EXAMEN PARCIAL DE LÓGICA

Demostración de la lógica proposicional con Gentzen
Grado en Ingeniería de la Ciberseguridad, URJC
7 de noviembre de 2019
Este examen cuenta 2 puntos en la nota final ordinaria de la asignatura.

Un ejercicio se evaluará con un 0 si cumple alguno de los siguientes criterios:

- Si no se respetan los requisitos del enunciado.
- Si se utilizan reglas básicas que no existen, o reglas derivadas que no hemos visto en clase (es decir: que no aparezcan en la lista adjunta de reglas derivadas)
- Aplicar reglas que sí existen, pero aplicarlas mal, con un resultado incorrecto
- Si se utilizan procedimientos o métodos que no se pueden hacer en Gentzen
- Si se deja a medias una demostración o no se llega a la conclusión a la que se tiene que llegar.
- Cualquier otro fallo grave que el profesor juzgue conveniente

Se restarán puntos en un ejercicio si:

- No se respeta la notación vista en clase
- Se saltan pasos
- No se indican claramente las reglas aplicadas
- Se generan líneas innecesariamente
- Cualquier otro fallo que el profesor juzgue conveniente

1. (0,6 puntos) Demuestra, utilizando Gentzen, el teorema $\vdash (p \rightarrow \neg r) \lor \neg(p \rightarrow \neg r)$

2. (0,6 puntos) Demuestra, utilizando sólo las 8 reglas básicas de Gentzen: $\{\neg p \lor q \rightarrow \neg r, r\} \vdash \neg(\neg p \lor q)$

3. (0,8 puntos) Demuestra, utilizando sólo las 8 reglas básicas de Gentzen: $\{\neg r \lor \neg q, \neg r \lor p\} \vdash \neg r \lor (\neg q \land p)$

REGLAS DERIVADAS DEL SISTEMA DE GENTZEN

T1 (Identidad): $\varphi \vdash \varphi$

T2 (Silogismo): $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \chi$

T3 (Modus Ponens): $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash \psi$

T4 (Excontradictione Quodlibet): $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi$

T5 (Producto condicional): $\{\varphi \to \psi, \varphi \to \chi\} \vdash \varphi \to \psi \wedge \chi$

T6 (Contraposición): T6.1: $\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$ T6.2: $\varphi \to \neg\psi \vdash \psi \to \neg\varphi$

T6.3: $\neg\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \varphi$

T7 (Interdefinición 1): T7.1: $\varphi \to \psi \vdash \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$ T7.2: $\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \vdash \varphi \to \psi$

T8 (Leyes de Morgan): T8.1: $\neg(\varphi \vee \psi) \vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi$ T8.2: $\neg\varphi \wedge \neg\psi \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$

T8.3: $\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$ T8.4: $\neg\varphi \vee \neg\psi \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$

T9 (Interdefinición 2): T9.1: $\varphi \to \psi \vdash \neg\varphi \vee \psi$ T9.2: $\neg\varphi \vee \psi \vdash \varphi \to \psi$

T10 (Conmutativa $\wedge$): T10.1: $\varphi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \varphi$ T10.2: $\psi \wedge \varphi \vdash \varphi \wedge \psi$

T11 (Asociativa $\wedge$): T11.1: $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \vdash (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$ T11.2: $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \vdash \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$

T12 (Distributiva $\wedge$): T12.1: $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \vdash (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ T12.2: $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \vdash \varphi \wedge (\psi \vee \chi)$

T13 (Absorción $\wedge$): T13.1: $\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \vdash \varphi$ T13.2: $\varphi \vdash \varphi \wedge (\varphi \vee \psi)$

T14 (Idempotencia $\wedge$): T14.1: $\varphi \wedge \varphi \vdash \varphi$ T14.2: $\varphi \vdash \varphi \wedge \varphi$

T15 (Conmutativa $\vee$): T15.1: $\varphi \vee \psi \vdash \psi \vee \varphi$ T15.2: $\psi \vee \varphi \vdash \varphi \vee \psi$

T16 (Asociativa $\vee$): T16.1: $\varphi \vee (\psi \vee \chi) \vdash (\varphi \vee \psi) \vee \chi$ T16.2: $(\varphi \vee \psi) \vee \chi \vdash \varphi \vee (\psi \vee \chi)$

T17 (Distributiva $\vee$): T17.1: $\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \vdash (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ T17.2: $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \chi)$

T18 (Absorción $\vee$): T18.1: $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \vdash \varphi$ T18.2: $\varphi \vdash \varphi \vee (\varphi \wedge \psi)$

T19 (Idempotencia $\vee$): T19.1: $\varphi \vee \varphi \vdash \varphi$ T19.2: $\varphi \vdash \varphi \vee \varphi$

T20 (Introducción $\leftrightarrow$): $\{\varphi \to \psi, \psi \to \varphi\} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$

T21 (Eliminación $\leftrightarrow$): T21.1: $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \varphi \to \psi$ T21.2: $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \psi \to \varphi$

T22 (Reflexiva $\leftrightarrow$): $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi$

T23 (Transitiva $\leftrightarrow$): $\{\varphi \leftrightarrow \psi, \psi \leftrightarrow \chi\} \vdash \varphi \leftrightarrow \chi$

T24 (Simétrica $\leftrightarrow$): $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \psi \leftrightarrow \varphi$

T25 (Importación-Exportación): T25.1: $\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \wedge \psi\} \vdash \chi$ T25.2: $\{\varphi \wedge \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi \to \chi$

T26 (Mutación de premisa): $\varphi \to (\psi \to \chi) \vdash \psi \to (\varphi \to \chi)$

T27 (Carga de premisa): $\varphi \vdash (\psi \to \varphi)$

T28 (Modus Tollens): $\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$

T29 (Tollendo ponens): $\{\varphi \vee \psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$

T30 (Dilemas):

T30.1 (Constructivo simple): $\{\varphi \vee \psi, \varphi \to \chi, \psi \to \chi\} \vdash \chi$

T30.2 (Constructivo complejo): $\{\varphi \vee \psi, \varphi \to \chi, \psi \to \sigma\} \vdash \chi \vee \sigma$

T30.3 (Destructivo simple): $\{\neg\varphi \vee \neg\psi, \chi \to \varphi, \chi \to \psi\} \vdash \neg\chi$

T30.4 (Destructivo complejo): $\{\neg\varphi \vee \neg\psi, \chi \to \varphi, \sigma \to \psi\} \vdash \neg\chi \vee \neg\sigma$

1) Demostrar $\vdash (p \to \neg r) \vee \neg(p \to \neg r)$

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1)\ p \to \neg r & (\text{p. aux}) \\ 2)\ p \to \neg r & (T1(1)) \end{array}}$$

3) $(p \to \neg r) \to (p \to \neg r)$ $(I\to(1,2))$

4) $\neg(p \to \neg r) \vee (p \to \neg r)$ $(T9.1(3))$

5) $(p \to \neg r) \vee \neg(p \to \neg r)$ $(T15.1(4))$

Otra forma, un poco más larga pero igual de sencilla e inmediata, hubiera sido por reducción al absurdo:

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1)\ \neg((p \to \neg r) \vee \neg(p \to \neg r)) & (\text{p.aux}) \\ 2)\ \neg(p \to \neg r) \wedge \neg\neg(p \to \neg r) & (T8.1(1)) \\ 3)\ \neg(p \to \neg r) & (E\wedge(2)) \\ 4)\ \neg\neg(p \to \neg r) & (E\wedge(2)) \\ 5)\ p \to \neg r & (E\neg(4)) \\ 6)\ (p \to \neg r) \wedge \neg(p \to \neg r) & (I\wedge(5,3)) \end{array}}$$

7) $\neg((p \to \neg r) \vee \neg(p \to \neg r)) \to (p \to \neg r) \wedge \neg(p \to \neg r)$ $(I\to(1,6))$

8) $\neg\neg((p \to \neg r) \vee \neg(p \to \neg r))$ $(I\neg(7))$

9) $(p \to \neg r) \vee \neg(p \to \neg r)$ $(E\neg(8))$

2) Demostrar $\{\neg p \vee q \rightarrow \neg r, r\} \vdash \neg(\neg p \vee q)$

1) $\neg p \vee q \rightarrow \neg r$ (pr.)

2) r (pr)

3) $\neg p \vee q$ (p. aux)

4) $\neg r$ ($E\rightarrow$(1,3))

5) $r \wedge \neg r$ ($I\wedge$(2,4))

6) $\neg p \vee q \rightarrow r \wedge \neg r$ ($I\rightarrow$(3,5))

7) $\neg(\neg p \vee q)$ ($I\neg$(6))

3) Demostrar $\{\neg r \vee \neg q, \neg r \vee p\} \vdash \neg r \vee (\neg q \wedge p)$

1) $\neg r \vee \neg q$ (pr.)
2) $\neg r \vee p$ (pr.)
3) $\neg r$ (p.aux)
4) $\neg r \vee (\neg q \wedge p)$ (I$\vee$(3))
5) $\neg r \rightarrow \neg r \vee (\neg q \wedge p)$ (I$\rightarrow$(3,4))
6) $\neg q$ (p.aux)
7) p (p.aux)
8) $\neg q \wedge p$ (I$\wedge$(6,7))
9) $\neg r \vee (\neg q \wedge p)$ (I$\vee$(8))
10) $p \rightarrow \neg r \vee (\neg q \wedge p)$ (I$\rightarrow$(7,9))
11) $\neg r \vee (\neg q \wedge p)$ (E$\vee$(2,5,10))
12) $\neg q \rightarrow \neg r \vee (\neg q \wedge p)$ (I$\rightarrow$(6,11))
13) $\neg r \vee (\neg q \wedge p)$ (E$\vee$(1,5,12))