MECÁNICA DE SÓLIDOS

Curso 2017/18

Titulación:

Grado en Ingeniería Mecánica

Tema 2
Las ecuaciones de la Mecánica de Sólidos

Profesores:

Jorge Zahr Viñuela
José Antonio Rodríguez Martínez

1. COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE MATERIALES
2. **LAS ECUACIONES DE LA MECÁNICA DE SÓLIDOS**
3. PLASTICIDAD
4. VISCOELASTICIDAD
5. VISCOPLASTICIDAD
6. INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA DE LA FRACTURA

Tema 2 – Las Ecuaciones de la Mecánica de Sólidos.

TABLA DE CONTENIDOS

Tema 2 – Las Ecuaciones de la Mecánica de Sólidos.

TABLA DE CONTENIDOS

2.1 Introducción (*a*): la necesidad de generalizar.

Antes de entrar en **Teorías Constitutivas**, intentaremos presentar un enfoque **algo más GENERAL** sobre la **"Mecánica de Sólidos Deformables"**, entendida ésta como disciplina científica dentro de la cual hay varios sujetos de estudio, uno de los cuales es la **Modelización Constitutiva**.

Particularmente, debemos plantearnos las siguientes preguntas:

- ¿Podría haber **otras variables** de **campo** importantes en la Mecánica de Sólidos Deformables, además de $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ y $\boldsymbol{\sigma}$ (desplazamiento, deformación y tensión)?
  $\rightarrow$ ¿Qué ocurre con la **temperatura**? ¿con la **energía interna**? etc…
- ¿Podría haber **otras propiedades** de los **materiales** participando en la Mecánica de Sólidos Deformables, además de E y ν?
  $\rightarrow$ ¿**Conductividad** térmica, coeficiente de **dilatación**, **densidad**? etc…
- ¿Es posible abordar "**problemas acoplados**" relativos a Sólidos Deformables?
  $\rightarrow$ Problemas **térmico-estructurales**, **acústico-estructurales**, etc…

2.1 Introducción (*b*): un intento de definición.

¿Qué es la Mecánica de los Sólidos Deformables?

- Disciplina en la que se plantean modelos matemáticos con los que estudiar el comportamiento y las propiedades de los sólidos deformables

- Constituye una aproximación válida en SITUACIONES MACROSCÓPICAS en las que la GEOMETRÍA del sólido HA DE SER CONSIDERADA y la MICROESTRUCTURA de la materia PUEDE SER IGNORADA

TABLA DE CONTENIDOS

2.2 Formulando una Mecánica de Sólidos: generalidades

- En el caso más general, el comportamiento de un medio continuo sólido se describe en términos de un gran número de **cantidades físicas**. Algunas de ellas son:

  -- ***Variables de estado*** (ε, σ, *Temperatura*, ρ,..., *otras variables internas*)

  → Estas caracterizan el "estado" de un sólido, en cada instante del tiempo

  -- ***Funciones de estado*** (*energía interna*, *entropía*, *energía libre*,...)

  → Son cantidades que dependen de las variables de estado

  -- ***Propiedades constantes del material*** (E,ν,σ_0,...)

  -- ***Cantidades globales*** (*trabajo*, *calor*, *volumen total*, *masa total*,...)

Variables de interés ⟷ Ecuaciones que relacionan las variables

(ecuaciones de gobierno)

- Las cantidades físicas se relacionan entre sí a través de un conjunto de **ecuaciones de gobierno**.

2.2 Formulando una Mecánica de Sólidos: generalidades

2.2.1 Sobre las variables de interés:

- Las cantidades físicas participantes pueden tener carácter ***escalar***, ***vectorial*** o ***tensorial***.
- Excepto las ***cantidades globales***, todas las demás cantidades son ***variables de campo***, en el sentido de que dependen de la ***posición*** y, en algunos casos, del ***tiempo***.
- Siendo variables de campo, ellas ***evolucionan*** si el sólido se ***mueve*** y se ***deforma***.
- Esta descripción puede realizarse de 2 maneras:

-- **descripción *material*** (o Lagrangeana)

-- **descripción *espacial*** (o Euleriana)

→

Descripción *material* o *espacial* del **movimiento** de un sólido deformable

y

Descripción *material* o *espacial* de la **evolución** de las **variables de interés** de dicho sólido deformable, ***durante*** su movimiento.

↓

Cinemática del Sólido Deformable

2.2 Formulando una Mecánica de Sólidos: generalidades

2.2.2 Sobre las ecuaciones de gobierno:

- Algunas ecuaciones representan **principios físicos** de validez ***general***.
- Éstas son generalmente **ecuaciones de balance**, que admiten 2 tipos de formulación:

  -- **formulación *local***:

  a través de ***ecuaciones diferenciales*** en ***derivadas parciales***, en las que se realiza un ***balance*** de determinadas cantidades físicas en un ***volumen infinitesimal*** en torno a un punto del espacio.

  -- **formulación *global***:

  a través de ***ecuaciones integrales***, en las que se realiza un ***balance*** de determinadas cantidades físicas en ***todo el volumen*** que comprende el sólido en estudio.

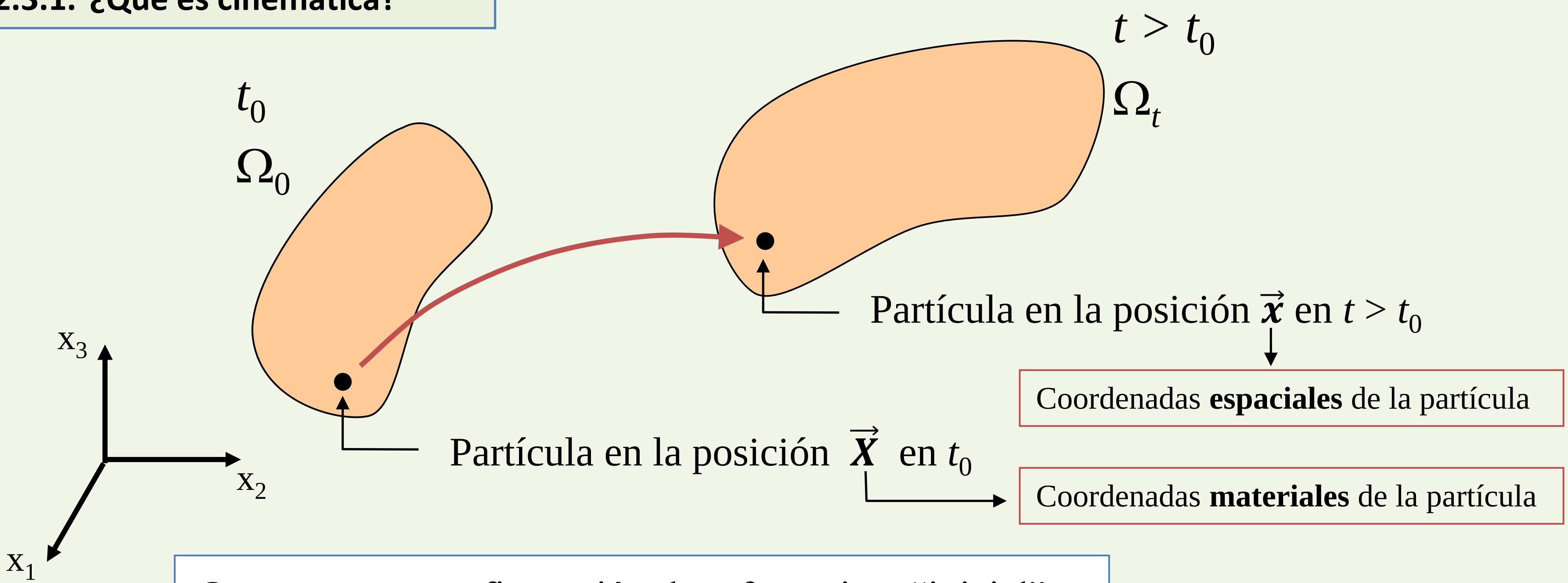
- Otras corresponden a **ecuaciones constitutivas**, que son propias del ***material particular*** del sólido bajo estudio

Tema 2 – Las Ecuaciones de la Mecánica de Sólidos.

TABLA DE CONTENIDOS

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.1. ¿Qué es cinemática?



Ω_0 en t_o: configuración de referencia o "inicial"

Ω_t en $t > t_o$: configuración actual en el instante t

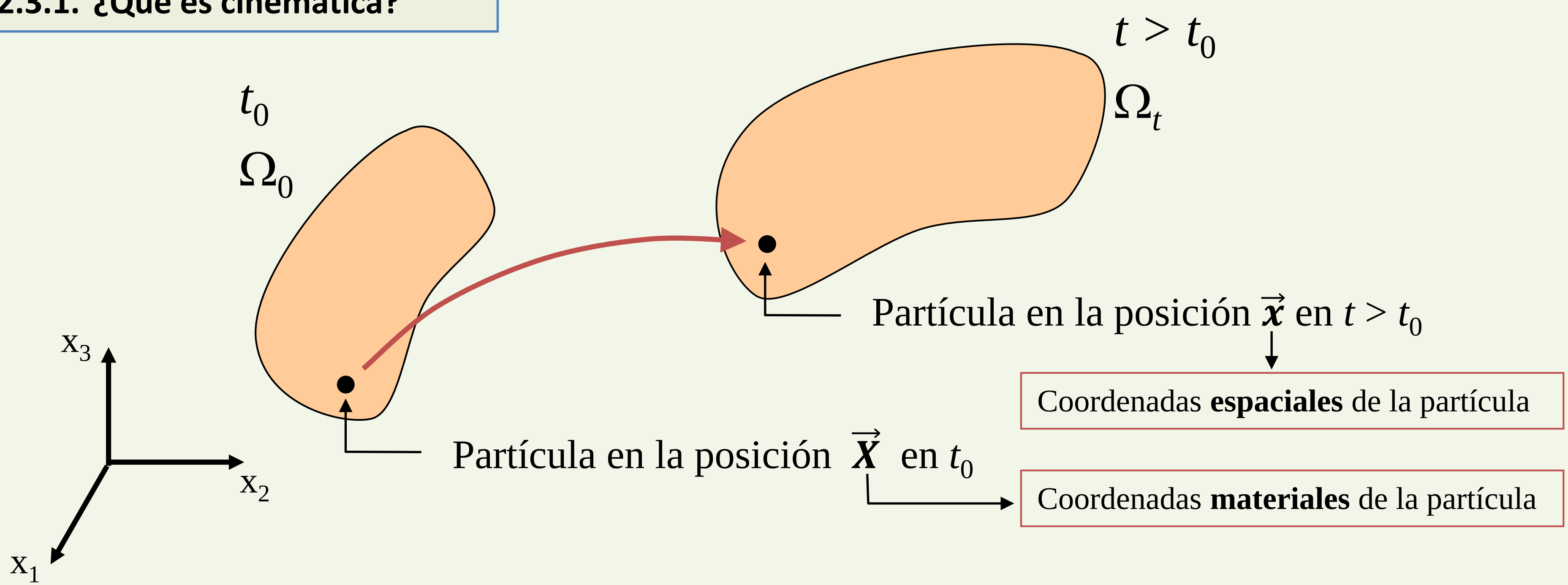
En esta condición, es necesario realizar 2 cosas:

(a) Describir el "movimiento" del sólido.

(b) Describir la "evolución" de las "variables de interés" durante el movimiento.

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.1. ¿Qué es cinemática?



(*a*) Describir el **movimiento** del **sólido**.

$\vec{\boldsymbol{x}} = \varphi(\vec{\boldsymbol{X}}, t)$ → Ecuaciones del movimiento ***directas***

$\vec{\boldsymbol{X}} = \varphi^{-1}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)$ → Ecuaciones del movimiento ***inversas***

(*b*) Describir la **evolución** de las **variables de interés** durante el movimiento.

Si ***n*** es una variable de interés, entonces:

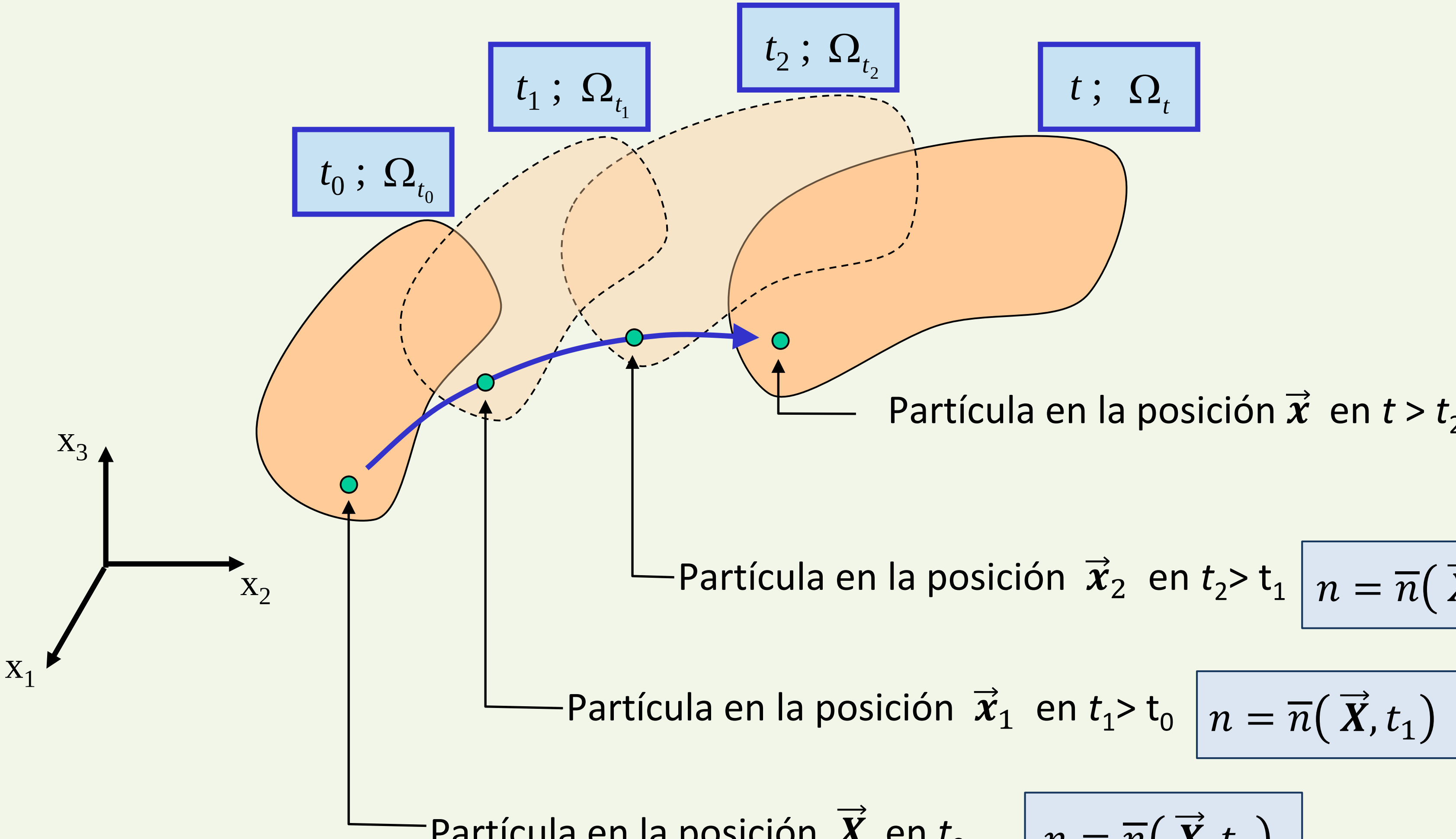
$n = \bar{n}(\vec{\boldsymbol{X}}, t)$ → Descripción ***material*** de ***n***

$n = \hat{n}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)$ → Descripción ***espacial*** de ***n***

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.2. Descripción material

Nos fijamos en **una partícula** y estudiamos cómo cambian sus variables (su temperatura, estado tensional, etc.), durante el movimiento del sólido.



$$n = \overline{n}\left(\vec{\boldsymbol{X}}, t_2\right)$$

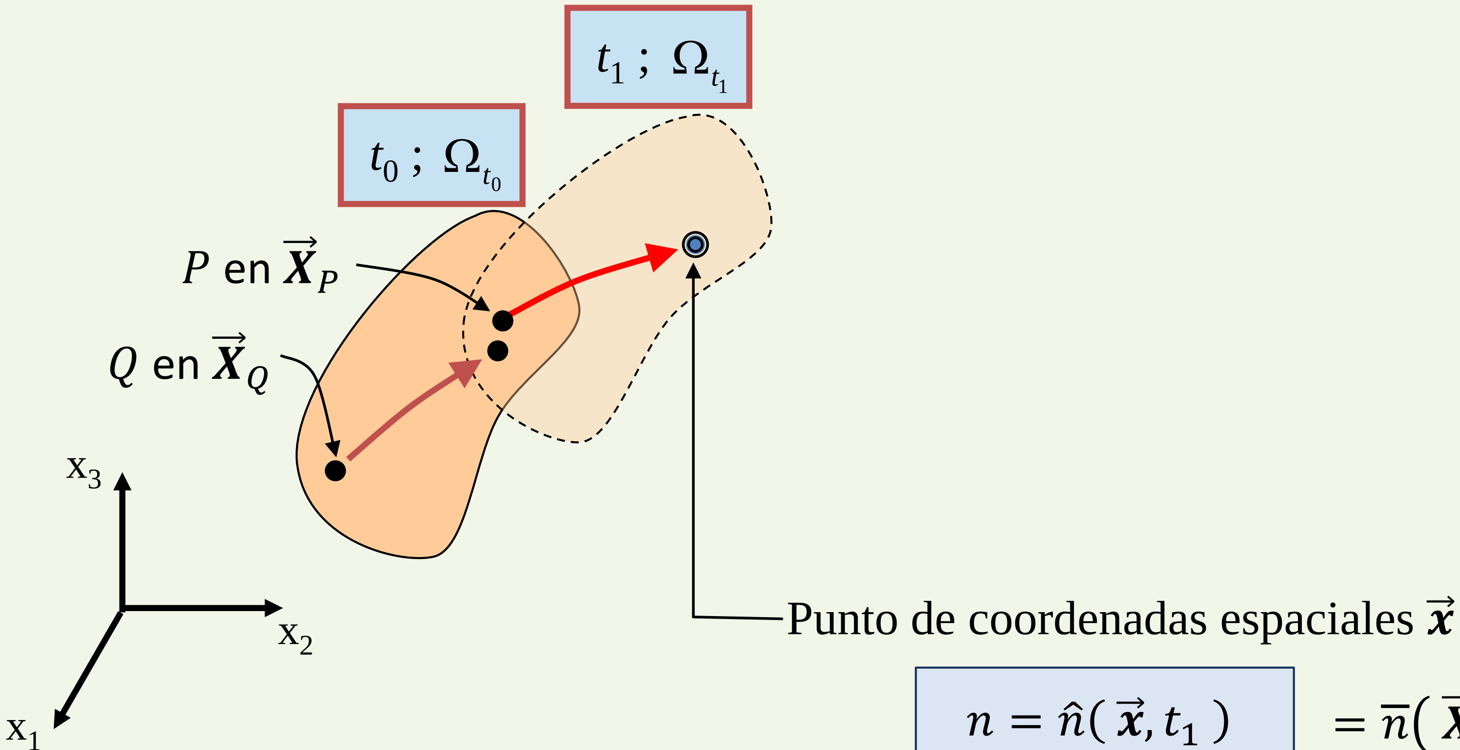
$$n = \overline{n}\left(\vec{\boldsymbol{X}}, t_1\right)$$

$$n = \overline{n}\left(\vec{\boldsymbol{X}}, t_0\right)$$

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.3. Descripción espacial

Nos fijamos en **un punto fijo del espacio** y estudiamos las variables de las **distintas** partículas que pasan por él, durante el movimiento del sólido.

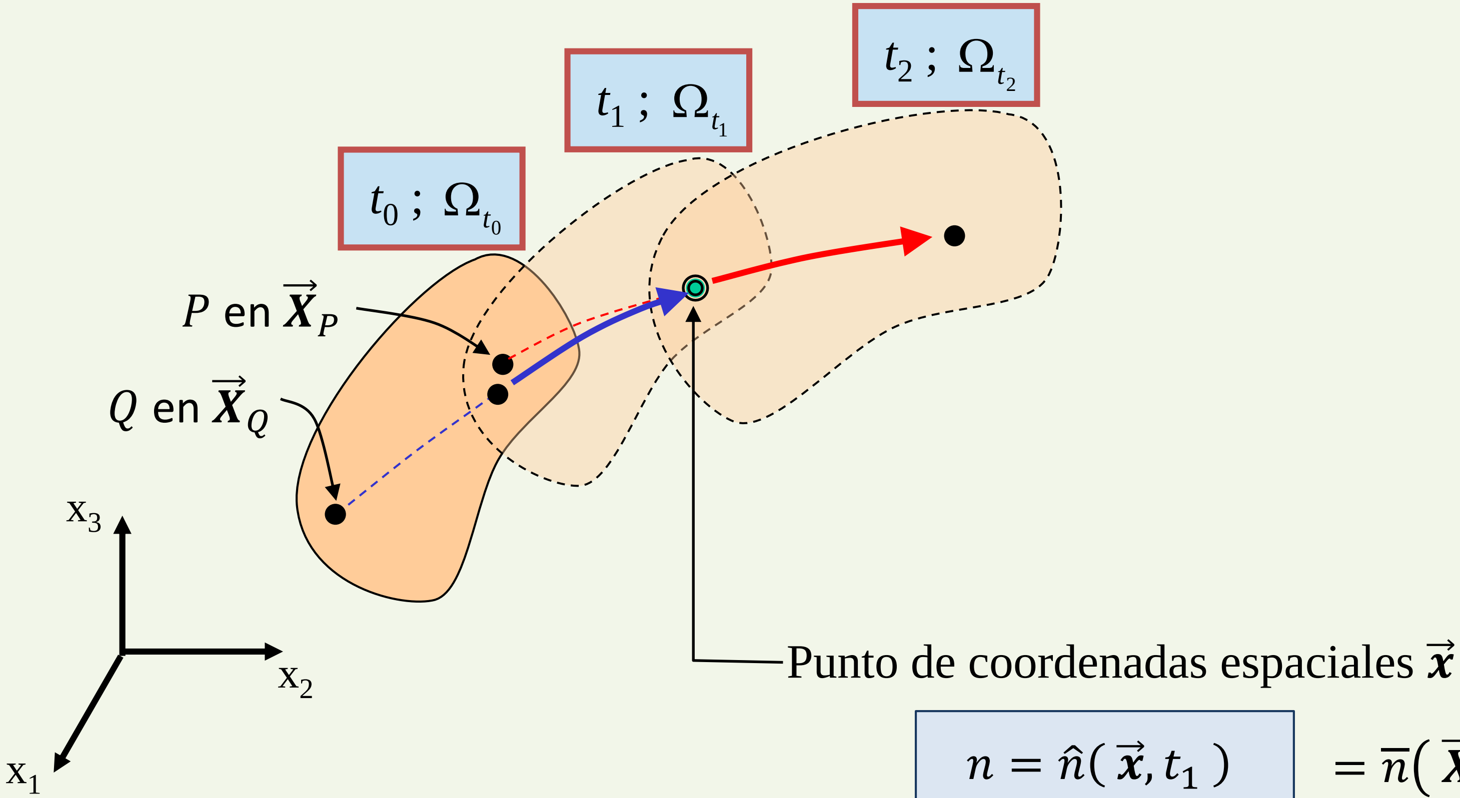


$$\boxed{n = \hat{n}(\vec{\boldsymbol{x}}, t_1)} = \overline{n}\left(\vec{\boldsymbol{X}}_P, t_1\right)$$

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.3. Descripción espacial

Nos fijamos en **un punto fijo del espacio** y estudiamos las variables de las **distintas** partículas que pasan por él, durante el movimiento del sólido.



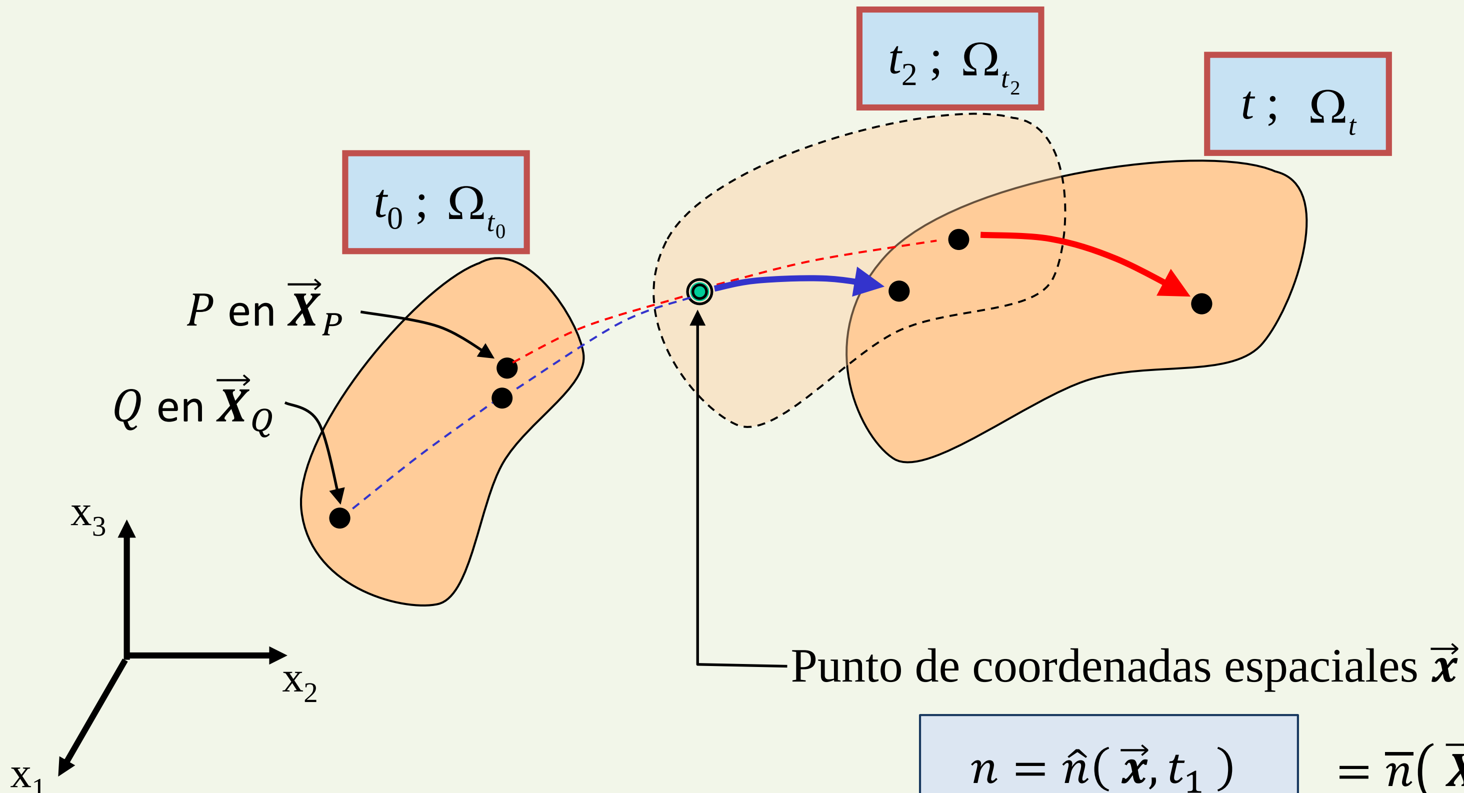
$$\boxed{n = \hat{n}(\vec{\boldsymbol{x}}, t_1)} = \bar{n}(\vec{\boldsymbol{X}}_P, t_1)$$

$$\boxed{n = \hat{n}(\vec{\boldsymbol{x}}, t_2)} = \bar{n}(\vec{\boldsymbol{X}}_Q, t_2)$$

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.3. Descripción espacial

Nos fijamos en **un punto fijo del espacio** y estudiamos las variables de las **distintas** partículas que pasan por él, durante el movimiento del sólido.



$$n = \hat{n}(\vec{\boldsymbol{x}}, t_1) = \overline{n}(\vec{\boldsymbol{X}}_P, t_1)$$

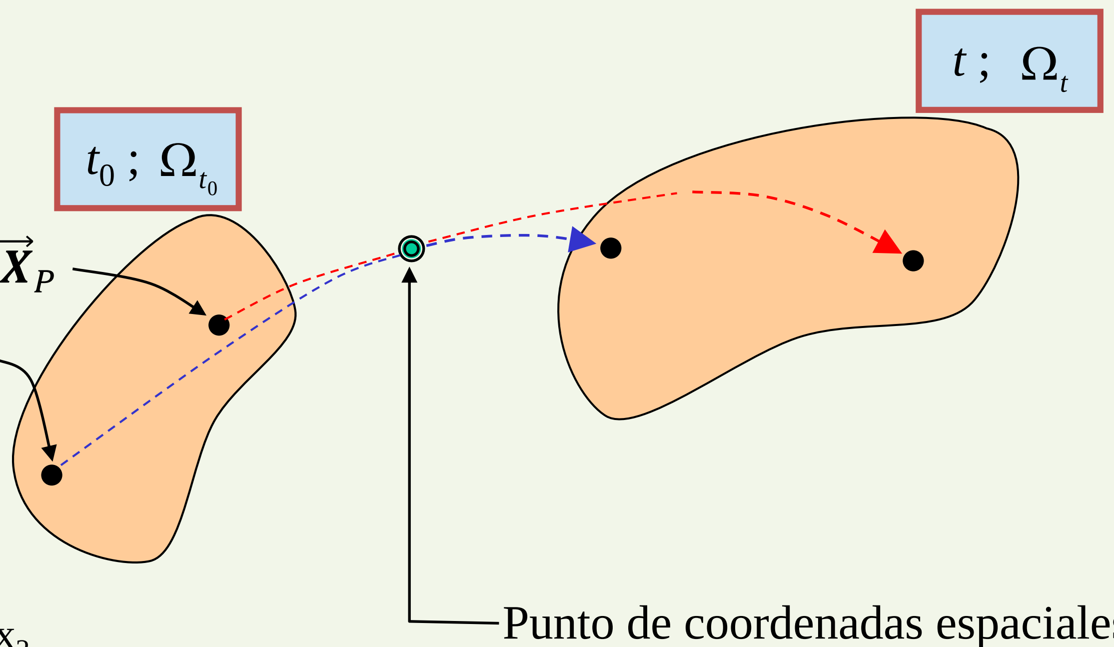
$$n = \hat{n}(\vec{\boldsymbol{x}}, t_2) = \overline{n}(\vec{\boldsymbol{X}}_Q, t_2)$$

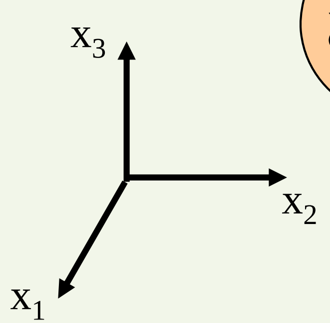
$$n = \hat{n}(\vec{\boldsymbol{x}}, t) = \emptyset \quad \text{puesto que } \vec{\boldsymbol{x}} \notin \Omega_t$$

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.3. Descripción espacial

Nos fijamos en **un punto fijo del espacio** y estudiamos las variables de las **distintas** partículas que pasan por él, durante el movimiento del sólido.





Punto de coordenadas espaciales $\vec{\boldsymbol{x}}$

$$\boxed{n = \hat{n}(\vec{\boldsymbol{x}}, t_1)} = \overline{n}(\vec{\boldsymbol{X}}_P, t_1)$$

$$\boxed{n = \hat{n}(\vec{\boldsymbol{x}}, t_2)} = \overline{n}(\vec{\boldsymbol{X}}_Q, t_2)$$

$$\boxed{n = \hat{n}(\vec{\boldsymbol{x}}, t) = \emptyset} \quad \text{puesto que } \vec{\boldsymbol{x}} \notin \Omega_t$$

A lo largo del tiempo, ***distintas partículas***, cada una con su propia trayectoria, pasan por nuestro ***punto espacial*** ◉ , cuyas coordenadas son:

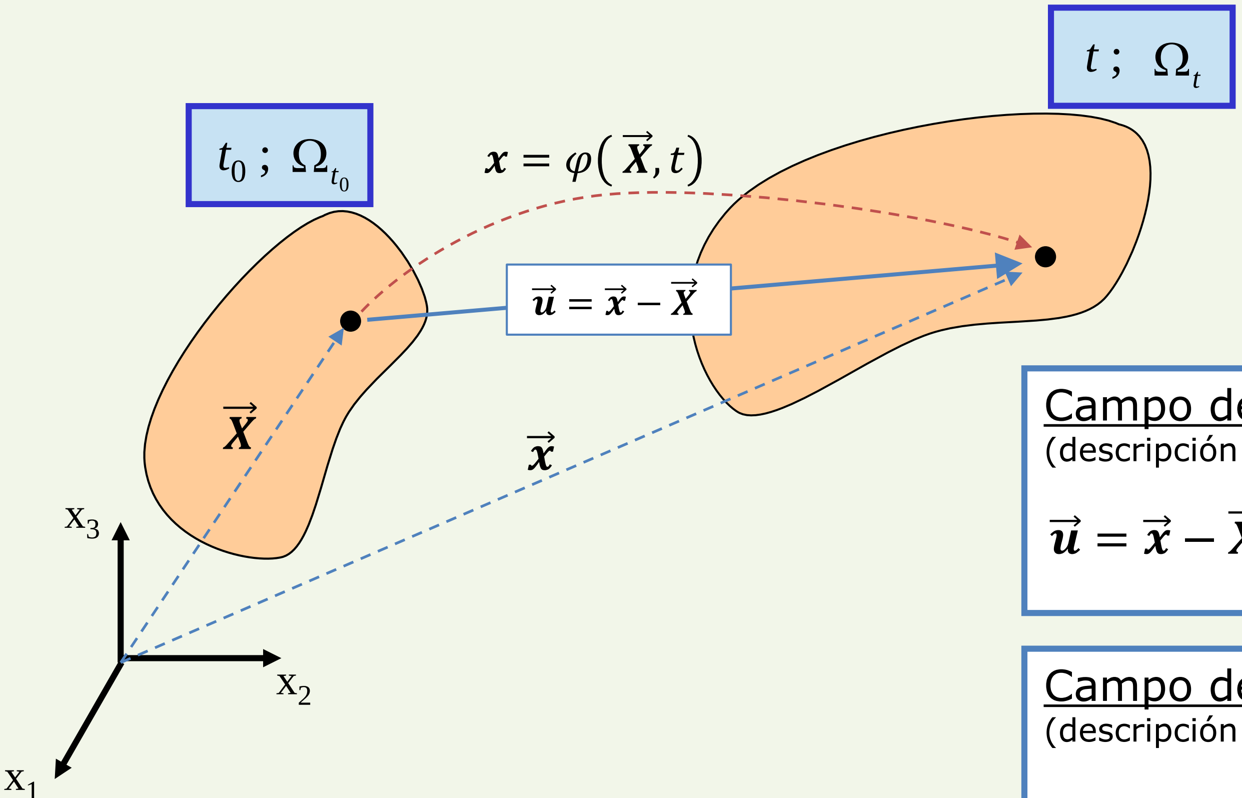
$$\vec{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, x_3)$$

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.4. Dos variables importantes

Campo de desplazamientos: $\vec{\boldsymbol{u}} = \overline{u}\left(\vec{\boldsymbol{X}}, t\right) = \hat{u}\left(\vec{\boldsymbol{x}}, t\right)$

Campo de velocidades: $\vec{\mathbf{v}} = \overline{\mathrm{v}}\left(\vec{\boldsymbol{X}}, t\right) = \hat{\mathrm{v}}\left(\vec{\boldsymbol{x}}, t\right)$



Campo de desplazamientos:
(descripción **material**)

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{X}} = \varphi\left(\vec{\boldsymbol{X}}, t\right) - \vec{\boldsymbol{X}} = \overline{u}\left(\vec{\boldsymbol{X}}, t\right)$$

Campo de velocidades:
(descripción **material**)

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{\partial \vec{\boldsymbol{u}}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi\left(\vec{\boldsymbol{X}}, t\right)}{\partial t} = \overline{\mathrm{v}}\left(\vec{\boldsymbol{X}}, t\right)$$

(La derivada parcial es a $\vec{\boldsymbol{X}}$ cte.)

→ La función φ que describe el movimiento **contiene toda la información** relativa al desplazamiento y a la velocidad.

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.4. Dos variables importantes

Campo de desplazamientos: $\vec{\boldsymbol{u}} = \overline{u}\left(\vec{\boldsymbol{X}}, t\right) = \hat{u}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)$

Campo de velocidades: $\vec{\mathbf{v}} = \overline{\mathrm{v}}\left(\vec{\boldsymbol{X}}, t\right) = \hat{\mathrm{v}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)$

Usando las ecuaciones de movimiento inversas $\vec{\boldsymbol{X}} = \varphi^{-1}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)$ puede obtenerse la "***descripción espacial***" de estos dos campos a partir de su "***descripción material***":

Desplazamiento:

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \overline{u}\left(\vec{\boldsymbol{X}}, t\right) = \overline{u}(\varphi^{-1}(\vec{\boldsymbol{x}}, t), t) \equiv \hat{u}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)$$

Velocidad:

$$\vec{\mathbf{v}} = \overline{\mathrm{v}}\left(\vec{\boldsymbol{X}}, t\right) = \overline{\mathrm{v}}(\varphi^{-1}(\vec{\boldsymbol{x}}, t), t) \equiv \hat{\mathrm{v}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)$$

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.5. El gradiente del campo de desplazamiento $\vec{\boldsymbol{u}}$

- **Gradiente MATERIAL**
- Gradiente ESPACIAL

Campo de desplazamientos:
(descripción material)

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{X}} = \varphi\left(\vec{\boldsymbol{X}}, t\right) - \vec{\boldsymbol{X}} = \overline{u}\left(\vec{\boldsymbol{X}}, t\right)$$

- El **gradiente** del **campo de desplazamiento** será relevante más adelante, puesto que participa en el concepto de "**deformación**"
- Este gradiente se denota $\nabla\vec{\boldsymbol{u}}$ y es un **tensor de 2º orden, no-simétrico**.
- Sus 9 componentes son de la forma:

$$(\nabla\vec{\boldsymbol{u}})_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad \rightarrow \quad Gradiente\ MATERIAL$$

- El tensor $\nabla\vec{\boldsymbol{u}}$ expresado en forma de matriz:

$$\nabla\vec{\boldsymbol{u}} \equiv \begin{bmatrix} \partial u_1/\partial X_1 & \partial u_1/\partial X_2 & \partial u_1/\partial X_3 \\ \partial u_2/\partial X_1 & \partial u_2/\partial X_2 & \partial u_2/\partial X_3 \\ \partial u_3/\partial X_1 & \partial u_3/\partial X_2 & \partial u_3/\partial X_3 \end{bmatrix}$$

- **NOTA**: las derivadas parciales son con respecto a las "coordenadas **materiales**"

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.5. El gradiente del campo de desplazamiento $\vec{\boldsymbol{u}}$

- Gradiente MATERIAL
- **Gradiente ESPACIAL**

Campo de desplazamientos:
(descripción espacial)

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{X}} = \vec{\boldsymbol{x}} - \varphi^{-1}(\vec{\boldsymbol{x}}, t) = \hat{u}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)$$

- El **gradiente ESPACIAL** del **campo de desplazamiento** se define a partir de la descripción espacial $\vec{\boldsymbol{u}} = \hat{u}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)$
- Este gradiente espacial se denota $\underline{\nabla \vec{\boldsymbol{u}}}$ y es un **tensor de 2º orden**, **no-simétrico**.
- Sus 9 componentes son de la forma:

$$\left(\underline{\nabla \vec{\boldsymbol{u}}}\right)_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \rightarrow \quad \textit{Gradiente ESPACIAL}$$

- El tensor $\nabla \vec{\boldsymbol{u}}$ expresado en forma de matriz:

$$\underline{\nabla \vec{\boldsymbol{u}}} \equiv \begin{bmatrix} \partial u_1/\partial x_1 & \partial u_1/\partial x_2 & \partial u_1/\partial x_3 \\ \partial u_2/\partial x_1 & \partial u_2/\partial x_2 & \partial u_2/\partial x_3 \\ \partial u_3/\partial x_1 & \partial u_3/\partial x_2 & \partial u_3/\partial x_3 \end{bmatrix}$$

- **NOTA**: las derivadas parciales son con respecto a las “coordenadas **espaciales**”

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.6. El "Tensor Gradiente de Deformación"

- La **matriz Jacobiana** de la transformación $\vec{x} = \varphi(\vec{X}, t)$ contiene a las componentes de **un tensor de 2º orden**.
- Se denomina "**Tensor Gradiente de Deformación**" y se denota como $\boldsymbol{F}$.
- Sus 9 componentes son de la forma:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

El tensor $\boldsymbol{F}$ expresado en forma de matriz:

$$J_\varphi = \begin{bmatrix} \partial x_1/\partial X_1 & \partial x_1/\partial X_2 & \partial x_1/\partial X_3 \\ \partial x_2/\partial X_1 & \partial x_2/\partial X_2 & \partial x_2/\partial X_3 \\ \partial x_3/\partial X_1 & \partial x_3/\partial X_2 & \partial x_3/\partial X_3 \end{bmatrix} \equiv \boldsymbol{F}$$

Es un tensor **no-simétrico**:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \neq \frac{\partial x_j}{\partial X_i} = F_{ji}$$

El tensor $\boldsymbol{F}$ relaciona diferenciales $d\vec{X}$ con diferenciales $d\vec{x}$ a través de:

$$d\vec{x} = \boldsymbol{F} \cdot d\vec{X}$$

En componentes (recordar convención de Einstein):

$$dx_i = F_{ij}\, dX_j$$

Matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x_1/\partial X_1 & \partial x_1/\partial X_2 & \partial x_1/\partial X_3 \\ \partial x_2/\partial X_1 & \partial x_2/\partial X_2 & \partial x_2/\partial X_3 \\ \partial x_3/\partial X_1 & \partial x_3/\partial X_2 & \partial x_3/\partial X_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{Bmatrix}$$

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.6. El "Tensor Gradiente de Deformación"

El tensor $\boldsymbol{F}$ se relaciona con el tensor $\nabla\vec{\boldsymbol{u}}$ del siguiente modo:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\delta} + \nabla\vec{\boldsymbol{u}}$$

Análogamente, existe una relación entre $\boldsymbol{F}^{-1}$ y $\underline{\nabla\vec{\boldsymbol{u}}}$:

$$\boldsymbol{F}^{-1} = \boldsymbol{\delta} - \underline{\nabla\vec{\boldsymbol{u}}}$$

- En forma de componentes, esto se expresa como:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$$

- Matricialmente, esto se expresa como:

$$\begin{bmatrix} \partial x_1/\partial X_1 & \partial x_1/\partial X_2 & \partial x_1/\partial X_3 \\ \partial x_2/\partial X_1 & \partial x_2/\partial X_2 & \partial x_2/\partial X_3 \\ \partial x_3/\partial X_1 & \partial x_3/\partial X_2 & \partial x_3/\partial X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial u_1/\partial X_1 & \partial u_1/\partial X_2 & \partial u_1/\partial X_3 \\ \partial u_2/\partial X_1 & \partial u_2/\partial X_2 & \partial u_2/\partial X_3 \\ \partial u_3/\partial X_1 & \partial u_3/\partial X_2 & \partial u_3/\partial X_3 \end{bmatrix}$$

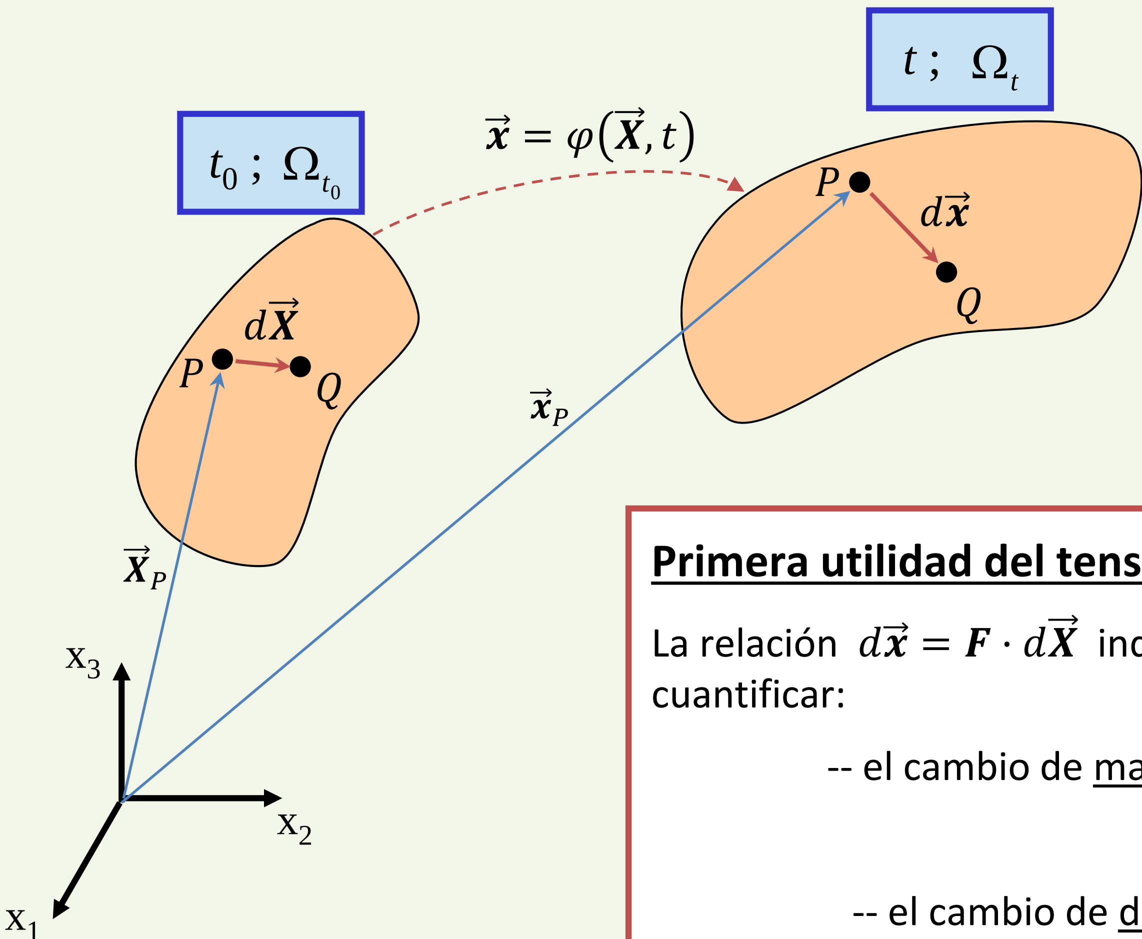
- Expresiones análogas pueden encontrarse para $\boldsymbol{F}^{-1}$

¿ Para qué sirve el tensor $\boldsymbol{F}$?

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.6. El "Tensor Gradiente de Deformación"

Consideremos 2 partículas "***infinitesimalmente cercanas***", $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$



En t_0, se tiene:

- P: se encuentra en $\vec{\boldsymbol{X}}_P$
- Q: se encuentra en $\vec{\boldsymbol{X}}_Q = \vec{\boldsymbol{X}}_P + d\vec{\boldsymbol{X}}$

En $t > t_0$, se tiene:

- P: se encuentra en $\vec{\boldsymbol{x}}_P = \varphi(\vec{\boldsymbol{X}}_P, t)$
- Q: se encuentra en $\vec{\boldsymbol{x}}_Q = \vec{\boldsymbol{x}}_P + d\vec{\boldsymbol{x}}$

Primera utilidad del tensor $\boldsymbol{F}$:

La relación $d\vec{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}\cdot d\vec{\boldsymbol{X}}$ indica que el tensor $\boldsymbol{F}$ permite cuantificar:

-- el cambio de magnitud (elongación)

y

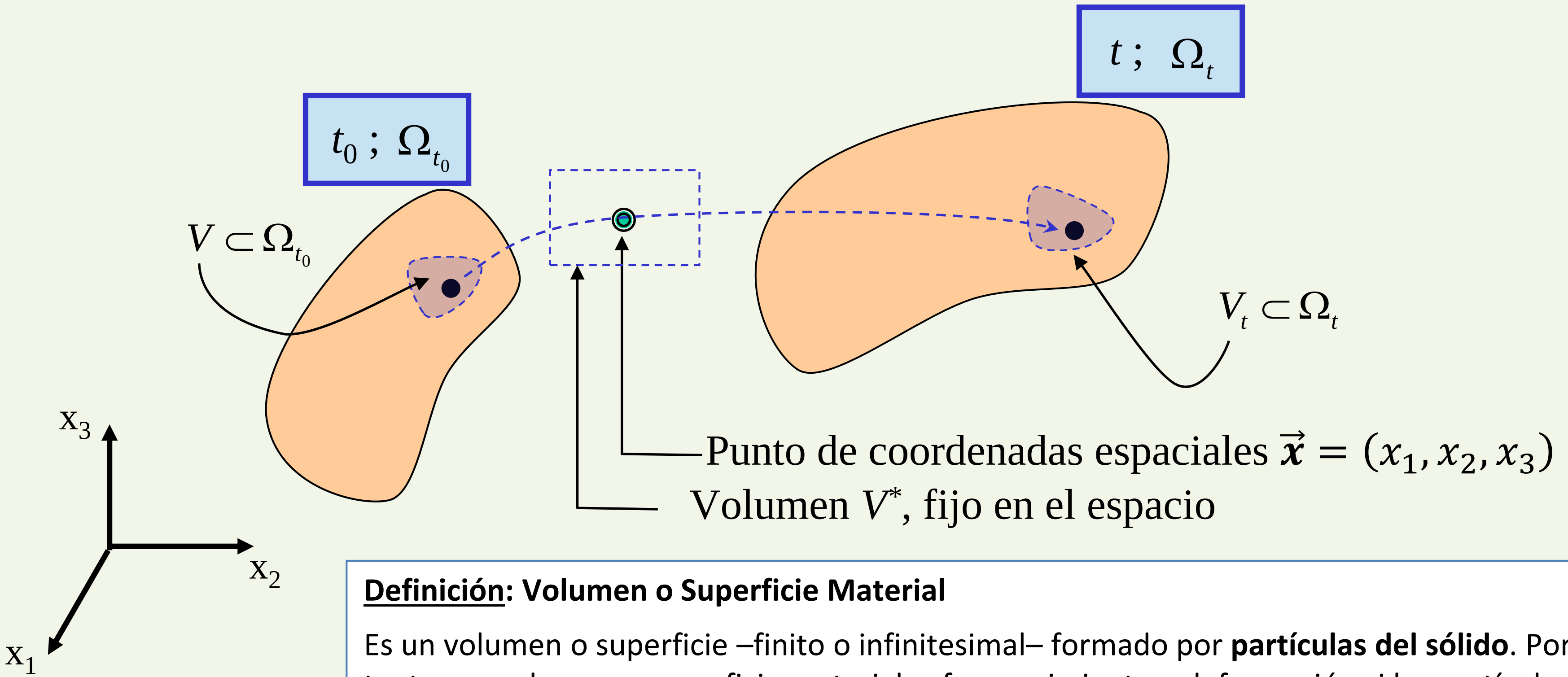
-- el cambio de dirección (rotación)

del vector infinitesimal $d\vec{\boldsymbol{X}}$ durante el movimiento y la deformación del sólido.

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.7. Volúmenes y Superficies

Así como la ***evolución*** de las ***variables de interés*** puede describirse en forma ***material*** o en forma ***espacial***, también la evolución de ***elementos de volumen*** o de ***elementos de superficie*** admiten estos dos tipos de descripción.



Definición: Volumen o Superficie Material

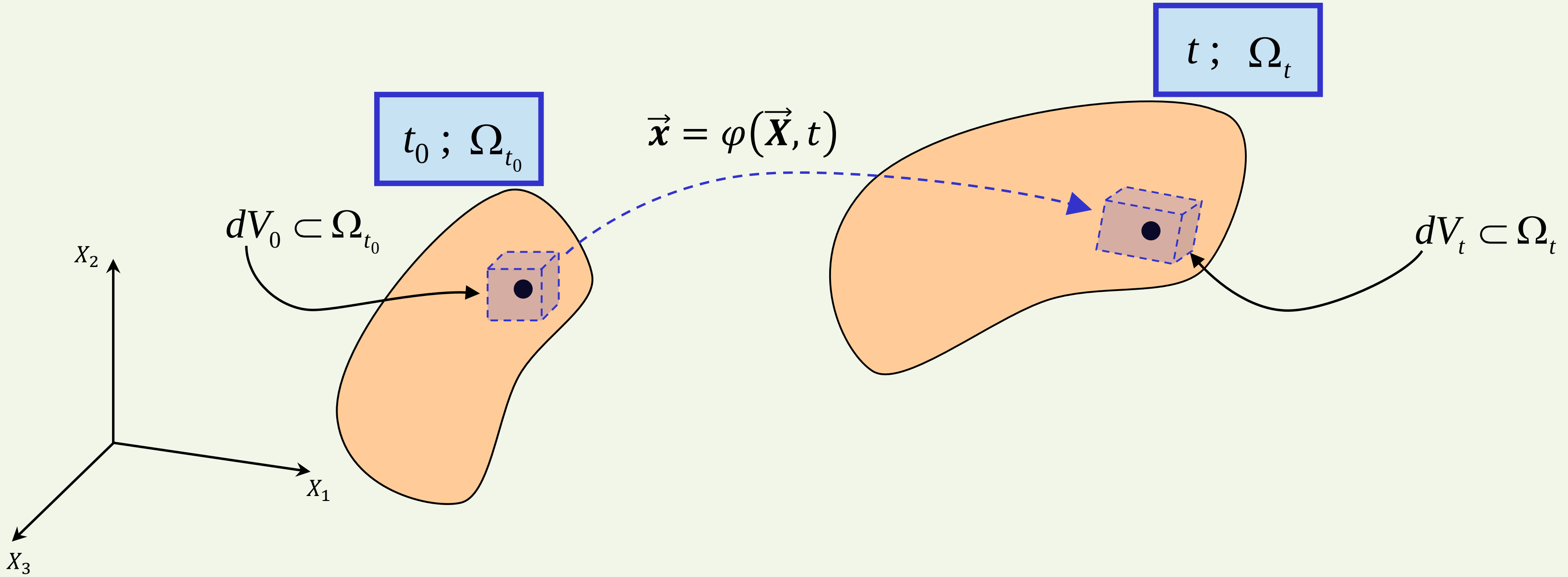
Es un volumen o superficie –finito o infinitesimal– formado por **partículas del sólido**. Por lo tanto, un volumen o superficie material sufre movimiento y deformación si las partículas que los forman están en movimiento. **Ejemplo**: $V \subset \Omega_0$

Definición: Volumen o Superficie Espacial

Es un volumen o superficie –finito o infinitesimal– formado por **puntos fijos del espacio**. Por lo tanto, si el sólido está en movimiento, el volumen o superficie espacial es **atravesado** las partículas que forman dicho sólido. **Ejemplo**: $V^* \subset \mathbb{R}^3$

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.7. Volúmenes y Superficies → Evolución de un ***elemento de volumen material*** debido al movimiento y deformación descritos por φ



Elemento de Volumen en la ***configuración de referencia***:

$$dV_0 = dX_1\ dX_2\ dX_3$$

Elemento de Volumen en la ***configuración actual***:

$$dV_t$$

Puede demostrarse que:

$$dV_t = \det(\ \boldsymbol{F}\ )\ dV_0$$

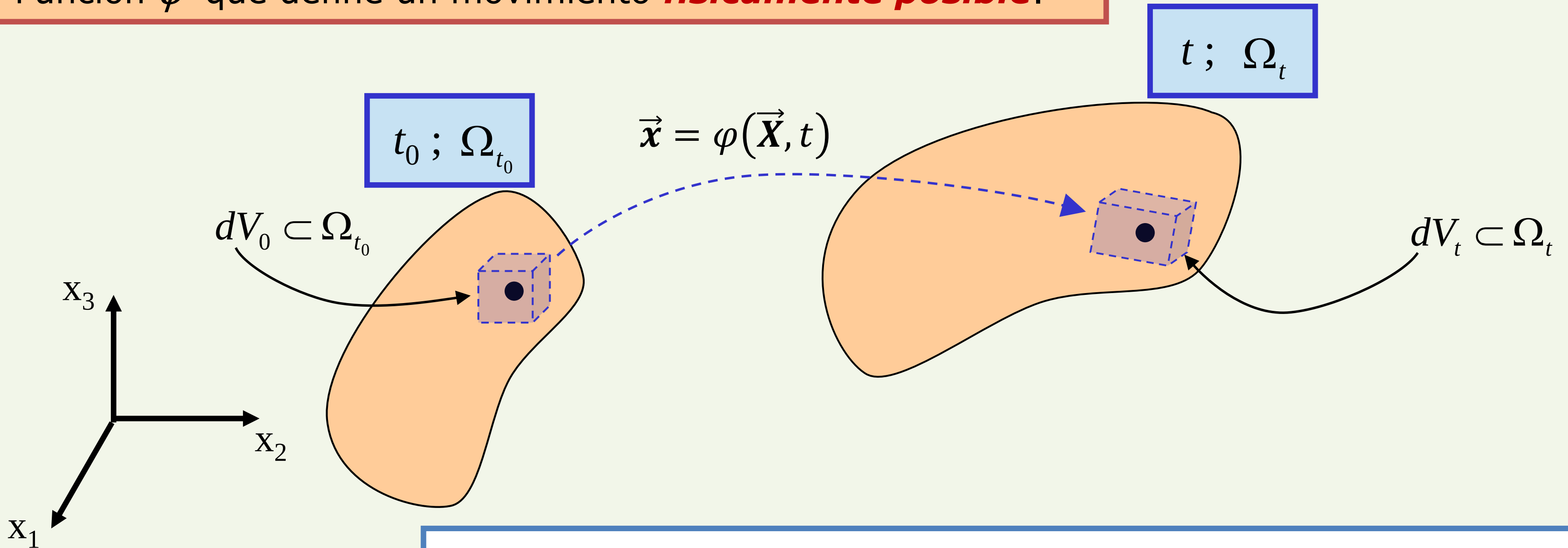
Segunda utilidad del tensor $\boldsymbol{F}$:

El tensor $\boldsymbol{F}$ permite cuantificar ***cambios de volumen*** durante el movimiento y la deformación del sólido.

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

Evolución de un ***elemento de volumen material*** debido al movimiento y deformación descritos por φ.

Función φ que define un movimiento ***físicamente posible***.



Puesto que: $dV_t = \det(\boldsymbol{F})dV_0$

es ***indispensable*** que $\det(\boldsymbol{F}) > 0$

De lo contrario:

Si $\det(\boldsymbol{F}) < 0$ entonces la deformación y el movimiento asociado a φ produciría "***volúmenes negativos***" en la configuración deformada.

Si $\det(\boldsymbol{F}) = 0$ entonces ***no puede*** obtenerse las ecuaciones de movimiento ***inversas***.

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.8. Pequeño resumen

- Sabemos que el movimiento (y la deformación) se describen mediante la función φ :

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \varphi(\vec{\boldsymbol{X}}, t)$$

- Sabemos también que una función φ describe un "***movimiento físicamente posible***" si y sólo si:

$$\det(J_\varphi) = \det(\boldsymbol{F}) > 0$$

- El tensor $\boldsymbol{F}$, que está asociado a φ, describe :

-- La "evolución temporal" de "fibras infinitesimales" de material, según: $d\vec{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F} \cdot d\vec{\boldsymbol{X}}$

-- La "evolución temporal" de "elementos diferenciales de volumen", según: $dV_t = \det(\boldsymbol{F})\, dV_0$

- Por otra parte, la "***descripción material***" del "***campo de desplazamientos***" es la siguiente:

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{X}} = \varphi(\vec{\boldsymbol{X}}, t) - \vec{\boldsymbol{X}} = \overline{u}(\vec{\boldsymbol{X}}, t)$$

- Su gradiente material, $\nabla\vec{\boldsymbol{u}}$, se relaciona con $\boldsymbol{F}$ según:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\delta} + \nabla\vec{\boldsymbol{u}} \qquad \Leftrightarrow \qquad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$$

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

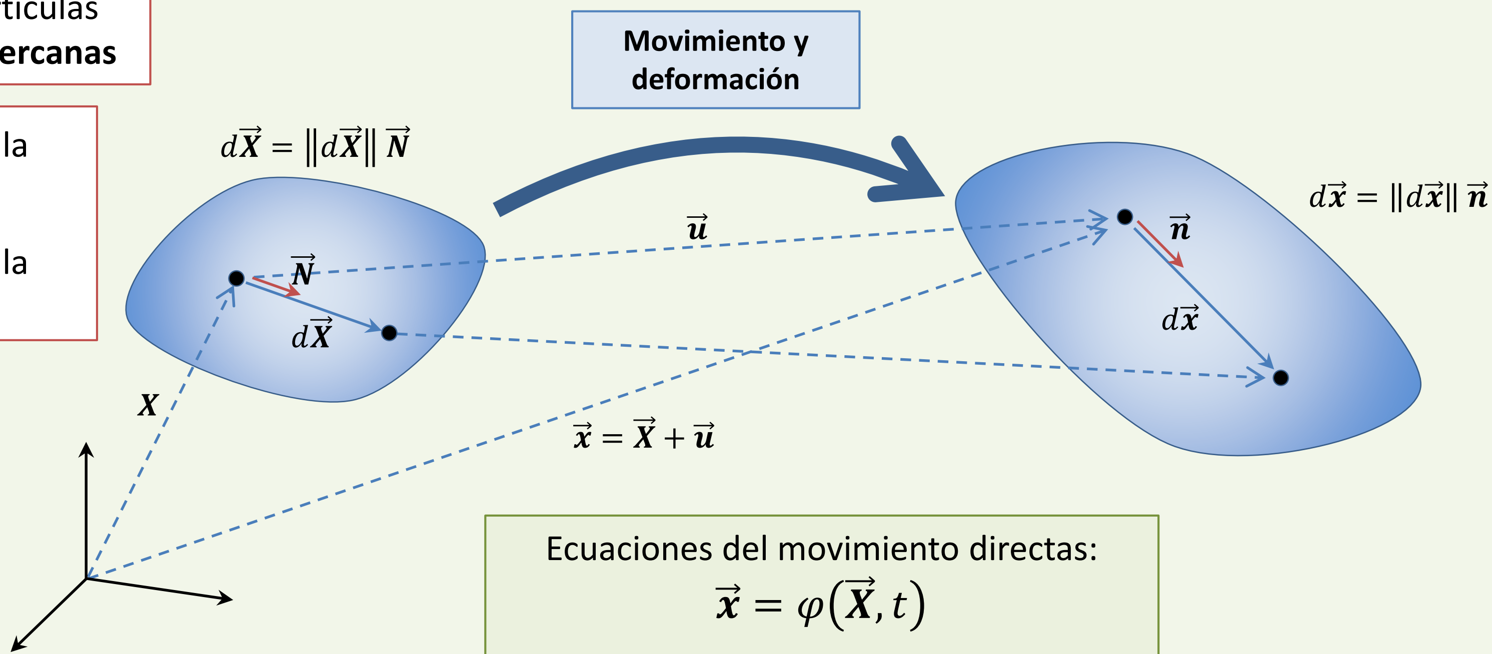
2.3.9. Dos formas "escalares" de medir deformación

- El concepto de "***stretch***" o "***estiramiento***"
- El concepto de "***deformación unitaria***" en la dirección $\vec{\boldsymbol{N}}$.

Consideremos 2 partículas **infinitesimalmente cercanas**

$\vec{\boldsymbol{N}}$: vector unitario en la dirección de $d\vec{\boldsymbol{X}}$

$\vec{\boldsymbol{n}}$: vector unitario en la dirección de $d\vec{\boldsymbol{x}}$



Ecuaciones del movimiento directas:

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \varphi\left(\vec{\boldsymbol{X}}, t\right)$$

Ecuaciones del movimiento inversas:

$$\vec{\boldsymbol{X}} = \varphi^{-1}\left(\vec{\boldsymbol{x}}, t\right)$$

$$\frac{\|d\vec{\boldsymbol{x}}\|}{\|d\vec{\boldsymbol{X}}\|} \equiv \lambda_N \equiv stretch > 0$$

$$e_N = \lambda_N - 1 = \frac{\|d\vec{\boldsymbol{x}}\|}{\|d\vec{\boldsymbol{X}}\|} - 1 \equiv def.unitaria = \frac{variación\ de\ longitud}{longitud\ inicial}$$

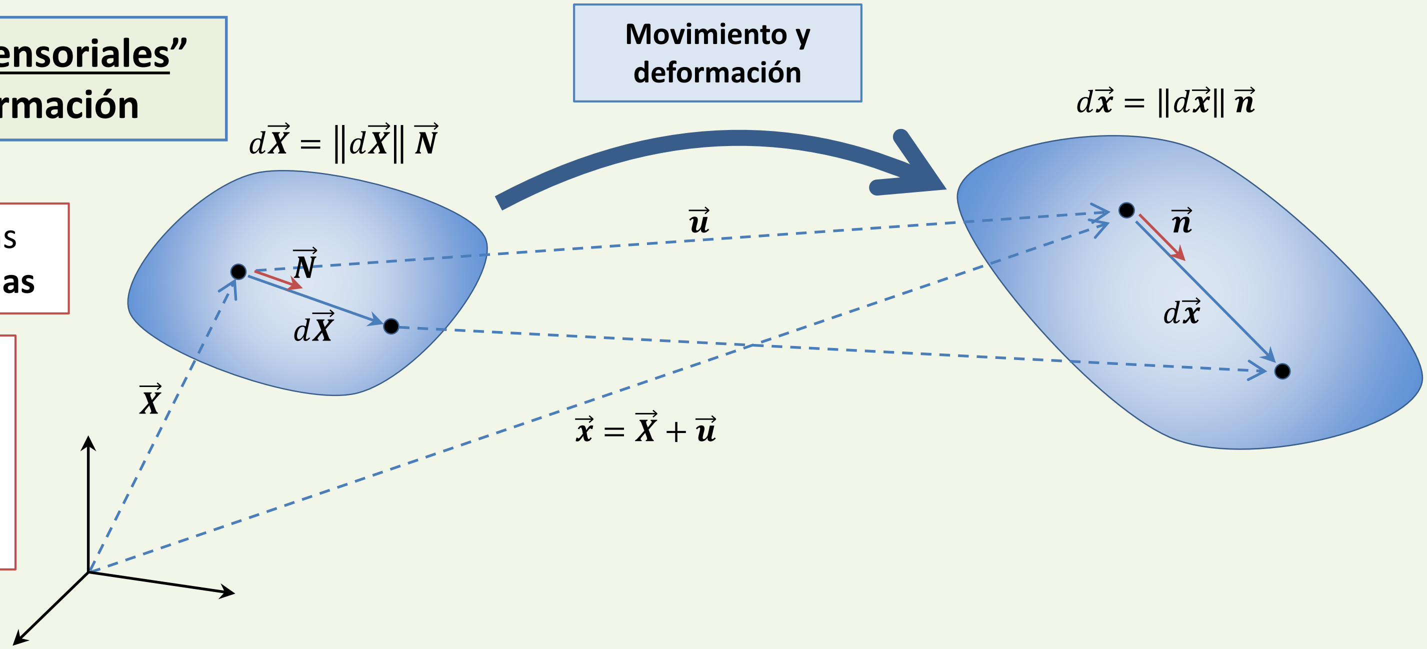
2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.10. Dos formas "tensoriales" de medir deformación

Consideremos 2 partículas **infinitesimalmente cercanas**

$\vec{\boldsymbol{N}}$: vector unitario en la dirección de $d\vec{\boldsymbol{X}}$

$\vec{\boldsymbol{n}}$: vector unitario en la dirección de $d\vec{\boldsymbol{x}}$



En esta condición, puede demostrarse que:

$$\frac{\|d\vec{\boldsymbol{x}}\|^2 - \|d\vec{\boldsymbol{X}}\|^2}{\|d\vec{\boldsymbol{X}}\|^2} = \lambda_N^2 - 1 = \vec{\boldsymbol{N}} \cdot \underbrace{(\boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{F} - \boldsymbol{\delta})} \cdot \vec{\boldsymbol{N}}$$

$$2\boldsymbol{E} \equiv \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{F} - \boldsymbol{\delta}$$

$\boldsymbol{E} \rightarrow$ Tensor de deformaciones de **Green – Lagrange**.

(tensor simétrico de 2º orden)

También puede demostrarse que:

$$\frac{\|d\vec{\boldsymbol{x}}\|^2 - \|d\vec{\boldsymbol{X}}\|^2}{\|d\vec{\boldsymbol{x}}\|^2} = 1 - \frac{1}{\lambda_N^2} = \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \underbrace{(\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{F}^{-1})} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}$$

$$2\mathbf{e} \equiv \boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}$$

$\mathbf{e} \rightarrow$ Tensor de deformaciones de **Euler – Almansi**.

(tensor simétrico de 2º orden)

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.11. Relación deformación – desplazamiento

- Deformación de ***Green-Lagrange*** y el ***gradiente <u>material</u>*** de $\vec{\boldsymbol{u}}$.
- Deformación de ***Euler-Almansi*** y el ***gradiente <u>espacial</u>*** de $\vec{\boldsymbol{u}}$.

Usando la relación $\boldsymbol{F} - \nabla\vec{\boldsymbol{u}}$ y la relación $\boldsymbol{F}^{-1} - \underline{\nabla\vec{\boldsymbol{u}}}$, se puede escribir:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\{\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^T + (\nabla\boldsymbol{u})^T\cdot\nabla\boldsymbol{u}\} \quad ; \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2}\left\{\underline{\nabla\boldsymbol{u}} + \left(\underline{\nabla\boldsymbol{u}}\right)^T - \left(\underline{\nabla\boldsymbol{u}}\right)^T\cdot\underline{\nabla\boldsymbol{u}}\right\}$$

En componentes:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right\} \quad ; \quad \mathrm{e}_{ij} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right\}$$

- Los tensores de deformación $\boldsymbol{E}$ y $\mathbf{e}$ son ***<u>distintos</u>*** entre sí.
- Más aun, el tensor $\mathbf{e}$ <u>no</u> es la "*descripción espacial*" del tensor $\boldsymbol{E}$.
- Incluso, ambos tensores son, en general, ***<u>distintos</u>*** del tensor de deformaciones que se utilizaba en la asignatura de **Teoría de Elasticidad**:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right\} \neq \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\partial u_i}{\partial X_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial X_i} + \dfrac{\partial u_k}{\partial X_i}\dfrac{\partial u_k}{\partial X_j}\right\} = E_{ij} \\[2ex] \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} - \dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}\dfrac{\partial u_k}{\partial x_j}\right\} = \mathrm{e}_{ij} \end{cases}$$

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.11. Relación deformación – desplazamiento

- Deformación de ***Green-Lagrange*** y el ***gradiente <u>material</u>*** de $\vec{\boldsymbol{u}}$.
- Deformación de ***Euler-Almansi*** y el ***gradiente <u>espacial</u>*** de $\vec{\boldsymbol{u}}$.

- Los tensores de deformación $\boldsymbol{E}$ y $\mathbf{e}$ son ***<u>válidos</u>*** cualquiera sea el "***tamaño***" del desplazamiento y de su gradiente.

- Esto NO ocurría con el tensor de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$, que se conoce como tensor de "***deformaciones infinitesimales***" (o tensor de "pequeñas deformaciones").

  $\rightarrow$ Más adelante volveremos a encontrarnos con $\boldsymbol{\varepsilon}$

- En Mecánica de Sólidos es conveniente usar $\boldsymbol{E}$ en lugar de $\mathbf{e}$.

¿ Para qué sirve el tensor $\boldsymbol{E}$?

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.12. Deformación y cambios geométricos

- Variación de <u>longitud</u> de segmentos infinitesimales de material.
- Variación de <u>ángulos</u>.

<u>Primera utilidad del tensor</u> $\boldsymbol{E}$: esta ya ha sido mencionada

El tensor de deformación $\boldsymbol{E}$ permite calcular el "***alargamiento***" y la "***deformación unitaria*** o ***ingenieril***", de una "fibra infinitesimal" que inicialmente estaba en la dirección material $\vec{\boldsymbol{N}}$:

$$\lambda_N = \sqrt{1 + 2\vec{\boldsymbol{N}} \cdot \boldsymbol{E} \cdot \vec{\boldsymbol{N}}}$$

$$e_N = \lambda_N - 1 = \sqrt{1 + 2\vec{\boldsymbol{N}} \cdot \boldsymbol{E} \cdot \vec{\boldsymbol{N}}} - 1$$

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.12. Deformación y cambios geométricos

- Variación de <u>longitud</u> de segmentos infinitesimales de material.
- Variación de <u>ángulos</u>.

Consideremos **3** partículas **infinitesimalmente cercanas**, P, Q y R que pertenecen a 2 fibras infinitesimales que se cruzan en un ángulo α_0

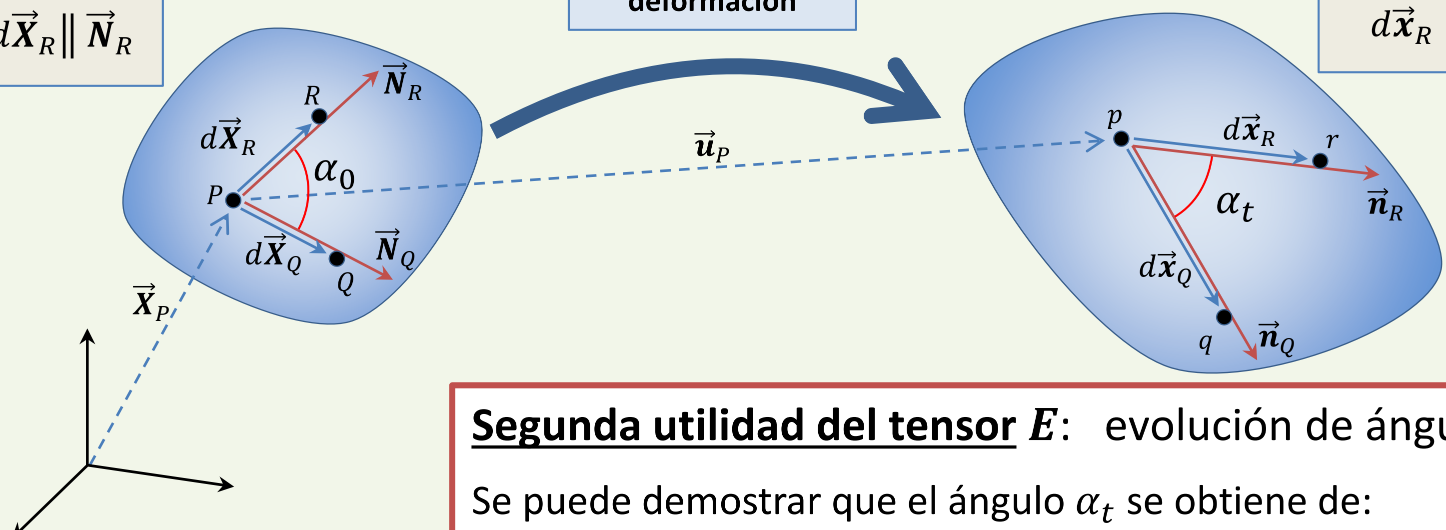
$\vec{\boldsymbol{N}}_Q$ y $\vec{\boldsymbol{N}}_R$: vectores <u>unitarios</u> en las direcciones de $d\vec{\boldsymbol{X}}_Q$ y $d\vec{\boldsymbol{X}}_R$

$\vec{\boldsymbol{n}}_Q$ y $\vec{\boldsymbol{n}}_R$: vectores <u>unitarios</u> en las direcciones de $d\vec{\boldsymbol{x}}_Q$ y $d\vec{\boldsymbol{x}}_R$

$$d\vec{\boldsymbol{X}}_Q = \left\| d\vec{\boldsymbol{X}}_Q \right\| \vec{\boldsymbol{N}}_Q$$
$$d\vec{\boldsymbol{X}}_R = \left\| d\vec{\boldsymbol{X}}_R \right\| \vec{\boldsymbol{N}}_R$$

Movimiento y deformación

$$d\vec{\boldsymbol{x}}_Q = \left\| d\vec{\boldsymbol{x}}_Q \right\| \vec{\boldsymbol{n}}_Q$$
$$d\vec{\boldsymbol{x}}_R = \left\| d\vec{\boldsymbol{x}}_R \right\| \vec{\boldsymbol{n}}_R$$



$$\cos(\alpha_0) = \vec{\boldsymbol{N}}_Q \cdot \vec{\boldsymbol{N}}_R$$

<u>Segunda utilidad del tensor</u> $\boldsymbol{E}$: evolución de ángulos

Se puede demostrar que el ángulo α_t se obtiene de:

$$\cos(\alpha_t) = \vec{\boldsymbol{n}}_Q \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_R = \frac{\vec{\boldsymbol{N}}_Q \cdot (2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\delta}) \cdot \vec{\boldsymbol{N}}_R}{\sqrt{1 + 2\vec{\boldsymbol{N}}_Q \cdot \boldsymbol{E} \cdot \vec{\boldsymbol{N}}_Q}\ \sqrt{1 + 2\vec{\boldsymbol{N}}_R \cdot \boldsymbol{E} \cdot \vec{\boldsymbol{N}}_R}}$$

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

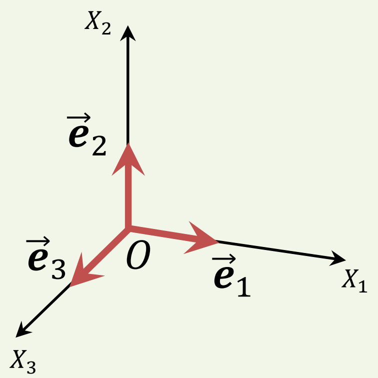
2.3.13. Significado de las componentes del tensor $\boldsymbol{E}$

- ¿ Qué hay en la *diagonal* del tensor $\boldsymbol{E}$?
- ¿ Qué hay en los términos *fuera de la diagonal* del tensor $\boldsymbol{E}$?

Cuestiones previas:

Consideremos un sistema de **ejes cartesianos** (O_{123}) y un conjunto de **3 vectores unitarios** y **ortogonales** $\vec{\boldsymbol{e}}_1$, $\vec{\boldsymbol{e}}_2$ y $\vec{\boldsymbol{e}}_3$.

Es decir, $\vec{\boldsymbol{e}}_1$, $\vec{\boldsymbol{e}}_2$ y $\vec{\boldsymbol{e}}_3$ forman una "***base ortonormal***"



En este sistema de referencia, el tensor $\boldsymbol{E}$ tiene 9 componentes que se pueden ordenar en una matriz:

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix}$$

Además, en el sistema (O_{123}), los vectores de la base tienen las siguientes componentes:

$$\vec{\boldsymbol{e}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{\boldsymbol{e}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{\boldsymbol{e}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, se observa que las componentes escalares de $\boldsymbol{E}$ se obtienen como:

$$E_{ij} = \vec{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{E} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_j$$

Matricialmente esto se representa como:

$$E_{ij} = (\vec{\boldsymbol{e}}_i)^T \, E \, \vec{\boldsymbol{e}}_j$$

Ejemplos:

$$\vec{\boldsymbol{e}}_1 \cdot \boldsymbol{E} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_1 = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = E_{11}$$

$$\vec{\boldsymbol{e}}_2 \cdot \boldsymbol{E} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_3 = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = E_{23}$$

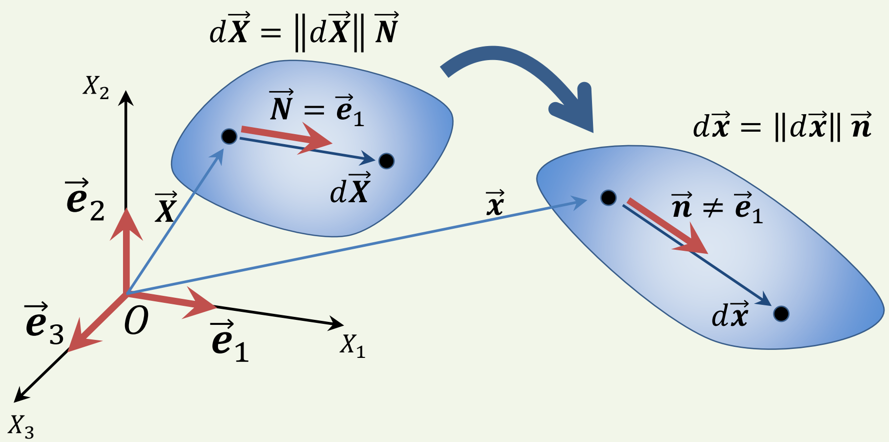
2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.13. Significado de las componentes del tensor $\boldsymbol{E}$

- ¿ Qué hay en la *diagonal* del tensor $\boldsymbol{E}$?
- ¿ Qué hay en los términos *fuera de la diagonal* del tensor $\boldsymbol{E}$?

Objetivo 1:

Queremos encontrar el "***stretch***" que sufre una ***fibra infinitesimal*** que ***inicialmente*** estaba en la dirección de $\vec{\boldsymbol{e}}_1$



Es decir:

$$\vec{\boldsymbol{N}} = \vec{\boldsymbol{e}}_1$$

En este caso, podemos denotar al "***estiramiento***" y a la "***deformación unitaria***" como:

$$\lambda_N = \lambda_1 \quad ; \quad e_N = e_1$$

Recordando las expresiones de la diap. 34:

$$\lambda_1 = \sqrt{1 + 2\,\underbrace{\vec{\boldsymbol{e}}_1 \cdot \boldsymbol{E} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_1}} = \sqrt{1 + 2E_{11}}$$

$$\Rightarrow \quad E_{11} = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 - 1) = \frac{1}{2}\left(\{e_1 + 1\}^2 - 1\right)$$

Análogamente, para fibras en las direcciones 2 y 3:

$$E_{22} = \frac{1}{2}(\lambda_2^2 - 1) = \frac{1}{2}\left(\{e_2 + 1\}^2 - 1\right)$$

$$E_{33} = \frac{1}{2}(\lambda_3^2 - 1) = \frac{1}{2}\left(\{e_3 + 1\}^2 - 1\right)$$

Por lo tanto, las componentes de la ***diagonal*** de $\boldsymbol{E}$ contienen información sobre:

-- *el estiramiento*

-- *la deformación unitaria*

de fibras infinitesimales que ***inicialmente*** estaban ***alineadas con los ejes coordenados***.

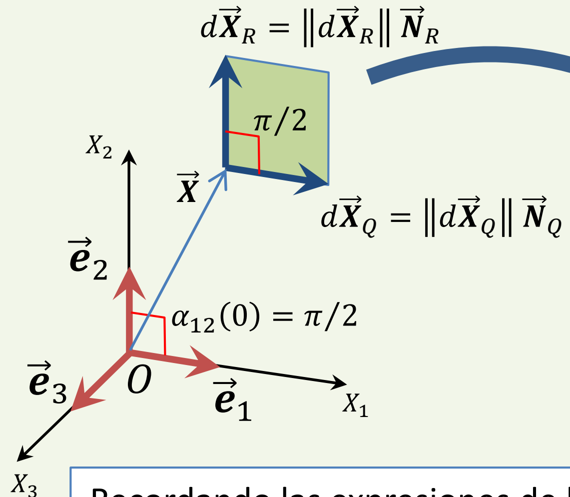
2.3 Cinemática del Sólido Deformable

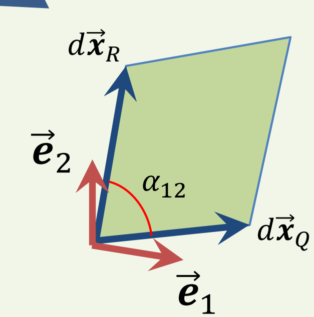
2.3.13. Significado de las componentes del tensor $\boldsymbol{E}$

- ¿ Qué hay en la *diagonal* del tensor $\boldsymbol{E}$?
- ¿ Qué hay en los términos ***fuera de la diagonal*** del tensor $\boldsymbol{E}$?

Objetivo 2:

Queremos encontrar el "***cambio del ángulo***" que forman 2 fibras infinitesimales que inicialmente estaban en la dirección de $\vec{\boldsymbol{e}}_1$ y de $\vec{\boldsymbol{e}}_2$





El ángulo inicial entre $\vec{\boldsymbol{e}}_1$ y $\vec{\boldsymbol{e}}_2$ es:

$$\alpha_{12}(\vec{\boldsymbol{X}},0) = \pi/2$$

En este caso:

$$\vec{\boldsymbol{N}}_Q = \vec{\boldsymbol{e}}_1 \quad ; \quad \vec{\boldsymbol{N}}_R = \vec{\boldsymbol{e}}_2$$

Además:

$$\cos(\,\alpha_{12}(\vec{\boldsymbol{X}},0)\,) = \cos(\pi/2) = \vec{\boldsymbol{e}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_2 = 0$$

En general, $\alpha_{12} = \alpha_{12}(\vec{\boldsymbol{X}},t)$

Estamos buscando el incremento:

$$\Delta\alpha_{12}(\vec{\boldsymbol{X}},t) = \alpha_{12}(\vec{\boldsymbol{X}},t) - \alpha_{12}(\vec{\boldsymbol{X}},0)$$

Recordando las expresiones de la diap. 35, junto a la id. trigonométrica $\cos(\theta) = \sin(\pi/2-\theta)$, se obtiene:

$$\cos(\,\alpha_{12}(\vec{\boldsymbol{X}},t)\,) = \frac{\vec{\boldsymbol{e}}_1\cdot(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\delta})\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_2}{\sqrt{1+2\vec{\boldsymbol{e}}_1\cdot\boldsymbol{E}\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_1}\,\sqrt{1+2\vec{\boldsymbol{e}}_2\cdot\boldsymbol{E}\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_2}} = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}}\,\sqrt{1+2E_{22}}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_{12}(\vec{\boldsymbol{X}},t)\right) = \sin\left(-\Delta\alpha_{12}(\vec{\boldsymbol{X}},t)\right)$$

$$\Rightarrow\ \Delta\alpha_{12}(\vec{\boldsymbol{X}},t) = -\arcsin\left(\frac{2E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}}\,\sqrt{1+2E_{22}}}\right) \equiv -\gamma_{12}(\vec{\boldsymbol{X}},t)$$

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.13. Significado de las componentes del tensor $\boldsymbol{E}$

- ¿ Qué hay en la *diagonal* del tensor $\boldsymbol{E}$?
- ¿ Qué hay en los términos ***fuera de la diagonal*** del tensor $\boldsymbol{E}$?

Objetivo 2:

Queremos encontrar el "***cambio del ángulo***" que forman 2 fibras infinitesimales que inicialmente estaban en la dirección de $\vec{\boldsymbol{e}}_1$ y de $\vec{\boldsymbol{e}}_2$

En resumen:

$$\gamma_{12}(\vec{\boldsymbol{X}},t) = \arcsin\left(\frac{2E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}}\,\sqrt{1+2E_{22}}}\right) = -\Delta\alpha_{12}(\vec{\boldsymbol{X}},t)$$

Análogamente, para pares de fibras en las direcciones 13 y 23:

$$\gamma_{13}(\vec{\boldsymbol{X}},t) = \arcsin\left(\frac{2E_{13}}{\sqrt{1+2E_{11}}\,\sqrt{1+2E_{33}}}\right) = -\Delta\alpha_{13}(\vec{\boldsymbol{X}},t)$$

$$\gamma_{23}(\vec{\boldsymbol{X}},t) = \arcsin\left(\frac{2E_{23}}{\sqrt{1+2E_{22}}\,\sqrt{1+2E_{33}}}\right) = -\Delta\alpha_{23}(\vec{\boldsymbol{X}},t)$$

Por lo tanto, las componentes ***fuera de la diagonal*** de $\boldsymbol{E}$ contienen información sobre:

-- *la deformación angular.*

Sin embargo, existe **acoplamiento**:

-- *las **componentes axiales** afectan a la **deformación angular*** !!!

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.13. Significado de las componentes del tensor $\boldsymbol{E}$

- ¿ Qué hay en la *diagonal* del tensor $\boldsymbol{E}$?
- ¿ Qué hay en los términos *fuera de la diagonal* del tensor $\boldsymbol{E}$?

Resumen sobre el tensor de deformación de Green-Lagrange $\boldsymbol{E}$:

- Es un *tensor de 2 orden*, *simétrico*. Tiene 9 componentes, sólo 6 de ellas son independientes.
- Permite calcular, en forma *exacta*, el "*stretch*" y la "*deformación unitaria*" que sufre una "*fibra infinitesimal*" que inicialmente estaba situada en la posición $\vec{\boldsymbol{X}}$ y orientada en una dirección arbitraria $\vec{\boldsymbol{N}}$.

  -- Las relaciones que dan λ_N y e_N en términos de $\boldsymbol{E}$, $\vec{\boldsymbol{X}}$ y $\vec{\boldsymbol{N}}$ son *no-lineales*.
- Las componentes en la *diagonal* de $\boldsymbol{E}$ permiten calcular los "*stretches*" y las "*deformaciones unitarias*" de fibras que inicialmente estaban alineadas con los ejes coordenados de un sistema cartesiano.
- Permite calcular la variación que sufre el ángulo (o "*deformación angular*" γ_{QR}) que forman 2 fibras infinitesimales inicialmente situadas en la posición $\vec{\boldsymbol{X}}$ y orientadas en las direcciones arbitrarias $\vec{\boldsymbol{N}}_Q$ y $\vec{\boldsymbol{N}}_R$.

  -- Las relación que da γ_{QR} en términos de $\boldsymbol{E}$, $\vec{\boldsymbol{X}}$, $\vec{\boldsymbol{N}}_Q$ y $\vec{\boldsymbol{N}}_R$ es *no-lineal* y *acoplada*.
- Las componentes *fuera de la diagonal* de $\boldsymbol{E}$ permiten calcular las "*deformaciones angulares*" γ_{12}, γ_{13} y γ_{23} de *pares de fibras* que inicialmente estaban alineadas con los ejes coordenados de un sistema cartesiano.

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.14. El caso de "*pequeños desplazamientos*" y "*deformaciones infinitesimales*"

- Reconectando con la "**deformación**" que estudiamos en la asignatura de "**Elasticidad**"

Supongamos que ocurren las siguientes 2 condiciones:

(1) El desplazamiento es "*pequeño*", es decir:

$$X_i \approx x_i$$

(2) Los gradientes materiales y espaciales del desplazamiento son "*pequeños*", es decir:

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right| \ll 1 \quad ; \quad \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| \ll 1 \quad \forall\, i,j \in \{1,2,3\}$$

Se tiene lo siguiente:

$$(2) \Longrightarrow E_{ij} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \cancel{\frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}}\right\} \approx \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right\}$$

$$(2) \Longrightarrow \mathrm{e}_{ij} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \cancel{\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}}\right\} \approx \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right\}$$

$$(1) \Longrightarrow \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \approx \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Por lo tanto, si ocurre (1) y (2), las dos medidas de la deformación, $\boldsymbol{E}$ y $\mathbf{e}$, colapsan en:

$$E_{ij} \approx \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right\} \approx \mathrm{e}_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} \equiv \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right\}$$

Tensor de Deformación Infinitesimal $\boldsymbol{\varepsilon}$

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.14. El caso de "*pequeños desplazamientos*" y "*deformaciones infinitesimales*"

Condiciones de "pequeña deformación":

(1) El desplazamiento es "*pequeño*", es decir:

$$X_i \approx x_i$$

(2) Los gradientes materiales y espaciales del desplazamiento son "*pequeños*", es decir:

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right| \ll 1 \quad ; \quad \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| \ll 1 \quad \forall\, i,j \in \{1,2,3\}$$

Primera utilidad del tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$:

∴ El tensor de **deformación infinitesimal**

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \overline{\varepsilon}\left(\vec{\boldsymbol{X}}, t\right)$$

permite aproximar linealmente la "***deformación ingenieril***" de un ***segmento diferencial*** situado en $\vec{\boldsymbol{X}}$ y orientado en la dirección material $\vec{\boldsymbol{N}}$:

$$e_N = \lambda_N - 1 \approx \vec{\boldsymbol{N}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{\boldsymbol{N}}$$

¿ Para qué sirve el tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ de deformaciones infinitesimales?

En relación a la figura de la diap. 31, se recuerda que:

$$\frac{\|d\vec{\boldsymbol{x}}\|^2 - \left\|d\vec{\boldsymbol{X}}\right\|^2}{\left\|d\vec{\boldsymbol{X}}\right\|^2} = \lambda_N^2 - 1 = 2\,\vec{\boldsymbol{N}} \cdot \boldsymbol{E} \cdot \vec{\boldsymbol{N}}$$

Observamos ahora que si ocurre (1) y (2), entonces:

$$\lambda_N \approx 1$$

Si se realiza una **expansión de Taylor** de $\lambda_N^2 - 1$ alrededor del punto $\lambda_N = 1$, se tiene:

$$2\,\vec{\boldsymbol{N}} \cdot \boldsymbol{E} \cdot \vec{\boldsymbol{N}} = \lambda_N^2 - 1 \approx 2(\lambda_N - 1) \quad \forall\, \lambda_N \approx 1$$

Como además, ya se sabe que $\boldsymbol{E} \approx \boldsymbol{\varepsilon}$, se tiene finalmente que:

$$\vec{\boldsymbol{N}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{\boldsymbol{N}} \approx \lambda_N - 1 = e_N$$

En componentes (recordar convención de Einstein):

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right\} N_i N_j \approx \lambda_N - 1 = e_N$$

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.14. El caso de "*pequeños desplazamientos*" y "*deformaciones infinitesimales*"

¿ Para qué sirve el tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ de deformaciones infinitesimales?

Condiciones de "pequeña deformación":

(1) El desplazamiento es "*pequeño*", es decir:

$$X_i \approx x_i$$

(2) Los gradientes materiales y espaciales del desplazamiento son "*pequeños*", es decir:

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right| \ll 1 \quad ; \quad \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| \ll 1 \quad \forall\, i,j \in \{1,2,3\}$$

En relación a la figura de la diap. 35, se recuerda que:

$$\cos(\alpha_t) = \vec{\boldsymbol{n}}_Q \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_R = \frac{\vec{\boldsymbol{N}}_Q \cdot (2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\delta}) \cdot \vec{\boldsymbol{N}}_R}{\sqrt{1 + 2\vec{\boldsymbol{N}}_Q \cdot \boldsymbol{E} \cdot \vec{\boldsymbol{N}}_Q}\,\sqrt{1 + 2\vec{\boldsymbol{N}}_R \cdot \boldsymbol{E} \cdot \vec{\boldsymbol{N}}_R}}$$

$$\cos(\alpha_0) = \vec{\boldsymbol{N}}_Q \cdot \vec{\boldsymbol{N}}_R$$

Observamos ahora que si ocurre (1) y (2), entonces:

$$\boldsymbol{E} \approx \boldsymbol{\varepsilon} \quad ; \quad \sqrt{1 + 2\vec{\boldsymbol{N}}_Q \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{\boldsymbol{N}}_Q} \approx 1 \quad ; \quad \sqrt{1 + 2\vec{\boldsymbol{N}}_R \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{\boldsymbol{N}}_R} \approx 1$$

En esta condición, puede demostrarse* que:

$$-\frac{\Delta\alpha}{2} = -\frac{\alpha_t - \alpha_0}{2} \approx \frac{\vec{\boldsymbol{N}}_Q \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\delta}) \cdot \vec{\boldsymbol{N}}_R}{\sin(\alpha_0)}$$

Segunda utilidad del tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$:

∴ El tensor de **deformación infinitesimal**

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(\vec{\boldsymbol{X}}, t)$$

permite aproximar linealmente la "***variación del ángulo***" entre 2 ***segmentos diferenciales*** situados en $\vec{\boldsymbol{X}}$ y orientados, respectivamente, en las dirección materiales $\vec{\boldsymbol{N}}_Q$ y $\vec{\boldsymbol{N}}_R$:

$$\gamma_{QR} \equiv -\Delta\alpha = -(\alpha_t - \alpha_0) \approx 2\,\frac{\vec{\boldsymbol{N}}_Q \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\delta}) \cdot \vec{\boldsymbol{N}}_R}{\sin(\alpha_0)}$$

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.15. Significado de las componentes del tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$

- ¿ Qué hay en la ***diagonal*** y *fuera de la diagonal* del tensor $\boldsymbol{E}$?
- ¿ Cómo se comparan las componentes de $\boldsymbol{E}$ y las de $\boldsymbol{\varepsilon}$?

Objetivo 1:

Queremos encontrar el “***stretch***” que sufre una ***fibra infinitesimal*** que ***inicialmente*** estaba en la dirección de $\vec{\boldsymbol{e}}_1$

Ver figura de la diap. 37.

Tal como en la diap. 37 , consideramos:

$$\vec{\boldsymbol{N}} = \vec{\boldsymbol{e}}_1$$

y se denota al “***estiramiento***” y a la “***deformación unitaria***” como:

$$\lambda_N = \lambda_1 \quad ; \quad e_N = e_1$$

En este caso, usando el resultado de la diap. 42 , se obtiene:

$$\varepsilon_{11} = \vec{\boldsymbol{e}}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_1 = e_1 = \lambda_1 - 1$$

Análogamente, para fibras en las direcciones 2 y 3:

$$\varepsilon_{22} = \vec{\boldsymbol{e}}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_2 = e_2 = \lambda_2 - 1$$

$$\varepsilon_{33} = \vec{\boldsymbol{e}}_3 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_3 = e_3 = \lambda_3 - 1$$

Por lo tanto, las componentes de la ***diagonal*** de $\boldsymbol{\varepsilon}$ contienen información sobre:

-- *el estiramiento*

-- *la deformación unitaria*

de fibras que ***inicialmente*** estaban ***alineadas con los ejes coordenados***.

¡¡¡ Esta relación es ***lineal*** !!!

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.15. Significado de las componentes del tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$

- ¿ Qué hay en la ***diagonal*** y *fuera de la diagonal* del tensor $\boldsymbol{E}$?
- ¿ Cómo se comparan las componentes de $\boldsymbol{E}$ y las de $\boldsymbol{\varepsilon}$?

Objetivo 1:

Queremos encontrar el "***stretch***" que sufre una ***fibra infinitesimal*** que ***inicialmente*** estaba en la dirección de $\vec{\boldsymbol{e}}_1$

Ver figura de la diap. 37.

COMPARACIÓN de las componentes en la DIAGONAL

Usando el tensor de deformaciones de **Green-Lagrange**, $\boldsymbol{E}$:

$$E_{11} = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 - 1) = \frac{1}{2}(\{e_1 + 1\}^2 - 1)$$

$$E_{22} = \frac{1}{2}(\lambda_2^2 - 1) = \frac{1}{2}(\{e_2 + 1\}^2 - 1)$$

$$E_{33} = \frac{1}{2}(\lambda_3^2 - 1) = \frac{1}{2}(\{e_3 + 1\}^2 - 1)$$

Usando el tensor de "***deformaciones infinitesimales***", $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\varepsilon_{11} = e_1 = \lambda_1 - 1$$

$$\varepsilon_{22} = e_2 = \lambda_2 - 1$$

$$\varepsilon_{33} = e_3 = \lambda_3 - 1$$

La relación entre la componente E_{ii} (no sum) y la "def. ingenieril" e_i es ***no-lineal*** !!!

La relación entre la componente ε_{ii} (no sum) y la "def. ingenieril" e_i es ***lineal*** !!!

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.15. Significado de las componentes del tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$

- ¿ Qué hay en la *diagonal* y ***fuera de la diagonal*** del tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$?
- ¿ Cómo se comparan las componentes de $\boldsymbol{E}$ y las de $\boldsymbol{\varepsilon}$?

Objetivo 2:

Queremos encontrar el "***cambio del ángulo***" que forman 2 fibras infinitesimales que inicialmente estaban en la dirección de $\vec{\boldsymbol{e}}_1$ y de $\vec{\boldsymbol{e}}_2$

Ver figura de la diap. 38.

Tal como en la diap. 38 , el ángulo inicial entre $\vec{\boldsymbol{e}}_1$ y $\vec{\boldsymbol{e}}_2$ es:

$$\alpha_{12}(\vec{\boldsymbol{X}},0) = \pi/2$$

Además: $\vec{\boldsymbol{N}}_Q = \vec{\boldsymbol{e}}_1 \quad , \quad \vec{\boldsymbol{N}}_R = \vec{\boldsymbol{e}}_2 \quad ,$

$$\cos\big(\,\alpha_{12}(\vec{\boldsymbol{X}},0)\,\big) = \cos(\pi/2) = \vec{\boldsymbol{e}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_2 = 0$$

$$\sin\big(\,\alpha_{12}(\vec{\boldsymbol{X}},0)\,\big) = \sin(\pi/2) = 1$$

En este caso, desarrollando el resultado de la diap. 43 , se obtiene:

$$\gamma_{12} \equiv -\Delta\alpha_{12} \approx 2\,\vec{\boldsymbol{e}}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_2 = 2\varepsilon_{12}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\gamma_{12} = -\frac{1}{2}\Delta\alpha_{12}$$

Análogamente, para fibras en las direcciones 2 y 3:

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\gamma_{13} = -\frac{1}{2}\Delta\alpha_{13}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\gamma_{23} = -\frac{1}{2}\Delta\alpha_{23}$$

2.3 Cinemática del Sólido Deformable

2.3.15. Significado de las componentes del tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$

- ¿ Qué hay en la *diagonal* y *fuera de la diagonal* del tensor $\boldsymbol{E}$?
- ¿ Cómo se comparan las componentes de $\boldsymbol{E}$ y las de $\boldsymbol{\varepsilon}$?

Objetivo 2:

Queremos encontrar el "***cambio del ángulo***" que forman 2 fibras infinitesimales que inicialmente estaban en la dirección de $\vec{\boldsymbol{e}}_1$ y de $\vec{\boldsymbol{e}}_2$

Ver figura de la diap. 38.

COMPARACIÓN de las componentes FUERA de la DIAGONAL

Usando el tensor de deformaciones de **Green-Lagrange**, $\boldsymbol{E}$:

$$\gamma_{12}(\vec{\boldsymbol{X}},t) = -\Delta\alpha_{12} = \arcsin\left(\frac{2E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}}\,\sqrt{1+2E_{22}}}\right)$$

$$\gamma_{13}(\vec{\boldsymbol{X}},t) = -\Delta\alpha_{13} = \arcsin\left(\frac{2E_{13}}{\sqrt{1+2E_{11}}\,\sqrt{1+2E_{33}}}\right)$$

$$\gamma_{23}(\vec{\boldsymbol{X}},t) = -\Delta\alpha_{23} = \arcsin\left(\frac{2E_{23}}{\sqrt{1+2E_{22}}\,\sqrt{1+2E_{33}}}\right)$$

Usando el tensor de "***deformaciones infinitesimales***", $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\gamma_{12}(\vec{\boldsymbol{X}},t) = -\Delta\alpha_{12} = 2\,\varepsilon_{12}$$

$$\gamma_{13}(\vec{\boldsymbol{X}},t) = -\Delta\alpha_{13} = 2\,\varepsilon_{13}$$

$$\gamma_{23}(\vec{\boldsymbol{X}},t) = -\Delta\alpha_{23} = 2\,\varepsilon_{23}$$

La relación entre la componente E_{ij} $(i \neq j)$ y la "def. angular" γ_{ij} es ***no-lineal*** !!! Además, hay ***acoplamiento*** !!!

La relación entre la componente ε_{ij} $(i \neq j)$ y la "def. angular" γ_{ij} es ***proporcional*** !!! ***No*** hay ***acoplamiento*** !!!

TABLA DE CONTENIDOS

2.4 Las Ecuaciones de Gobierno

Recuerdo

Variables de interés ↔ Ecuaciones que relacionan las variables

Variables de interés:

-- descripción material o Lagrangeana

-- descripción espacial o Euleriana

Ecuaciones que relacionan las variables:

Algunas son ***principio físicos*** generales:

-- formulación ***local***

-- formulación ***global***

Otras son ***ecuaciones constitutivas*** del material.

2.4 Las Ecuaciones de Gobierno

A. Ecuaciones de Conservación y Balance → **Principios generales** (aportan 8 ecuaciones)

- Conservación de la masa (ecuación de continuidad)
- Balance de la cantidad de movimiento (ecuaciones de equilibrio interno)
- Balance del momento de la cantidad de movimiento (o del momento angular)

  ⇨ simetría del tensor de tensiones
- Balance de la energía (primer principio de la Termodinámica)

B. Segunda Ley de la Termodinámica → **Principios generales** (aportan 2 restricciones)

- Desigualdad de Clausius-Planck
- Desigualdad del flujo de calor

C. Ecuaciones constitutivas → **Propias del material** (aportan un número de ecuaciones que depende del modelo particular en uso)

- Conducción del calor (usualmente se usa la Ley de Fourier)
- Comportamiento termo-mecánico (ecuación constitutiva termo-mecánica)
- Ecuaciones termodinámicas de estado (para la *energía interna* y otras variables)

2.4 Las Ecuaciones de Gobierno: A. Conservación y Balance

- **Conservación de la masa:**

La masa de un volumen material infinitesimal en movimiento y deformación es constante en el tiempo.

$$\boxed{\dot{\rho} + \rho\, div\left(\vec{\mathrm{v}}\right) = 0}$$

- **Balance de la cantidad de movimiento:**
(o balance del *momento lineal*)

La resultante de las fuerzas que actúan sobre un volumen material infinitesimal es igual a la variación de su cantidad de movimiento

$$\boxed{\nabla \cdot \sigma + \rho \vec{b} - \rho \dot{\vec{\mathrm{v}}} = 0}$$

- **Balance del momento de la cantidad de movimiento:**
(o balance del *momento angular*)

El momento resultante en un punto O de las acciones sobre un volumen material infinitesimal es igual a la variación por unidad de tiempo del momento respecto a O de la cantidad de movimiento

$$\boxed{\sigma = \sigma^T}$$

- **Balance de energía (primer principio de la Termodinámica):**

La variación temporal de la energía interna de un volumen material infinitesimal es suma de la variación de la energía mecánica comunicada y de la energía calorífica almacenada

$$\boxed{\rho\, \dot{e} = \sigma : \dot{\varepsilon} + \left(\rho\, r - div\left(\vec{q}\right)\right)}$$

ρ	**densidad de masa**
$\mathrm{v} = \vec{\mathrm{v}}$	**velocidad**
$b = \vec{b}$	**fuerzas de masa, N/kg**
σ	**tensor tensión, N/m²**
e	**energía interna, J/kg**
$\dot{\varepsilon}$	**Tensor velocidad de deformación**
$q = \vec{q}$	**flujo de calor, J/m²**
r	**Calor generado, W/kg**

2.4 Las Ecuaciones de Gobierno: B. El 2º ppio. de la Termod.

- **Desigualdad de Clausius-Plank**

La tasa de entropía interna que se genera por conducción de calor es positiva

⇒ "El calor siempre fluye de las partes más frías a las más calientes"

$$\dot{s} - \left(\frac{r}{T} - \frac{1}{\rho} div\left(\frac{\vec{q}}{T} \right) \right) \geq 0$$

- **Desigualdad del flujo de calor**

La tasa de entropía que se genera en el S. D. siempre es mayor o igual que la tasa de cantidad de calor por unidad de temperatura

$$-\frac{1}{\rho T^2} \vec{q} \cdot \nabla T \geq 0$$

ρ	densidad de masa
$\mathrm{v} = \vec{\mathrm{v}}$	velocidad
$b = \vec{b}$	fuerzas de masa, N/kg
σ	tensor tensión, N/m²
e	energía interna, J/kg
$\dot{\varepsilon}$	Tensor velocidad de deformación
$q = \vec{q}$	flujo de calor, J/m²
r	Calor generado, J/kg
s	entropía, W/kg
T	temperatura

2.4 Las Ecuaciones de Gobierno: C. Ecuaciones Constitutivas

- **Para conducción del calor**

$$\boxed{q = -k\nabla T}$$

- **Para el comportamiento termo-mecánico**
  (Ecuación constitutiva termo-mecánica)

$$f_i\left(\sigma, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, T, \mu_1, \ldots, \mu_p\right) = 0 \qquad i = 1, \ldots, 6$$

- **Para la entropía**

$$\boxed{s = s\left(\sigma, \varepsilon, T, \mu_1, \ldots, \mu_p\right)}$$

- **Ecuaciones termodinámicas de estado**

$$\boxed{e = e\left(\sigma, \varepsilon, T, \ldots\right)}$$

$$F_i\left(\rho, T, \mu_1, \ldots, \mu_p\right) = 0 \qquad i = 1, \ldots, p$$

ρ	**densidad de masa**
$\mathrm{v} = \vec{\mathrm{v}}$	**velocidad**
$b = \vec{b}$	**fuerzas de masa, N/kg**
σ	**tensor tensión, N/m²**
e	**energía interna, J/kg**
$\dot{\varepsilon}$	**Tensor velocidad de deformación**
$q = \vec{q}$	**flujo de calor, J/m²**
r	**Calor generado, J/kg**
s	**entropía, W/kg**
T	**temperatura**
k	**conductividad térmica**
$\mu_1, \ldots, \mu_p$	**Variables termo-dinámicas propias del modelo particular en uso**

2.4 Las Ecuaciones de Gobierno: C. Ecuaciones Constitutivas

- **Para el comportamiento termo-mecánico**
  (Ecuación constitutiva termo-mecánica)

$$f_i\left(\sigma, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, T, \mu_1, \ldots, \mu_p\right) = 0$$

$$\boxed{i = 1, \ldots, 6}$$

ρ	**densidad de masa**
$\mathrm{v} = \vec{\mathrm{v}}$	**velocidad**
$b = \vec{b}$	**fuerzas de masa, N/kg**
σ	**tensor tensión**
e	**energía interna, J/kg**
$\dot{\varepsilon}$	**Tensor velocidad de deformación**
$q = \vec{q}$	**flujo de calor, J/m²**
r	**Calor generado, J/kg**
s	**entropía, J/kg**
T	**temperatura**
k	**conductividad térmica**
$\mu_1, \ldots, \mu_p$	**Variables termo-dinámicas propias del modelo particular en uso**

En lo que sigue, nos concentraremos precisamente en **la ecuación constitutiva** para el **comportamiento termo-mecánico**.

TABLA DE CONTENIDOS

2.5 La Ecuación Constitutiva Termo-mecánica

2.5.1 Definición

$$f_i\left(\sigma, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, T, \mu_1, \ldots, \mu_p\right) = 0$$

$i = 1, \ldots, 6$

En Mecánica de los Sólidos Deformables, se entiende por ***ECUACIÓN CONSTITUTIVA*** de un material (en ocasiones denominado ***MODELO CONSTITUTIVO***) a una

ecuación matemática *mediante la cual se* ***relacionan entre sí*** *las* ***magnitudes mecánicas*** *y* ***termodinámicas*** *más relevantes del sólido, tales como:*

tensión, deformación, velocidad de deformación, temperatura,…

2.5 La Ecuación Constitutiva Termo-mecánica

2.5.1 Definición

$$f_i\left(\sigma, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, T, \mu_1, \ldots, \mu_p\right) = 0$$

$i = 1, \ldots, 6$

- Las ecuaciones constitutivas más simples deben proporcionar, **como mínimo**, una **relación** entre **la tensión** y **la deformación** en un punto material del sólido bajo análisis.
- En algunos casos sencillos, el modelo constitutivo proporciona una **expresión explícita** para obtener la **tensión $\boldsymbol{\sigma}$** como función de la **deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$** (este es el caso, por ejemplo, de la Ley de *Hooke-Lamé en Elasticidad*)
- En otros casos, el modelo constitutivo se establece mediante una **función no lineal** de $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$, lo que **impide** obtener explícitamente $\boldsymbol{\sigma}$ a partir de $\boldsymbol{\varepsilon}$. En estos casos, las ecuaciones constitutivas suelen resolverse por iteraciones. (Este es el caso, por ejemplo, de la Ley de *Ramberg-Osgood*, que se estudiará más adelante, en el capítulo de *Plasticidad*)
- Dependiendo de la conveniencia, las ecuaciones constitutivas pueden formularse ya sea como una **ecuación tensorial**, como un **sistema varias de ecuaciones escalares**, o bien, recurriendo al **álgebra de matrices**.
- Más aun, en algunos casos en los que existe un **retraso** entre "*causa*" y "*efecto*", las ecuaciones constitutivas pueden formularse mediante **ecuaciones diferenciales**, donde aparecen derivadas temporales de $\boldsymbol{\sigma}$ y de $\boldsymbol{\varepsilon}$. (Este es el caso de *Viscoelasticidad*, que se estudiará más adelante)

2.5 La Ecuación Constitutiva Termo-mecánica

2.5.2 Postulados Fundamentales

- Principio de determinismo

El ***estado tensional*** en un ***punto material*** de un medio continuo está determinado por los ***movimientos del medio continuo en el pasado***.

- Principio de acción local

- Principio de objetividad

2.5 La Ecuación Constitutiva Termo-mecánica

2.5.2 Postulados Fundamentales

- Principio de determinismo

- Principio de acción local

- Principio de objetividad

La historia de los movimientos del medio continuo únicamente influye en el ***estado tensional en un punto material*** a través de los ***movimientos relativos*** entre dicho punto y los puntos de su entorno material.

2.5 La Ecuación Constitutiva Termo-mecánica

2.5.2 Postulados Fundamentales

- Principio de determinismo

- Principio de acción local

- Principio de objetividad

La ***ecuación constitutiva*** para un ***punto material*** ha de formularse mediante un único funcional ***independiente*** del ***sistema de referencia***.

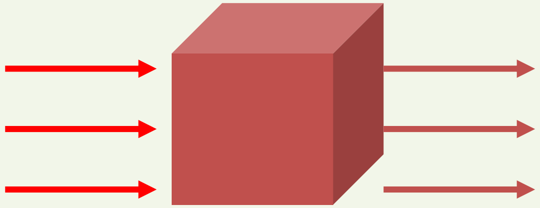
Expresado de otra forma, una ***ecuación constitutiva*** ha de formularse de un modo que garantice que el ***estado tensional*** en un ***punto material*** sea ***independiente*** del ***sistema de coordenadas*** elegido para medirlo.

2.5 La Ecuación Constitutiva Termo-mecánica

2.5.3 Construcción de un Modelo Constitutivo

- **Empíricos o fenomenológicos**

Relaciones causa-efecto

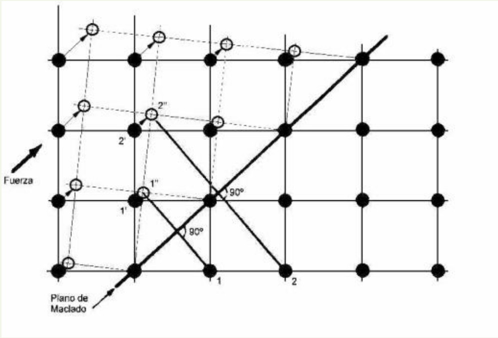


$\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T, ..$

Variables observables

- **Teóricos o físicos**

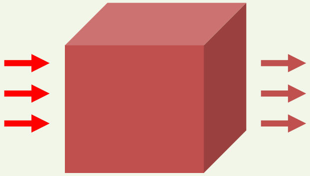
Aproximación microscópica



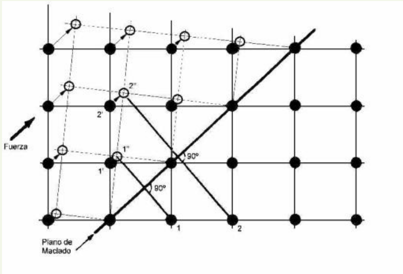
Aproximación termodinámica

- **Semi-fenomenológicos**

Se disminuye el nº. de constantes



$\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T, ..$



Se relacionan con microestructura

2.5 La Ecuación Constitutiva Termo-mecánica

2.5.4 Algunos Ejemplos

Ley de Hooke-Lamé

- Es el modelo constitutivo más simple.
- Es aplicable a materiales ***elásticos***, ***lineales*** e ***isótropos***, mientras su deformación sea ***pequeña*** ($e \ll 1$).

Expresión tensorial (libre de índices):	**Expresión en componentes**:
$\sigma = D : \varepsilon$	$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl}$

Si se reconoce que $\dot{\varepsilon}, T, \mu_1, \ldots, \mu_p$ no forman parte del Modelo Constitutivo de Hooke-Lamé, se observa que las expresiones anteriores son plenamente compatibles con la forma

$$f\left(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, T, \mu_1, \ldots, \mu_p\right) = 0$$

que se había propuesto anteriormente (en la diapositiva 54) para una ecuación constitutiva genérica implícita.

En este formato, la Ley de Hooke se escribe: $f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}\,; D) = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{D} : \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{0}$

2.5 La Ecuación Constitutiva Termo-mecánica

2.5.4 Algunos Ejemplos

Ley de Hooke-Lamé

- Es el modelo constitutivo más simple.
- Es aplicable a materiales ***elásticos***, ***lineales*** e ***isótropos***, mientras su deformación sea ***pequeña*** ($e \ll 1$).

Expresión tensorial (libre de índices):	**Expresión en componentes**:
$\sigma = D : \varepsilon$	$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl}$

σ : **Tensor de tensiones** (matemáticamente, es un **tensor simétrico** de **segundo orden**)

ε : **Tensor de deformaciones** (también es un **tensor simétrico** de **segundo orden**)

D: **Tensor de rigidez del material** (es un **tensor simétrico** de **cuarto orden**)

Las componentes de ***D*** dependen de las ***dos*** conocidas constantes elásticas isótropas, que son ***propiedades del material***:

E : Módulo de Young.

ν : coeficiente de Poisson.

2.5 La Ecuación Constitutiva Termo-mecánica

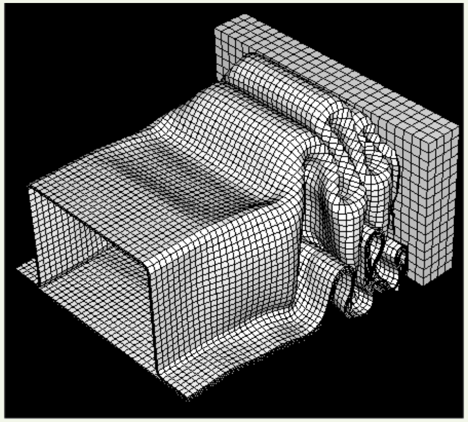
2.5.4 Algunos Ejemplos

Otras familias de modelos constitutivos

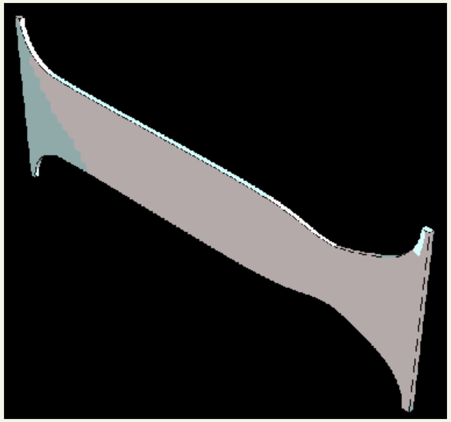
- Elasticidad lineal anisótropa
- Elasticidad no-lineal
- Teoría Total de la Plasticidad
  - Plasticidad perfecta
  - Endurecimiento por deformación plástica
- Teoría Incremental de la Plasticidad
  - Plasticidad perfecta
  - Endurecimiento por deformación plástica
- Visco-elasticidad

2.6 Algunas Aplicaciones prácticas

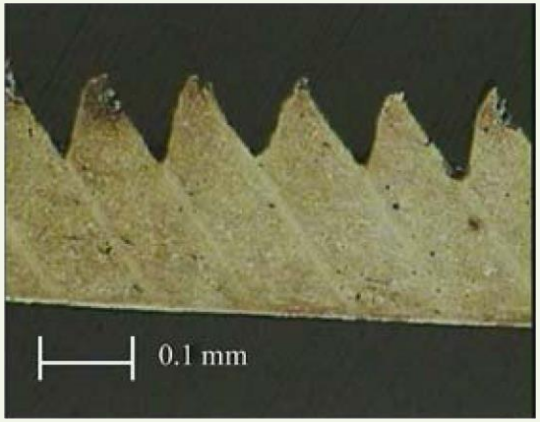
Inestabilidades termoplásticas



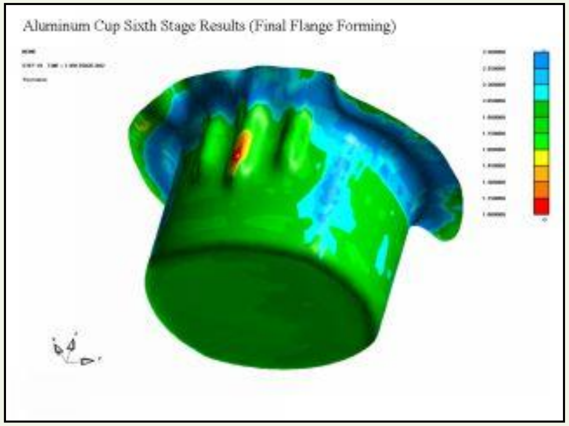
Estricción dinámica



Mecanizado de alta velocidad. Viruta en diente de sierra

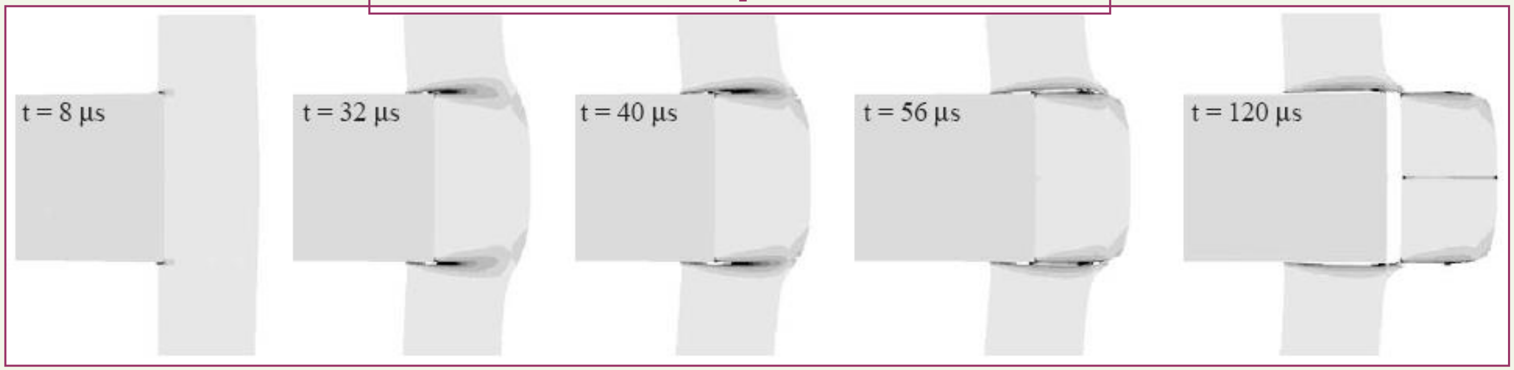


Procesos de estampado



2.6 Algunas Aplicaciones prácticas

Proceso de penetración



Choque

PROCESOS TERMOELASTOVISCOPLÁSTICOS

Incremento térmico

Alta velocidad de deformación

Grandes deformaciones