resultado (esta vez la 1ª premisa es verdadera y la 2ª es falsa, pero el resultado es el mismo).

Por lo tanto, es imposible que haya un contraejemplo y, en conclusión, estamos ante una tautología.

b) $f = ((q \vee \neg s) \to r) \wedge (\neg q \to r) \wedge (p \to \neg s) \wedge (r \to s) \to (p \to r)$

Vamos a intentar primero encontrar un contraejemplo o a razonar que no puede existir, como hicimos en el apartado anterior.

Para un contraejemplo, tiene que cumplirse lo siguiente:

- La conclusión tiene que ser Ø. Esto se consigue con $\{p = 1, \ r = \emptyset\}$.
- Todas las hipótesis tienen que ser 1, pues están unidas por "$\wedge$".
  - La 4ª es siempre 1, pues $r = \emptyset$.
  - La 2ª será 1 si si $\neg q$ es Ø (pues $r = \emptyset$). Por tanto q tiene que ser 1.
  - Si q es 1, la 1ª hipótesis tiene que ser Ø, pues su premisa sería 1 y la conclusión Ø (pues $r = \emptyset$).
  - Por lo tanto es imposible conseguir que todas las hipótesis sean 1 siendo la conclusión Ø.

Por lo tanto es imposible encontrar un contraejemplo, por lo que el razonamiento es una tautología.

De todos modos, si no estamos seguros, podemos hacer la tabla de verdad de 16 filas:

p	q	r	s	$\neg q$	$\neg s$	$q \vee \neg s$	$q \vee \neg s \to r$	$\neg q \to r$	$p \to \neg s$	$r \to s$	$p \to r$	φ
0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	
0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1

c)

$$f = \frac{p \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow s)}{(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow s)}$$

~~No es una tautología porque podemos encontrar varios contraejemplos. Por ejemplo: $p=1$, $s=0$,~~

De nuevo, podemos resolver el ejercicio viendo si es posible encontrar un contraejemplo. Para ello:

- La conclusión tiene que ser $\emptyset$, lo cual nos dice que $p=1$, $s=\emptyset$ y $(q\rightarrow r)=1$.
- La hipótesis tiene que ser 1.
  - Como $p=1$, $((q\rightarrow r)\rightarrow s)$ tiene que ser 1.
  - Como $s=\emptyset$, $(q\rightarrow r)$ tiene que ser $\emptyset$ para que $((q\rightarrow r)\rightarrow s)$ sea 1, como exigimos en el punto anterior.
  - Por tanto, $(q\rightarrow r)$ tiene que ser $\emptyset$ en la hipótesis y 1 en la conclusión, lo cual no es posible.

Por tanto hemos visto que es imposible encontrar un contraejemplo, y por lo tanto el razonamiento es verdadero.

En todos estos razonamientos que hacemos para evitar hacer la tabla de verdad, lo que estamos haciendo es una demostración por reducción al absurdo. Asumimos que existe un contraejemplo, llegamos a un absurdo, y por lo tanto demostramos que nuestra suposición es falsa (es decir: no existe ningún contraejemplo).

Vamos a hacer la tabla de verdad:

p	q	r	s	$q\to r$	$(q\to r)\to s$	$p\to((q\to r)\to s)$	$p\to s$	$(q\to r)\to(p\to s)$	φ
0	0	0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	(1)

Como todas las filas (valoraciones) resultan en 1, es una contingencia.

d) Es la fórmula recíproca del apartado c.

Para demostrar que es una tautología, vamos a probar de nuevo haciendo una demostración por reducción al absurdo: vamos a suponer que existe un contraejemplo, y, si llegamos a un absurdo, es porque no existe ningún contraejemplo y por lo tanto estamos ante una tautología.

- Para que φ sea $\emptyset$, la premisa tiene que ser 1 y la conclusión $\emptyset$.
- Para que la conclusión sea $\emptyset$, $p=1$, $q \to r = 1$ y $s=\emptyset$.
- En la premisa, sabemos que $q \to r$ tiene que ser 1, por lo tanto $p \to s$ tiene que ser 1 también. Pero como $p=1$ y $s=\emptyset$, $p \to s$ es $\emptyset$, no 1. Hemos llegado a un absurdo.

Por tanto es imposible que existe un contraejemplo. φ es una tautología, por lo que la deducción es válida.

Como en apartados anteriores, si no nos queda claro cómo hacer el método de reducción al absurdo, podemos hacer la tabla de verdad y nos tiene que quedar todo unos.

e) Antes de intentar hacer la tabla de verdad (32 filas) vamos a intentar buscar un contraejemplo. Si lo encontramos, la deducción ya no sería una tautología y por lo tanto no sería válida.

- Para que la fórmula valga $\emptyset$, todas las premisas tienen que ser 1 (pues están unidas por "$\wedge$") y la conclusión $\emptyset$.
- Para que la conclusión sea $\emptyset$ sólo hay una posibilidad: $r=\emptyset$ y $t=\emptyset$.
- ~~En la~~ Para que la segunda premisa sea 1, $q=\emptyset$ ya que sabemos que $r=\emptyset$.
- En la 1ª premisa, $p=\emptyset$ porque sabemos que $q=\emptyset$.
- En la tercera premisa sabemos que $p=\emptyset$, por lo que, para que la premisa valga 1, podemos hacer que $s=1$.

Por tanto hemos encontrado el contraejemplo $\{r=\emptyset,\ t=\emptyset,\ q=\emptyset,\ p=\emptyset,\ s=1\}$. Al haber al menos un contraejemplo, la fórmula no es una tautología.

Como en apartados anteriores, podríamos haber hecho la tabla de verdad en vez de ésto.

HOJA 3, EJERCICIO 6

Primero vamos a formalizar lo que cada uno dice:

Proposiciones atòmicas:

- p = Pelàez es inocente
- q = Quesada es inocente
- r = Rodriguez es inocente

Lo que cada uno nos cuenta es lo siguiente:

- Pelàez dice: $\neg q \wedge r$
- Quesada dice: $\neg p \to \neg r$
- Rodriguez dice: $r \wedge (\neg p \vee \neg q)$

a) El enunciado nos dice que todos son inocentes, es decir: $p=1$, $q=1$ y $r=1$. Que una persona mienta significa que lo que ha dicho es falso, es decir su fòrmula vale $\emptyset$ cuando sustituimos sus proposiciones atòmicas por la información (valoración) que nos han dado $\{p=1, q=1, r=1\}$

- Pelàez: $\neg \underset{1}{\underline{q}} \wedge \underset{1}{\underline{r}}$

$\neg q = \emptyset$

$\emptyset \Rightarrow$ MIENTE

- Quesada: $\neg p \to \neg r \equiv \neg 1 \to \neg 1 \equiv \emptyset \to \emptyset \equiv 1$

Dice la verdad

- Rodriguez: $r \wedge (\neg p \vee \neg q) \equiv 1 \wedge (\neg 1 \vee \neg 1) \equiv 1 \wedge \emptyset \equiv \emptyset$

MIENTE

b) Si todos dicen la verdad, significa que las tres fórmulas valen 1. En este caso, podemos ir sacando el valor de cada proposición atómica fácilmente:

- Como $\neg q \wedge r = 1$, necesariamente $r=1$ y $q=\emptyset$.
- Como $\neg p \rightarrow \neg r = 1$ y $r=1$, necesariamente $\neg p = \emptyset$ y, por tanto, $p=1$.

Ya tenemos el resultado, por lo cual no necesitamos la declaración de Rodríguez:

- Como $r=1 \rightarrow$ Rodríguez es inocente
- Como $q=\emptyset \rightarrow$ Quesada es culpable
- Como $p=1 \rightarrow$ Peláez es inocente.

En este ejercicio ha sido muy fácil, pero podría haber otro en que hacerlo así no fuera posible. Entonces no nos quedaría más remedio que hacer una tabla de verdad de la conjunción de las tres fórmulas, y mirar el valor de p, q y r en las filas en las cuales las tres fórmulas fueran verdaderas. Vamos a hacerlo:

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	(*) $\neg q \wedge r$	(*) $\neg p \to \neg r$	$\neg p \vee \neg q$	(*) $r \wedge (\neg p \vee \neg q)$	
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	
0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	
0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	
0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	#
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	
1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	

En este caso, la única valoración (fila) que me interesa es la marcada con #, pues es la única que cumple con la información que me han dado como cierta (que las tres columnas marcadas con (*) sean 1).

En esa fila, tenemos: $\{p = 1,\ q = 0,\ r = 1\}$. Efectivamente, nos sale lo mismo que con el anterior método.

Si en otro ejercicio nos aparecieran varias filas marcadas con #, no podríamos saber si nos está mintiendo o diciendo la verdad todas aquellas proposiciones atómicas que tengan valores diferentes en las filas marcadas con #.

c) Se trata de un problema similar al apartado anterior, pero ahora cambia la información cierta que tenemos. La información que tenemos ahora es que las siguientes tres fórmulas son ciertas:

1) $p \leftrightarrow \neg q \wedge r$
2) $q \leftrightarrow (\neg p \rightarrow \neg r)$
3) $r \leftrightarrow (r \wedge (\neg p \vee \neg q))$

Son dobles implicaciones porque, si pusiéramos sólo la implicación en vez de la coimplicación, no estaríamos formalizando la información de que "los culpables mienten". Ej: con la primera, si $p=1$, $\neg q \wedge r$ tiene que ser 1. Pero si $p=0$, $\neg q \wedge r$ tiene que ser 0.

Como las coimplicaciones admiten varias posibilidades para hacerse ciertas, el primer método que utilizamos en el apartado "b" ya no se puede utilizar tan fácilmente aquí.

Por tanto, utilizaríamos el segundo método del apartado "b" (el hacer la tabla de verdad).

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$\neg q\wedge r$	$\neg p\to\neg r$	$\neg p\vee\neg q$	$r\wedge(\neg p\vee\neg q)$	(*) $p\leftrightarrow\neg q\wedge r$	(*) $q\leftrightarrow(\neg p\to\neg r)$	(*) $r\leftrightarrow r\wedge(\neg p\vee\neg q)$	
0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	
0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	
0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	#
0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	
1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	$\emptyset$	

La única valoración en la cual las tres columnas marcadas con * es la fila marcada con #. En dicha fila: $p=\emptyset$, $q=1$ y $r=\emptyset$. Por lo tanto Quesada es inocente y los demás culpables.

Otra forma de hacerlo sería por reducción al absurdo. Vamos a suponer algo y, si llegamos a un absurdo, podremos dar por cierto lo contrario de lo que hemos supuesto.

Vamos a empezar suponiendo $p=1$ (Peláez inocente), pues la primera fórmula, al tener un "$\wedge$", se presta a sacar fácilmente el valor de q y r. Efectivamente, si $p=1$, $\neg q\wedge r$ tiene que ser forzosamente 1, y por lo tanto $q=\emptyset$ y $r=1$. En la segunda fórmula, como $q=\emptyset$, $\neg p\longrightarrow\neg r$ tiene que ser $\emptyset$ también, lo cual es imposible pues es 1 porque $p=1$ y $r=1$. Así pues, como hemos llegado a un absurdo suponiendo que $p=1$, entonces necesariamente $\underline{p=\emptyset}$. Con esta nueva información cierta, volvemos a repetir el proceso. Vamos a suponer $q=\emptyset$ porque la segunda fórmula se presta a sacar r, pues $\neg p \rightarrow \neg r$ tiene que ser $\emptyset$ y, para ello, sólo existe la posibilidad de que $\neg p$ sea 1 y $\neg r$ sea $\emptyset$. Que $\neg p = 1$ es correcto, pues sabemos que $p=\emptyset$. Para que $\neg r = \emptyset$, entonces $r = 1$. Sustituyendo $p=\emptyset$, $q=\emptyset$ y $r=1$ en la primera fórmula, vemos que ésta no se cumple, por lo tanto hemos llegado a un absurdo y por lo tanto $\underline{q = 1}$.

Ya no es necesario hacer ninguna suposición más, pues, con la segunda fórmula, podemos obtener que <u>r tiene que ser</u> $\emptyset$ si queremos que la segunda fórmula sea verdadera (1).

Efectivamente, llegamos al mismo resultado que con la tabla de verdad.

HOJA 3, EJERCICIO 10

p = trabajar
q = ser feliz

El enunciado nos dice: $\neg(p \to q)$

1) Hay que comprobar si es una tautología:

$$\neg(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \to \neg q) = \varphi$$

p	q	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \to \neg q$	φ
0	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	0

No es una tautología, por lo tanto no son lógicamente equivalentes.

2) $\neg(p \to q) \leftrightarrow (q \to p) = \varphi$

p	q	$\neg(p \to q)$	$q \to p$	φ
0	0	0	1	0
0	1	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0

No es tautología, por lo tanto no son lógicamente equivalentes

3) $\neg(p \to q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) = \varphi$

p	q	$\neg(p\to q)$	$\neg q$	$p\wedge\neg q$	$\neg(p\wedge\neg q)$	φ
0	0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0

No es tautología, por tanto no son lógicamente equivalentes.

4) $\neg(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q) = \varphi$

Ya sabemos por los apuntes que esto es una equivalencia lógica, pero lo comprobamos igualmente:

p	q	$\neg(p\to q)$	$\neg q$	$p\wedge\neg q$	φ
0	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1

5) $\varphi = \neg(p \to q) \leftrightarrow (p \vee \neg q)$

No son lógicamente equivalentes

p	q	$\neg(p\to q)$	$\neg q$	$p\vee\neg q$	$\neg(p\to q)\leftrightarrow(p\vee\neg q)$
0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0

HOJA 3, EJERCICIO 13

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \oplus q$	$p \vee q$	$p \downarrow q$	$p \wedge q$	$p \uparrow q$
0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	1	0

HOJA 3, EJERCICIO 16

a) $\{(p \vee \neg q) \to r,\ \neg p \to t,\ s \to \neg q,\ r \to q\} \models s \to t$

Para que esta fórmula sea un argumento válido, debería ser una tautología. Si lo es, su negación será una contradicción y por lo tanto el tableaux de la negación debería ser cerrado.

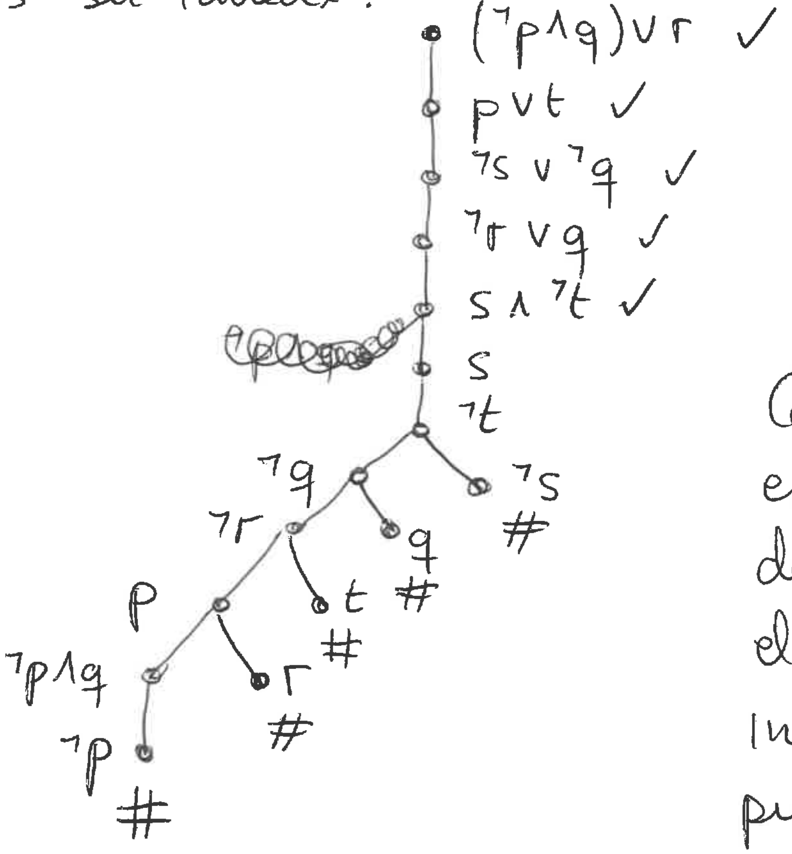
La negación del razonamiento es la conjunción de todas las premisas y la negación de la conclusión, es decir:

$$\{(p \vee \neg q) \to r,\ \neg p \to t,\ s \to \neg q,\ r \to q,\ s \wedge \neg t\}$$

Quitamos flechas y dobles flechas. Nos queda:

$$\{(\neg p \wedge q) \vee r,\ p \vee t,\ \neg s \vee \neg q,\ \neg r \vee q,\ s \wedge \neg t\}$$

Hacemos su tableax:



Como el tableaux es cerrado, queda demostrado que el razonamiento inicial es válido, pues su negación es una contradicción

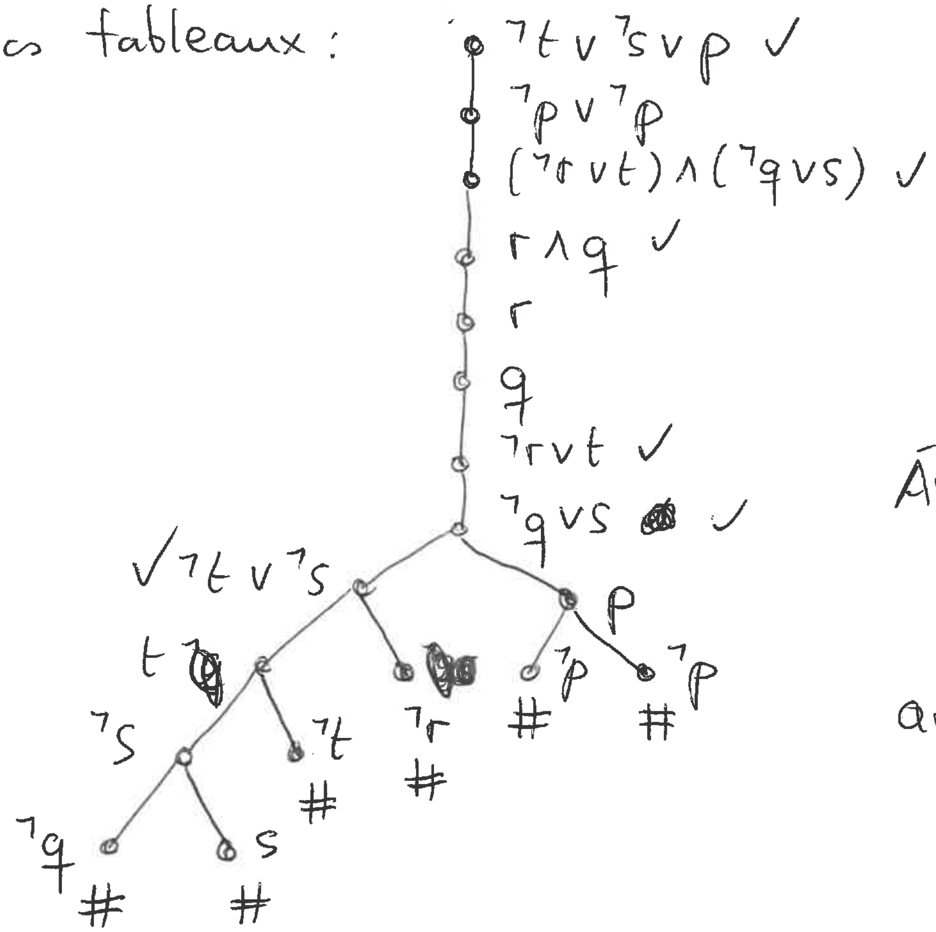
b) La negación del argumento es:

$\{ t \to (s \to p),\ p \to \neg p,\ (r \to t) \wedge (q \to s),\ r \wedge q \}$

Quitamos implicaciones:

$\{ \neg t \vee \neg s \vee p,\ \neg p \vee \neg p,\ (\neg r \vee t) \wedge (\neg q \vee s),\ r \wedge q \}$

Hacemos tableaux:



Árbol tableaux cerrado

$\Downarrow$

argumento válido

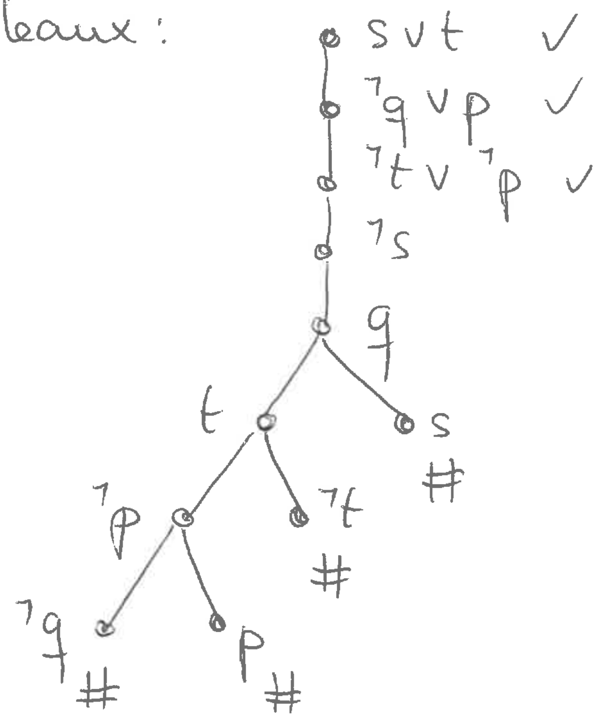
c) La negación del argumento es:

$\{ s \vee t,\ q \to p,\ t \to \neg p,\ \neg s,\ q \}$

Quito implicaciones:

$\{ s \vee t,\ \neg q \vee p,\ \neg t \vee \neg p,\ \neg s,\ q \}$

Hago tableaux:



Tableaux cerrado

$\Downarrow$

Argumento original válido

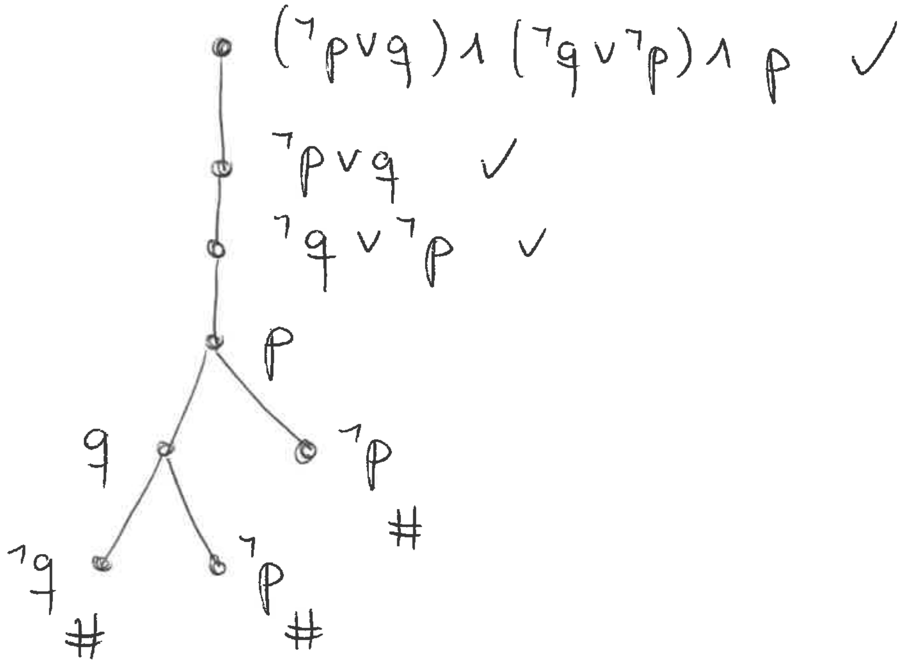
HOJA 3, EJERCICIO 17

Para comprobar si φ es una contradicción, hacemos su tableaux y vemos si nos queda cerrado.

Primero quitamos las implicaciones. Nos queda:

$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \wedge p$$

Hacemos tableaux:



Como nos queda cerrado, φ es una contradicción.

HOJA 3, EJERCICIO 21

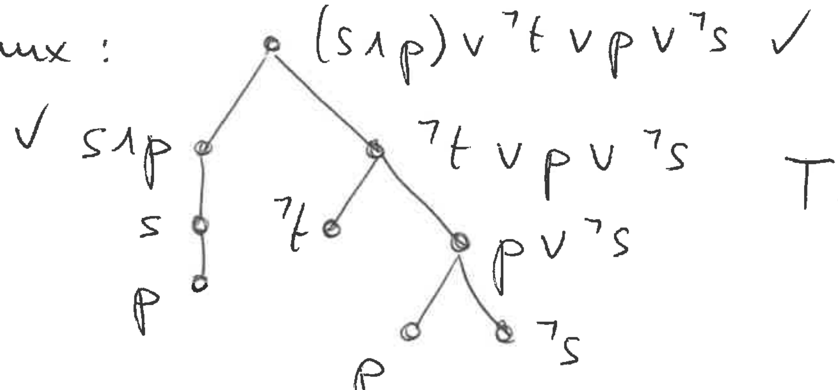
1) Primero vemos si es una contradicción, haciendo el tableaux de φ a ver si nos queda cerrado:

$\varphi = \neg s \vee \neg p \rightarrow (t \rightarrow (p \vee \neg s))$

Quitamos flechas:

$\varphi = (s \wedge p) \vee \neg t \vee p \vee \neg s$

Hacemos tableaux:

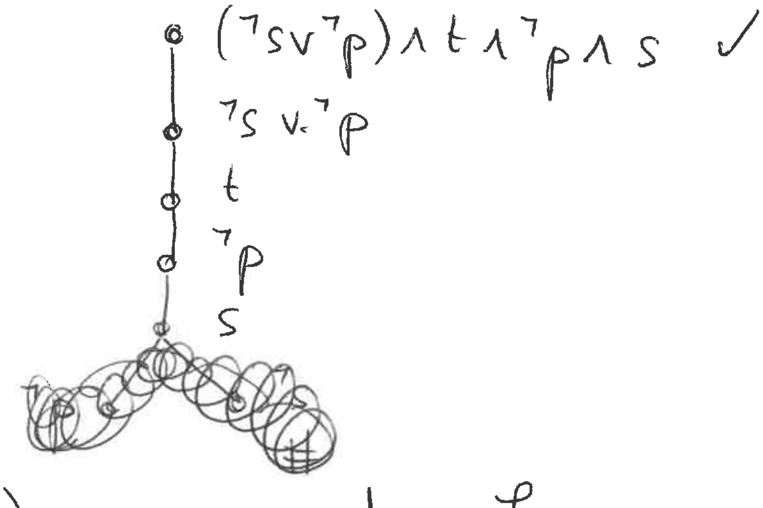


$T(\varphi)$

Como no es cerrado, φ puede ser contingencia o tautología. Para saberlo, debemos examinar $T(\neg\varphi)$.

$\neg\varphi = (\neg s \vee \neg p) \wedge t \wedge \neg p \wedge s$

$T(\neg\varphi)$:



Como $T(\neg\varphi)$ no es cerrado, φ es una contingencia.

2) $\varphi \equiv (p \to q) \to (q \to p) \equiv \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee p) \equiv (p \wedge \neg q) \vee \neg q \vee p$

$T(\varphi)$: $(p \wedge \neg q) \vee \neg q \vee p$ ✓

✓ $p \wedge \neg q$ $\qquad$ $\neg q \vee p$ ✓

p $\qquad$ $\neg q$ $\qquad$ p

$\neg q$

Como $T(\varphi)$ no es cerrado, tenemos que hacer $T(\neg\varphi)$

$\neg\varphi \equiv (\neg p \vee q) \wedge q \wedge \neg p$

$T(\neg\varphi)$: $(\neg p \vee q) \wedge q \wedge \neg p$ ✓

$\neg p \vee q$

q

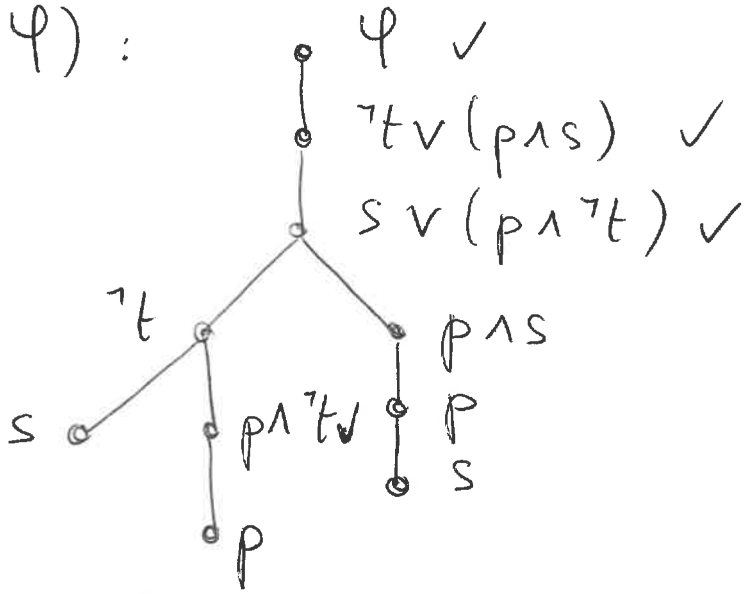
$\neg p$

Como $T(\neg\varphi)$ no es cerrado, φ es contingencia.

3) $\varphi = (t \to (p \wedge s)) \wedge (\neg s \to p \wedge \neg t) \equiv$

$\equiv (\neg t \vee (p \wedge s)) \wedge (s \vee (p \wedge \neg t))$

$T(\varphi)$:



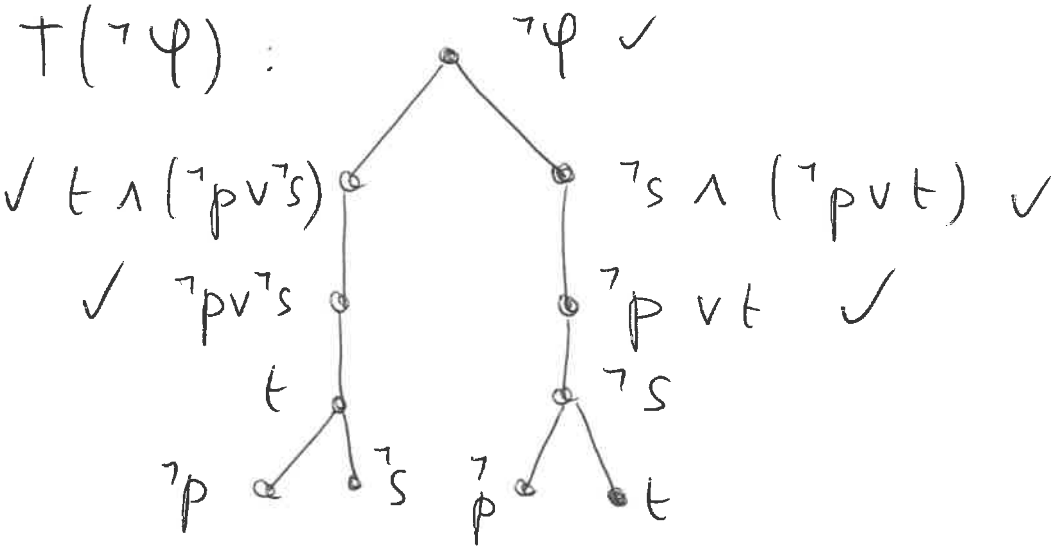
Como $T(\varphi)$ no es cerrado, hago $T(\neg\varphi)$:

$\neg\varphi = \neg(\neg t \vee (p \wedge s)) \vee \neg(s \vee (p \wedge \neg t)) \equiv$

$\equiv (t \wedge \neg(p \wedge s)) \vee (\neg s \wedge \neg(p \wedge \neg t)) \equiv$

$\equiv (t \wedge (\neg p \vee \neg s)) \vee (\neg s \wedge (\neg p \vee t))$

$T(\neg\varphi)$:



Como $T(\neg\varphi)$ no es cerrado, φ es contingencia.

4) $\varphi = (\neg(\neg(\neg p \vee r) \vee q)) \rightarrow (\neg(p \wedge q) \vee r) \equiv$

$\equiv \neg(\neg(\neg(\neg p \vee r) \vee q)) \vee (\neg(p \wedge q) \vee r) \equiv$

$\equiv \neg(\neg((p \wedge \neg r) \vee q)) \vee (\neg p \vee \neg q \vee r) \equiv$

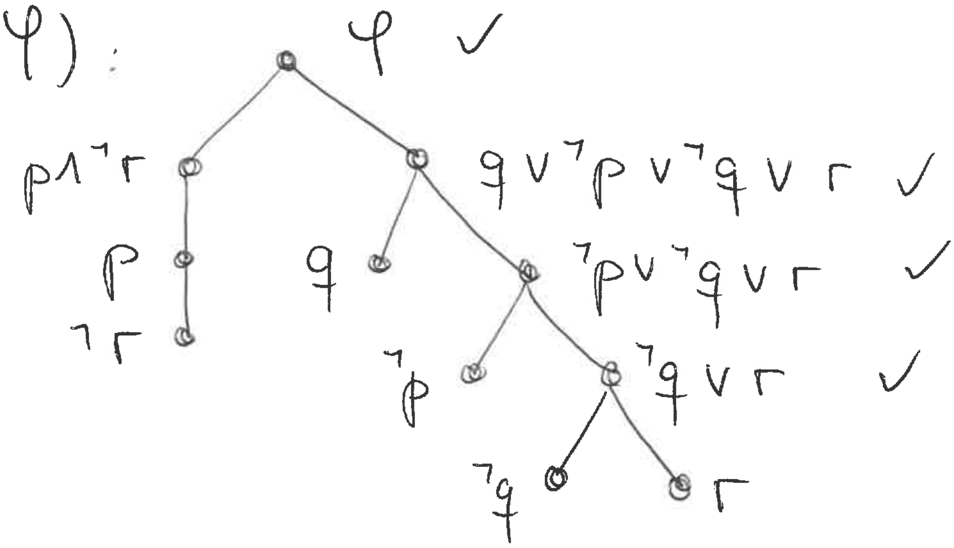
$\equiv \neg(\neg(p \wedge \neg r) \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee \neg q \vee r) \equiv$

$\equiv \neg((\neg p \vee r) \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee \neg q \vee r) \equiv$

$\equiv (\neg(\neg p \vee r) \vee q) \vee (\neg p \vee \neg q \vee r) \equiv$

$\equiv (p \wedge \neg r) \vee q \vee \neg p \vee \neg q \vee r$

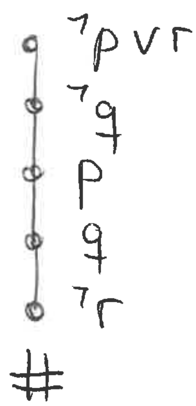
$T(\varphi)$:



Como $T(\varphi)$ no es cerrado, hacemos $T(\neg\varphi)$:

$\varphi = (\neg p \vee r) \wedge \neg q \wedge p \wedge q \wedge \neg r$

$T(\neg\varphi)$:



Como $T(\neg\varphi)$ es cerrado, φ es una tautología.

HOJA 3, EJERCICIO 22

Los tableaux de φ y $\neg\varphi$ en cada uno de los cuatro apartados ya los tenemos hechos en el ejercicio anterior.

1) - Mirando $T(\varphi)$, obtenemos:

$\phi_1 = p \wedge s \quad \phi_2 = \neg t \quad \phi_3 = p \quad \phi_4 = \neg s$

$FND(\varphi) = \phi_1 \vee \phi_2 \vee \phi_3 \vee \phi_4 = (p \wedge s) \vee \neg t \vee p \vee \neg s$

- Mirando $T(\neg\varphi)$, obtenemos:

$\phi_1 = s \wedge \neg p \wedge t$

Por tanto:

$FND(\neg\varphi) = \phi_1 = s \wedge \neg p \wedge t$

$FNC(\varphi) = \neg FND(\neg\varphi) = \neg s \vee p \vee \neg t$

2) - Mirando $T(\varphi)$, obtenemos:

$\phi_1 = p \wedge \neg q \quad \phi_2 = \neg q \quad \phi_3 = p$

$FND(\varphi) = (p \wedge \neg q) \vee \neg q \vee p$

- Mirando $T(\neg\varphi)$, obtenemos:

$\phi_1 = \neg p \wedge q$

$FND(\neg\varphi) = \neg p \wedge q$

$FNC(\varphi) = \neg FND(\neg\varphi) = p \vee \neg q$

3) - Mirando $T(\varphi)$, obtenemos:

$$FND(\varphi) = (s \wedge \neg t) \vee (p \wedge \neg t) \vee (p \wedge s)$$

- Mirando $T(\neg\varphi)$, obtenemos:

$$FND(\neg\varphi) = (\neg p \wedge t) \vee (\neg s \wedge t) \vee (\neg p \wedge \neg s) \vee (\neg s \wedge t)$$

$$FNC(\varphi) = \neg FND(\neg\varphi) = (p \vee \neg t) \wedge (s \vee \neg t) \wedge (p \vee s) \wedge (s \vee \neg t)$$

4) - Mirando $T(\varphi)$, obtenemos:

$$FND(\varphi) = (p \wedge \neg r) \vee q \vee \neg p \vee \neg q \vee r \equiv \top$$

- Mirando $T(\neg\varphi)$, obtenemos:

$FND(\neg\varphi) = \bot$ (no hay ramas abiertas, la cerrada contribuye con $\bot$)

$$FNC(\varphi) = \neg FND(\neg\varphi) \equiv \neg\bot \equiv \top$$

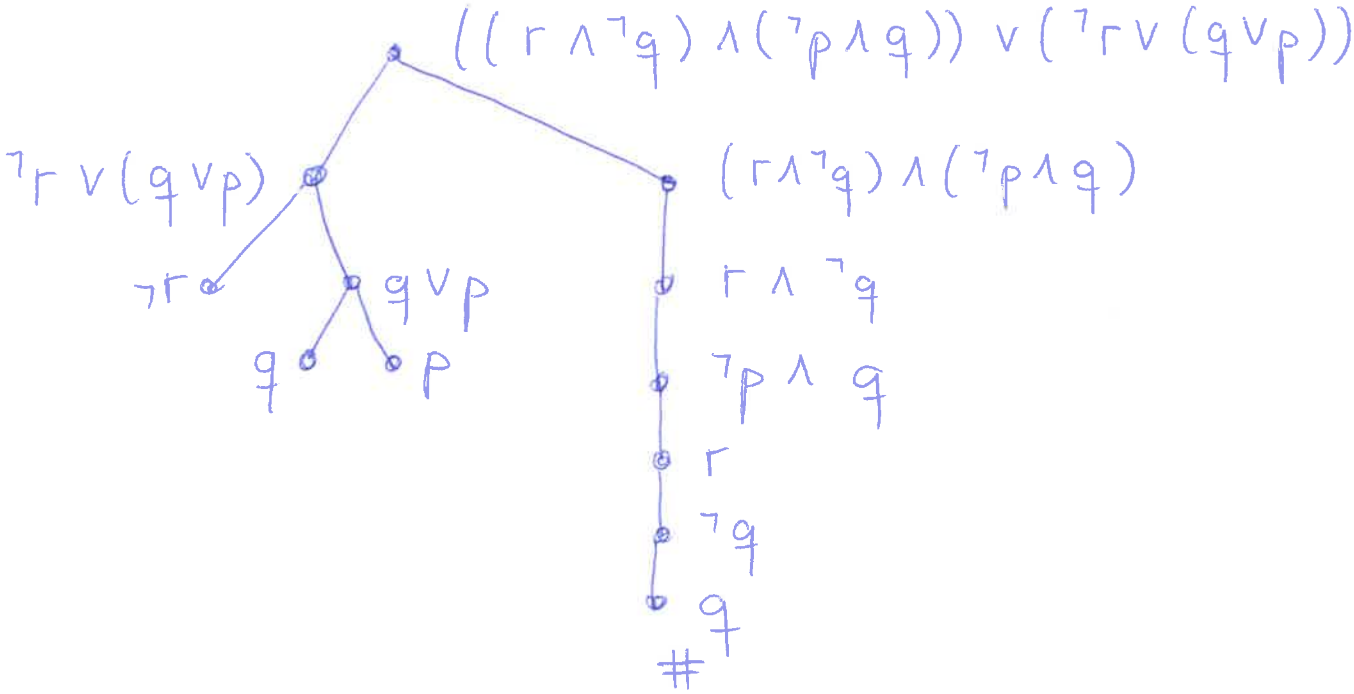
EJERCICIO 24, HOJA 3

a) $\varphi: ((r \to q) \vee (p \vee \neg q)) \to (r \to (q \vee p)) \equiv$

$\equiv \neg((\neg r \vee q) \vee (p \vee \neg q)) \vee (\neg r \vee (q \vee p)) \equiv$

$\equiv (\neg(\neg r \vee q) \wedge \neg(p \vee \neg q)) \vee (\neg r \vee (q \vee p)) \equiv$

$\equiv ((r \wedge \neg q) \wedge (\neg p \wedge q)) \vee (\neg r \vee (q \vee p))$

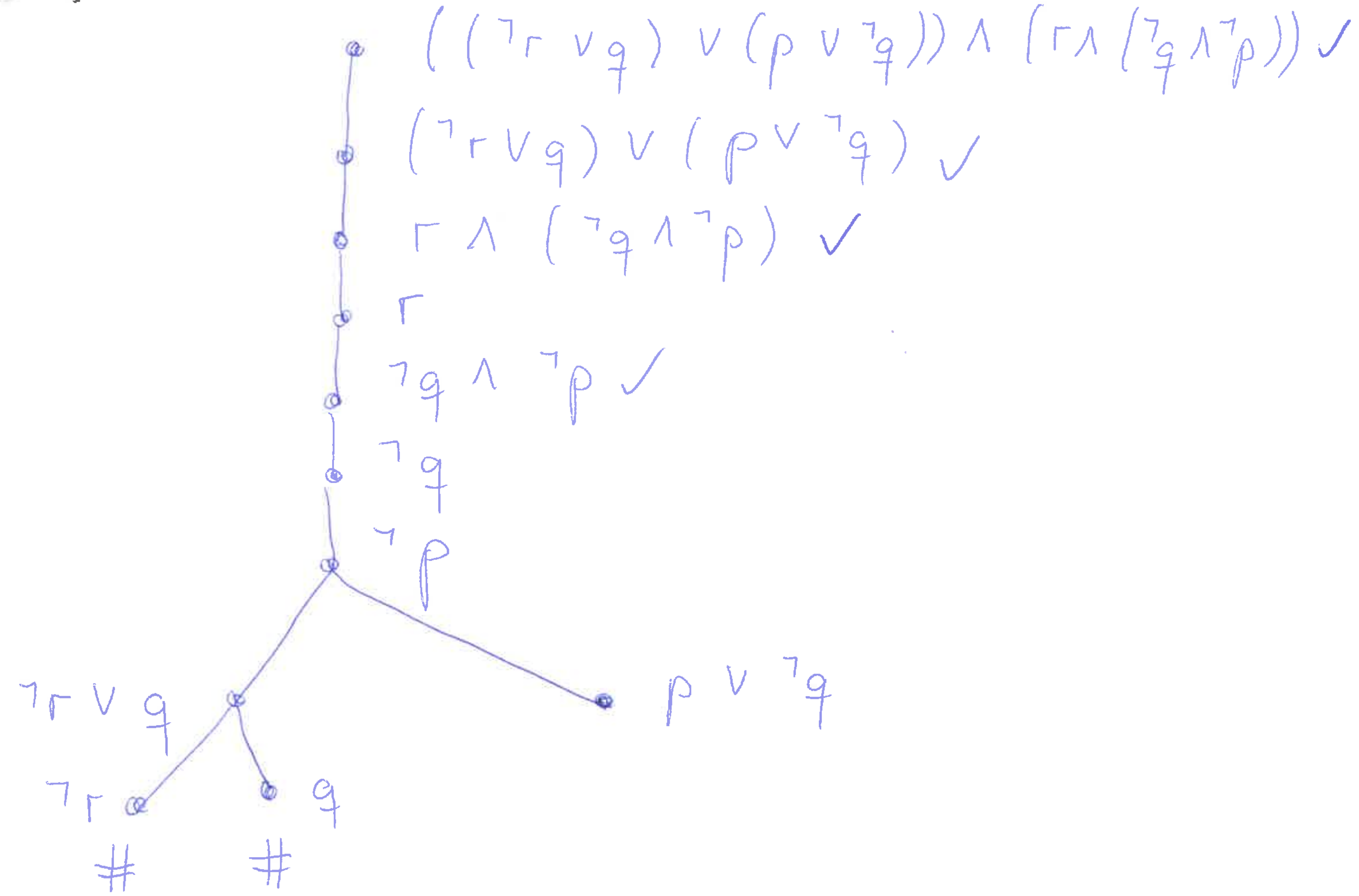


Como tiene alguna rama abierta, φ es satisfacible y hay que hacer el tableaux de $\neg\varphi$, para ver si φ es tautología o contingencia.

$\neg\varphi: \neg((r \wedge \neg q) \wedge (\neg p \wedge q)) \wedge \neg(\neg r \vee (q \vee p)) \equiv$

$\equiv (\neg(r \wedge \neg q) \vee \neg(\neg p \wedge q)) \wedge (r \wedge \neg(q \vee p)) \equiv$

$\equiv ((\neg r \vee q) \vee (p \vee \neg q)) \wedge (r \wedge (\neg q \wedge \neg p))$



Como el tableaux de $\neg\varphi$ no es cerrado, φ es contingencia.

b) $FND(\varphi) = \neg r \vee q \vee p$

(disyunción de las ramas abiertas del tableaux de φ)

c) • Cualquier valoración en la cual $\neg r$ sea 1 sería un modelo, según el tableaux de φ. Por ejemplo $\{p=0, q=0, r=0\}$.

• Una valoración contraejemplo de φ sería $\{p=0, q=0, r=1\}$ xq, según vemos en el tableaux de $\neg\varphi$, esta valoración sería un modelo de $\neg\varphi$ (y por lo tanto un contraejemplo de φ).