# MECÁNICA DE SÓLIDOS

## Curso 2017/18

**Titulación:**

Grado en Ingeniería Mecánica

# Tema 3 – Plasticidad

**Profesores:**

Jorge Zahr Viñuela
José Antonio Rodríguez Martínez

# *Tema 3*

## Plasticidad

# *Tema 3*

## Plasticidad

**3.1 CUESTIONES PREVIAS**

**3.2 CRITERIOS DE PLASTIFICACIÓN**

**3.3 CARACTERIZACIÓN DEL ENDURECIMIENTO POR DEFORMACIÓN**

**3.4 ECUACIONES DE LA PLASTICIDAD** (TEORÍA INCREMENTAL Y TOTAL)

**3.5 MÉTODOS NUMÉRICOS EN PLASTICIDAD**

# 3.1.1. Visión macroscópica del comportamiento plástico

El análisis macroscópico del comportamiento plástico requiere :

- Definir un **CRITERIO DE PLASTIFICACIÓN** formulado en **3D** con el que se establecen las **condiciones** para que comience el proceso de deformación plástica.
- Describir los procesos de **ENDURECIMIENTO** o de **ABLANDAMIENTO** por deformación, que pueden ocurrir bajo solicitación mecánica 3D.
- Unas **RELACIONES CONSTITUTIVAS** entre ***tensiones*** y ***deformaciones*** en la zona plástica.

En régimen plástico, la **relación constitutiva** entre tensión y deformación suele ser ***no lineal***:

∴ ¡¡ El valioso **Principio de Superposición** ya **NO es aplicable** !!

# 3.1.2. ¿Por qué estudiar plasticidad?

- **¡¡ La naturaleza es así !!**
- En los materiales reales, tras superar el límite elástico queda aún una ***reserva de resistencia*** notable:

  -- que se puede aprovechar

  -- de la que interesa conocer el margen de seguridad
- En régimen plástico se producen importantes ***redistribuciones de tensiones***, por lo que aumenta la capacidad resistente de la estructura.
- Hay procesos industriales (extrusión, conformado, trefilado,...) en los que la ***deformación plástica*** es ***imprescindible***.

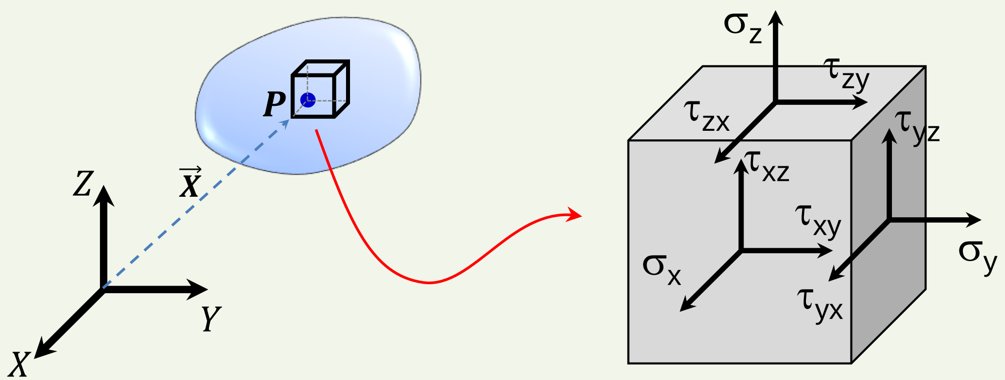
# 3.1.3. Recordatorio sobre el tensor de tensiones (1/4)

**Nota**: hay material complementario sobre esto en el **apartado 3.1** del libro Guía de Problemas.

- **Tensor de tensiones en unos ejes genéricos** (x,y,z):

El tensor de tensiones es una variable de campo:

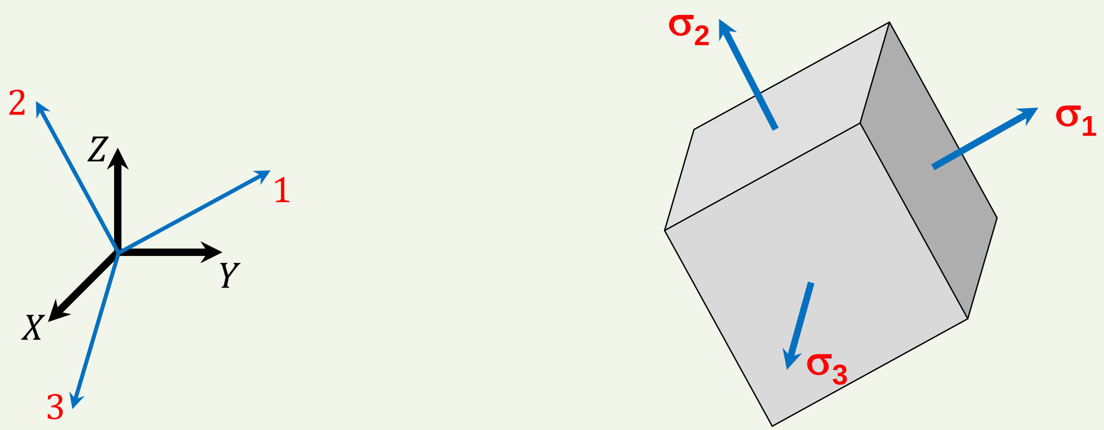
$$\boldsymbol{\sigma} = \overline{\sigma}(\vec{\boldsymbol{X}}, t)$$




$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

(simétrico)

- **Tensor de tensiones en los ejes principales**
(que suelen estar rotados respecto a los ejes originales **x,y,z**):




$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

(simétrico)

# 3.1.3. Recordatorio sobre el tensor de tensiones (2/4)

- Tensor de tensiones en un sistema de referencia genérico:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

- Tensor de tensiones referido a las direcciones principales:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

- Cálculo de tensiones principales
  (solución de la ecuación característica)

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = -\left[\sigma^3 - \tilde{I}_1\sigma^2 + \tilde{I}_2\sigma - \tilde{I}_3\right] = 0$$

**Invariantes**

- Invariantes del tensor de tensiones

$$\tilde{I}_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \qquad = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$\tilde{I}_2 = \left(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}{}^2 - \tau_{xz}{}^2 - \tau_{yz}{}^2\right) \qquad = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$$

$$\tilde{I}_3 = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \tau_{xz}\tau_{zx}\sigma_{yy} - \tau_{xy}\tau_{yx}\sigma_{zz} - \tau_{yz}\tau_{zy}\sigma_{xx} \qquad = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

# 3.1.3. Recordatorio sobre el tensor de tensiones (3/4)

Invariantes del tensor de tensiones (Invariantes de Cauchy):

$$\left\{\begin{aligned}
\tilde{I}_1 &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} && = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\
\tilde{I}_2 &= \left(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}{}^2 - \tau_{xz}{}^2 - \tau_{yz}{}^2\right) && = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \\
\tilde{I}_3 &= \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \tau_{xz}\tau_{zx}\sigma_{yy} - \tau_{xy}\tau_{yx}\sigma_{zz} - \tau_{yz}\tau_{zy}\sigma_{xx} && = \sigma_1\sigma_2\sigma_3
\end{aligned}\right.$$

Estos Invariantes del tensor $\boldsymbol{\sigma}$ reciben el nombre de "Invariantes de Cauchy".

- Es evidente que cualquier **combinación** de estos invariantes, será también un **invariante**.
- En Mecánica de Sólidos, son de gran utilidad unos invariantes diferentes, derivados a partir de los invariantes de Cauchy.
- Estos nuevos invariantes se denominan "Invariantes Genéricos" de $\boldsymbol{\sigma}$, y se definen como:

$$\left\{\begin{aligned}
I_1 &= \tilde{I}_1 && = tr(\sigma) && = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\
I_2 &= \frac{1}{2}\tilde{I}_1^2 - \tilde{I}_2 && = \frac{1}{2}tr\left(\sigma_{ip}\sigma_{pj}\right) = \frac{1}{2}tr\left(\sigma^2\right) && = \frac{1}{2}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) \\
I_3 &= \frac{1}{3}\tilde{I}_1^3 - \tilde{I}_1\tilde{I}_2 + \tilde{I}_3 && = \frac{1}{3}tr\left(\sigma_{ip}\sigma_{pq}\sigma_{qj}\right) = \frac{1}{3}tr\left(\sigma^3\right) && = \frac{1}{3}\left(\sigma_1^3 + \sigma_2^3 + \sigma_3^3\right)
\end{aligned}\right.$$

# 3.1.3. Recordatorio sobre el tensor de tensiones (4/4)

Tensión hidrostática: $\bar{\sigma} = \dfrac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} = \dfrac{\sigma_{ii}}{3} = \dfrac{I_1}{3}$

Componentes del tensor desviador

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\bar{\sigma}$$

El tensor de tensiones tiene 2 componentes:

Una ***hidrostática*** y una ***desviadora***.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix}}_{\text{Tensor hidrostático } \sigma_{ij}^{h}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \bar{\sigma} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \bar{\sigma} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \bar{\sigma} \end{bmatrix}}_{\text{Tensor desviador } s_{ij}}$$

**Invariantes genéricos** del tensor de tensiones desviadoras, ***S***:
(en función de las tensiones desviadoras ***principales***)

$$J_1 = 0$$

(en función de las tensiones ***principales*** del tensor de ***tensiones totales***)

$$J_2 = \frac{1}{2}\left(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2\right) = \frac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2\right]$$

Esta igualdad es válida sólo para tensores desviadores

$$J_3 = \frac{1}{3}\left(s_1^3 + s_2^3 + s_3^3\right) = s_1 s_2 s_3$$

**Invariantes genéricos** del tensor de tensiones desviadoras, ***S***:
(en función de los **invariantes genéricos** del tensor de tensiones totales: ***I*₁**, ***I*₂** e ***I*₃**)

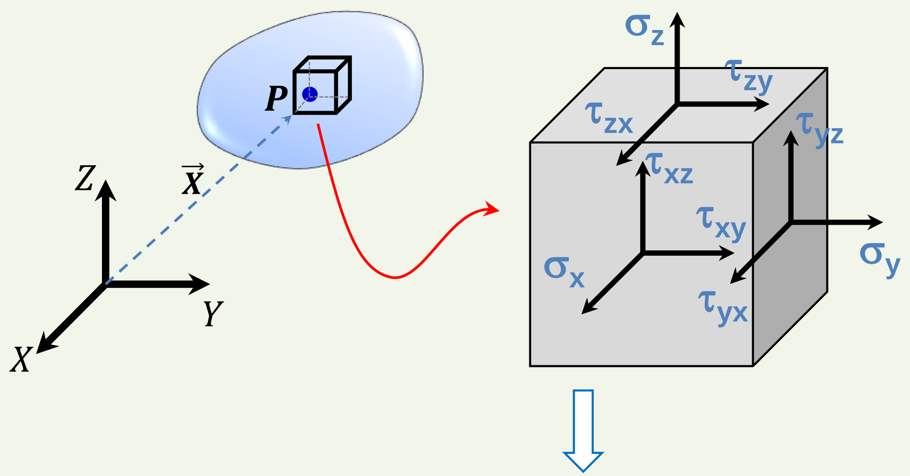
$$J_2 = I_2 - \frac{I_1^2}{6}$$

$$J_3 = I_3 - \tfrac{2}{3} I_1 I_2 + \tfrac{2}{27} I_1^3$$

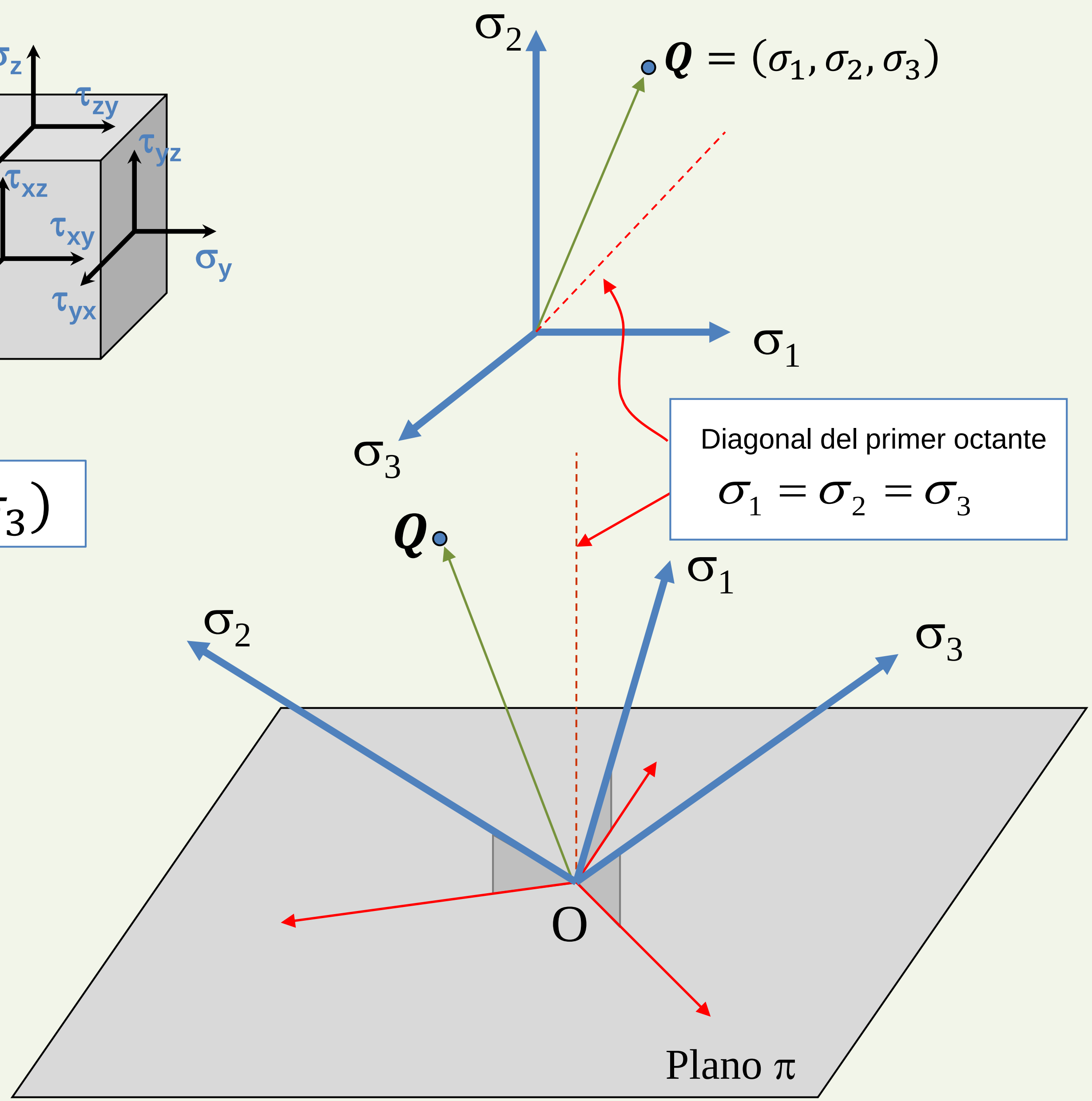
**Nota**: a veces se emplea el término ***presión***, $p$, como sinónimo de ***tensión hidrostática***:

$$p = -\bar{\sigma} = -\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} = -\frac{\sigma_{ii}}{3}$$

# 3.1. 4. Representación geométrica de Haig-Westergaard (1/3)




$$\boldsymbol{Q} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$




Diagonal del primer octante

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$$

Ecuación del plano $\pi$:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

# 3.1.4. Representación geométrica de Haig-Westergaard (2/3)

El estado tensional asociado a $\boldsymbol{Q}$ puede representarse a través del vector $\overrightarrow{OQ}$ , de componentes:

$$\overrightarrow{OQ} = (\sigma_1 \,, \sigma_2 \,, \sigma_3)^T$$

Este vector puede descomponerse en sus componentes ***normal*** y ***paralela*** al plano $\pi$ :

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$$

Donde $\overrightarrow{OP}$ es de la forma:

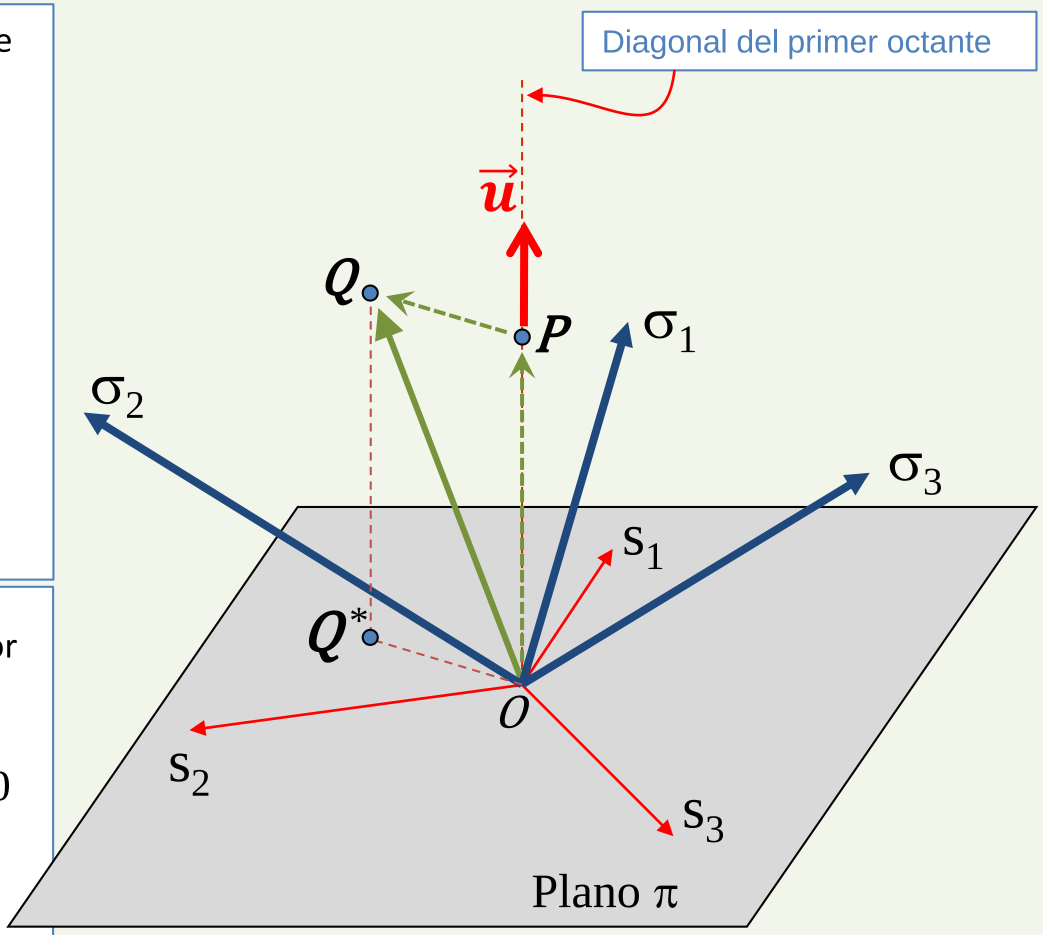
$$\overrightarrow{OP} = \left(\sigma_p, \sigma_p, \sigma_p\right)^T$$

Estableciendo la ortogonalidad entre $\overrightarrow{PQ}$ y un vector $\vec{\boldsymbol{u}}$ , paralelo a la diagonal:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = \left(\sigma_1 - \sigma_p, \sigma_2 - \sigma_p, \sigma_3 - \sigma_p\right) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$$

Se obtiene:

$$\sigma_p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3} = \overline{\sigma}$$

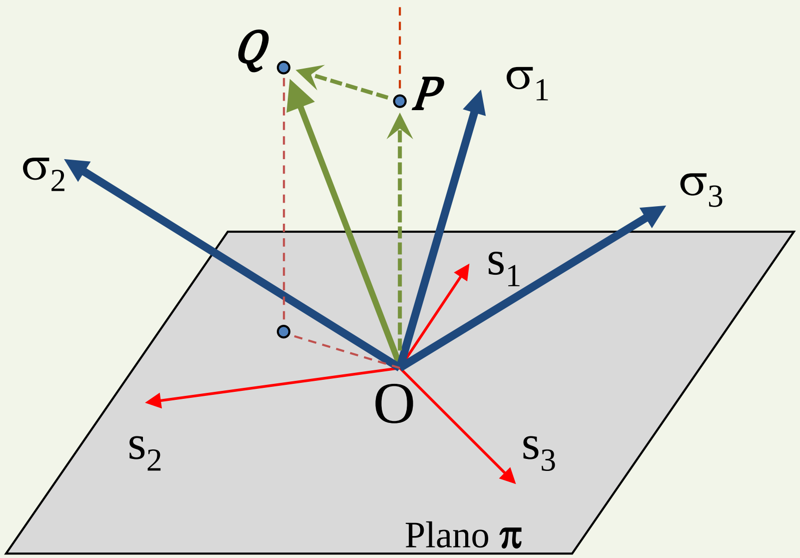


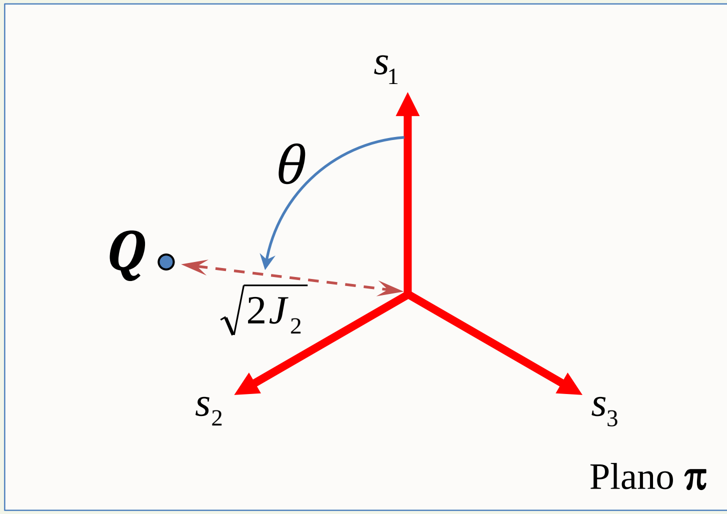

Con lo anterior, se obtiene:

$$\overrightarrow{OP} = (\overline{\sigma}, \overline{\sigma}, \overline{\sigma})^T = \frac{1}{3}(I_1, I_1, I_1)^T \quad ; \quad \overrightarrow{PQ} = (\sigma_1 - \overline{\sigma}, \sigma_2 - \overline{\sigma}, \sigma_3 - \overline{\sigma})^T = (s_1, s_2, s_3)^T = \overrightarrow{OQ^*}$$

# 3.1.4. Representación geométrica de Haig-Westergaard (3/3)

En ocasiones, es conveniente cambiar el ***punto de vista***, para observar directamente hacia el plano $\pi$ :




**Magnitudes de las componentes de $\overrightarrow{OQ}$ :**

$\|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{3}\,|\overline{\sigma}| = \dfrac{|I_1|}{\sqrt{3}}$ → proyección de $\overrightarrow{OQ}$ sobre la recta ***perpendicular*** al plano $\pi$

$\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{2\,J_2}$ → proyección de $\overrightarrow{OQ}$ sobre el plano $\pi$

**Ángulo de Lode** $\theta$

Se puede calcular de varias formas:

$$\cos(3\theta) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{J_2^{3/2}}$$

O bien:

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{s_1}{\sqrt{J_2}} = \frac{2s_1 - s_2 - s_3}{2\sqrt{3\,J_2}}$$

→ ***θ*** es un nuevo **invariante** del **tensor de tensiones !!!**

# *Tema 3*

## Plasticidad

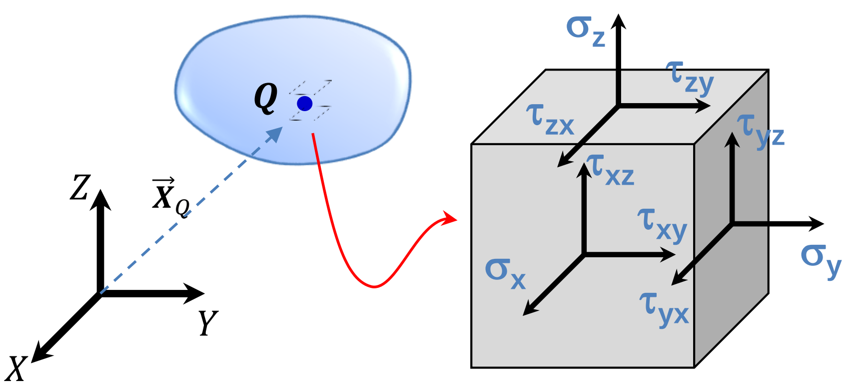
# 3.2.1. ¿Cómo definir el instante de inicio de la plastificación?

En un ensayo de ***tracción uniaxial***, el criterio de plastificación es:

$$\boxed{\sigma - \sigma_Y = 0}$$

Si el estado tensional es ***multiaxial***, debemos ***generalizar*** el concepto de ***límite de elasticidad***.

Sea un sólido sometido en un punto ***Q*** a un estado tensional general (posiblemente multiaxial):




**<u>Función de Plastificación</u>:**

Es una función escalar que depende de las componentes del tensor de tensiones

$$f = f\left(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}\right)$$

**<u>Criterio de Plastificación</u>:**

- En ***régimen elástico***, la función de plastificación es ***estrictamente negativa***

$$f\left(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}\right) < 0$$

- En el ***límite*** del ***régimen elástico***, la función de plastificación ***se anula***.

$$f\left(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}\right) = 0$$

# 3.2.2. Hipótesis básicas.-

- No se considera el efecto del ***tiempo***.
- No se incluye el efecto de la ***temperatura***.
- No se consideran los efectos producidos por la ***falta de homogeneidad*** del material a escala microscópica:

$\Longrightarrow$ El ***material real*** se idealiza como un ***medio continuo homogéneo***.

# 3.2.3. Hipótesis adicionales aplicables en el caso de materiales metálicos (1/13)

***Hipótesis 1ª.- El material es isótropo***

(***Isotropía:*** *ausencia de "direcciones predominantes"* )

***Hipótesis 2ª.- La plastificación es independiente de la componente hidrostática de la tensión***

(***Bridgman****, principios S.XX*)

***Hipótesis 3ª.- El comportamiento a tracción es el mismo que a compresión***

(*No se considerará el* ***efecto Bauschinger***)

A continuación estudiaremos las **consecuencias** de cada una de estas **hipótesis**

# 3.2.3. Hipótesis adicionales aplicables en el caso de materiales metálicos (2/13)

## *Hipótesis 1ª.- El material es isótropo*

**(Isotropía:** *ausencia de direcciones "predominantes"***)**

**Observación:** en general, las 6 componentes independientes del tensor de tensiones proporcionan información sobre:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \text{sim.} & & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

***A***) Tres cantidades invariantes (usualmente, los *autovalores* de $\boldsymbol{\sigma}$ ).

***B***) Tres vectores propios (las direcciones principales).

En un ***material arbitrario***, posiblemente ***no isótropo***, un criterio de plastificación debería depender de estos ***seis elementos*** contenidos en (***A***) y en (***B***), o bien, de todas las *seis* componentes de $\boldsymbol{\sigma}$, tal como en la expresión anterior:

$$f\left(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}\right) \leq 0$$

Sin embargo, en un ***materia isótropo***, las propiedades mecánicas ***no dependen de la dirección*** en que se midan.

$\therefore$ un ***criterio de plastificación*** debería poder expresarse ***únicamente*** en función de ***tres cantidades invariantes*** asociadas al ***tensor de tensiones***, sin necesidad de considerar la información aportada por las ***direcciones principales***.

# 3.2.3. Hipótesis adicionales aplicables en el caso de materiales metálicos (3/13)

## *Hipótesis 1ª.- El material es isótropo*

**(Isotropía:** *ausencia de direcciones "predominantes"***)**

Como consecuencia de lo anterior:

un ***criterio de plastificación*** para un ***material isótropo*** debería expresarse en función de ***cantidades invariantes*** asociadas al ***tensor de tensiones*** y ***no*** en función de las ***componentes*** del tensor en un ***sistema de referencia particular***.

*(**Invariantes**: son magnitudes independientes de la orientación del sistema de referencia que se escoja)*

$\Downarrow$

**Primera alternativa**: usar como "cantidades invariantes" a las ***tensiones principales.***

La ***función de plastificación*** depende de ***las tensiones principales***, de modo que el ***criterio de plastificación*** se expresa como:

$$f\left(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\right)=0$$

**Segunda alternativa**: usar como "cantidades invariantes" a los ***invariantes*** del tensor de tensiones.

La ***función de plastificación*** depende de los ***invariantes*** del tensor de tensiones, de modo que el ***criterio de plastificación*** se expresa como:

$$f\left(I_1,I_2,I_3\right)=0$$

# 3.2.3. Hipótesis adicionales aplicables en el caso de materiales metálicos (4/13)

## *Hipótesis 1ª.- El material es isótropo*

**(Isotropía:** *ausencia de direcciones "predominantes"***)**

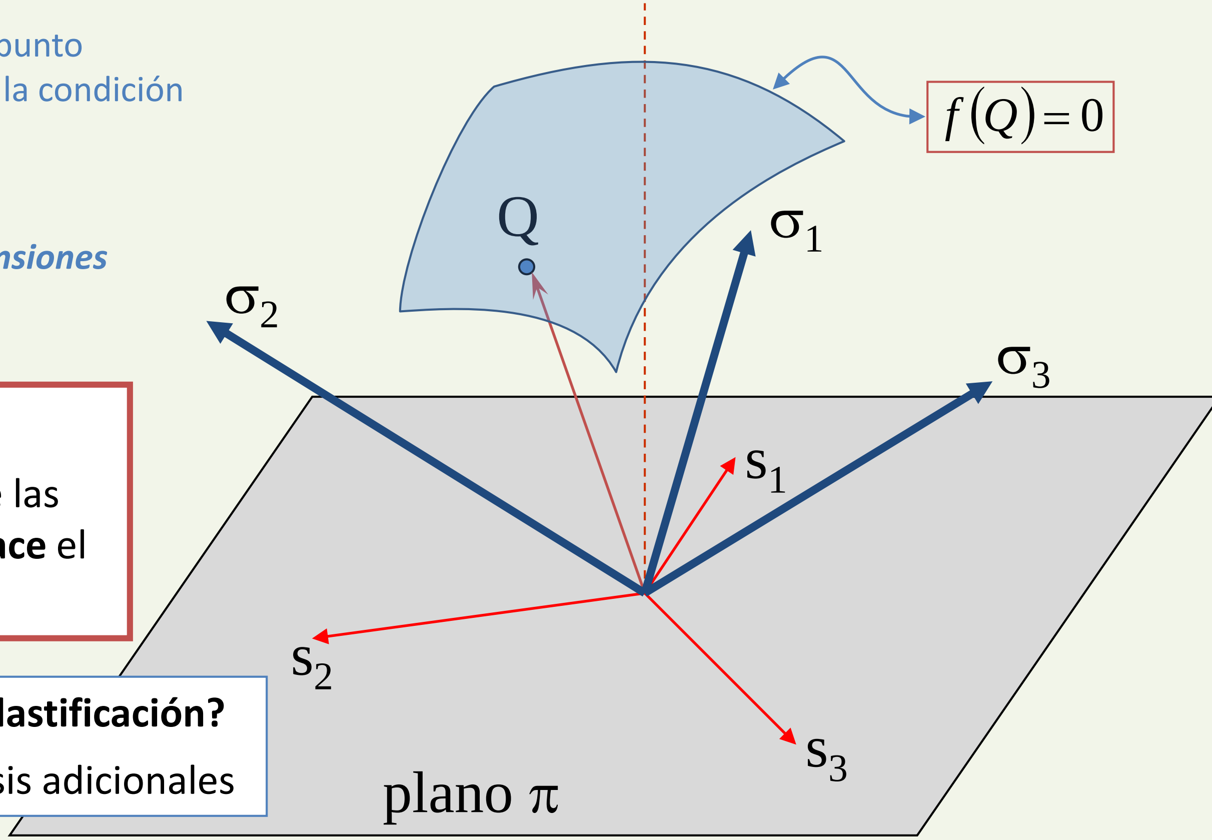
CONSECUENCIA DE LA ISOTROPÍA: Si consideramos, por ejemplo, la primera alternativa $f = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, entonces:

¿ Qué representa la ecuación $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ que define al criterio de plastificación ?

Es evidente que, si $\boldsymbol{Q} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ es un punto genérico del espacio de tensiones, entonces la condición (o criterio)

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = f(\boldsymbol{Q}) = 0$$

define una ***superficie*** en el ***espacio de las tensiones principales***.




**Superficie de plastificación:**

"Es el lugar geométrico del **espacio** de las **tensiones principales** donde **se satisface** el criterio de plastificación"

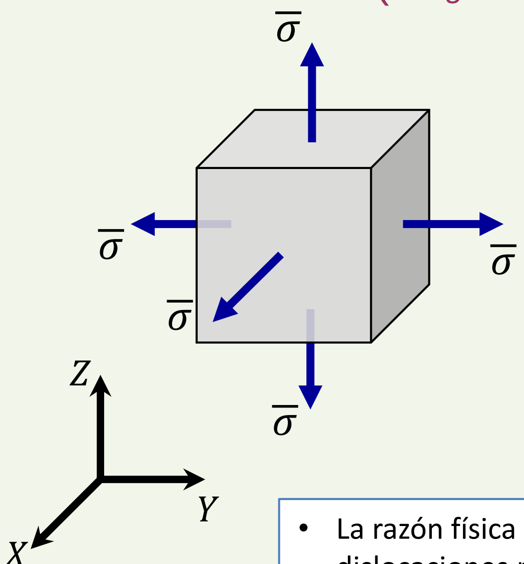
**¿ Qué forma tiene la Superficie de plastificación?**

Esto depende de las otras dos hipótesis adicionales

# 3.2.3. Hipótesis adicionales aplicables en el caso de materiales metálicos (5/13)

## *Hipótesis 2ª.- La plastificación es independiente de la componente hidrostática de la tensión*

(*Bridgman, principios S.XX*)




$$\begin{array}{ccccc} \sigma_{ij} & & \sigma^h_{ij} & & S_{ij} \\ \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} & = & \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix}} & + & \begin{bmatrix} \sigma_{xx}-\bar{\sigma} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy}-\bar{\sigma} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz}-\bar{\sigma} \end{bmatrix} \end{array}$$

**NO produce plastificación**, ni cambio **permanente** de volumen.

- La razón física que sustenta esta hipótesis es que la tensión hidrostática **no induce** movimiento de dislocaciones ni procesos de maclado.
- Por lo tanto, esta hipótesis es aplicable en **metales** u otros materiales en los que la naturaleza de la deformación plástica sea **deslizamiento** o **maclado**.
- Esta hipótesis **es aplicable** en una **cantidad importante de materiales de uso ingenieril**, aunque existen, ciertamente, materiales en los que esta hipótesis no es razonable (rocas o ciertos materiales porosos).

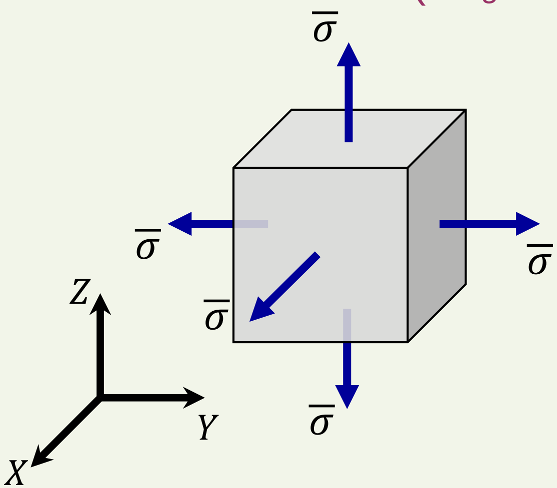
Si se adopta esta hipótesis, entonces:

El ***criterio de plastificación*** debe poder expresarse en función de ***cantidades invariantes*** asociadas al ***tensor desviador*** $S_{ij}$ ; **no** al tensor hidrostático $\sigma^h_{ij}$

# 3.2.3. Hipótesis adicionales aplicables en el caso de materiales metálicos (6/13)

## *Hipótesis 2ª.- La plastificación es independiente de la componente hidrostática de la tensión*

(*Bridgman, principios S.XX*)




$$\begin{array}{ccc} \sigma_{ij} & \sigma_{ij}^{h} & s_{ij} \\ \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = & \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix}} & + \begin{bmatrix} \sigma_{xx}-\bar{\sigma} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy}-\bar{\sigma} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz}-\bar{\sigma} \end{bmatrix} \end{array}$$

**NO produce plastificación**, ni cambio **permanente** de volumen.

**<u>Primera alternativa</u>:** usar como "cantidades invariantes" a las ***tensiones principales*** del ***tensor desviador.***

La ***función de plastificación*** depende de las ***tensiones desviadoras principales***, de modo que el ***criterio de plastificación*** se expresa como:

$$\boxed{f\left(s_1, s_2, s_3\right) = 0}$$

**<u>Segunda alternativa</u>:** usar como "cantidades invariantes" a los ***invariantes*** del ***tensor desviador***.

La ***función de plastificación*** depende de los ***invariantes*** del ***tensor desviador***, de modo que el ***criterio de plastificación*** se expresa como:

***Recordatorio:*** $J_1 = 0$

$$\boxed{f\left(J_2, J_3\right) = 0}$$

**Además:** En el caso de ***muchos metales***, el invariante $J_3$ tiene ***muy poca influencia*** en la función de plastificación.

# 3.2.3. Hipótesis adicionales aplicables en el caso de materiales metálicos (7/13)

## *Hipótesis 2ª.- La plastificación es independiente de la componente hidrostática de la tensión*

*(Bridgman, principios S.XX)*

**Más aun**: Si se recuerda la definición del **Ángulo de Lode** (ver pág. 12), resulta que:

$$\cos(3\theta) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{J_2^{3/2}}$$

para un **valor fijo** de $J_2$ , se tiene que:

la relación entre $J_3$ y $\cos(3\theta)$ es de **proporcionalidad**.

Por lo tanto:

El criterio de plastificación en la forma

$$f(J_2, J_3) = 0$$

Puede reformularse como:

$$\boxed{f\big(J_2\,, \cos(3\theta)\big) = 0}$$

Veremos que esta forma, aunque es equivalente, es mucho más conveniente !!!

# 3.2.3. Hipótesis adicionales aplicables en el caso de materiales metálicos (8/13)

## *Hipótesis 2ª.- La plastificación es independiente de la componente hidrostática de la tensión*

CONSECUENCIAS de esta hipótesis en la forma de la ***superficie de plastificación***

Sean $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$ puntos representativos de **dos estados tensionales** que **difieren exclusivamente** en su componente **hidrostática**.

$\rightarrow$ Esto es, ambos puntos tienen igual $J_2$ e igual $J_3$.

Necesariamente, $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$ están en la **misma recta** perpendicular al plano $\pi$ (pues tienen igual ángulo $\theta$)

Como hemos admitido que:

$$f = f(J_2, \cos(3\theta))$$

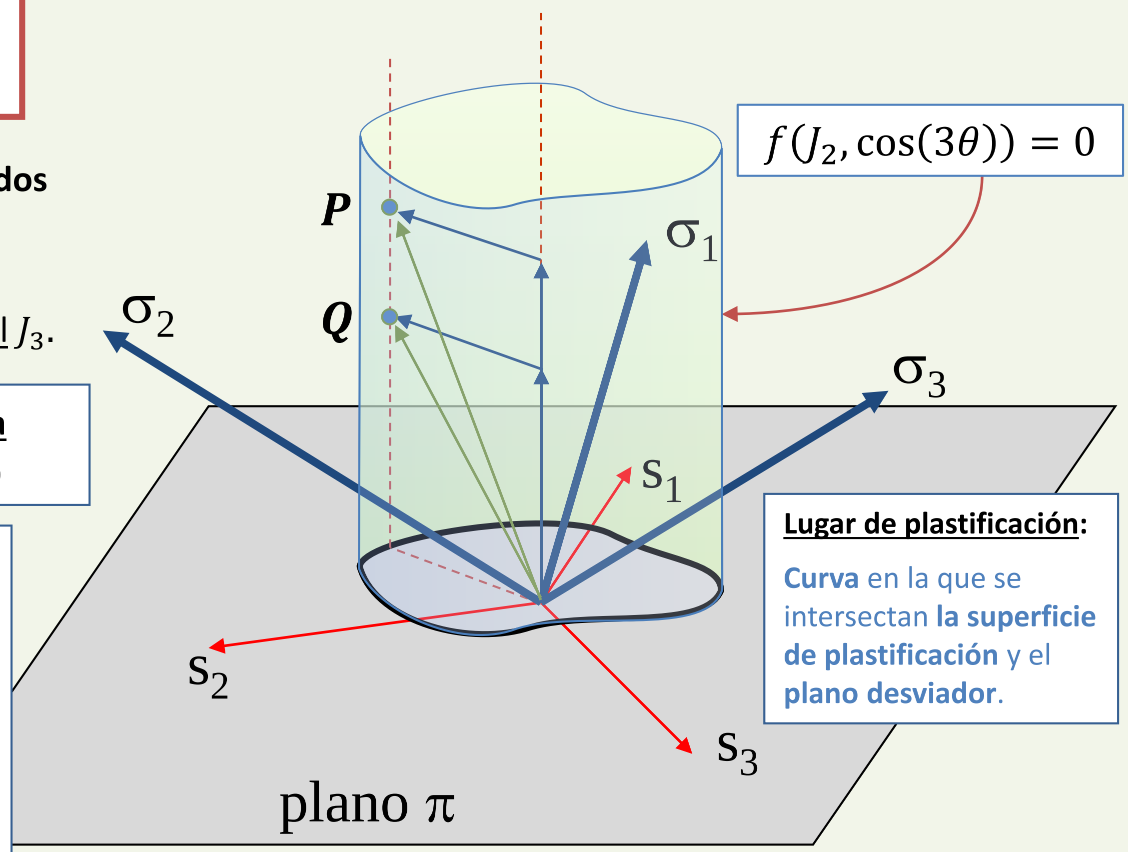
Y como, además, se tiene que:

$$J_2(\boldsymbol{P}) = J_2(\boldsymbol{Q}) \quad ; \quad \theta(\boldsymbol{P}) = \theta(\boldsymbol{Q})$$

Resulta entonces que:

$$f(\boldsymbol{P}) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(\boldsymbol{Q}) = 0$$

$\therefore$ Si uno de los puntos satisface el criterio, el otro también




**Lugar de plastificación:**

**Curva** en la que se intersectan **la superficie de plastificación** y el **plano desviador**.

La superficie de plastificación $f(J_2, \cos(3\theta)) = 0$ es una **superficie cilíndrica recta**, cuyo eje es perpendicular al plano $\pi$

# 3.2.3. Hipótesis adicionales aplicables en el caso de materiales metálicos (9/13)

## *Hipótesis 2ª.- La plastificación es independiente de la componente hidrostática de la tensión*

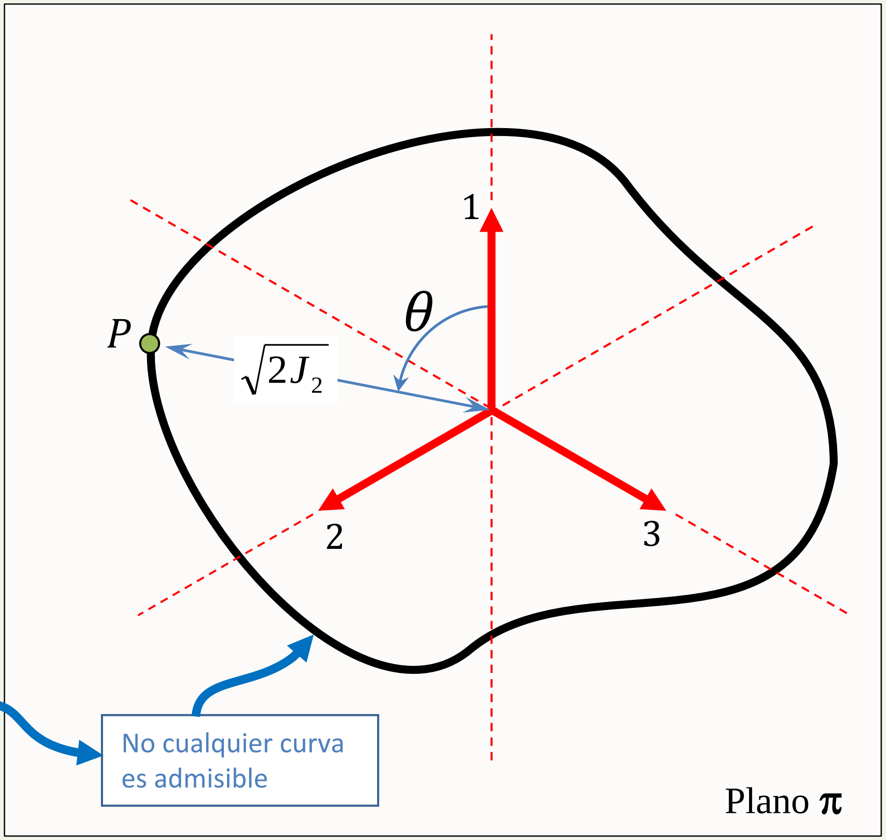
CONSECUENCIAS de esta hipótesis en la forma de la ***superficie de plastificación***

Al cambiar el punto de vista, se aprecia que el **Lugar De Plastificación** contiene **toda la información relevante** sobre la **Superficie de Plastificación**

Si ***P*** es un estado tensional que **satisface el criterio de plastificación** $f\,(\,J_2, \cos(3\theta)\,) = 0$ , entonces

***P*** se sitúa **en el lugar de plastificación**.

¿ Qué **formas** puede adoptar el **Lugar de Plastificación** ?



# 3.2.3. Hipótesis adicionales aplicables en el caso de materiales metálicos (10/13)

## *Hipótesis 2ª.- La plastificación es independiente de la componente hidrostática de la tensión*

CONSECUENCIAS de esta hipótesis en la forma de la ***superficie de plastificación***

¿ Qué **formas** puede adoptar el **Lugar de Plastificación** ?

Evidencia **experimental** y **consideraciones termodinámicas** sugieren que esta **curva** debe ser:

-- Cerrada

-- Convexa

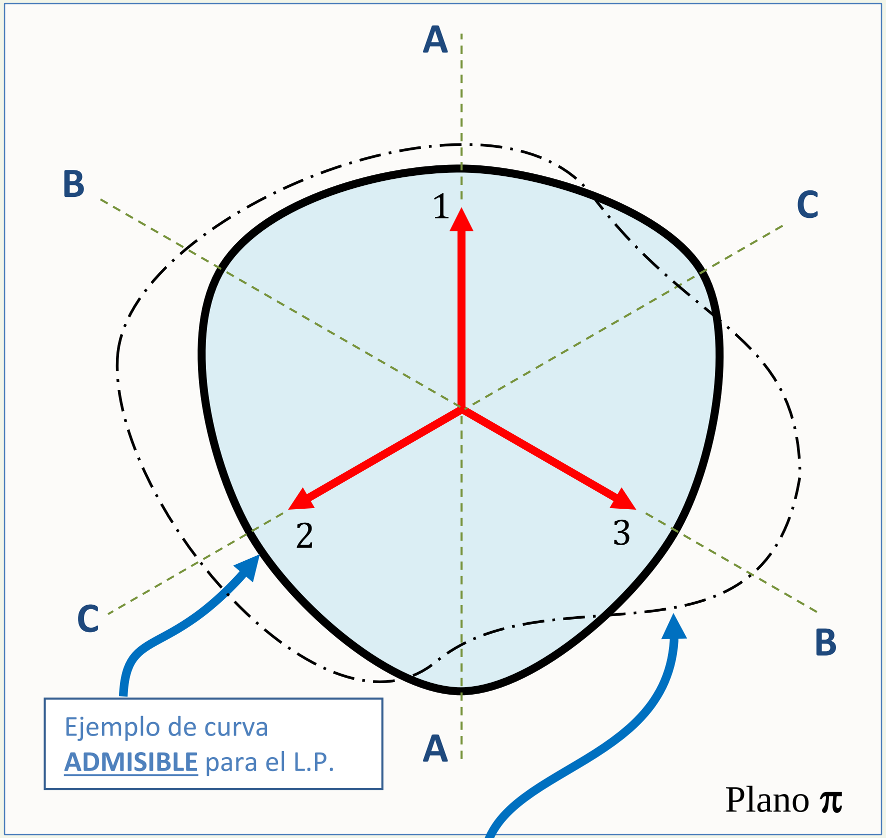
Además, puede demostrarse que las hipótesis de:

Isotropía + $f = f(J_2, \cos(3\theta))$ ,

tienen como resultado lo siguiente:

-- La **curva** es **simétrica** con respecto a los ejes **AA, BB** y **CC** (debido a la **paridad** de la función **coseno**)

-- La **curva** tiene **periodicidad** de 120º (que es el **período** de la función $\cos(3\theta)$)




Ejemplo de curva **NO ADMISIBLE** para el L.P. (tiene zonas cóncavas, no tiene periodicidad de 120º, etc.)

# 3.2.3. Hipótesis adicionales aplicables en el caso de materiales metálicos (11/13)

## *Hipótesis 3ª.- El comportamiento a tracción es el mismo que a compresión*

El límite elástico no cambia al cambiar de signo las tensiones aplicadas.

∴ La función de plastificación ***no debe cambiar*** si todas las componentes del tensor de tensiones cambian de signo

$$\Rightarrow \quad f(\sigma_{ij}) = f(-\sigma_{ij})$$

∴ ***f*** debe ser función ***par*** de $s_1$, $s_2$ y $s_3$.

**Primera alternativa**:

Si se escoge $f(s_1, s_2, s_3) = 0$, la ***función de plastificación*** debe escogerse de modo que garantice paridad:

$$f(s_1, s_2, s_3) = f(-s_1, -s_2, -s_3)$$

**Segunda alternativa**:

Si se escoge $f(J_2, \cos(3\theta)) = 0$, entonces:

¿ Cómo debe escogerse la función $f = f(J_2, cos(3\theta))$ para garantizar la independencia del signo de la tensión ?

# 3.2.3. Hipótesis adicionales aplicables en el caso de materiales metálicos (12/13)

## *Hipótesis 3ª.- El comportamiento a tracción es el mismo que a compresión*

**Sean**: $\boldsymbol{P} = (s_1, s_2, s_3)$ ; $\boldsymbol{Q} = (-s_1, -s_2, -s_3)$

Es directo verificar que:

$$J_2(\boldsymbol{P}) = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = J_2(\boldsymbol{Q})$$

$$J_3(\boldsymbol{P}) = s_1 s_2 s_3 = -J_3(\boldsymbol{Q})$$

Por lo tanto, según la definición del Ángulo de Lode, se tiene:

$$\cos(3\theta) = -\cos(3\theta^*)$$

Si el material plastifica en $\boldsymbol{P}$, entonces también plastifica en $\boldsymbol{Q}$, es decir:

$$f(\boldsymbol{P}) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(\boldsymbol{Q}) = 0$$

**Por lo tanto**:

La función de plastificación $f = f(J_2, \cos(3\theta))$ debe escogerse como función **par de su segundo argumento**, de modo que:

$$f(J_2, \cos(3\theta)) = f(J_2, -\cos(3\theta))$$

- Identidad trigonométrica: $-\cos(3\theta) = \cos(\pi - 3\theta) = \cos(\pi - 3\theta + 2\pi) = \cos(\,3[\pi - \theta]\,)$
- Cambio de variables: $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad \Rightarrow \quad \cos(3\theta) = \cos\left(3\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right]\right) \;\text{ y }\; -\cos(3\theta) = \cos\left(3\left[\frac{\pi}{2} + \alpha\right]\right)$

Finalmente, sustituyendo en la condición de paridad:

$$f\left(J_2, \cos\left(3\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right]\right)\right) = f\left(J_2, \cos\left(3\left[\frac{\pi}{2} + \alpha\right]\right)\right)$$

¡¡¡ La función de plastificación debe ser SIMÉTRICA con respecto a $\theta = \frac{\pi}{2}$ !!!

# 3.2.3. Hipótesis adicionales aplicables en el caso de materiales metálicos (13/13)

## *Todas las consecuencias de las Hipótesis 1ª , Hipótesis 2ª y Hipótesis 3ª*

¿ Qué **formas** puede adoptar el **Lugar de Plastificación** ?

Evidencia **experimental** y **consideraciones termodinámicas** sugieren que esta **curva** debe ser:

-- Cerrada

-- Convexa

Las hipótesis 1 y 2, de:

Isotropía + $f = f(J_2, \cos(3\theta))$ ,

tienen como resultado lo siguiente:

(1) La **curva** es **simétrica** con respecto a los ejes AA, BB y CC (debido a la **paridad** de la función **coseno**)

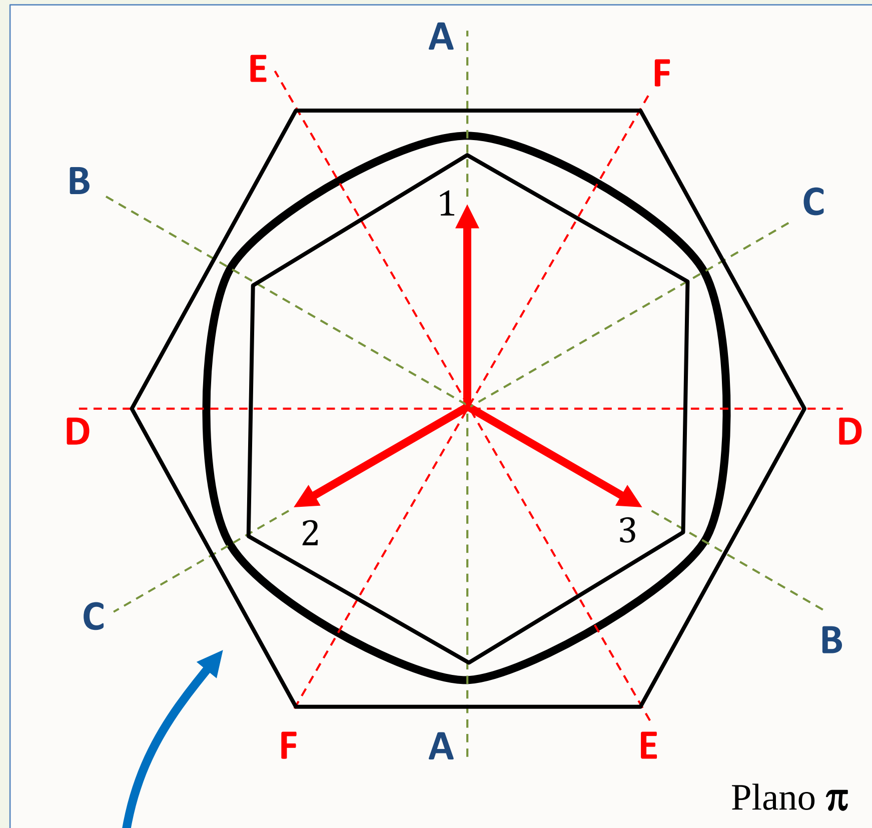
(2) La **curva** tiene **periodicidad** de 120º (que es el **período** de la función $\cos(3\theta)$)

La hipótesis 3, de:

Límite en tracción = Límite en compresión ,

tiene como resultado lo siguiente:

(3) La **curva** es **simétrica** con respecto al eje **DD** (y a los ejes **EE** y **FF**, debido a la **periodicidad** de 120º)




Ejemplos de 3 curvas **ADMISIBLES** para el L.P. :

Las 3 curvas satisfacen las 3 hipótesis !!!

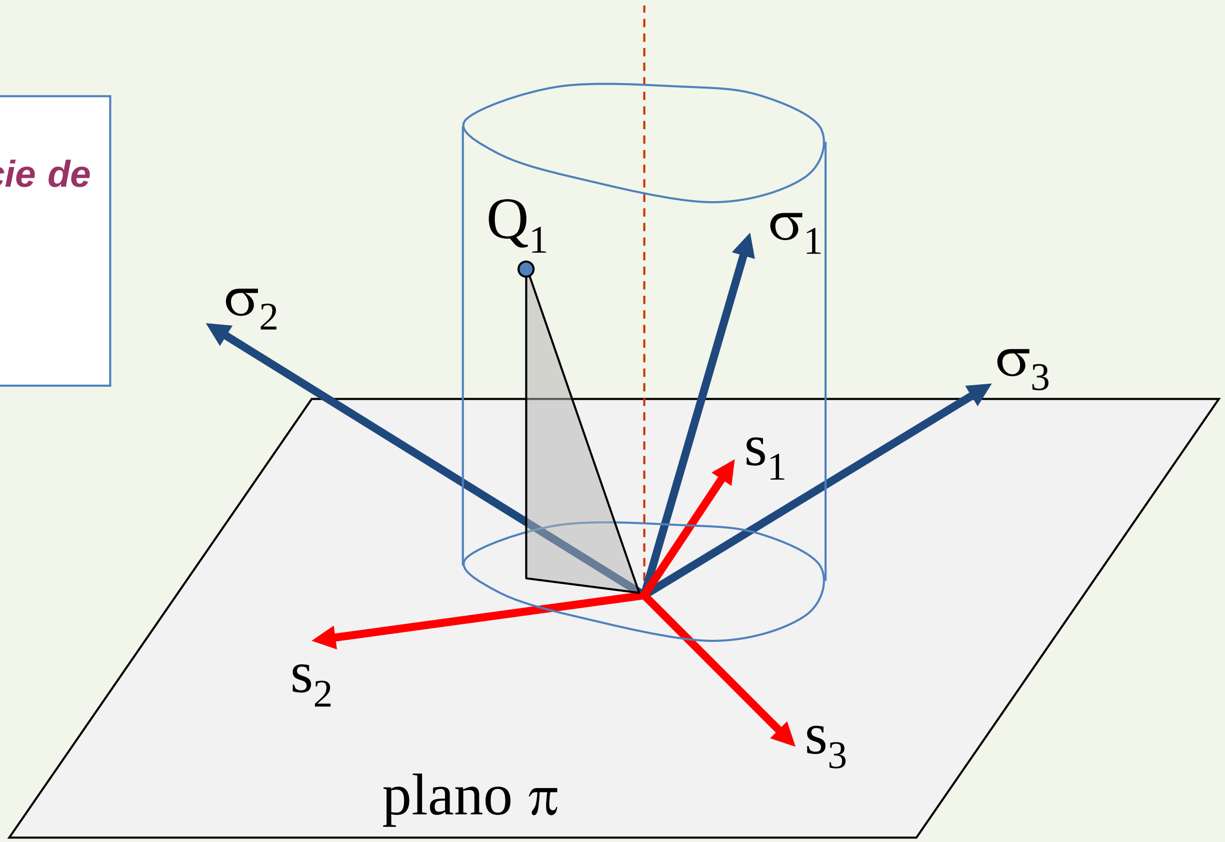
# 3.2.4. Discusión

(1/4)

**Consideremos una solicitación mecánica PROGRESIVAMENTE CRECIENTE**

$Q_1$: el material no ha plastificado.
$Q_1$ está ***dentro*** de la ***superficie de plastificación***

$f(J_2) < 0$ para $J_2 = J_2(Q_1)$



# 3.2.4. Discusión



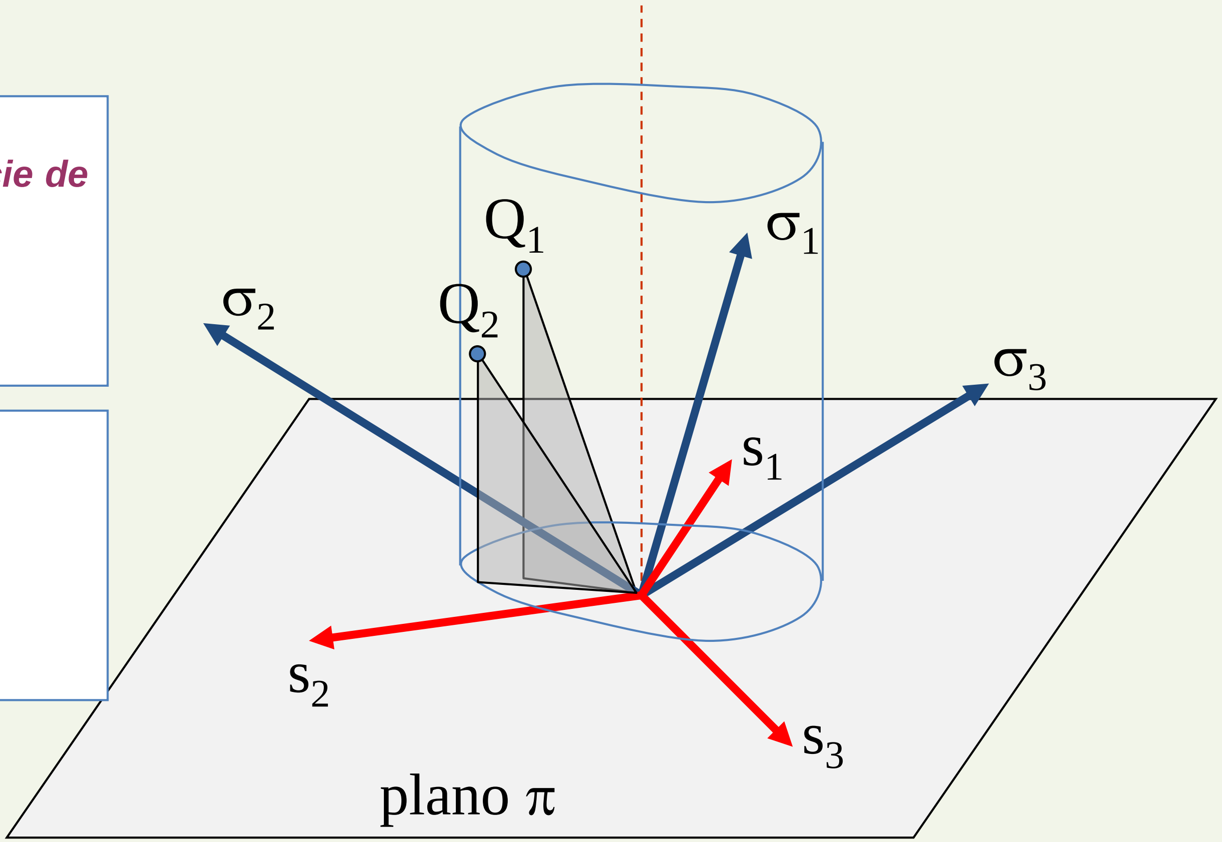
**Consideremos una solicitación mecánica PROGRESIVAMENTE CRECIENTE**

$Q_1$: el material no ha plastificado.
$Q_1$ está ***dentro*** de la ***superficie de plastificación***

$$f(J_2) < 0 \quad \text{para} \quad J_2 = J_2(Q_1)$$

$Q_2$: el material ha plastificado.
$Q_2$ está ***en*** la ***superficie de plastificación***

$$f(J_2) = 0 \quad \text{para} \quad J_2 = J_2(Q_2)$$



# 3.2.4. Discusión (3/4)

**Consideremos una solicitación mecánica PROGRESIVAMENTE CRECIENTE**

$Q_1$: el material no ha plastificado.
$Q_1$ está ***dentro*** de la ***superficie de plastificación***

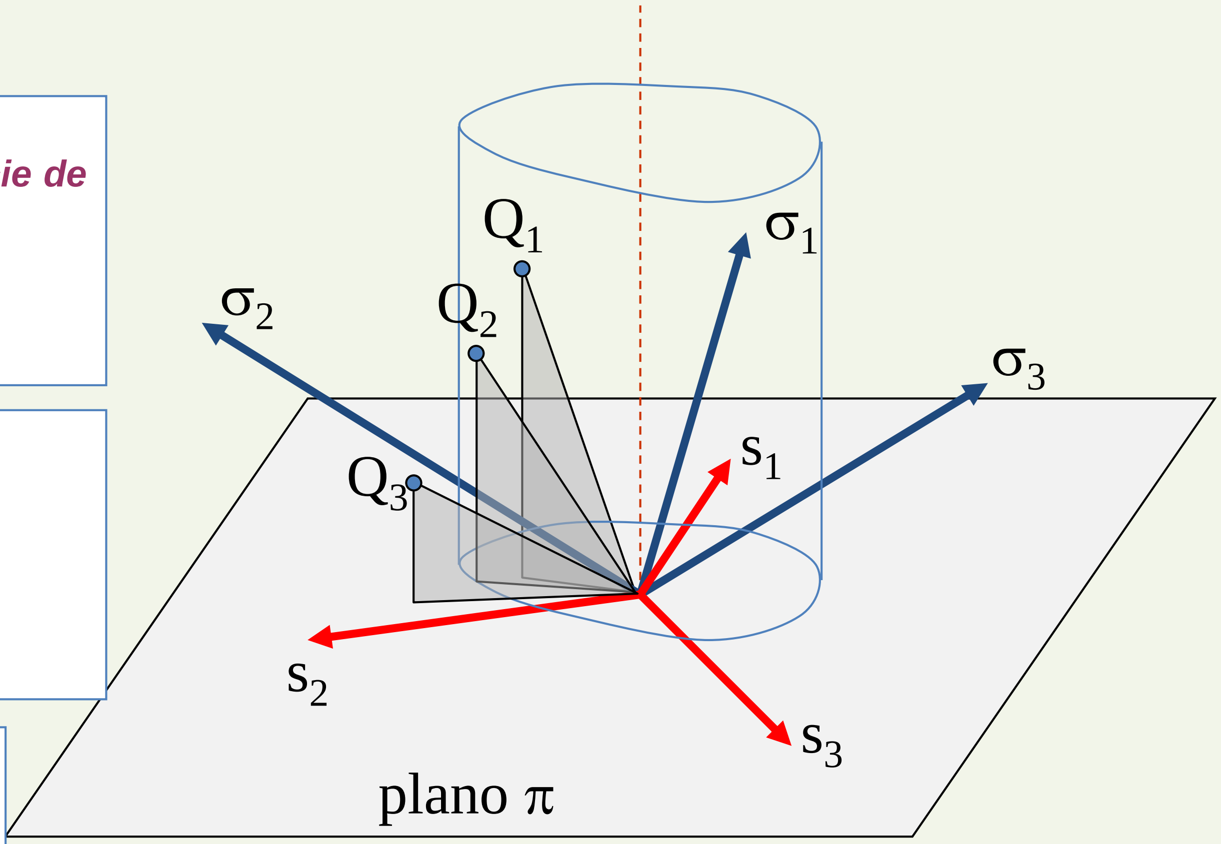
$$f(J_2) < 0 \quad \text{para} \quad J_2 = J_2(Q_1)$$

$Q_2$: el material ha plastificado.
$Q_2$ está ***en*** la ***superficie de plastificación***

$$f(J_2) = 0 \quad \text{para} \quad J_2 = J_2(Q_2)$$

$Q_3$: ¿ es posible ?

$$f(J_2) > 0 \quad \text{para} \quad J_2 = J_2(Q_3)$$



# 3.2.4. Discusión (4/4)

**Consideremos una solicitación mecánica PROGRESIVAMENTE CRECIENTE**

$Q_1$: el material no ha plastificado.
$Q_1$ está ***dentro*** de la ***superficie de plastificación***

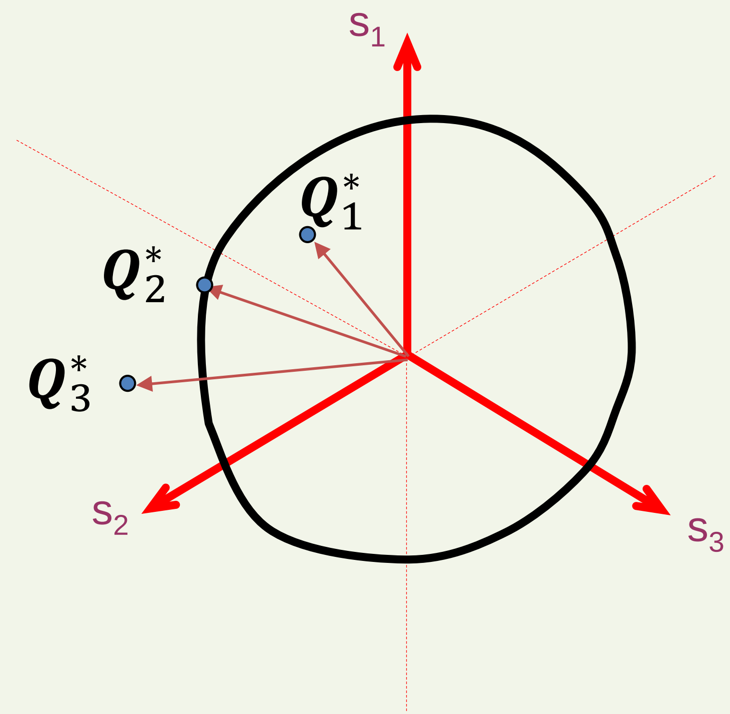
$$f\left(J_2\right) < 0 \quad \text{para} \quad J_2 = J_2\left(Q_1\right)$$

$Q_2$: el material ha plastificado.
$Q_1$ está ***en*** la ***superficie de plastificación***

$$f\left(J_2\right) = 0 \quad \text{para} \quad J_2 = J_2\left(Q_2\right)$$

$Q_3$: ¿ es posible ?

$$f\left(J_2\right) > 0 \quad \text{para} \quad J_2 = J_2\left(Q_3\right)$$



# 3.2.5. Criterio de plastificación de Tresca-Guest (1/2)

**Criterio**:

"La plastificación se produce cuando la ***tensión tangencial máxima*** alcanza un ***valor crítico***"

$$\boxed{\tau_{máx} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = \tau_{crítica}}$$

siendo $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

En un ***ensayo*** de ***tracción uniaxial*** sabemos que:

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0 \qquad \tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2}$$

y, si se alcanza la plastificación,

$$\sigma_1 = \sigma_Y \quad \text{por lo que} \quad \tau_{max} = \frac{\sigma_Y}{2}$$

Si aplicamos el criterio de Tresca

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_Y - 0}{2} = \tau_{crítica}$$

de lo que se deduce

$$\tau_{crítica} = \frac{\sigma_Y}{2}$$

**Reformulación del Criterio de Tresca**:

"En una ***situación tridimensional general***, la plastificación se produce cuando la ***tensión tangencial máxima*** alcanza un valor ***igual*** al que se alcanza en un ensayo de ***tracción uniaxial*** en el instante en el que ***comienza*** la plastificación"

# 3.2.5. Criterio de plastificación de Tresca-Guest (2/2)

**Función de plastificación del Criterio de Tresca**:

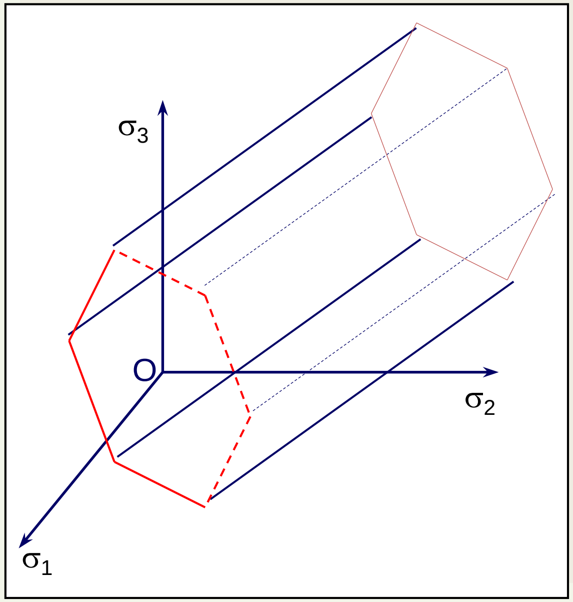
En caso de que las tensiones principales no estén "ordenadas" de mayor a menor, se puede escribir como:

$$f(s_1, s_2, s_3) = max\{|s_1 - s_2|, |s_1 - s_3|, |s_2 - s_3|\} - \sigma_Y$$

**Criterio de Tresca**:

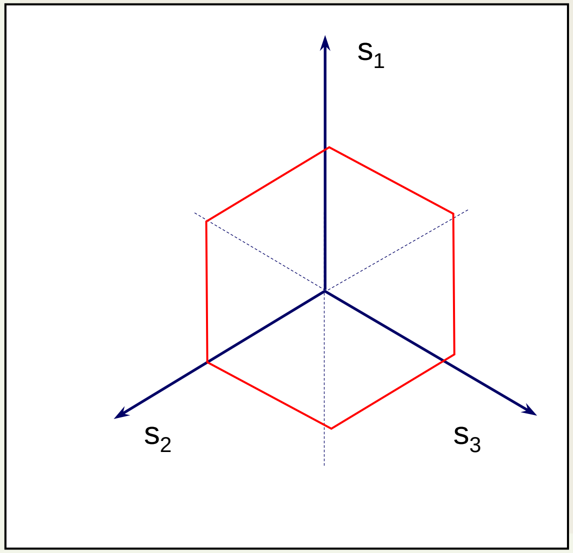
$$f(s_1, s_2, s_3) < 0 \quad \Rightarrow \quad Comportamiento\ elástico$$

$$f(s_1, s_2, s_3) = 0 \quad \Rightarrow \quad Se\ satisface\ criterio\ de\ plastificación$$




La ***superficie de plastificación*** es una superficie ***prismática hexagonal*** cuyo eje es la bisectriz del espacio de las tensiones principales

El ***lugar de plastificación*** es un ***hexágono*** cuyo centro coincide con el eje de coordenadas y cuyos radios coinciden con los ejes o con las diagonales



# 3.2.6. Criterio de Von Mises-Hencky-Nadai (1/5)

**¿Qué es la energía de distorsión?**

Es la energía consumida para obtener un ***cambio de forma*** de un elemento de volumen, ***sin cambio*** en su ***volumen***.

$$U^d = U^T - U^V$$

**Energía de distorsión**

**Energía total**: es el ***trabajo total*** suministrado por las fuerzas externas.

Energía necesaria para producir un ***cambio de volumen*** sin cambio de forma.

<u>**Criterio**</u>:

"La plastificación se produce cuando la ***energía de distorsión*** alcanza un ***valor crítico***"

$$U^d = U^d_{crítica}$$

# 3.2.6. Criterio de Von Mises-Hencky-Nadai (2/5)

- **Cambio de volumen:**

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu(\sigma_1 + \sigma_3)}{E}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu(\sigma_2 + \sigma_3)}{E} \qquad \varepsilon_3 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu(\sigma_1 + \sigma_2)}{E}$$

$$\frac{\Delta V}{V_o} = \frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)-1}{1}$$

$$\frac{\Delta V}{V_0} = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 - 1 \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)(1-2\nu)}{E} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)3(1-2\nu)}{3E} = \frac{3\overline{\sigma}(1-2\nu)}{E}$$

- **Energía consumida en el cambio de volumen, $U^V$:**

$$U^V = \frac{1}{2}\overline{\sigma}\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{3}{2E}\overline{\sigma}^2(1-2\nu) = \frac{1}{2E}(1-2\nu)\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2\sigma_3\right)$$

- **Energía total, $U^T$**

$$U^T = \frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3) = \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right)(1-2\nu)$$

- **Energía de distorsión:**

$$U^d = U^T - U^V = \frac{1+\nu}{3E}\frac{\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2\right]}{2}$$

$$= \frac{2(1+\nu)}{3E}\frac{\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2\right]}{4} = \frac{1}{2G}J_2$$

$$\boxed{\therefore\ U^d = \frac{1}{2G}J_2}$$

# 3.2.6. Criterio de Von Mises-Hencky-Nadai (3/5)

**Criterio en términos del2º invariante del tensor desviador**:

"La plastificación se produce cuando la ***energía de distorsión*** alcanza un ***valor crítico***"

$$U^{d} = \frac{1}{2G} J_{2} = U^{d}_{crítica}$$

En un ensayo de ***tracción uniaxial*** la ***energía de distorsión*** justo cuando se alcanza la plastificación es

$$U^{d} = \frac{2(1+\nu)}{3E} \frac{\left[(\sigma_1 - 0)^2 + (\sigma_1 - 0)^2 + (0-0)^2\right]}{4} = \frac{1+\nu}{3E}\sigma_1^2 = \frac{1}{6G}\sigma_Y^2$$

con lo cual $\frac{1}{6G}\sigma_Y^2 = U^{d}_{crítica}$

**Reformulación del Criterio de von Mises**:

"En una situación ***tridimensional general***, la ***plastificación*** se produce cuando la ***energía de distorsión*** alcanza un valor ***igual*** al que alcanza en un ***ensayo de tracción uniaxial*** en el instante en el que comienza la plastificación"

$$\boxed{U^{d}_{crítica} = \frac{1}{2G} \cdot J_2 = \frac{1}{6G}\sigma_Y^2} \longrightarrow \boxed{J_2 = \frac{\sigma_Y^2}{3}}$$

Al criterio de plastificación de **von Mises** se le denomina también "**criterio $J_2$**"

# 3.2.6. Criterio de Von Mises-Hencky-Nadai (4/5)

En lugar de expresar el ***criterio de von Mises*** en términos de $\mathbf{J_2}$, cuyas unidades son **[MPa]²**, es más práctico expresarlo en términos de una ***"tensión equivalente"*** en **MPa**.

$$J_2 = \frac{1}{6}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right] = \frac{\sigma_Y^2}{3} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]} = \sigma_Y$$

Se define la ***"Tensión Equivalente de von Mises"*** como:

$$q = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]} = \sqrt{3J_2}$$

El ***criterio de von Mises*** se reescribe en términos de ***tensiones*** como:

"En una situación ***tridimensional general***, la plastificación se produce cuando la ***Tensión Equivalente de von Mises*** alcanza un valor ***igual al límite de elasticidad*** del material, medido en un ensayo de tracción uniaxial"

Es decir, el material plastifica cuando:

$$\boxed{q = \sigma_Y}$$

# 3.2.6. Criterio de Von Mises-Hencky-Nadai (5/5)

**Función de plastificación del Criterio de Von Mises**:

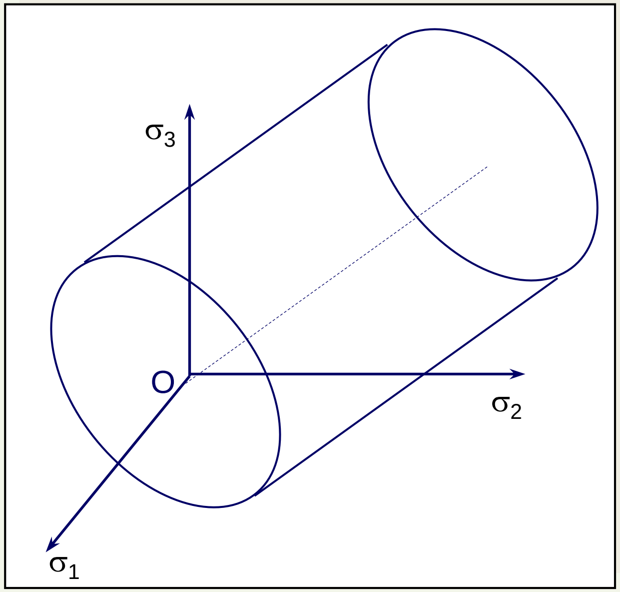
$$f = f(J_2) = \sqrt{3\,J_2} - \sigma_Y \quad \text{o bien} \quad f = f(q) = q - \sigma_Y$$

**Criterio de von Mises**:

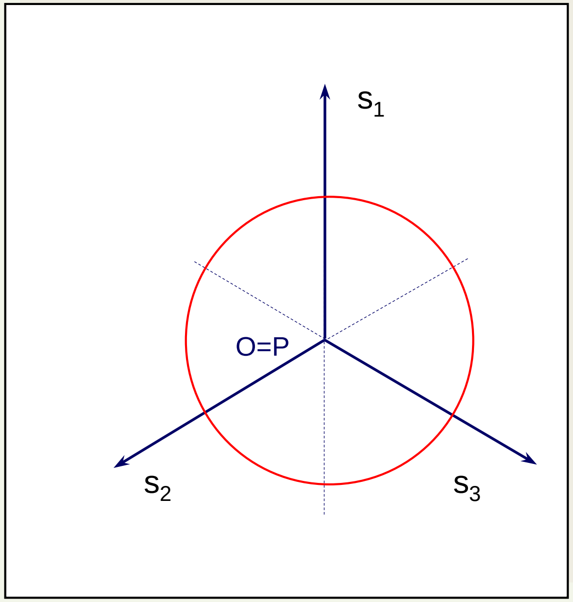
$$f < 0 \quad \Rightarrow \quad Comportamiento\ elástico$$

$$f = 0 \quad \Rightarrow \quad Se\ satisface\ criterio\ de\ plastificación$$

La superficie de plastificación es de sección circular cuyo eje es la bisectriz del espacio de las tensiones principales

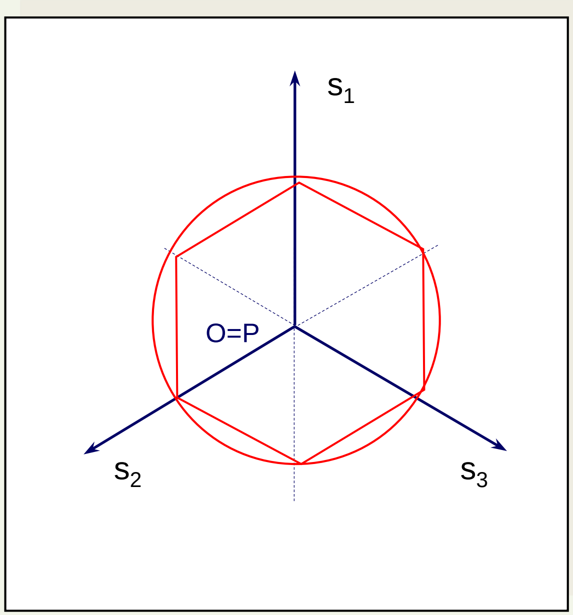



El lugar de plastificación es una circunferencia



# 3.2.7 Comparación: Criterio de Tresca vs criterio de Von Mises (1/3)

Si $OA = \sigma_Y$ , **A** representa un ensayo de tracción en el que se **ha alcanzado la plastificación**, entonces **A´** debe pertenecer al lugar de plastificación, sea éste el correspondiente a los criterios de Tresca o de Von Mises

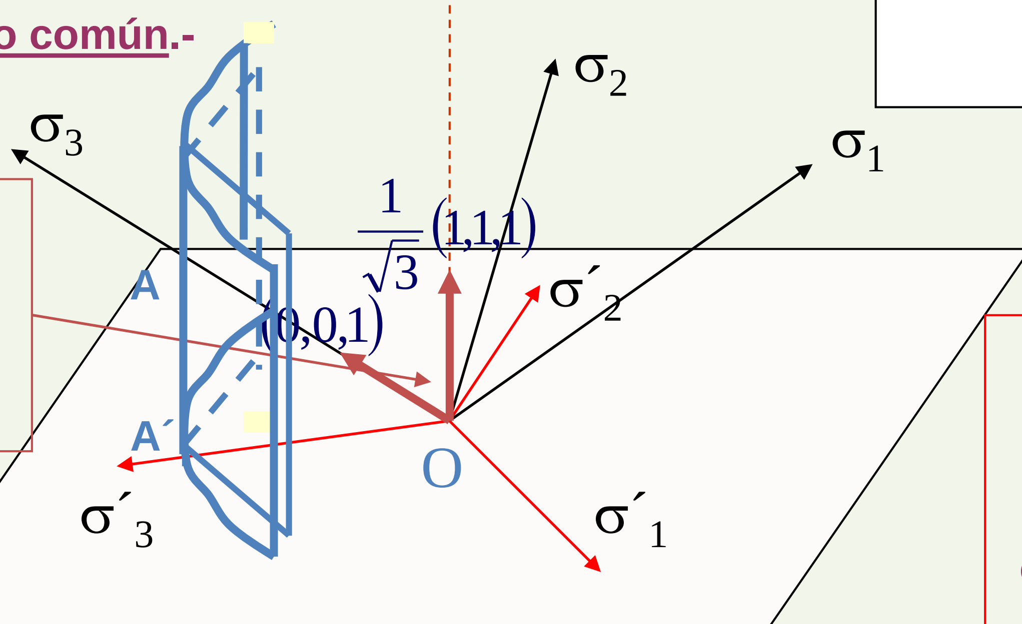



El lugar de plastificación del criterio de **Von Mises** es una **circunferencia circunscrita** al **hexágono** que es el lugar de plastificación del criterio de **Tresca**

**Cálculo del radio común.-**

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}(0,0,1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$sen\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

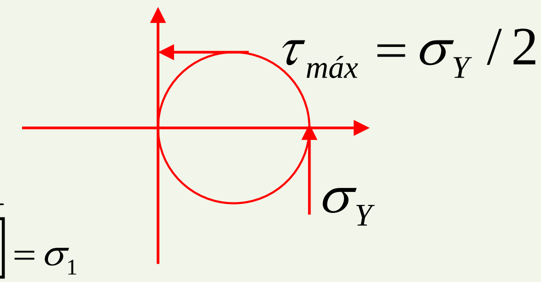



$$OA' = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y$$

**Radio común a la circunferencia y al hexágono**

# 3.2.7 Comparación: Criterio de Tresca vs criterio de Von Mises (2/3)

**Estado tensional de tracción simple.-**




(a) $\sigma_1 > 0 \quad ; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$

(b) $\tau_{máx} = \dfrac{\sigma_1 - 0}{2} = \dfrac{\sigma_1}{2}$

(c) $q = \sqrt{\dfrac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2\right]} = \sigma_1$

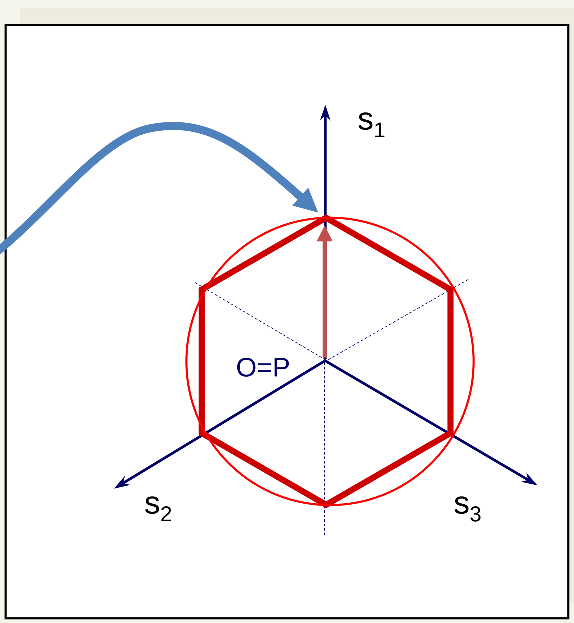
**Criterio de Tresca:**

$$\boxed{\tau_{máx} = \tau_{crítica} = \frac{\sigma_Y}{2}} \xrightarrow[(b)]{} \sigma_1 = \sigma_Y$$

**Criterio de Von Mises:**

$$\boxed{q = \sigma_Y} \xrightarrow[(c)]{} q = \sigma_1 = \sigma_Y$$

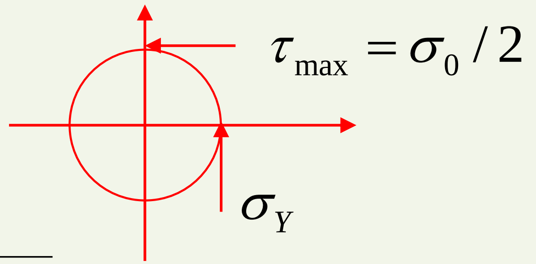
$$\sigma_1 = \sigma_Y$$
$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$$




∴ En tracción simple, ambos criterios predicen plastificación para igual valor de tensión $\sigma_1$:

$$\sigma_1 = \sigma_Y$$

# 3.2.7 Comparación: Criterio de **Tresca** vs criterio de **Von Mises** (3/3)




**Estado tensional de cortante puro.-**

**(a)** $\sigma_1 = -\sigma_3 \quad ; \quad \sigma_2 = 0$

**(b)** $\tau_{máx} = \dfrac{\sigma_1 - (-\sigma_1)}{2} = \sigma_1$ **(c)** $q = \sqrt{\dfrac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2\right]} = \sqrt{3}\sigma_1$

## Criterio de Tresca

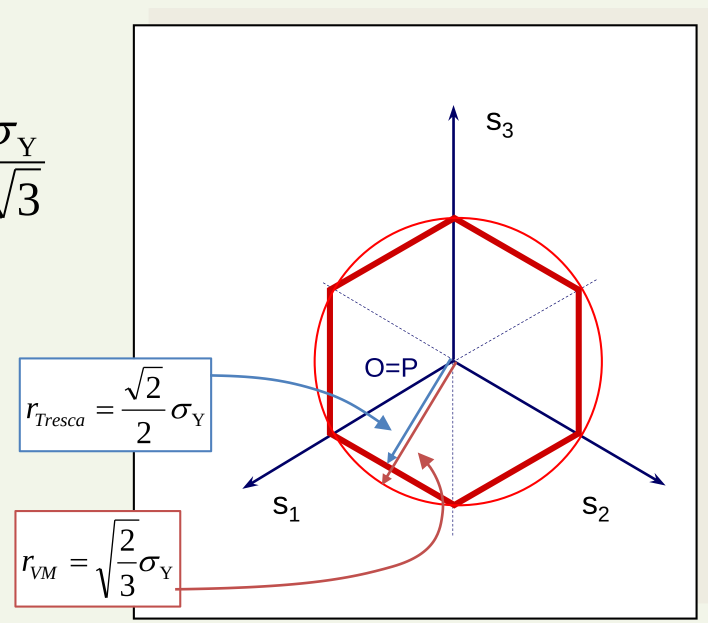
$$\boxed{\tau_{máx} = \tau_{crítica} = \frac{\sigma_Y}{2}} \xrightarrow[(b)]{} \sigma_1 = \frac{\sigma_Y}{2}$$

## Criterio de Von Mises

$$\boxed{q = \sigma_Y} \xrightarrow[(c)]{} \sqrt{3}\sigma_1 = \sigma_Y \xrightarrow[(b)]{} \tau_{máx} = \sigma_1 = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}}$$

∴ En <u>tracción simple</u>, ambos criterios predicen plastificación para <u>distinto valor</u> de tensión cortante $\tau_{máx}$:

$$\tau_{máx.VM} = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} > \frac{\sigma_Y}{2} = \tau_{máx.Tresca}$$



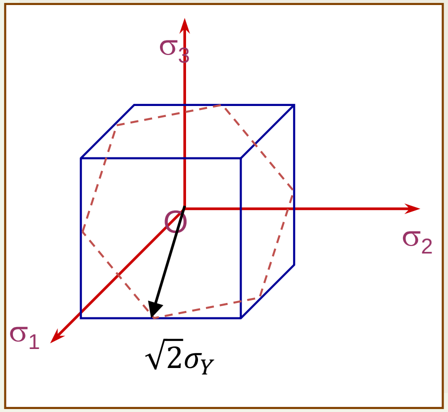
# 3.2.8 Otros Criterios de Plastificación (1/5)

## a) Criterio de Rankine-Lame

El sólido permanece dentro del rango elástico si se cumplen simultáneamente las siguientes desigualdades:

$$\boxed{\begin{array}{l} |\sigma_1| < \sigma_Y \\ |\sigma_2| < \sigma_Y \\ |\sigma_3| < \sigma_Y \end{array}} \Rightarrow$$

Es la extrapolación directa del criterio de plastificación en un ensayo de tracción




La superficie de plastificación es un cubo de lado $2 \cdot \sigma_Y$

¡¡ El criterio depende implícitamente del primer invariante !!

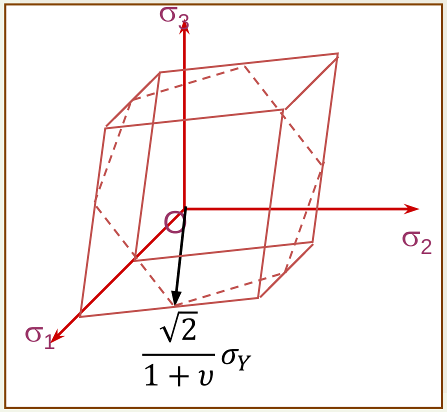
## b) Criterio de Saint Venant-Poncelet

El sólido permanece dentro del rango elástico si se cumplen simultáneamente las siguientes desigualdades:

$$\boxed{\begin{array}{l} |\varepsilon_1| < \varepsilon_e \\ |\varepsilon_2| < \varepsilon_e \\ |\varepsilon_3| < \varepsilon_e \end{array}}$$

Empleando la ley de Hooke generalizada este criterio también se puede expresar en tensiones

$$\boxed{\begin{array}{l} |\sigma_1 - \upsilon(\sigma_2 + \sigma_3)| < \sigma_Y \\ |\sigma_2 - \upsilon(\sigma_1 + \sigma_3)| < \sigma_Y \\ |\sigma_3 - \upsilon(\sigma_1 + \sigma_2)| < \sigma_Y \end{array}}$$




En este caso la superficie de plastificación en el espacio de las tensiones es un romboedro

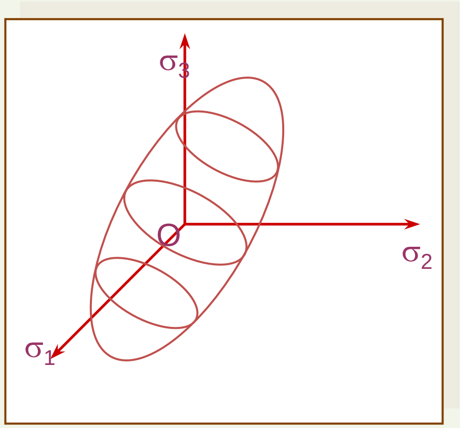
¡¡ El criterio depende implícitamente del primer invariante !!

# 3.2.8 Otros Criterios de Plastificación (2/5)

## c) Criterio de Beltrami-Haig

La plastificación se inicia cuando la energía de deformación alcanza el valor de energía que origina la plastificación en un ensayo de tracción

$$\boxed{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\cdot\nu\cdot\left(\sigma_1\cdot\sigma_2+\sigma_1\cdot\sigma_3+\sigma_2\cdot\sigma_3\right)<\sigma_Y^2}$$




$$\boxed{I_1^2+2\cdot(1+\nu)\cdot I_2<\sigma_Y^2}$$

Es una generalización del criterio de **Von Mises**, añadiendo una dependencia **cuadrática** del **primer invariante** del tensor de tensiones.

$$\boxed{f\left(I_1,I_2\right)=I_1^2+2\cdot(1+\nu)\cdot I_2-\sigma_Y^2=0}$$

# 3.2.8 Otros Criterios de Plastificación (3/5)

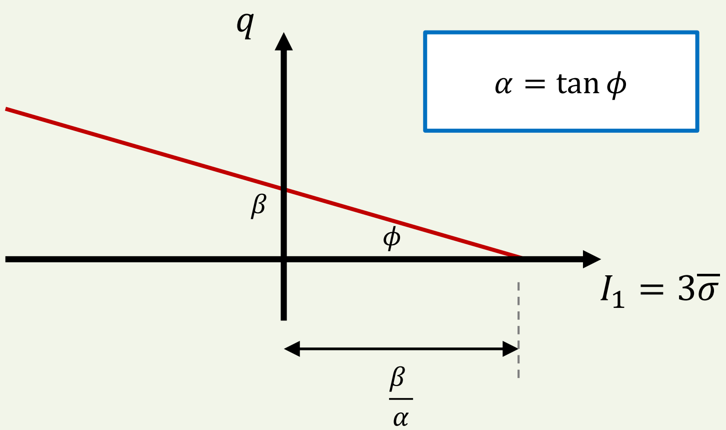
## d) Criterio de Drucker-Prager

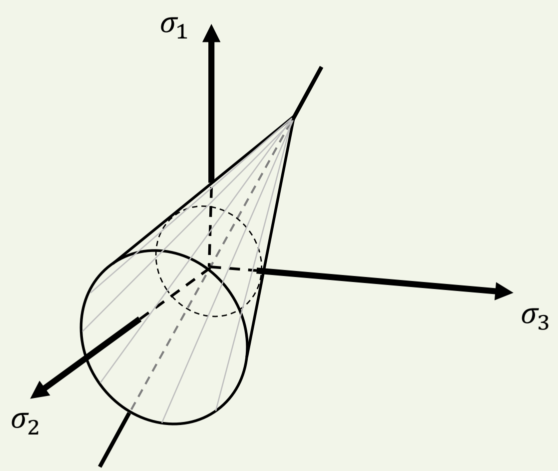
Se puede considerar una generalización del criterio de **Von Mises**, añadiendo la dependencia **lineal** del **primer invariante** del tensor de tensiones.

$$\sqrt{3J_2} + \alpha I_1 - \beta = 0$$

Donde: $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son propiedades del material

- Si $\alpha = 0$ el criterio se reduce a von Mises (se recuerda que $q = \sqrt{3\,J_2}$ ).
- El parámetro $\alpha$ es adimensional y corresponde a un coeficiente de ***fricción interna***.
- El parámetro $\beta$ tiene unidades de tensión y corresponde a un coeficiente de ***cohesión***.



# 3.2.8 Otros Criterios de Plastificación (4/5)

## e) Criterio de Mohr-Coulomb (1773)

- Este criterio suele utilizarse como ***criterio de fallo*** en materiales frágiles en los que la resistencia a compresión es mucho mayor que a tracción, y en los que la "***fricción interna***" juega un papel.
- En él, pueden participar los tres invariantes del tensor de tensiones: $\boxed{f(I_1, I_2, I_3) = 0}$
- Por razones históricas, este criterio suele expresarse en términos de ***componentes*** de tensión, en lugar de ***invariantes***.

**Hay tres expresiones alternativas para el criterio:**

$$\boxed{k\sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_c = 0}$$

Donde: $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{\sigma_c}$ son propiedades del material

$$\boxed{R + \frac{k-1}{k+1}C - \frac{\sigma_c}{k+1} = 0}$$

Donde: $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{C}$ son el radio y el centro del círculo de Möhr en el plano $\sigma_1 - \sigma_3$.

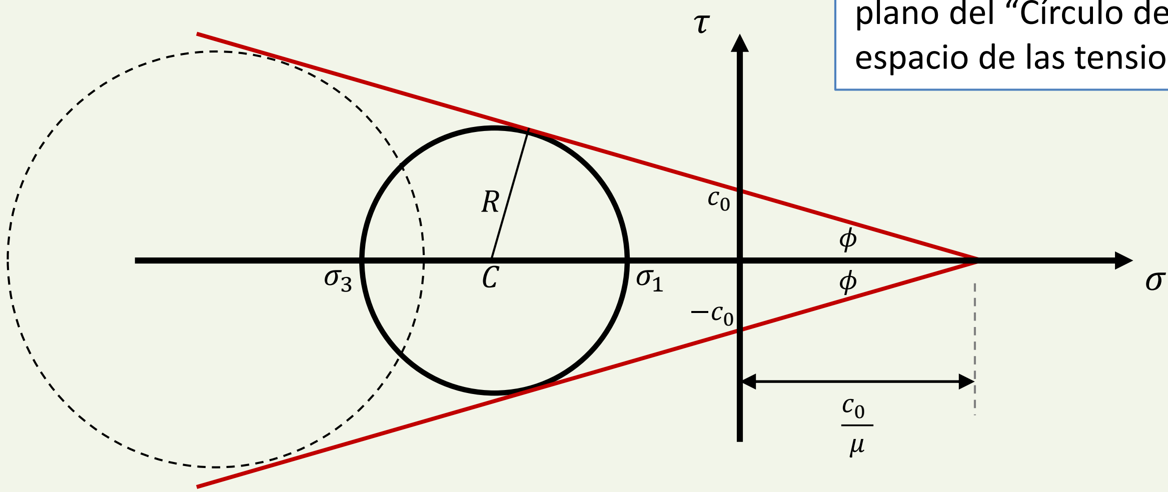
$$\boxed{|\tau| - c_0 + \mu\sigma = 0}$$

Donde: $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{c_0}$ son propiedades del material (denominados coeficientes de ***fricción*** y de ***cohesión***, respectivamente).

$\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\tau}$ son las tensiones normal y de cortadura en el círculo de Möhr asociado al plano $\sigma_1 - \sigma_3$, cuyo centro y radio son $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{C}$.

# 3.2.9 Otros Criterios de Plastificación (5/5)

## e) Criterio de Mohr-Coulomb (1773)




En este caso, el criterio se ha representado en el plano del "Círculo de Mohr", en lugar del espacio de las tensiones principales

$$\sin\phi = \frac{k-1}{k+1}$$

$$\mu = \tan\phi$$

$$c_0 = \frac{\sigma_c}{2\sqrt{k}}$$

$$R = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$$

$$C = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$$

$$k\sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_c = 0$$

Donde: $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{\sigma_c}$ son propiedades del material

$$R + \frac{k-1}{k+1}C - \frac{\sigma_c}{k+1} = 0$$

Donde: $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{C}$ son el radio y el centro del círculo de Möhr en el plano $\sigma_1 - \sigma_3$.

$$|\tau| - c_0 + \mu\sigma = 0$$

Define las ***envolventes*** de todos los círculos de Möhr que satisfacen el criterio

Donde: $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{c_0}$ son propiedades del material (denominados coeficientes de ***fricción*** y de ***cohesión***, respectivamente).

$\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\tau}$ son las tensiones normal y de cortadura en el círculo de Möhr asociado al plano $\sigma_1 - \sigma_3$, cuyo centro y radio son $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{C}$.