Introducción al análisis de funciones de una variable compleja

Daniel Azagra Rueda

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Enero de 2017

Índice general

Capítulo 1

Números complejos y funciones elementales. Conceptos métricos y topológicos en $\mathbb{C}$.

1.1. Números complejos y funciones complejas elementales

Los números complejos pueden definirse informalmente como los *números* de la forma $z = x + iy$, donde $i = \sqrt{-1}$, y $x, y \in \mathbb{R}$. A primera vista puede parecer dudoso que tenga sentido considerar estos *números*, y que el suponer la mera existencia de un número i cuyo cuadrado sea -1 no lleve a contradicciones. Por descontado, tal número i no puede ser un número real, ya que el cuadrado de cualquier real es un real positivo. Si admitimos que los números de esta forma deberían poder sumarse y multiplicarse de acuerdo con la reglas

$$(x+iy)+(x'+iy') = (x+x')+i(y+y'); \quad (a+ib)(c+id) = ac+adi+bci+bdi^2 = (ac-bd)+i(ad+bc),$$

se ve que los números de la forma iy deberían habitar una dimensión diferente y tener algunas propiedades exóticas. De manera algo más precisa, el conjunto de los números complejos debería tener, para empezar, una estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ del cual $\{1, i\}$ sería una base, y también debería estar dotado de una operación de producto que hiciera posible que $i^2 = -1$.

Estas dos observaciones nos llevan a definir, ahora ya formalmente, el conjunto de los números complejos como el conjunto de los vectores del plano $\mathbb{R}^2$, con sus operaciones habituales de suma de vectores y producto de vectores por escalares reales, junto con una nueva operación: el *producto complejo* de dos vectores (a, b) y (c, d) se define como el vector $(ac-bd, ad+bc)$. Con esta nueva operación resulta que el producto de $(0, 1)$ por $(0, 1)$ es $(-1, 0)$. Si identificamos el número real 1 con el par $(1, 0)$, y si denotamos $i = (0, 1)$, tenemos efectivamente que $i^2 = -1$, y vemos que en $\mathbb{R}^2$, siempre ateniéndonos a estas identificaciones, pueden resolverse ecuaciones del tipo $x^2 + 1 = 0$, que no tienen solución en $\mathbb{R}$: los *números* $i = (0, 1)$ y $-i = (0, -1)$ son soluciones de esta ecuación, que puede escribirse de forma equivalente como $(x - i)(x + i) = 0$.

La notación cartesiana es engorrosa cuando se manejan números complejos, y además no es muy amigable, en el sentido de que no da pie a deducir, por ejemplo, la regla para el producto de dos números complejos si uno la ha olvidado momentáneamente. Además escribir $(a, b) \cdot (c, d)$ para el producto complejo puede inducir confusiones con el producto escalar de dos vectores del plano. Por ello resulta mucho más práctico identificar el par $(a, 0)$ con el número real a, y el par $(0, b)$ denotarlo por bi. A los números de la forma bi con $b \in \mathbb{R}$ se les llama *imaginarios puros*. De esta manera $\{1, i\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$, y se cumplen

$$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y'); \quad (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

El plano $\mathbb{R}^2$, siempre que utilicemos estas identificaciones y esta regla para el *producto complejo* de dos vectores, lo denotaremos por $\mathbb{C}$, y lo llamaremos el *conjunto de los números complejos*. También usaremos la notación

$$z - w := z + (-w),$$

operación que corresponde, por supuesto, a la diferencia de vectores en el plano.

Es un ejercicio sencillo comprobar que el conjunto $\mathbb{C}$, con las operaciones de suma y producto así definidas, tiene las siguientes propiedades, para todos los $z, w, \xi \in \mathbb{C}$:

1. $z + (w + \xi) = (z + w) + \xi$ (asociatividad de la suma);
2. $z + w = w + z$ (conmutatividad de la suma);
3. $z + 0 = z$ (el 0 es elemento neutro para la suma);
4. $z + (-z) = 0$ (existencia de opuestos para la suma);
5. $z(w\xi) = (zw)\xi$ (asociatividad del producto);
6. $zw = wz$ (conmutatividad del producto);
7. $1z = z$ (el 1 es elemento neutro para el producto);
8. si $z = x + iy$ entonces $z^{-1} := \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ cumple que $zz^{-1} = 1$ (existencia de inversos para el producto);
9. $z(w + \xi) = zw + z\xi$ (propiedad distributiva del producto respecto de la suma).

Es decir, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo, del cual el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, identificado con $\{x + iy \in \mathbb{C} : y = 0\}$, es un subcuerpo.

La fórmula para el inverso de z resulta más fácil de recordar una vez que se definen la nociones de número complejo *conjugado*, y de *módulo de un número complejo*. Dado $z = x + iy \in \mathbb{C}$, definimos su conjugado, denotado por $\overline{z}$, como

$$\overline{z} = x - iy.$$

La operación de conjugación corresponde geométricamente a una reflexión en $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ respecto de la recta $\mathbb{R} := \{x + iy \in \mathbb{C} : y = 0\}$. Se define el módulo de $z = x + iy$ por

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Es decir, el módulo de $z = x + iy$ no es más que la norma euclídea del vector $x + iy$ en $\mathbb{C}$, que a su vez es igual a la distancia de $z = x + iy$ al origen. También usaremos con frecuencia las notaciones

$$x = \text{Re}z, \;\; y = \text{Im}.$$

Geométricamente, Rez es la proyección ortogonal de z sobre la recta $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$, y $i\,$Imz es la proyección ortogonal de z sobre la recta $i\mathbb{R} := \{x + iy : x = 0\}$. Con estas notaciones resulta que

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}; \;\; \text{Re}z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \;\; \text{Im}z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Es inmediato comprobar estas otras propiedades elementales del módulo y el conjugado:

$$\begin{aligned}
&\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w};\\
&\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w};\\
&|z| = |\overline{z}|;\\
&|z|^2 = z\,\overline{z};\\
&|zw| = |z|\,|w|.
\end{aligned}$$

Las coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$ resultan muy útiles cuando se manejan círculos, sectores de círculos, rectas que pasan por el origen, etc. Cada número complejo $z = x + iy$ puede escribirse como $z = r\cos\theta + ir\,\mathrm{sen}\,\theta$, con

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = |z|, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$

donde el ángulo θ está determinado salvo suma de un múltiplo entero de 2π. Como ya sabemos la aplicación

$$(0,\infty)\times(-\pi,\pi] \ni (r,\theta) \mapsto r\cos\theta + ir\,\mathrm{sen}\,\theta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

es una biyección.

Definición 1.1 (Exponencial compleja). Para cada $\theta \in \mathbb{R}$ definimos

$$e^{i\theta} := \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

y si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, definimos

$$e^z := e^x e^{iy}.$$

Por tanto todo $z = x + iy$ puede escribirse en la forma $z = re^{i\theta}$, donde $r = |z|$, y θ está determinado unívocamente en $(-\pi,\pi]$ si $z \neq 0$. Denotaremos

$$\mathrm{Arg} z = \theta$$

para este único $\theta \in (-\pi,\pi]$, y a la función $z \mapsto \mathrm{Arg}z$ la llamaremos *rama principal del argumento*. Por ejemplo se tiene $\mathrm{Arg}(i) = \pi/2$, $\mathrm{Arg}(1-i) = -\pi/4$. También usaremos la notación

$$\arg z = \{2k\pi + \mathrm{Arg}z : k \in \mathbb{Z}\}$$

para la función multivaluada que para cada $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ nos da todos los posibles números $\theta \in \mathbb{R}$ tales que $z = |z|e^{i\theta}$.

Definiremos la *rama principal del logaritmo* como la aplicación $\log : \mathbb{C}\setminus(-\infty,0] \to \mathbb{C}$ definida por

$$\log z = \log|z| + i\mathrm{Arg}(z).$$

Es claro que se tiene

$$e^{\log z} = z,$$

y que $\log z$ coincide con el logaritmo usual en $\mathbb{R}$ cuando $z \in (0,+\infty)$. La función $\log$ definida así es inyectiva, pero la función exponencial compleja e^z no lo es: de hecho se tiene $e^{z+2k\pi i} = e^z$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ (se dice que e^z es periódica de período $2\pi i$). Veamos otras propiedades básicas de la función $\theta \mapsto e^{i\theta}$.

Proposición 1.1. *Se tiene, para todos $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, que:*

1. $|e^{i\theta}| = 1$;
2. $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$;
3. $e^{-i\theta} = 1/e^{i\theta}$;
4. $e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta}e^{i\varphi}$.

Demostración. (1) equivale a $\mathrm{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$, (2) es consecuencia de que sen es simétrica impar y $\cos$ es simétrica par, y (3) se deduce de (1) y (2) y la fórmula $z^{-1} = \overline{z}/|z|^2$. Para demostrar (4), observemos que esta igualdad equivale a

$$\begin{aligned}\cos(\theta+\varphi) + i\,\mathrm{sen}(\theta+\varphi) &= (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)\\ &= \cos\theta\cos\varphi - \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi + i\left(\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi + \mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi\right),\end{aligned}$$

que a su vez (igualando partes reales e imaginarias de ambos miembros) equivale a las fórmulas de la suma para las funciones seno y coseno, que son bien conocidas. $\square$

Corolario 1.2. *Para todos* $z, w \in \mathbb{C}$ *se tiene* $e^z e^w = e^{z+w}$.

Demostración. Escribamos $z = x + iy$, $w = a + bi$, con $x, y, z, a, b \in \mathbb{R}$. Entonces, usando la definición de e^z, el hecho de que $e^{x+a} = e^x e^a$, y (4) de la proposición anterior, obtenemos

$$e^z e^w = e^{x+iy} e^{a+ib} = (e^x e^{iy})(e^a e^{ib}) = (e^x e^a)(e^{iy} e^{ib}) = e^{x+a} e^{i(y+b)} = e^{(x+a)+i(y+b)} = e^{z+w}.$$

□

Corolario 1.3. *Se tiene, para todos* $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, *que*

1. $\arg \overline{z} = -\arg z$;
2. $\arg (1/z) = -\arg z$;
3. $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

Demostración. Todas las propiedades son fáciles; demostremos por ejemplo (3). Escribiendo $z_j = r_j e^{i\theta_j}$, $j = 1, 2$, y usando la proposición anterior, tenemos

$$z_1 z_2 = \left(r_1 e^{i\theta_1}\right) \left(r_2 e^{i\theta_2}\right) = r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

de donde se deduce (3). □

La propiedad (4) de la proposición, o la (3) del corolario, nos desvelan el significado geométrico del producto de dos números complejos: si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ son dos números complejos, su producto es

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

un número complejo cuya distancia al origen es el producto de las distancias al origen de z_1 y z_2, y que forma un ángulo con la recta $y = 0$ igual a la *suma* de los ángulos que forman z_1 y z_2 con esa misma recta. En el caso particular de que los módulos sean 1, vemos que multiplicar números complejos equivale a sumar argumentos.

Estas observaciones nos permiten, por ejemplo, calcular las n raíces n-ésimas de un número complejo w, para cualquier $n \in \mathbb{N}$: escribimos $w = \rho e^{i\varphi}$, $z = re^{i\theta}$, y planteamos la ecuación $z^n = w$, cuya forma polar es

$$r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\varphi},$$

de donde, igualando módulos y argumentos, deducimos que $r = \rho^{1/n}$, y $\varphi = n\theta + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Por tanto, las n raíces n-ésimas de w son los números z_j definidos por

$$z_j = \rho^{1/n} e^{\theta_j}, \text{ con } \theta_j = \frac{\varphi + 2j\pi}{n}, \; j = 0, 1, ..., n-1,$$

puntos que determinan los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en el círculo unidad.

Más adelante veremos que todo polinomio complejo de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n raíces complejas, contadas con sus multiplicidades (Teorema Fundamental del Álgebra).

Examinemos con más detenimiento el caso básico $n = 2$. La función $z \mapsto w = z^2$ no es inyectiva: cada punto $w = \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, donde $\varphi \in (-\pi, \pi)$, tiene dos antimágenes, $z = \pm \rho^{1/2} e^{i\varphi/2}$. Podemos definir entonces dos *ramas* de la función raíz cuadrada, dadas por $f_1 : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$,

$$f_1(w) = \rho^{1/2} e^{i\varphi/2},$$

y $f_2(w) = -f_1(w)$. A f_1 se la llama la *rama principal de la raíz cuadrada*. La elección de la semirecta $(-\infty, 0]$ para eliminarla del dominio de f_1 y obtener una inversa continua de z^2 es arbitraria, aunque natural. En cualquier caso pronto resultará claro que alguna semirecta (o alguna curva no acotada que comience en 0) hay que quitar a $\mathbb{C}$ para poder obtener una inversa continua de la función z^2. Con esta elección, observemos que la restricción de $g(z) = z^2$ al semiplano derecho $U := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z > 0\}$ es inyectiva, y proporciona una inversa de $f_1 : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to U$, que también es inyectiva.

En general, podemos definir, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, la rama principal de la función raíz n-ésima como $f : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$, $f(w) = e^{\frac{1}{n}\log w}$, donde $\log$ es la rama principal del logaritmo. Las otras funciones raíces n-esimas f_j con este mismo dominio se obtienen multiplicando $f(w)$ por los números complejos $e^{2j\pi/n}$, $j = 1, ..., n-1$. Cada una de las funciones así obtenidas llevará de forma inyectiva $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ en un sector del plano U_j que el lector queda invitado a dibujar, de manera que la restricción de la aplicación $h(z) = z^n$ a U_j será inyectiva (y función inversa de f_j).

De forma aún más general podemos definir z^α, para cualesquiera $\alpha \in \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, como

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z},$$

donde $\log$ es la rama principal del logaritmo. Más adelante veremos cómo definir funciones de este tipo en cualquier dominio abierto de $\mathbb{C}$ que no tenga *agujeros* y no contenga al 0.

Recomendamos al lector que examine con cuidado el comportamiento geométrico de las funciones e^z, $\log z$, z^n, $z^{1/n}$, analizando cómo transforman diversos conjuntos básicos del plano complejo tales como rectas paralelas a los ejes, semirrectas que pasen por el origen, circunferencias centradas en 0, sectores de círculos centrados en 0, etc.

Veamos ahora cómo se definen las funciones trigonométricas en $\mathbb{C}$. Usando la definición de $e^{i\theta}$, y recordando que sen es simétrica impar y $\cos$ es simétrica par, obtenemos las igualdades

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta, \;\; e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

que al sumarlas y restarlas nos permiten deducir

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \;\; \mathrm{sen}\,\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \;\; \theta \in \mathbb{R}.$$

Por tanto una manera natural de definir sen y $\cos$ en $\mathbb{C}$ (y, como veremos más adelante, la única posible, entre otras equivalentes, si queremos que sean funciones diferenciables en sentido complejo) es mediante

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \;\; \mathrm{sen}\,z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \;\; z \in \mathbb{C}.$$

Es claro que se verifican

$$\cos(-z) = \cos z, \;\; \mathrm{sen}(-z) = -\,\mathrm{sen}\,z, \;\; \mathrm{sen}(z + 2k\pi) = \mathrm{sen}\,z, \;\; \cos(z + 2k\pi) = \cos z,$$

y

$$\cos(z) = \mathrm{sen}\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$$

para todos $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$. Más adelante veremos que todas las demás identidades usuales que involucran a las funciones sen y $\cos$ en $\mathbb{R}$ (como las fórmulas del seno o el coseno de la suma, o el hecho de que $\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$) siguen siendo válidas en $\mathbb{C}$.

Las funciones trigonométricas hiperbólicas se definen por

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \;\; \mathrm{senh}\,z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Las demás funciones trigonométricas se definen de la forma usual: por ejemplo,

$$\tan z = \frac{\mathrm{sen}\,z}{\cos z}.$$

1.2. Métrica y topología en $\mathbb{C}$ y sus subconjuntos

Puesto que $\mathbb{C}$ no es más que $\mathbb{R}^2$, en donde los puntos se denotan ahora de la forma $x + iy$ en lugar de (x, y), y donde hemos añadido una operación de producto, es natural definir la distancia entre dos números complejos como la distancia euclídea entre los puntos del plano que representan. Es decir, si $z = x + iy, w = a + bi$, la distancia entre estos dos números complejos es

$$d(z, w) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2},$$

que por supuesto coincide con el módulo de $z - w$, es decir,

$$d(z, w) = |z - w|,$$

ya que el módulo de z no es más que la norma euclídea de z. Así pues, el conjunto $\mathbb{C}$, con la distancia así definida, es un espacio métrico, y en particular un espacio topológico. A las bolas de este espacio métrico las llamaremos discos. El disco abierto de centro $z_0 \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$ lo denotaremos

$$D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\},$$

y el correspondiente disco cerrado por

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}.$$

Los abiertos, los cerrados, las sucesiones convergentes, las sucesiones de Cauchy, los puntos de acumulación, etc, de $\mathbb{C}$ son los mismos que en $\mathbb{R}^2$. Por tanto todos los conceptos métricos y topológicos que se han estudiado en $\mathbb{R}^n$ se aplican directamente a $\mathbb{C}$ al particularizar en el caso $n = 2$. Así por ejemplo un conjunto Ω de $\mathbb{C}$ es abierto si y sólo si para cada $z \in \Omega$ existe $r > 0$ tal que $D(z, r) \subseteq \Omega$, y una sucesión (z_n) converge a z si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $|z_n - z| \leq \varepsilon$. Análogamente, $\lim_{z\to z_0} f(z) = \alpha$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - \alpha| < \varepsilon$, y una función g es continua en z_0 siempre y cuando $\lim_{z\to z_0} g(z) = g(z_0)$. Por supuesto, $\mathbb{C}$ es un espacio métrico completo, ya que $\mathbb{R}^2$ con la distancia eucídea lo es.

También es obvio, al escribirlas como funciones de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que las funciones $S, P : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definidas por

$$S(z, w) = z + w, \quad P(z, w) = zw$$

son continuas (por ejemplo, si $z = x + iy, w = a + ib$, P puede escribirse en notación cartesiana como

$$P\left((x, y), (a, b)\right) = (xa - yb, xb + ya),$$

y es claro que P es continua porque sus funciones componentes lo son). En particular se obtiene que si (z_n) converge a z y (w_n) converge a w entonces la sucesión de los productos complejos $(z_n w_n)$ converge a zw. Y también que si $\lim_{z\to z_0} f(z) = \alpha$ y $\lim_{z\to z_0} g(z) = \beta$, entonces $\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = \alpha\beta$.

Lo mismo sucede con las funciones $Q(z, w) = z/w$ (definida para $w \neq 0$), $C(z) = \overline{z}$, e^z, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, etc, y con las combinaciones de todas ellas que involucren suma, producto, cociente, y composición, en los conjuntos donde estén bien definidas. En particular observemos que si $\lim_{z\to z_0} f(z) = \alpha$ y $\lim_{z\to z_0} g(z) = \beta \neq 0$, entonces $\lim_{z\to z_0} f(z)/g(z) = \alpha/\beta$.

También pueden considerarse sucesiones y series de funciones complejas y considerar su convergencia puntual y uniforme. A este respecto, recordemos un criterio de convergencia de series de funciones que nos será muy útil en capítulos sucesivos.

Teorema 1.4. *[Criterio M de Weierstrass] Sean X un conjunto no vacío, y E un espacio vectorial normado completo (espacio de Banach). Si (f_n) es una sucesión de funciones $f_n : X \to E$ y existen números $M_n > 0$ tales que*

$$|f_n(x)| \leq M_n \text{ para todos } x \in X, n \in \mathbb{N}, \quad \text{y que}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty,$$

entonces la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente en* X. *Es decir, existe una función* $f : X \to E$ *tal que*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(x) = f(x), \text{ uniformemente en } x \in X.$$

Además, si X *es un espacio topológico y cada* f_n *es continua en* X, *entonces* f *también es continua en* X.

Demostración. La demostración es igual, salvo cambios obvios, que la del caso en que X es un intervalo de $\mathbb{R}$, que es ya conocida. En todo caso no viene mal recordarla. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{j=N_0}^{\infty} M_j \leq \varepsilon$. Entonces, si $n \geq m \geq N_0$, se tiene

$$\left|\sum_{j=1}^{n} f_j(x) - \sum_{j=1}^{m} f_j(x)\right| = \left|\sum_{j=m+1}^{n} f_j(x)\right| \leq \sum_{j=N_0}^{\infty} |f_j(x)| \leq \sum_{j=N_0}^{\infty} M_j \leq \varepsilon \tag{1.1}$$

para todo $x \in X$. En particular la sucesión $\left(\sum_{j=1}^{n} f_j(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de las sumas parciales es de Cauchy en E (y además uniformemente en x). Como E es completo, para cada $x \in X$ existe $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f_j(x)$, al que llamamos $f(x)$. Así, haciendo $n \to \infty$ en (1.1), obtenemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe N_0 tal que si $m \geq N_0$ entonces

$$\left|f(x) - \sum_{j=1}^{m} f_j(x)\right| \leq \varepsilon \tag{1.2}$$

para todo $x \in X$. Es decir, que $\lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} f_j(x) = f(x)$ uniformemente en $x \in X$.

La afirmación sobre la continuidad de f en el caso de que cada f_n es continua se deja como ejercicio para el lector (en caso de duda, repetimos que la demostración es la misma que cuando X es un subconjunto de $\mathbb{R}$). □

Al aplicar este teorema al caso de funciones complejas obtenemos lo siguiente: si $f_n : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una sucesión de funciones para las que existen números reales positivos M_n de forma que $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo n, y $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en A.

Es importante advertir que, a diferencia de lo que ocurre con la topología, la geometría lineal en $\mathbb{C}$ es diferente de la de $\mathbb{R}^2$, cuando se considera a $\mathbb{C}$ como espacio vectorial sobre el propio $\mathbb{C}$, en lugar de sobre $\mathbb{R}$. Es decir, hay que distinguir bien entre funciones $\mathbb{R}$-lineales y funciones $\mathbb{C}$-lineales: por ejemplo la función $C(z) = \overline{z}$, que en coordenadas cartesianas se escribe $(x, y) \mapsto (x, -y)$, es $\mathbb{R}$-lineal pero no es $\mathbb{C}$-lineal. Lo mismo ocurre con los polinomios: todo polinomio complejo, es decir, toda función de la forma

$$P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n,$$

donde los a_j son números complejos, es también un polinomio real de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, como se ve de nuevo con el ejemplo $C(z) = \overline{z}$, no todo polinomio de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ es un polinomio complejo.

1.3. El plano complejo ampliado

A veces resulta útil añadir a $\mathbb{C}$ un punto especial, al que llamaremos punto del infinito y denotaremos por ∞. El conjunto resultante, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, lo denotaremos por $\mathbb{C}^*$, y nos referiremos a él como el plano complejo ampliado, o la *esfera de Riemann*. La razón de esta última denominación es la existencia de una biyección natural, la *proyección estereográfica*, entre la esfera $\mathbb{S}^2 := \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 : X^2+Y^2+Z^2 = 1\}$ y el conjunto $\mathbb{C}^*$, que nos permite identificar el polo norte $N := (0, 0, 1)$ de $\mathbb{S}^2$ con el punto ∞ de $\mathbb{C}$, y cada punto $P = (X, Y, Z)$ de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ con la intersección de la recta que une N y P en $\mathbb{R}^3$ con el plano $Z = 0$ de $\mathbb{R}^3$ (plano que identificamos a su vez con $\mathbb{C}$ mediante la inclusión natural de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, es decir $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$). Es inmediato comprobar que las ecuaciones de esta proyección estereográfica $F : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}^*$ son

$$(x, y) = F(X, Y, Z) = \left(\frac{X}{1-Z}, \frac{Y}{1-Z}\right),$$

para todo $(X, Y, Z) \in \mathbb{S} \setminus \{N\}$, y las de la inversa $F^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{S}^2$ vienen dadas por

$$\begin{cases} X = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \\ Y = \frac{2y}{1+x^2+y^2} \\ Z = \frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2}. \end{cases}$$

y por supuesto $F^{-1}(\infty) = N$.

La demostración del siguiente resultado se propone como ejercicio.

Teorema 1.5. *La proyección estereográfica lleva circunferencias de la esfera (definidos como intersecciones de planos afines de $\mathbb{R}^3$ con la esfera $\mathbb{S}^2$) en circunferencias o rectas de $\mathbb{C}$. Más precisamente: lleva las circunferencias de $\mathbb{S}^2$ que no contienen a N en circunferencias del plano, y las circunferencias que sí contienen a N en rectas del plano.*

Por tanto tiene sentido referirse a las circunferencias y rectas de $\mathbb{C}$ como circunferencias de $\mathbb{C}^*$, y viceversa.

Mediante la proyección estereográfica podemos definir una topología en $\mathbb{C}^*$ que hace que este espacio sea homeomorfo a la esfera $\mathbb{S}^2$, y en particular sea un espacio compacto: diremos que un conjunto W es abierto en $\mathbb{C}^*$ si y sólo si $F^{-1}(W)$ es abierto en $\mathbb{S}^2$, donde $F : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}^*$ es la proyección estereográfica. Esto equivale a declarar un subconjunto W entorno de un punto z en $\mathbb{C}^*$ siempre que W contenga un disco abierto de centro z, cuando $z \in \mathbb{C}$; o siempre que W contenga el complementario de un subconjunto acotado de $\mathbb{C}$, cuando $z = \infty$. Los entornos típicos de ∞ en $\mathbb{C}^*$ son por tanto de la forma $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R\} \cup \{\infty\}$, con $R \geq 0$, y una sucesión (z_n) en $\mathbb{C}$ converge a ∞ en $\mathbb{C}^*$ si y sólo si la sucesión de números reales $|z_n|$ cumple que $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$.[1]

Cuando se manejan funciones definidas en $\mathbb{C}^*$ el siguiente cambio de variable facilita muchos cálculos: $w = \varphi(z) = 1/z$, conviniendo que $1/0 = \infty$ y $1/\infty = 0$. La aplicación $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ así definida intercambia los puntos 0 e ∞, y lleva entornos de 0 en entornos de ∞, y viceversa, por lo que es continua en 0 y en ∞. Además es biyectiva y continua también en todos los demás puntos de $\mathbb{C}$. Por tanto φ es un homeomorfismo de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{C}^*$. Resulta entonces, por ejemplo, que una función $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ es continua en ∞ si y sólo si la función $\mathbb{C} \ni z \mapsto f(1/z) \in \mathbb{C}$ es continua en 0. La interpretación geométrica de este cambio de variable φ es la siguiente: si identificamos $\mathbb{C}^*$ con $\mathbb{S}^2$ por medio de la proyección estereográfica, la función φ es una rotación de 180 grados alrededor del eje X en la esfera.

1.4. Transformaciones de Möebius

Las transformaciones de Möebius[2] son funciones complejas de la forma

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

donde $ad - bc \neq 0$ (esta condición garantiza que f no es constante). En los textos en lengua inglesa también se les llama *fractional linear transformations*. Como casos especiales tenemos:

[1] El símbolo ∞ tiene diversas funciones en este contexto. Es difícil incurrir en confusiones graves por este motivo, pero si el lector estima repugnante esta duplicidad es libre de denotar el punto del infinito en $\mathbb{C}^*$ de cualquier otra forma.

[2] Esta sección es opcional y su lectura puede posponerse hasta el capítulo 10.

1. $f(z) = az + b$, con $a \neq 0$, es una transformación afín;
2. $f(z) = z + b$ es una traslación;
3. $f(z) = az$ es una dilatación (u homotecia compleja);
4. $f(z) = 1/z$ es una inversión.

Este tipo de funciones f pueden extenderse fácilmente al plano complejo ampliado $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$: si f es afín, se define $f(\infty) := \infty$. Por otro lado, si $c \neq 0$, se define $f(-d/c) := \infty$, y

$$f(\infty) := \lim_{|z|\to\infty} f(z) = \lim_{|z|\to\infty} \frac{a + b/z}{c + d/z} = \frac{a}{c}.$$

Es inmediato comprobar que las extensiones de f así definidas son continuas de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{C}^*$. Además, f es afín si y sólo si $f(\infty) = \infty$.

Proposición 1.6.

1. *Toda transformación de Möebius es biyectiva, y su inversa es también una transformación de Möebius.*
2. *La composición de transformaciones de Möebius es una transformación de Möebius.*

Demostración. Para comprobar (1) basta resolver

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

para z en función de w, y se obtiene

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a} = f^{-1}(w).$$

La demostración de (2) es un cálculo directo: si

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad g(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

se obtiene que

$$f(g(z)) = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)}.$$

□

Obsérvese que hay una correspodencia entre la composición de transformaciones de Möebius $f \circ g$ y el producto de las matrices asociadas a f y g:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}.$$

La matriz asociada a una transformación de Möebius no es única: obviamente al multiplicar todos los coeficientes por una misma constante obtenemos la misma transformación. De hecho puede verse que dos transformaciones de Möebius son iguales si y sólo si sus matrices son iguales salvo multiplicación por constante no nula. Por tanto las transformaciones de Möebius pueden contemplarse como un espacio proyectivo de matrices (denotado por $PGL_2(\mathbb{R})$, el espacio resultante de identificar una matriz de $GL_2(\mathbb{R}) := \{A : \det(A) \neq 0\}$ con otra siempre que ambas sean iguales salvo constante multiplicativa).

Teorema 1.7. *Dados tres puntos distintos $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, y otros tres puntos distintos $w_0, w_1, w_2 \in \mathbb{C}^*$, existe una única transformación de Möebius $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ tal que $f(z_j) = w_j$ para todo $j = 1, 2, 3$.*

Demostración. Basta demostrar el resultado en el caso particular en el que se desea encontrar f tal que $f(z_0) = 0$, $f(z_1) = 1$, y $f(z_2) = \infty$. En efecto, si f tiene esta propiedad y g lleva w_0, w_1, w_2 en $0, 1, \infty$, respectivamente, entonces $g^{-1} \circ f$ lleva z_0, z_1, z_2 en w_0, w_1, w_2, respectivamente.

Probemos pues la existencia de tal f.

Caso 1.1. $\infty \notin \{z_0, z_1, z_2\}$. Basta definir en este caso

$$f(z) = \frac{z - z_0}{z - z_2}\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_0}.$$

Caso 1.2. $\infty \in \{z_0, z_1, z_2\}$. Podemos suponer por ejemplo $z_0 = \infty$. Entonces

$$f(z) = \frac{z_1 - z_1}{z - z_2}$$

es la transformación buscada.

Veamos ahora la unicidad de f.

Caso 2.1. Supongamos $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$. Entonces f es necesariamente afín, digamos $f(z) = az + b$, para cierto $a \neq 0$, $b \in \mathbb{C}$. Además $f(0) = 0$ implica que $b = 0$, y entonces $f(1) = 1$ implica que $a = 1$. Por tanto f es la identidad.

Caso 2.2. Caso general. Supongamos que g y h son dos transformaciones de Möebius que llevan z_j en w_j para cada $j = 1, 2, 3$. Sea $\varphi(z)$ una transformación de Möebius que lleva z_0, z_1, z_2 en $0, 1, \infty$ respectivamente. Entonces $f = \varphi \circ h^{-1} \circ g \circ \varphi^{-1}$ lleva $0, 1, \infty$ en $0, 1, \infty$ por este orden, y por lo ya visto resulta que f es la identidad. Luego $g = h \circ \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi = h \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = h$. □

Teorema 1.8. *Toda transformación de Möebius es composición de dilataciones, traslaciones e inversiones.*

Demostración. Sea $f(z)$ una transformación de Möebius.

Caso 1. Supongamos que $f(\infty) = \infty$. Entonces f es afín, y por tanto composición de una dilatación con una traslación.

Caso 2. Supongamos que $f(\infty) \in \mathbb{C}$; entonces

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

con $c \neq 0$, y podemos dividir numerador y denominador por c y suponer por tanto $c = 1$, es decir, podemos suponer que f es de la forma

$$f(z) = \frac{az + b}{z + d} = a + \frac{b - ad}{z + d},$$

y es claro entonces que f es composición de una traslación, con una inversión, con una dilatación, y con otra traslación:

$$z \mapsto z + d \mapsto \frac{1}{z + d} \mapsto \frac{b - ad}{z + d} \mapsto a + \frac{b - ad}{z + d} = f(z).$$

□

Teorema 1.9. *Toda transformación de Möebius lleva circunferencias de $\mathbb{C}^*$ (es decir, circunferencias o rectas de $\mathbb{C}$) en circunferencias de $\mathbb{C}^*$.*

Demostración. Gracias al teorema anterior, basta demostrar que esto es así en el caso de traslaciones, dilataciones e inversiones. Para traslaciones y dilataciones esto es obvio. Veámoslo para las inversiones.

Consideremos primero el caso de una circunferencia de $\mathbb{C}^*$ que no pasa por ∞, es decir, una circunferencia de $\mathbb{C}$ (recuérdese el Teorema 1.5). Su ecuación es por tanto del tipo $\{z : |z - a|^2 = r^2\}$, que es transformada por $w = 1/z$ en $\{w : |1 - aw|^2 = r^2|w|^2\}$. Escribiendo $w = u + iv$ y calculando

$$\begin{aligned} 0 &= |1 - aw|^2 - r^2|w|^2 = (1 - aw)(\overline{1 - aw}) - r^2|w|^2 = (|a|^2 - r^2)|w|^2 - aw - \overline{aw} + 1 \\ &= (|a|^2 - r^2)(u^2 + v^2) + Au + Bv + 1, \end{aligned}$$

donde $A, B \in \mathbb{R}$ (puesto que $aw + \overline{aw} = 2\mathrm{Re}(aw) \in \mathbb{R}$; explícitamente, $A = -2\mathrm{Re}(a)$, y $B = 2\mathrm{Im}(a)$), vemos que:

1. Si $r = |a|$ este conjunto es una recta en $\mathbb{C}$.
2. Si $r \neq |a|$, completando cuadrados se ve fácilmente que este conjunto es una circunferencia en $\mathbb{C}$.

En el caso de una circunferencia de $\mathbb{C}^*$ que pasa por ∞, es decir una recta en $\mathbb{C}$, su ecuación es del tipo $Cx + Dy = E$, y cálculos parecidos muestran que la imagen por $w = 1/z$ de esta recta es una circunferencia cuando $E \neq 0$, y una recta cuando $E = 0$. Los detalles de estos cálculos se dejan como ejercicio para el lector. $\square$

1.5. Problemas

Problema 1.1. Resolver las siguientes cuestiones.

1. Determinar los números complejos cuyo cuadrado sea igual a su conjugado.
2. Encontrar los números complejos cuyo conjugado coincide con su inverso.
3. Hallar los números complejos que son iguales al cuadrado de su conjugado.
4. Encontrar los números complejos cuyo cuadrado coincide con el cuadrado de su conjugado.
5. Encontrar los números complejos z tales que la suma (respectivamente, la diferencia) de z y su conjugado es nula.
6. Hallar los números complejos cuyos inversos son iguales a sus opuestos.
7. Determinar los números complejos cuyo cuadrado sea: i) imaginario puro; ii) real positivo; iii) real negativo.

Problema 1.2. Determinar y dibujar los conjuntos:

1. $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - i|^2 + |z + i|^2 < 2\}$;
2. $B = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re} z| < |z|\}$.

Problema 1.3. Si $z \neq 0$ es un número complejo, probar que z, $1/\overline{z}$, 0 están alineados.

Problema 1.4. Hallar los valores de n naturales para los que $(1 + i)^n$ es un número real positivo.

Problema 1.5. Hallar las raíces sextas de $7 + 13i$.

Problema 1.6. Sean $w_0, ..., w_{n-1}$ las n raíces n-ésimas de 1. Demostrar que:

1. $\Pi_{k=0}^{n-1}(z - w_k) = z^n - 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$;
2. $\sum_{k=0}^{n-1} w_k = 0$;
3. $\Pi_{k=0}^{n-1} w_k = (-1)^{n-1}$;
4. $\sum_{j=0}^{n-1} w_j^k = \begin{cases} 0, \text{ si } 1 \leq k \leq n-1 \\ n, \text{ si } k = n. \end{cases}$

Problema 1.7. Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ y tal que $|z| = 1$. Probar que $z + z^{-1}$ es real y que $\frac{1+z}{1-z}$ es imaginario puro.

Problema 1.8. Demostrar que $\mathbb{C}$ no admite una relación de orden total $\prec$ tal que

- $z_1 \succ z_2 \implies z_1 + z_3 \succ z_2 + z_3$, y
- $z_3 \succ 0, z_1 \succ z_2 \implies z_1 z_3 \succ z_2 z_3$.

Indicación: ¿es posible $i \succ 0$?

Problema 1.9. Probar que si $e^{z+w} = e^z$ para todo $z \in \mathbb{C}$ entonces $w = 2k\pi i$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Problema 1.10. Determinar la transformación de Möbius f tal que $f(0) = -1$, $f(i) = 0$, y $f(\infty) = 1$. Hallar $f(L)$, donde $L = \{x + i : x \in \mathbb{R}\}$.

Problema 1.11. Determinar la transformación de Möbius f tal que $f(-2) = 1 - 2i$, $f(i) = 0$, y $f(2) = 1 + 2i$.

Problema 1.12. Demostrar que si f es una transformación de Möbius que no es la identidad, entonces f tiene uno o dos puntos fijos.

Problema 1.13. Justificar que las funciones e^z, $\cos z$, $\operatorname{sen} z$ son continuas en $\mathbb{C}$.

Problema 1.14. Probar que la sucesión de funciones

$$f_n(z) = \frac{n + e^z}{1 + n|z|^2}$$

converge uniformemente en cada conjunto $E_r = \{z \in \mathbb{C} : 1/R \leq |z| \leq R\}$ con $R > 1$. Comprobar también que converge puntualmente en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Problema 1.15. Sean $z, w \in \mathbb{C}$ tales que $\overline{z}w \neq 1$. Demostrar que

$$\left| \frac{w - z}{1 - \overline{w}z} \right| < 1 \text{ si } |z| < 1 \text{ y } |w| < 1,$$

y que

$$\left| \frac{w - z}{1 - \overline{w}z} \right| = 1 \text{ si } |z| = 1 \text{ o } |w| = 1.$$

Indicación: puede suponerse $z \in \mathbb{R}$, y entonces basta ver que

$$(r - w)(r - \overline{w}) \leq (1 - rw)(1 - r\overline{w}),$$

con igualdad en los casos apropiados.

Problema 1.16. Denotemos por $\mathbb{D}$ el disco unidad abierto. Demostrar que para cada $w \in \mathbb{D}$ fijo, la aplicación

$$F(z) = \frac{w - z}{1 - \overline{w}z}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. $F(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$;
2. $F(0) = w$ y $F(w) = 0$;
3. $|F(z)| = 1$ si $|z| = 1$;
4. $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es biyectiva.

Problema 1.17. Demostrar que la proyección estereográfica lleva circunferencias de la esfera $\mathbb{S}^2$ que no contienen al polo norte $N = (0, 0, 1)$ en circunferencias de $\mathbb{C}$- Demostrar también que si K es una circunferencia de $\mathbb{S}^2$ que contiene a N entonces dicha proyección lleva K en $L \cup \{\infty\}$, donde L es una recta de $\mathbb{C}$.

Problema 1.18. Consideremos la función $f(z) = 1/z$, y sea $L = \{x + iy : Cx + Dy = E\}$ una recta de $\mathbb{C}$. Demostrar que $f(L)$ es un círculo de $\mathbb{C}$ si $E \neq 0$, y es una recta de $\mathbb{C}$ si $E = 0$. Interpretar estos resultados considerando que f esté definida de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{C}^*$ (con $f(0) = \infty$ y $f(\infty) = 0$).

Capítulo 2

Funciones holomorfas. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann y algunas de sus consecuencias

En este capítulo definiremos las funciones holomorfas como las funciones complejas que son *diferenciables en sentido complejo*, y responderemos a la pregunta, natural y muy importante, de bajo qué circunstancias una función de dos variables reales, con valores en $\mathbb{R}^2$, y diferenciable en sentido real resulta holomorfa al considerarla como función de variable compleja con valores en $\mathbb{C}$.

2.1. Funciones holomorfas

Definición 2.1. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Se dice que f es *holomorfa en* z_0 (o diferenciable en sentido complejo en z_0) si existe el límite

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.$$

En caso de que exista, se llama al valor de este límite la derivada (compleja) de f en z_0, y se denota

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.$$

Diremos que la función f es holomorfa en Ω si es holomorfa en todo punto $z_0 \in \Omega$. En el caso de una función holomorfa $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, diremos también que g es entera.

La siguiente observación es a veces útil: una función f es holomorfa en z_0, con $f'(z_0) = a$, si y sólo si existe una función ψ con $\lim_{h\to 0} \psi(h) = 0$ tal que

$$f(z_0 + h) - f(z_0) - ah = h\psi(h).$$

De vez en cuando escribiremos

$$f(z_0 + h) - f(z_0) - ah = o(h)$$

para referirnos a la existencia de una tal función ψ sin nombrarla explícitamente. También escribiremos $g(h) = O(h)$ para referirnos a la existencia de una constante M y un número $\delta > 0$ tales que $|g(h)| \leq M|h|$ para todo $z \in D(0, \delta)$. En particular, si $g(h) = O(h)$ entonces $\lim_{h\to 0} g(h) = 0$.

Algunos ejemplos de funciones holomorfas: la función $f(z) = z$ es holomorfa en $\mathbb{C}$, con $f'(z) = 1$. Toda función constante $z \mapsto c_0$ es holomorfa en $\mathbb{C}$, con derivada nula. La función $f(z) = 1/z$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, con $f'(z) = -1/z^2$, ya que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1/(z+h) - 1/z}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{z-(z+h)}{z(z+h)h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{z(z+h)} = -\frac{1}{z^2}.$$

Como ejemplo básico de función que *no* es holomorfa tenemos la conjugación $C(z) = \overline{z}$: se cumple que

$$\frac{C(z+h) - C(z)}{h} = \frac{\overline{h}}{h},$$

y esta expresión no tiene límite cuando $h \to 0$ (ya que a lo largo de la recta $h = t \in \mathbb{R}$ la función es idénticamente 1, mientras que a lo largo de la recta $h = it$, $t \in \mathbb{R}$, es constantemente -1). Sin embargo, obsérvese que $C(z)$ es una función de clase $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$; de hecho $C(z)$ es incluso $\mathbb{R}$-lineal.

Proposición 2.1. *Si f es holomorfa en z_0 entonces es continua en z_0.*

Demostración. $f(z_0 + h) - f(z_0) = f'(z_0)h + o(h) = O(h)$. □

Proposición 2.2. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$. Si $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ son holomorfas en $z_0 \in \Omega$ entonces:*

1. *$f + g$ es holomorfa en z_0, y $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$.*
2. *fg es holomorfa en z_0, y $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$.*
3. *Si $g(z_0) \neq 0$ entonces f/g es holomorfa en z_0, y*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

Además, si U es un abierto de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to U$ es holomorfa en z_0 y $g : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa en $w_0 = f(z_0)$, entonces la composición $g \circ f$ es holomorfa en z_0, y se tiene

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0) \quad \textit{(Regla de la cadena).}$$

Demostración. (1) es muy fácil y se deja como ejercicio. Para ver (2) basta escribir

$$\frac{f(z_0+h)g(z_0+h) - f(z_0)g(z_0)}{h} = \\ g(z_0+h)\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} + f(z_0)\frac{g(z_0+h) - g(z_0)}{h} \to g(z_0)f'(z_0) + f(z_0)g'(z_0),$$

cuando $h \to 0$, por la definición de derivada y la proposición anterior.

Demostremos ahora la regla de la cadena. Consideraremos dos casos.

Caso 1. Supongamos que $f'(z_0) \neq 0$. Entonces de la definición de derivada se sigue que existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |h| < \delta$ entonces

$$\left|\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}\right| \geq \frac{|f'(z_0)|}{2} > 0,$$

y en particular $|f(z_0+h) - f(z_0)| > 0$ si $0 < |h| < \delta$. Luego podemos dividir $g(f(z_0+h)) - g(f(z_0))$ por $f(z_0+h) - f(z_0)$ para h suficientemente pequeño (aunque no nulo) y tomar límites, obteniendo así

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(f(z_0+h)) - g(f(z_0))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(z_0+h)) - g(f(z_0))}{f(z_0+h) - f(z_0)} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = g'(f(z_0))f'(z_0),$$

gracias a la definición de $g'(f(z_0))$ y $f'(z_0)$ y al hecho de que $\lim_{h\to 0} f(z_0+h) = f(z_0)$.

Caso 2. Supongamos ahora que $f'(z_0) = 0$. Usando la definición de derivada para $g'(f(z_0))$ deducimos que existe $\delta > 0$ tal que si $|w - f(z_0)| \leq \delta$ entonces

$$|g(w) - g(f(z_0))| \leq (|g'(f(z_0))| + 1)|w - f(z_0)| := A|w - f(z_0)|.$$

Como $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, existe $r > 0$ tal que si $|h| \leq r$ entonces $|f(z_0+h) - f(z_0)| \leq \delta$, y así podemos usar la desigualdad anterior con $w = f(z_0+h)$, obteniendo, para $0 < |h| < r$,

$$\left|\frac{g(f(z_0+h)) - g(f(z_0))}{h}\right| \leq A\left|\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}\right| \to A|f'(z_0)| = 0$$

cuando $h \to 0$, y así $(g \circ f)'(z_0) = 0 = g'(f(z_0))f'(z_0)$.

Finalmente (3) se obtiene fácilmente combinando (2) con la regla de la cadena y el hecho ya probado anteriormente de que la derivada de $1/z$ es $-1/z^2$. $\square$

Como consecuencia de la proposición anterior y de hechos ya conocidos, tenemos por ejemplo que cualquier polinomio complejo es holomorfo en $\mathbb{C}$, y que cualquier cociente de polinomios complejos $P(z)/Q(z)$ es holomorfo en $\{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\}$. Aún no podemos demostrar que otras funciones complejas importantes, como e^z, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, etc, sean holomorfas, pero todo esto lo podremos deducir inmediatamente de los resultados de la siguiente sección.

2.2. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann y algunas de sus consecuencias

Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definida en un abierto Ω de $\mathbb{C}$ es también una función f definida en un abierto de $\mathbb{R}^2$ y con valores en $\mathbb{R}^2$: si denotamos $z = x + iy$, $u(z) = \mathrm{Re}f(z)$, $v(z) = \mathrm{Im}f(z)$ e identificamos z con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $u + iv$ con (u, v), podemos escribir

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)),$$

y preguntarnos cuál es la relación entre la posible diferenciabilidad de f vista como función de dos variables reales y la posible holomorfía de f como función de una variable compleja. En vista del ejemplo $f(z) = \overline{z}$ ya sabemos que el hecho de que f sea diferenciable en sentido real (o incluso de clase $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$) no implica que f sea holomorfa. El siguiente teorema nos da una condición que, al añadirla a la diferenciabilidad en sentido real de f, resulta ser necesaria y suficiente para que f sea holomorfa.

Teorema 2.3. *Sea $f = u + iv$ una función definida en un abierto Ω de $\mathbb{C}$ y con valores en C. Entonces f es holomorfa en un punto $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ si y sólo si las funciones u, v son diferenciables en z_0 y sus derivadas parciales cumplen*

$$(CR) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{cases}$$

Además en este caso se tiene que

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Demostración. Si denotamos por $Df(x_0, y_0)$ la diferencial (en sentido real) de f en z_0 y reservamos $f'(z_0)$ para la derivada compleja de f, el enunciado es equivalente a decir que existe $f'(z_0) = a + ib$ si y sólo si existe $Df(x_0, y_0)$ y su matriz (respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$) tiene la forma

$$Df(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$. Supongamos primero que $f'(z_0)$, existe y denotémosla $f'(z_0) = a + ib$. Entonces, definiendo A como la aplicación lineal $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya matriz respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

y denotando $h = s + it = (s, t)$, tenemos que

$$Ah = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = (as - bt, bs + at) = (a + ib)(s + it), \qquad (*)$$

luego

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - Ah}{|h|} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - f'(z_0)h}{|h|} = 0$$

como consecuencia de la definición de $f'(z_0)$. Esto significa que f es diferenciable en sentido real y que $Df(x_0, y_0) = A$.

Recíprocamente, supongamos que f es diferenciable en sentido real y $Df(x_0, y_0)$ tiene matriz del tipo

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$. Definamos entonces $w = a + ib$. La igualdad $(*)$ y la diferenciabilidad de f en $z_0 = (x_0, y_0)$ implican que

$$f(z_0 + h) - f(z_0) - wh = f(z_0 + h) - f(z_0) - Ah = o(h),$$

lo que a su vez nos dice que f es holomorfa en z_0, con $f'(z_0) = w$. □

Al sistema de ecuaciones en derivadas parciales (CR) se le llama *ecuaciones de Cauchy-Riemann*.

Una consecuencia del teorema anterior es que si f es holomorfa en z_0 entonces

$$|f'(z_0)|^2 = \det Df(x_0, y_0). \tag{2.1}$$

Otra consecuencia, que se propone como ejercicio, es que si f es holomorfa en un abierto conexo Ω de $\mathbb{C}$ y $f' = 0$ en Ω, entonces f es constante en Ω. También se verá en los problemas de este capítulo que, gracias a las ecuaciones de Cauchy-Riemann, las funciones *armónicas* (es decir, las que cumplen $\Delta u = 0$) en los abiertos de $\mathbb{R}^2$ pueden caracterizarse localmente como las funciones que son partes reales de funciones holomorfas.

Veremos a continuación cómo las ecuaciones de Cauchy-Riemann pueden usarse para establecer que localmente una función f es holomorfa y tiene derivada no nula si y sólo si f es una *aplicación conforme*.

Proposición 2.4. *Si $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{C}$ es una curva de clase C^1 con $\gamma(0) = z_0$ y f es holomorfa en z_0 entonces el vector tangente a la curva $\sigma = f \circ \gamma$ en $f(z_0)$ es*

$$(f \circ \gamma)'(0) = f'(z_0)\gamma'(0).$$

Demostración. Por la regla de la cadena para funciones diferenciables en sentido real (que podemos aplicar gracias al teorema anterior) se tiene

$$(f \circ \gamma)'(0) = Df(z_0)\gamma'(0).$$

Además, volviendo a utilizar teorema anterior,

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

donde $a + ib = f'(z_0)$, luego, denotando $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, se ve que

$$\begin{aligned} Df(z_0)\gamma'(0) &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha'(0) \\ \beta'(0) \end{pmatrix} = \big(a\alpha'(0) - b\beta'(0), b\alpha'(0) + a\beta'(0)\big) \\ &= (a + ib)\big(\alpha'(0) + i\beta'(0)\big) = f'(z_0)\gamma'(0). \end{aligned}$$

□

Definición 2.2. Una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de se dice que es *conforme* en $z_0 \in \Omega$ si es diferenciable (en sentido real) en z_0 y *preserva ángulos en* z_0, lo cual significa que si $\gamma_1, \gamma_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Omega$ son curvas de clase C^1 con $\gamma_1(0) = z_0 = \gamma_2(0)$ y $\gamma_1'(0) \neq 0 \neq \gamma_2'(0)$, entonces $(f \circ \gamma_1)'(0) \neq 0 \neq (f \circ \gamma_2)'(0)$, y

$$\text{ángulo}\left((f \circ \gamma_1)'(0), (f \circ \gamma_2)'(0)\right) = \text{ángulo}\left(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0)\right),$$

con la misma orientación.

Diremos también que $f : U \to V$ es una *aplicación conforme* entre dos abiertos de $\mathbb{R}^2$ si es conforme en cada $z \in U$ y es una biyección de U en V.

Teorema 2.5. *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$;*
2. *f es conforme en z_0.*

Demostración. (1) $\Longrightarrow$ (2): Sean γ_1, γ_2 curvas como en la definición anterior. Usando la Proposición, tenemos

$$(f \circ \gamma_j)'(0) = f'(z_0)\gamma_j'(0) \neq 0$$

para $j = 1, 2$. Además

$$\begin{aligned} \text{ángulo}\left((f \circ \gamma_1)'(0), (f \circ \gamma_2)'(0)\right) = \text{ángulo}\left(f'(z_0)\gamma_1'(0), f'(z_0)\gamma_2'(0)\right) = \\ \arg\left(f'(z_0)\gamma_1'(0)\right) - \arg\left(f'(z_0)\gamma_2'(0)\right) = \\ \arg(f'(z_0)) + \arg(\gamma_1'(0)) - \arg(f'(z_0)) - \arg(\gamma_2'(0)) = \\ \arg(\gamma_1'(0)) - \arg(\gamma_2'(0)) = \text{ángulo}(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0)), \end{aligned}$$

y por tanto f es conforme en z_0.

(2) $\Longrightarrow$ (1): La función f es diferenciable (en sentido real) en z_0 por ser conforme, luego en virtud del teorema anterior bastará probar que $f = u + iv$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemman en el punto z_0. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $z_0 = 0$. Denotemos

$$Df(0) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

y para cada $\theta \in (-\pi, \pi]$ definamos la curva $\gamma_\theta(t) = te^{i\theta} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, de modo que

$$(f \circ \gamma_\theta)'(0) = Df(0)\gamma_\theta'(0) = (a\cos\theta + c\operatorname{sen}\theta, b\cos\theta + d\operatorname{sen}\theta).$$

Por hipótesis,

$$\begin{aligned} \arg(e^{i\theta}) = \theta = \text{ángulo}\left((f \circ \gamma_0)'(0), (f \circ \gamma_\theta)'(0)\right) = \\ \text{ángulo}\left(a + ib, a\cos\theta + c\operatorname{sen}\theta + i(b\cos\theta + d\operatorname{sen}\theta)\right) = \\ \arg\left(\frac{a\cos\theta + c\operatorname{sen}\theta + i(b\cos\theta + d\operatorname{sen}\theta)}{a + ib}\right), \end{aligned}$$

luego

$$\arg(a + ib) = \arg\left(\frac{a\cos\theta + c\operatorname{sen}\theta + i(b\cos\theta + d\operatorname{sen}\theta)}{e^{i\theta}}\right),$$

o equivalentemente, escribiendo $\cos\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$, $\operatorname{sen}\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i$ y operando,

$$\arg(a + ib) = \arg\left(\frac{1}{2}(a + d + i(b - c)) + \frac{1}{2}e^{-2i\theta}(a - d + i(c + b))\right).$$

Ahora bien, la única manera en que esto puede ser posible[1] para todo $\theta \in (-\pi, \pi]$ es que se tenga

$$a - d + i(c + b) = 0,$$

lo que significa que $f = u + iv$ cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann en 0. □

Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann es muy sencillo comprobar que $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\operatorname{sen} y)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$. Se sigue entonces que también lo son las funciones sen, cos, así como las sumas, multiplicaciones, cocientes y composiciones de polinomios o de cualquiera de estas funciones, donde estén bien definidas.

[1] Es fácil demostrar que si $z, w \in \mathbb{C}$ y la función $t \mapsto \operatorname{Arg}(z + we^{it})$ es constante, entonces $w = 0$.

2.3. Teorema de la función inversa

Del teorema de la función inversa para funciones definidas en abiertos de $\mathbb{R}^n$ que toman valores en $\mathbb{R}^n$ podemos deducir fácilmente, particularizando en el caso $n=2$, un resultado similar para funciones holomorfas.

Teorema 2.6. *[de la función inversa, versión 1.0] Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa, con derivada f' continua, y tal que $f'(z_0) \neq 0$. Entonces existen U entorno abierto de z_0 en Ω y V entorno abierto de $f(z_0)$ en $\mathbb{C}$ tal que $f_{|_U} = f : U \to f(U) = V$ es biyectiva y la inversa $f^{-1} : V \to U$ es también holomorfa. Además,*

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$$

para todo $w \in V$.

Demostración. Al ser f holomorfa y f' continua, se tiene que $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ vista como función de dos variables reales con valores en $\mathbb{R}^2$; además sabemos por (2.1), y usando la hipótesis sobre $f'(z_0)$, que

$$\det Df(z_0) = |f'(z_0)|^2 \neq 0.$$

Entonces, por el teorema de la función inversa, existen U entorno abierto de z_0 en Ω y V entorno abierto de $f(z_0)$ en $\mathbb{C}$ tal que $f_{|_U} = f : U \to f(U) = V$ es biyectiva y la inversa $f^{-1} : V \to U$ es de clase C^1. Veamos que f^{-1} es holomorfa. Sea $w_1 \in V$, pongamos que $f(z_1) = w_1$, con $z_1 \in U$. Puesto que $f : U \to V$ es un difeomorfismo C^1 sabemos que la aplicación lineal $Df(z_1)$ es invertible, y por tanto $\det Df(z_1) \neq 0$. Usando de nuevo (2.1) tenemos que $f'(z_1) \neq 0$. Consideremos ahora $w = f(z)$, con $z \in U$; entonces

$$\frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_1)}{w - w_1} = \frac{z - z_1}{f(z) - f(z_1)} = \frac{1}{\frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1}} \to \frac{1}{f'(z_1)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_1))}$$

cuando $w \to w_1$, ya que $f'(z_1) \neq 0$, y si $w = f(z) \to f(z_1) = w_1$ entonces $z \to z_1$, por ser f^{-1} continua. Esto prueba que f^{-1} es holomorfa en cada $w_1 \in V$, y también la fórmula del enunciado. □

Más adelante veremos que toda función holomorfa f tiene derivadas complejas de todos los órdenes, y en particular f' es continua (por ser derivable). Por esto la hipótesis de continuidad de f' en el teorema anterior es en realidad redundante.

2.4. Problemas

Problema 2.1. Recordemos que hemos definido, para cada $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$. Utilizar las ecuaciones de Cauchy-Riemman para demostrar que $f(z) = e^z$ es holomorfa en $\mathbb{C}$, y que $f'(z) = e^z$.

Problema 2.2. Deducir del ejercicio anterior que las siguientes funciones son holomorfas, y calcular sus derivadas:

1. $\operatorname{sen} z := \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$
2. $\cos z := \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$
3. $\operatorname{senh} z := \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$
4. $\cosh z := \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$.

Problema 2.3. Demostrar que si $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa en un abierto conexo Ω de $\mathbb{C}$ y $f' = 0$ en Ω, entonces f es constante en Ω.

Problema 2.4. Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$. Demostrar que si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa y sólo toma valores reales (es decir $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$) entonces f es constante.

Problema 2.5. Demostrar que si tanto $f = u + iv$ como $\overline{f} := u - iv$ son holomorfas en un abierto conexo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ entonces f es constante.

Problema 2.6. Demostrar que si f es holomorfa en un abierto conexo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y además $|f|$ es constante, entonces f es constante.
Indicación: $\overline{f} = |f|^2/f$.

Problema 2.7. Comprobar que si $f = u + iv$ es holomorfa entonces $|f'| = \|\nabla u\| = \|\nabla v\|$.

Problema 2.8. Comprobar que si $f = u + iv$ es holomorfa entonces ∇v se obtiene rotando $\pi/2$ el vector ∇u. Recíprocamente, si $\nabla v = e^{i\pi/2}\nabla u$ y $f = (u, v)$ es diferenciable en sentido real entonces f es holomorfa.

Problema 2.9. Demostrar que en coordenadas polares las ecuaciones de Cauchy-Riemann se expresan:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r}.$$

Problema 2.10. Comprobar que, para cada $m \in \mathbb{Z}$, las funciones u, v definidas en coordenadas polares por $u(re^{i\theta}) = r^m \cos(m\theta)$, $v(re^{i\theta}) = r^m \operatorname{sen}(m\theta)$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Problema 2.11. Definamos los operadores diferenciales $\partial/\partial z$ y $\partial/\partial \overline{z}$ por

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) f$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) f,$$

para cada función compleja $f = u + iv$. Comprobar que las ecuaciones de Cauchy-Riemann para f equivalen a

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

Deducir que $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa si y sólo si f es diferenciable en sentido real y $\partial f/\partial \overline{z} = 0$. Además, en tal caso

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Problema 2.12. Demostrar que las funciones

$$\operatorname{arcsen} z := -i \log(iz \pm \sqrt{1 - z^2}),$$

definidas para $z \in \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$, son derivables, y calcular su derivada. Mostrar que esta función coincide con el arcsen$x$ usual cuando $z = x \in (-1, 1)$.

Problema 2.13. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa e inyectiva, con derivada f' continua. Demostrar que

$$\text{área}(f(\Omega)) = \int_\Omega |f'(z)|^2 dxdy.$$

Problema 2.14. Consideremos la función $f(z) = z^2$, y los recintos $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ y $E = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq 1\}$. Dibujar los conjuntos $f(D)$ y $f(E)$, y calcular sus áreas.

Se dice que una función $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es *armónica* si es solución de la *ecuación de Laplace*:

$$\Delta u = 0,$$

donde

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_n}^2}$$

y entendemos que u es por lo menos de clase C^2.

Problema 2.15. Demostrar que si $u + iv = f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa y $u, v \in C^2(\Omega)$ entonces u y v son armónicas.[2]

Si u es armónica en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ y v es armónica en Ω y cumple que $u + iv$ es holomorfa en Ω, se dice que v es una *conjugada armónica de* u.

Problema 2.16. Demostrar que la conjugada armónica, si existe en un abierto conexo Ω de $\mathbb{C}$, es única salvo una constante aditiva.

Problema 2.17. Comprobar que $u(x, y) = xy$ es armónica en $\mathbb{R}^2$, y hallar una conjugada armónica de u.

Problema 2.18. Generalizar la estrategia de la solución del ejercicio anterior para demostrar que si Ω es un disco abierto, o un rectángulo abierto con lados paralelos a los ejes, y $u(x, y)$ es armónica en Ω, entonces existe v conjugada armónica de u en Ω, y que v es de la forma

$$v(x, y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(s, y_0) ds + C.$$

Problema 2.19. Comprobar que la ecuación de Laplace en coordenadas polares es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Problema 2.20. Usando el ejercicio anterior, comprobar que $\log |z|$ es armónica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, pero no tiene ninguna conjugada armónica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Problema 2.21. Demostrar que si $z, w \in \mathbb{C}$ y la función $(-\pi, \pi] \ni \theta \mapsto \mathrm{Arg}(z + we^{i\theta})$ es constante, entonces $w = 0$.

Problema 2.22. Hallar una aplicación conforme de la banda horizontal $\{z \in \mathbb{C} : -\alpha < \mathrm{Im} z < \alpha\}$ en el semiplano de la derecha $\{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z > 0\}$.

Problema 2.23. Sea $f = u + iv$ una función de clase $C^1(\Omega)$ tal que $\det Df(z) \neq 0$ para cada $z \in \Omega$ (abierto conexo en $\mathbb{C}$), y supongamos que f lleva curvas ortogonales en curvas ortogonales. Demostrar que o bien f o bien $\overline{f}$ es holomorfa.

[2]Veremos más adelante que si $f = u + iv$ es holomorfa entonces f tiene derivadas complejas de todos los órdenes, y $u, v \in C^\infty(\Omega)$. Por tanto la hipótesis de que $u, v \in C^2(\Omega)$ es redundante en la práctica.

Capítulo 3

Series de potencias complejas

Una serie de potencias centrada en un punto z_0 de $\mathbb{C}$ es una suma infinita del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

donde $z, a_n \in \mathbb{C}$ para todo n.

Definición 3.1. Diremos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge a un número complejo $f(z)$ si

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n(z-z_0)^n = f(z).$$

Diremos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ es *absolutamente convergente* si la suma de números reales positivos $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z-z_0)^n|$ es finita. Por último, diremos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ es uniformemente convergente a $f(z)$ en un conjunto D si $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n(z-z_0)^n = f(z)$ uniformemente en $z \in D$.

Mediante el cambio de variable $w = z - z_0$, a efectos de estudiar resultados de convergencia o divergencia de series de potencias, siempre podemos suponer que $z_0 = 0$, es decir, que la serie de potencias está centrada en 0, y por tanto es del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Obsérvese que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es absolutamente convergente para $z = w$ entonces también lo es para todo z tal que $|z| \leq |w|$ y, en particular, aplicando el criterio M de Weierstrass, resulta que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es uniformemente convergente en el disco cerrado $\overline{D}(0, |w|)$.

Teorema 3.1. *Para toda serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *existe un único* $R \in [0, \infty]$ *tal que:*

1. *Para cada* $\eta \in [0, R)$ *la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *converge absoluta y uniformemente en* $\overline{D}(0, \eta)$.

2. *Si* $|z| > R$ *entonces la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *diverge.*

Además este número R *está determinado por la* fórmula de Hadamard*:*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}, \tag{3.1}$$

donde convenimos que $1/0 = \infty$ *y* $1/\infty = 0$.

Demostración. Definamos R por (3.1), y supongamos primero que $R \in (0, \infty)$. Consideremos $L = 1/R = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$. Si $0 < \eta < R$, podemos elegir ε tal que

$$r := (L+\varepsilon)\eta < 1,$$

y entonces, por definición de $\limsup$, existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$|a_n|^{1/n} \leq L + \varepsilon,$$

luego

$$|a_n|\eta^n \leq (L+\varepsilon)^n \eta^n = r^n,$$

y por tanto

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|\eta^n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} r^n < \frac{1}{1-r},$$

lo que prueba que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\eta^n < \infty$. Usando ahora el criterio M de Weierstrass, deducimos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absoluta y uniformemente en el disco $\overline{D}(0, \eta)$.

Por otro lado, si $|z| > R$, podemos elegir ε tal que

$$s := (L-\varepsilon)|z| > 1,$$

y por definición de $\limsup$ existe una sucesión estrictamente creciente $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de números naturales tal que

$$|a_{n_j}|^{1/n_j} \geq L - \varepsilon,$$

luego

$$|a_{n_j} z^{n_j}| \geq (L-\varepsilon)^{n_j} |z|^{n_j} = s^{n_j} \to \infty$$

cuando $j \to \infty$, y en particular $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge.

Supongamos en segundo lugar que $R = \infty$. En este caso, el mismo argumento que antes muestra que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absoluta y uniformemente en el disco $\overline{D}(0, \eta)$, para cualquier $\eta > 0$.

Supongamos por último que $R = 0$. Entonces, para cualquier z con $|z| > 0$, como $L = \infty$ podemos encontrar una sucesión estrictamente creciente $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de números naturales tal que

$$|a_{n_j}|^{1/n_j} \geq \frac{2}{|z|},$$

luego

$$|a_{n_j} z^{n_j}| \geq 2^{n_j} \to \infty$$

cuando $j \to \infty$, y por tanto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge. □

Al disco abierto $D(0, R)$ determinado por el teorema anterior se le llama *disco de convergencia* de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Conviene observar que para $|z| = R$, es decir, en la frontera del disco de convergencia, la situación es más delicada: por ejemplo, puede haber convergencia para algunos z con $|z| = R$ pero no para otros; también puede suceder que la serie diverja para todo $|z| = R$, o incluso que converja para todo $|z| = R$. Ejemplos de las tres situaciones se estudiarán en los ejercicios de este capítulo.

Otro criterio muy útil para hallar el radio de convergencia de una serie de potencias es el *criterio del cociente*. Recordemos que, si $(b_n)_n$ es una sucesión de números reales positivos, el criterio del cociente dice que la suma $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ es finita si $\limsup_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$, y es infinita si $\liminf_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} > 1$ (no obteniéndose ninguna información si $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$). Una aplicación inmediata de este criterio al caso $b_n = |a_n z^n|$ demuestra el siguiente resultado.

Teorema 3.2. *Si existe* $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \in [0, \infty]$*, entonces el valor de este límite es el radio de convergencia de la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$*. Más en general, se tiene:*

1. *Si* $0 < r < \liminf_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ *entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *converge absoluta y uniformemente en* $|z| \leq r$.

2. *Si* $|z| > \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ *entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *diverge.*

Usando este teorema, es inmediato comprobar, por ejemplo, que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ tiene radio de convergencia infinito.

Sin embargo, el teorema anterior tiene limitaciones grandes en la práctica, debido al hecho de que pueden darse casos interesantes de series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en los que $a_n = 0$ para infinitos n, con lo que los cocientes $|a_n|/|a_{n+1}|$ no están definidos. En esos casos puede usarse la idea de la demostración del teorema, en lugar del propio teorema. Por ejemplo, consideremos una serie de potencias del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{3n},$$

donde sólo hay potencias de z de órdenes multiplos de 3, y se supone que todos los a_n son no nulos. Para hallar el radio de convergencia podemos considerar el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} z^{3n+3}|}{|a_n z^{3n}|} = |z|^3 \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|},$$

suponiendo que éste exista. Según el criterio del cociente, si

$$\lim_{n\to\infty} |z|^3 \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{3n}$ será convergente, mientras que será divergente si la desigualdad es al revés. Esto indica que el radio de convergencia R de esta serie viene dado por

$$\frac{1}{R^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Más en general, cualquier otro criterio de convergencia de series de números reales positivos (por ejemplo el de la integral, o el de Raabe, o el de condensación de Cauchy, etc) puede usarse en las ocasiones apropiadas para determinar el radio de convergencia de una serie de potencias, si tenemos en cuenta que dicho radio está caracterizado, gracias al Teorema 3.1, como el supremo de los $r \geq 0$ tales que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ converge (o equivalentemente como el ínfimo de los $r > 0$ tales que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ diverge).

A continuación vemos que las funciones definidas por series de potencias son holomorfas en su disco de convergencia, y de hecho pueden derivarse término a término, tantas veces como uno desee.

Teorema 3.3. *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia* $R > 0$. *Entonces la función* $f : D(z_0, R) \to \mathbb{C}$ *definida por*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

es holomorfa en el disco abierto $D(z_0, R)$, *y*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Además la serie de potencias de $f'(z)$ *tiene el mismo radio de convergencia que la de* $f(z)$.

Demostración. Podemos suponer $z_0 = 0$. La afirmación sobre el radio de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$ se sigue del hecho de que $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$, luego

$$\limsup_{n\to\infty} |na_n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n},$$

y por el Teorema 3.1 esta serie tiene el mismo radio de convergencia que la de $f(z)$. Definamos entonces $g : D(0,R) \to \mathbb{C}$ por

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1},$$

y veamos que $f'(z) = g(z)$ para cada $z \in D(0,R)$. Fijemos $z \in D(0,R)$, y escojamos r tal que $|z| < r < R$. Escribamos

$$f(\xi) = S_N(\xi) + T_N(\xi),$$

donde

$$S_N(\xi) = \sum_{n=0}^{N} a_n \xi^n, \ \ T_N(\xi) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \xi^n,$$

y consideremos $h \in D(0, r - |z|)$, de forma que $|z+h| < r$. Tenemos entonces

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) = \tag{3.2}$$

$$\left(\frac{S_N(z+h) - S_N(z)}{h} - S_N'(z)\right) + \left(S_N'(z) - g(z)\right) + \left(\frac{T_N(z+h) - T_N(z)}{h}\right). \tag{3.3}$$

Vamos a estimar por separado cada una de estos tres términos. En primer lugar, usando que $a^n - b^n = (a-b)\sum_{j=0}^{n-1} a^{n-1-j} b^j$ con $a = z+h$ y $b = z$ obtenemos que

$$\left|\frac{T_N(z+h) - T_N(z)}{h}\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \frac{|(z+h)^n - z^n|}{|h|} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ya que $g(\xi)$ converge absoluta y uniformemente en $|\xi| \leq r$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{T_N(z+h) - T_N(z)}{h}\right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ para todo } N \geq N_1. \tag{3.4}$$

En segundo lugar, puesto que $\lim_{N\to\infty} S_N'(z) = g(z)$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|S_N'(z) - g(z)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ para todo } N \geq N_2. \tag{3.5}$$

Tomemos $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$. Puesto que la suma finita S_{N_0} es derivable, con $S_{N_0}'(z) = \sum_{n=1}^{N_0} na_n z^{n-1}$, podemos encontrar $\delta \in (0, r - |z|)$ tal que

$$\left|\frac{S_{N_0}(z+h) - S_{N_0}(z)}{h} - S_{N_0}'(z)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ siempre que } 0 < |h| \leq \delta. \tag{3.6}$$

Entonces, juntando (3.2), (3.4), (3.5) y (3.6), obtenemos que

$$\left|\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z)\right| \leq \varepsilon \text{ si } 0 < |h| \leq \delta,$$

lo que prueba que $f'(z)$ existe y es igual a $g(z)$. $\square$

Finalmente vamos a considerar brevemente el comportamiento de las funciones definidas por series de potencias respecto de las operaciones de suma y producto. Por un lado, es evidente que el conjunto de las series de potencias absolutamente convergentes en un disco $D(z_0, R)$ tiene una estructura de espacio vectorial, y que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-z_0)^n, \ \ \lambda\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n(z-z_0)^n.$$

El estudio del producto es menos trivial; requiere recordar un resultado de Análisis de Variable Real sobre producto de series de números reales, cuya demostración se extiende igualmente al caso de series de números complejos.

Teorema 3.4. *Sean $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ series de números complejos que convergen absolutamente (es decir tales que $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| < \infty$ y $\sum_{n=0}^{\infty} |w_n| < \infty$). Sea $(c_n)_{n\geq 0}$ cualquier enumeración del conjunto $\{z_j w_k \,:\, j, k \geq 0\}$. Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge absolutamente, y*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n\right).$$

En particular esto se cumple si tomamos $c_n = z_0 w_n + z_1 w_{n-1} + ... + z_{n-1} w_1 + z_n w_0$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demostración. La sucesión de los productos

$$q_N = \left(\sum_{n=0}^{N} z_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} w_n\right)$$

converge al producto de los límites de las sumas parciales de cada serie, $\left(\sum_{n=0}^{\infty} z_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n\right)$. Luego, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $N \geq N_1$ entonces

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} z_n \sum_{n=0}^{\infty} w_n - \sum_{n=0}^{N} z_j \sum_{n=0}^{N} w_k\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.7}$$

Análogamente la sucesión de los productos

$$p_N = \left(\sum_{n=0}^{N} |z_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{N} |w_n|\right)$$

converge al producto de los límites de las sumas parciales de cada serie, $\left(\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} |w_n|\right)$. En particular la sucesión $\{p_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, luego existe $N_2 \in \mathbb{N}$, que podemos suponer mayor o igual que N_1, tal que si $N, M \geq N_2$ entonces

$$\left|\sum_{n=0}^{M} |z_n| \sum_{n=0}^{M} |w_n| - \sum_{n=0}^{N} |z_n| \sum_{n=0}^{N} |w_n|\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.8}$$

Esto implica que, para cualquier subconjunto finito F de $\mathbb{N}$ se tiene

$$\sum_{j,k\in F,\, j\geq N_2 \text{ o } k\geq N_2} |z_j||w_k| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

y por tanto también

$$\sum_{j\geq N_2 \text{ o } k\geq N_2} |z_j||w_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.9}$$

Elijamos ahora $N_3 \geq N_2 \geq N_1$ suficientemente grande para que $\{c_1, ..., c_{N_3}\}$ contenga al conjunto $\{z_j w_k : j, k \leq N_2\}$. Entonces, para $N \geq N_3$, la diferencia de sumas

$$\sum_{n=0}^{N} c_n - \sum_{j=0}^{N_2} z_j \sum_{k=0}^{N_2} w_k$$

contiene exclusivamente términos de la forma $z_j w_k$ con $j > N_2$ o bien $k > N_2$, y por tanto (3.9) implica que

$$\left| \sum_{n=0}^{N} c_n - \sum_{j=0}^{N_2} z_j \sum_{k=0}^{N_2} w_k \right| \leq \sum_{j \geq N_2 \text{ o } k \geq N_2} |z_j||w_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.10}$$

Por tanto, si $N \geq N_3$, obtenemos, combinando (3.10) y (3.7), que

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} z_n \sum_{n=0}^{\infty} w_n - \sum_{n=0}^{N} c_n \right| \leq \left| \sum_{n=0}^{\infty} z_n \sum_{n=0}^{\infty} w_n - \sum_{n=0}^{N_2} z_j \sum_{n=0}^{N_2} w_k \right| + \left| \sum_{j=0}^{N_2} z_j \sum_{k=0}^{N_2} w_k - \sum_{n=0}^{N} c_n \right| \leq \varepsilon.$$

Aplicando este resultado con $|z_n|, |w_n|, |c_n|$ en lugar de z_n, w_n, c_n, se obtiene también la convergencia absoluta de la serie: $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$. $\square$

Como consecuencia sencilla de este resultado puede obtenerse (ver el ejercicio 3.9) que, si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

para todo $z \in D(z_0, R)$, entonces

$$(fg)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

para todo $z \in D(z_0, R)$, donde

$$c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + ... + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n.$$

3.1. Problemas

Problema 3.1. Sean $\{a_n\}_{n=1}^{N}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{N}$ dos sucesiones finitas de números complejos. Pongamos $B_0 = 0$ y $B_k = \sum_{n=1}^{k} b_n$ para $k = 1, 2, ..., N$. Demostrar la *fórmula de suma por partes*:

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n.$$

Problema 3.2. Demostrar el teorema de Abel: si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces

$$\lim_{r \to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Indicación: usar el ejercicio anterior.

Problema 3.3. Determinar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^2 z^n$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n+3n}(z-6)^n$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^n$ (usar la fórmula de Stirling);

5. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (z-3i)^n$;

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{1+2^n n^n} z^n$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{6} z^n$;

8. $\sum_{n=1}^{\infty} (2+(-1)^n)^n z^n$.

Problema 3.4. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de potencias centrada en el origen. Demostrar que para cada z_0 en su disco de convergencia f tiene una expansión en serie de potencias centrada en z_0.
Indicación: poner $z = z_0 + (z - z_0)$ y usar la fórmula del binomio.

Problema 3.5. ¿Qué funciones representan las siguientes series de potencias?

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$;

2. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$.

Problema 3.6. Demostrar lo siguiente:

1. La serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ no converge en ningún punto de la circunferencia unidad $|z| = 1$.

2. La serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$ converge en todo punto de la circunferencia unidad.

3. La serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ converge en todo punto de la circunferencia unidad, excepto en $z = 1$.

   Indicación: usar suma por partes.

Obsérvese que las tres series tienen radio de convergencia igual a 1.

Problema 3.7. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x > 0$, y $f(x) = 0$ si $x \leq 0$. Demostrar que $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, pero f no admite desarrollo en serie de potencias centrado en el origen.

Problema 3.8. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(2^n)^{\frac{1}{2}}} \cos(2^n x)\,.$$

Probar que $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ pero que, dado cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$, la función f no admite desarrollo en serie de potencias centrado en x_0. Es decir, f no es analítica entorno a ningún punto.

Problema 3.9. Supongamos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

para todo $z \in D(0, R)$. Demostrar que:

1. $(f+g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ para todo $z \in D(0, R)$.

2. $(fg)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ para todo $z \in D(0, R)$, donde

$$c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + ... + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n.$$

Problema 3.10. Si g es holomorfa en un entorno de 0 y $g(0) \neq 0$, hallar la representación en serie de potencias centrada en 0 de $1/g$, en términos de la de g.
Indicación: suponer $g(0) = 1$, escribir $g(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$, y expresar

$$\frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n}$$

como una serie geométrica.

Capítulo 4

Integración de funciones complejas sobre curvas

4.1. Curvas de clase C^1 a trozos en $\mathbb{R}^n$

Recordemos que una curva parametrizada de clase C^1 en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1, donde $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, tal que $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$. En particular está bien definido (y es no nulo) el vector tangente $\gamma'(t)$ a la curva γ en cada punto $\gamma(t)$ de la misma. Para $t = a$ entenderemos que existen y son iguales los límites

$$\gamma'_+(a) := \lim_{t \to a^+} \frac{\gamma(t) - \gamma(a)}{t - a} = \lim_{t \to a^+} \gamma'(t),$$

y que una condición análoga se da en $t = b$.

Se dice que una curva parametrizada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es *equivalente* a otra curva parametrizada $\sigma : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ si existe una biyección $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ de clase C^1 tal que $\varphi'(t) > 0$ y

$$\sigma(s) = \gamma(\varphi(s)) \text{ para todo } s \in [c, d].$$

Es inmediato comprobar que la relación

$$\gamma \mathcal{R} \sigma \iff \gamma \text{ es } \textit{equivalente} \text{ a } \sigma$$

es efectivamente una relación de equivalencia en el conjunto X de las curvas parametrizadas de clase C^1 en $\mathbb{R}^n$. El conjunto cociente $X/\mathcal{R}$ es lo que llamaremos el conjunto de las curvas orientadas de clase C^1 en $\mathbb{R}^n$. Cada curva orientada $\Gamma = [\gamma]$ de clase C^1 puede verse pues como la traza $\gamma[a, b]$ de una curva parametrizada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 que representa esta clase de equivalencia $[\gamma]$, con la orientación inducida por γ. Esa misma traza $\gamma[a, b]$ admite dos orientaciones: una es la dada por γ, que recorre $\gamma[a, b]$ empezando en $\gamma(a)$ y terminando en $\gamma(b)$, y la otra es la dada por la *curva opuesta a* γ, definida por $\gamma^- : [a, b] \to \mathbb{R}^n$,

$$\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t),$$

que recorre $\gamma[a, b]$ empezando en $\gamma(b)$ y terminando en $\gamma(a)$. La curva orientada de clase C^1 representada por esta curva opuesta γ^- se denotará

$$\Gamma^- = [\gamma^-].$$

Análogamente podemos definir curvas de clase C^1 a trozos. Diremos que una aplicación continua $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada de clase C^1 a trozos si existe $a = a_0 < a_1 < ... < a_m = b$ partición de $[a, b]$ tal que la restricción de γ a cada subintervalo $[a_j, a_{j+1}]$, $j = 0, 1, ..., m - 1$, define una curva parametrizada de clase C^1. En esta situación más general γ admite un único vector tangente

$\gamma'(t)$ en cada punto $\gamma(t)$ con $t \neq a_j$ para todo j, mientras que en los puntos $\gamma(a_j)$ tiene una *tangente a la izquierda* y otra *tangente a la derecha* de $\gamma(a_j)$, definidas respectivamente por los vectores

$$\gamma_-(a_j) := \lim_{t \to a_j^-} \frac{\gamma(t) - \gamma(a_j)}{t - a_j} \text{ y por } \gamma_+(a_j) := \lim_{t \to a_j^+} \frac{\gamma(t) - \gamma(a_j)}{t - a_j},$$

posiblemente diferentes.

Diremos que una curva parametrizada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 a trozos es *equivalente* a otra curva parametrizada $\sigma : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 a trozos si existen particiones $a = a_0 < a_1 < ... < a_m = b$ de $[a, b]$ y $c = c_0 < c_1 < ... < c_m = d$ de $[c, d]$ tales que la restricción $\gamma_{|_{[a_j, a_{j+1}]}}$ es una curva parametrizada de clase C^1 equivalente a la restricción $\sigma_{|_{[c_j, c_{j+1}]}}$, para cada $j = 0, 1, ..., n - 1$. De nuevo es inmediato comprobar que la relación

$$\gamma \mathcal{R} \sigma \iff \gamma \text{ es } \textit{equivalente} \text{ a } \sigma$$

es efectivamente una relación de equivalencia en el conjunto de las curvas parametrizadas de clase C^1 a trozos en $\mathbb{R}^n$. El conjunto cociente resultante es lo que llamaremos el conjunto de las curvas orientadas de clase C^1 a trozos en $\mathbb{R}^n$. Dada una curva orientada Γ de clase C^1 a trozos representada por una curva parametrizada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, definiremos Γ^- como la clase de equivalencia representada por $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$, $t \in [a, b]$.

Es claro que para cada curva parametrizada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 a trozos la función $\|\gamma'(t)\|$ es integrable en $[a, b]$ (al estar bien definida salvo en una cantidad finita $a_0, a_1, ..., a_m$ de puntos de $[a, b]$, y ser continua y acotada en $[a, b] \setminus \{a_0, ..., a_m\}$). Se define entonces la longitud de γ por

$$\text{long}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Es fácil comprobar usando el teorema del cambio de variable que si γ y σ son (curvas parametrizadas de clase C^1) equivalentes entonces $\text{long}(\gamma) = \text{long}(\sigma)$. También que $\text{long}(\gamma) = \text{long}(\gamma^-)$. Por tanto, dada una curva orientada Γ de clase C^1 a trozos puede definirse

$$\text{long}(\Gamma) = \text{long}(\gamma),$$

donde γ es cualquier parametrización suya, y se tiene que $\text{long}(\Gamma) = \text{long}(\Gamma^-)$.

Una operación que usaremos con relativa frecuencia es la *concatenación de curvas*. Si $\Gamma_1, ..., \Gamma_m$ son curvas de clase C^1 a trozos en $\mathbb{R}^n$ tales que el punto final de Γ_j coincide con el punto inicial de Γ_{j+1}, puede definirse una curva Γ que recorre de manera consecutiva las curvas $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$, y que por abuso de notación denotaremos $\Gamma = \Gamma_1 \cup ... \cup \Gamma_m$. Una parametrización de esta concatenación Γ es la siguiente: pueden encontrarse parametrizaciones $\gamma_1, ..., \gamma_m$ de $\Gamma_1, ..., \Gamma_m$ definidas respectivamente en intervalos $[a_1, b_1]$, ..., $[a_m, b_m]$ de tal manera que $b_j = a_{j+1}$, y por supuesto $\gamma_j(b_j) = \gamma_{j+1}(a_{j+1})$, y definirse entonces $\gamma : [a_1, b_m] \to \mathbb{R}^n$ por $\gamma(t) = \gamma_j(t)$ si $t \in [a_j, b_{j+1}]$. La curva Γ es entonces la clase de todas las curvas equivalentes a esta γ.

Recordemos por último tres conceptos más. Se dice que una curva orientada Γ de clase C^1 a trozos en $\mathbb{R}^n$ es:

- una curva cerrada en $\mathbb{R}^n$ si admite una parametrización $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$;
- una curva simple si admite una parametrización $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ que es inyectiva;
- una curva cerrada simple si admite una parametrización $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$ y la restricción de γ al intervalo $[a, b)$ es inyectiva.

4.2. Integración de funciones con valores en $\mathbb{R}^n$

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$. Diremos que una función $\varphi : A \to \mathbb{R}^n$ es integrable si lo son sus funciones coordenadas respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, es decir, si escribiendo $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ se tiene que cada φ_j es integrable en A, para $j = 1, ..., n$. Llamaremos integral de φ en A al vector

$$\int_A \varphi := \left(\int_A \varphi_1, ..., \int_A \varphi_n \right).$$

Teorema 4.1. *Si $\varphi, \psi : A \to \mathbb{R}^n$ son funciones integrables, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se cumple que*[1]*:*

1. *La función $\alpha\varphi + \beta\psi$ es integrable, y $\int_A (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int_A \varphi + \beta \int_A \psi$.*
2. $\| \int_A \varphi \| \leq \int_A \|f\|$.
3. *En el caso $d = 1$ y $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$ se tiene además, para cada función $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1, que $g(t) = g(a) + \int_a^t g'(s)ds$.*

Demostración. (1) es consecuencia directa de la definición y de la linealidad de la integral de funciones con valores en $\mathbb{R}$, y (3) se obtiene aplicando el teorema fundamental del cálculo coordenada a coordenada. Para demostrar (2), denotemos

$$x = (x_1, ..., x_n) = \left(\int_A \varphi_1, ..., \int_A \varphi_n \right) = \int_A \varphi.$$

Podemos suponer $x \neq 0$. Tenemos entonces, usando la linealidad de la integral de funciones con valores en $\mathbb{R}$ y la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^n$, que

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \int_A \varphi_j(t)dt = \int_A \sum_{j=1}^n x_j \varphi_j(t)dt \leq \int_A \|x\| \, \|\varphi(t)\|dt = \|x\| \int_A \|\varphi\|,$$

de donde deducimos (2) al dividir por $\|x\|$. □

Es también fácil comprobar, usando la propiedad (1), que la definición de $\int_A \varphi$ no depende de la base fijada en $\mathbb{R}^n$.

4.3. Integración de funciones complejas sobre curvas en $\mathbb{C}$

Al identificar $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$, todo lo dicho en la sección anterior se aplica inmediatamente a funciones $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$. Empleando la notación $\varphi(t) = x(t) + iy(t)$ en lugar de $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, una curva $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ es integrable en $[a, b]$, por definición, si y sólo si lo son sus funciones coordenadas x e y; en este caso definimos

$$\int_a^b \varphi(t)dt = \int_a^b x(t)dt + i \int_a^b y(t)dt.$$

Puesto que la norma del vector $(x(t), y(t))$ de $\mathbb{R}^2$ es igual al módulo del número complejo $z(t) = x(t) + iy(t)$, la propiedad (2) del teorema de la sección anterior implica que

$$\left| \int_a^b \varphi(t)dt \right| \leq \int_a^b |\varphi(t)|dt. \tag{4.1}$$

A continuación definimos la integral de una función compleja sobre una curva de clase C^1 a trozos.

[1] Aquí $\| \cdot \|$ es la norma euclídea en $\mathbb{R}^n$. El resultado de (2) es también cierto para cualquier otra norma en $\mathbb{R}^n$, pero una demostración basada en la misma idea requeriría usar el teorema de Hahn-Banach.

Definición 4.1. Sean $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función continua, y $\gamma : [a, b] \to \Omega$ una curva parametrizada de clase C^1 a trozos. Definimos la integral de f sobre γ por

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt, \tag{4.2}$$

que también denotaremos

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz.$$

Escribiendo $f = u + iv$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, obtenemos otra expresión equivalente para la integral $\int_\gamma f$:

$$\int_\gamma f = \int_a^b \big(u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\big)\, dt + i \int_a^b \big(u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)\big)\, dt.$$

Conviene subrayar que el producto que aparece en (4.2) es el producto complejo, no el producto escalar. Por tanto $\int_\gamma f$ es en general un número complejo, y *no es* la integral del campo vectorial f a lo largo de la curva γ en $\mathbb{R}^2$ (tal integral sería siempre un número real). También es importante evitar caer en el error de pensar que $|\int_\gamma f| \le \int_\gamma |f|$, lo cual sería absurdo porque el término de la derecha es en general un número complejo, mientras que el de la izquierda es un real positivo. Ni siquiera es cierta esta desigualdad aún suponiendo que ambos términos son reales, como muestra el ejemplo $f(z) = 1/z$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. No obstante, la tercera propiedad de $\int_\gamma f$ de las que enunciamos a continuación sirve en la práctica como sustituto de dicha desigualdad (que, insistimos, es falsa en general).

Teorema 4.2. *Sean $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funciones continuas, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, y $\gamma : [a, b] \to \Omega$ una curva parametrizada de clase C^1 a trozos. Se tiene que:*

1. $\int_\gamma (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_\gamma g + \beta \int_\gamma g$.
2. $\int_{\gamma^-} f = -\int_\gamma f$.
3. $\| \int_\gamma f \| \le \sup_{z \in \gamma[a,b]} |f(z)| \operatorname{long}(\gamma)$.

Demostración. La propiedad (a) se sigue fácilmente de la definición, mediante un cálculo directo y el uso de la linealidad de la integral de funciones con valores reales. La propiedad (b) también se comprueba muy fácilmente a partir de la definición y cambio de variable $s = a + b - t$. En cuanto a (c), se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned} &|\textstyle\int_\gamma f| = |\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt| \le \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|dt = \int_a^b |f(\gamma(t))|\, |\gamma'(t)|dt \\ &\le \textstyle\int_a^b \sup_{z \in \gamma[a,b]} |f(z)|\, |\gamma'(t)|dt = \sup_{z \in \gamma[a,b]} |f(z)| \int_a^b |\gamma'(t)|dt = \sup_{z \in \gamma[a,b]} |f(z)| \operatorname{long}(\gamma), \end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad hemos usado (4.1). □

Proposición 4.3. *Sean $\gamma : [a, b] \to \Omega$, $\sigma : [c, d] \to \Omega$ curvas parametrizadas de clase C^1 a trozos, y supongamos que γ y σ son equivalentes. Entonces, para toda función continua $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se tiene*

$$\int_\gamma f = \int_\sigma f.$$

Demostración. Haremos la demostración en el caso en que γ y σ son de clase C^1; la extensión al caso general es evidente y queda al cuidado del lector. Sea $\phi : [c, d] \to [a, b]$ biyectiva y de clase C^1 con $\phi'(t) > 0$ y tal que $\sigma(s) = \gamma(\phi(s))$. Entonces

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) = \int_c^d f(\gamma(\phi(s)))\gamma'(\phi(s))\phi'(s)ds = \int_c^d f(\sigma(s))\sigma'(s)ds = \int_\sigma f,$$

donde en la segunda igualdad hemos usado el cambio de variable $t = \phi(s)$ y en la tercera la regla de la cadena. □

En virtud de la proposición anterior podemos definir, para cada curva orientada Γ de clase C^1 a trozos contenida en $\mathbb{C}$, la integral de una función continua $f:\Gamma\to\mathbb{C}$ sobre la curva Γ por

$$\int_\Gamma f=\int_\gamma f,$$

en donde γ es cualquier parametrización de Γ. Las propiedades $(1)-(3)$ del teorema anterior tienen así análogos obvios para $\int_\Gamma f$. También es fácil ver que si $\Gamma=\Gamma_1\cup...\cup\Gamma_m$ es una concatenación de curvas en $\mathbb{C}$ tales que Γ_{j+1} comienza en el punto donde Γ_j acaba, se tiene

$$\int_\Gamma f=\sum_{j=1}^m\int_{\Gamma_j} f.$$

Definición 4.2. Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f:\Omega\to\mathbb{C}$. Se dice que una función $F:\Omega\to\mathbb{C}$ es una *primitiva* de f si F es holomorfa en Ω y $F'=f$.

En un ejercicio del capítulo anterior, como consecuencia de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, vimos que si Ω es un abierto conexo de $\mathbb{C}$, F es holomorfa en Ω, y $F'=0$, entonces F es constante. Se sigue inmediatamente que si una función f tiene una primitiva en un abierto conexo Ω de C, entonces dicha primitiva es única salvo constante aditiva.

Teorema 4.4. *Si una función continua f tiene una primitiva F en Ω y Γ es una curva de clase C^1 a trozos en Ω que comienza en w_1 y acaba en w_2, entonces*

$$\int_\Gamma f=F(w_2)-F(w_1).$$

En particular $\int_\Gamma f$ no depende de la curva Γ, sino sólamente de sus puntos inicial y final w_1 y w_2.

Demostración. Hagamos la demostración en el caso en que Γ es de clase C^1; la extensión al caso general será después obvia, y queda como ejercicio para el lector. Si $\gamma:[a,b]\to\Omega$ es una parametrización de Γ tenemos

$$\int_\Gamma f=\int_\gamma f=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt=\int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)=\int_a^b\frac{d}{dt}F(\gamma(t))=F(\gamma(b))-F(\gamma(a)),$$

donde en la cuarta igualdad hemos usado la Proposición 2.4, y en la quinta el Teorema 4.1(3). □

Corolario 4.5. *Si Γ es una curva cerrada en un abierto Ω de $\mathbb{C}$ y $f:\Omega\to\mathbb{C}$ es continua y tiene una primitiva en Ω, entonces*

$$\int_\Gamma f=0.$$

Se deduce del corolario anterior, por ejemplo, que la función $f(z)=1/z$ no tiene primitivas en $D(0,r)\setminus\{0\}$ para ningún $r>0$, ya que, si $C(0,r)$ es la circunferencia de centro 0 y radio r, orientada positivamente (es decir girando en el sentido contrario a las agujas del reloj) se tiene

$$\int_{C(0,r)}\frac{1}{z}dz=\int_0^{2\pi}\frac{1}{re^{it}}rie^{it}dt=\int_0^{2\pi}idt=2\pi i\neq 0.$$

Concluyamos esta introducción a la teoría de integración de funciones complejas sobre curvas con un resultado que nos será muy útil en el próximo capítulo.

Teorema 4.6 (Derivación compleja bajo el signo integral)**.** *Sean $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ abierto, Γ curva orientada de clase C^1 a trozos en Ω, y $\varphi:\Gamma\times\Omega\to\mathbb{C}$ continua tal que para cada $\xi\in\Gamma$ la función $z\mapsto\varphi(\xi,z)$ es* *holomorfa en Ω, y la función $(\xi, z) \mapsto \frac{\partial}{\partial z}\varphi(\xi, z)$ es continua en $\Gamma \times \Omega$. Entonces la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por*

$$g(z) = \int_\Gamma \varphi(\xi, z) d\xi$$

es holomorfa, con

$$g'(z) = \int_\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\xi, z) d\xi.$$

Demostración. Sean $z_0 \in \Omega$, y $r > 0$ tal que $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$. Para $|h| < r$, considerando el segmento $S = [z_0, z_0 + h] \subset \Omega$, parametrizado por ejemplo por $S_h(\tau) = z_0 + \tau h$, $\tau \in [0, 1]$, y aplicando el teorema anterior, tenemos que

$$\varphi(\xi, z_0 + h) - \varphi(\xi, z_0) = \int_{S_h} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\xi, z) dz = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\xi, S_h(\tau)) S_h'(\tau) d\tau = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\xi, z_0 + \tau h)\, h\, d\tau$$

para cada $\xi \in \Gamma$. Suponiendo que $\gamma : [a, b] \to \Omega$ es una parametrización de Γ tenemos entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(z_0 + h) - g(z_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_\Gamma (\varphi(\xi, z_0 + h) - \varphi(\xi, z_0))\, d\xi =$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_\Gamma \left(\int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\xi, z_0 + sh)\, h\, ds \right) d\xi = \lim_{h \to 0} \int_a^b \left(\int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\gamma(t), z_0 + sh) ds \right) \gamma'(t) dt =$$
$$\lim_{h \to 0} \int_{[0,1] \times [a,b]} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\gamma(t), z_0 + sh) \gamma'(t) ds dt = \int_{[0,1] \times [a,b]} \lim_{h \to 0} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\gamma(t), z_0 + sh) \gamma'(t) ds dt =$$
$$\int_{[0,1] \times [a,b]} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\gamma(t), z_0) \gamma'(t) ds dt = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\gamma(t), z_0) \gamma'(t) dt = \int_\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\xi, z) d\xi,$$

donde en la cuarta igualdad hemos usado el teorema de Fubini y en la quinta el intercambio de integral y límite se justifica porque al ser $\partial\varphi/\partial z$ continua en el compacto $\Gamma \times \overline{D}(z_0, r)$ es uniformemente continua en este conjunto y por tanto

$$\lim_{h \to 0} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\gamma(t), z_0 + sh) \gamma'(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\gamma(t), z_0) \gamma'(t)$$

uniformemente en $(s, t) \in [0, 1] \times [a, b]$. □

Corolario 4.7. *Sean $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Para todo $z \in D(z_0, r)$ se tiene que*

$$\int_{\partial D(z_0, r)} \frac{1}{\xi - z} d\xi = 2\pi i,$$

donde $\partial D(z_0, r)$ es el borde del disco $D(z_0, r)$, orientado positivamente.

Demostración. La función $\varphi : \partial D(z_0, r) \times (\mathbb{C} \setminus \partial D(z_0, r)) \to \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(\xi, z) = \frac{1}{\xi - z}$$

es continua, y su derivada respecto de z es

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(\xi, z) = \frac{1}{(\xi - z)^2},$$

que es continua en el dominio de φ. Por el teorema anterior deducimos que la función

$$f(z) = \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{1}{\xi - z} d\xi$$

es holomorfa en $D(z_0, r)$, con
$$f'(z) = \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{1}{(\xi - z)^2} d\xi.$$
Pero esta integral es nula para cada $z \in D(z_0, r)$, por ser la integral en una curva cerrada de la función $\xi \mapsto 1/(\xi - z)^2$, que es continua y tiene una primitiva (a saber, la función $\xi \mapsto -1/(\xi - z)$) en un entorno abierto de dicha curva. Puesto que $D(z_0, r)$ es un abierto conexo, se sigue que f es constante en este disco, y como
$$f(z_0) = \int_{|\xi - z_0| = r} \frac{1}{\xi - z_0} d\xi = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i,$$
se concluye que $f(z) = 2\pi i$ para todo $z \in D(z_0, r)$. □

4.4. Problemas

Problema 4.1. Calcular las integrales $\int_\gamma f$ en los siguientes casos:

1. $f(z) = 1/z$, y γ la circunferencia unidad, orientada en el sentido contrario a las agujas del reloj (orientación positiva).
2. $f(z) = z/(z^2 + 6)$, y γ el triángulo de vértices $1, i, -i$, orientado en el sentido de las agujas del reloj (orientación negativa).
3. $f(z) = \overline{z}/(z + 6)$, y γ el rectángulo de vértices $\pm 9 \pm i$, orientado positivamente.

Problema 4.2. Sean $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$ curvas C^1 a trozos tales que el punto final de Γ_j es igual al punto inicial de Γ_{j+1}, y definamos $\Gamma = \Gamma_1 \cup ... \cup \Gamma_n$ (recorrida en el orden natural, es decir, Γ_j antes que Γ_{j+1}). Comprobar que
$$\int_\Gamma f = \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} f.$$

Problema 4.3. Demostrar que si Ω es un abierto conexo de $\mathbb{R}^n$ entonces para todo $x, y \in \Omega$ existe γ curva de clase C^1 a trozos que une x con y.

Problema 4.4. Demostrar que la curva γ del ejercicio anterior puede tomarse siempre de clase C^∞ (y con $\gamma'(t) \neq 0$ para todo t).

Problema 4.5. Sea γ una curva C^1 a trozos en $\mathbb{C}$, sea $\Gamma \subset \mathbb{C}$ la traza de γ, y sea (f_n) una sucesión de funciones continuas $f_n : \Gamma \to \mathbb{C}$ tales que (f_n) converge uniformemente en Γ a una función f. Demostrar que
$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n = \int_\gamma f.$$

Problema 4.6. Sean Ω abierto de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua, $\gamma : [a, b] \to \Omega$ de clase C^1, y (γ_n) una sucesión de curvas $\gamma_n : [a, b] \to \Omega$ de clase C^1 tales que $\lim_{n\to\infty} \gamma_n(t) = \gamma(t)$ y $\lim_{n\to\infty} \gamma_n'(t) = \gamma'(t)$ uniformemente en $t \in [a, b]$. Demostrar que
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} f = \int_\gamma f.$$

Problema 4.7. Sea $F : [0, 1] \times \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua, donde Ω es un abierto de $\mathbb{C}$, y sea $\gamma : [a, b] \to \Omega$ una curva de clase C^1 a trozos. Probar que la función $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{C}$ definida por
$$\varphi(t) = \int_\gamma F(t, z) dz$$
es continua.

Capítulo 5

Teoría local de Cauchy

En este capítulo estudiaremos los dos teoremas más importantes del curso: el teorema de Cauchy, que dice que si f es holomorfa en un abierto convexo Ω entonces

$$\int_\Gamma f = 0$$

para toda curva cerrada simple de clase C^1 a trozos $\Gamma \subset \Omega$, y la fórmula integral de Cauchy, que nos dice que para cualquier disco cerrado $\overline{D}(z_0, r)$ contenido en Ω se tiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

para todo $z \in D(z_0, r)$, donde el borde del disco está orientado positivamente. Entre las numerosas consecuencias de estos resultados (algunas de las cuales estudiaremos en la parte final del capítulo) hay muchas que son también fundamentales, y en muchos casos sorprendentes.

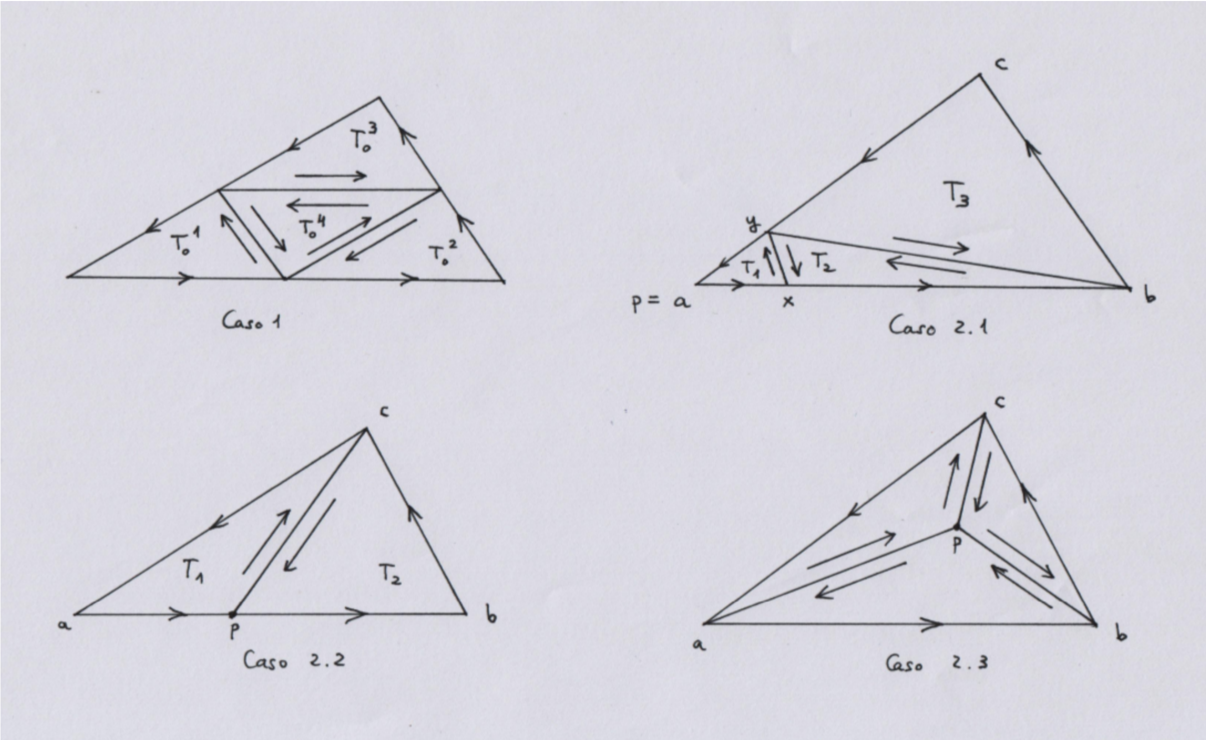
5.1. El teorema de Cauchy-Goursat

El primer paso para alcanzar los resultados que hemos mencionado será la siguiente versión del teorema de Cauchy para el caso especial de un triángulo, aunque válida bajo una hipótesis formalmente más débil (porque sólo exigimos que la función sea holomorfa en Ω menos un punto p, aunque en realidad más adelante veremos que una función continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$ es siempre holomorfa en todo Ω).

Teorema 5.1 (Goursat)**.** *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, T un triángulo en Ω cuya región interior también está contenida en Ω, $p \in \Omega$, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua tal que f es holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$. Entonces*

$$\int_T f = 0.$$

Demostración. Denotemos $T = T_0$, el triángulo dado, con vértices $a, b, c \in \mathbb{C}$, y sea $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0$ la unión de T con la región interior a T (es decir el triángulo sólido), con borde $\partial\mathcal{T} = T$. Podemos suponer que T está orientado positivamente, y que sus lados se recorren en este orden : $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, a]$. Consideraremos varios casos.
Caso 1: supongamos que $p \notin \mathcal{T}$**.** Uniendo los puntos medios de los lados $[a, b]$, $[b, c]$ y $[c, a]$ obtenemos un triangulo que denotamos T_0^4, que a su vez divide $\mathcal{T}_0^0$ en cuatro subtriángulos sólidos $\mathcal{T}_0^j$ con bordes T_0^j, $j = 1, 2, 3, 4$, cuyos perímetros son la mitad del perímetro del triángulo original T. Elijamos en los triángulos T_0^j con $1 \leq j \leq 3$ las orientaciones inducidas por la orientación de T, y orientemos cada



lado de T_0^4 de forma opuesta a la del mismo lado considerado como lado de T_0^j para algún $j = 1, 2, 3$ (equivalentemente, orientamos todos los triángulos T_0^j de forma positiva); ver la figura. Entonces se tiene

$$\int_T f = \sum_{j=1}^{4} \int_{T_0^j} f,$$

puesto que las integrales de la suma de la derecha se cancelan mutuamente en cada lado de T_0^4.

Debe existir al menos un $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ tal que

$$\left| \int_{T_0^j} f \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{T_0} f \right|$$

(ya que de lo contrario tendríamos $|\int_{T_0} f| = |\sum_{j=1}^{4} \int_{T_0^j} f| < \sum_{j=1}^{4} \frac{1}{4} |\int_{T_0} f| = |\int_{T_0} f|$, lo que es absurdo). Ejijamos pues un T_0^j para el que se cumpla la desigualdad anterior y llamémoslo T_1, denotando por $\mathcal{T}_1$ la región interior a T_1 junto con el propio T_1. Repitamos ahora el argumento anterior cambiando T_0 por T_1: dividimos $\mathcal{T}_1$ en cuatro subtriángulos sólidos $\mathcal{T}_1^j$ con bordes T_1^j, $j = 1, 2, 3, 4$, cuyos perímetros serán ahora un cuarto del perímetro del triángulo original T. Elegimos uno de los cuatro triángulos T_1^j para el que se tenga

$$\left| \int_{T_1^j} f \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{T_1} f \right|,$$

y por tanto también

$$\left| \int_{T_1^j} f \right| \geq \frac{1}{4^2} \left| \int_{T} f \right|,$$

llamamos T_2 a este triángulo, denotamos $\mathcal{T}_2$ la región interior a T_2 junto con T_2, y volvemos a dividir $\mathcal{T}_2$ uniendo los puntos medios de los lados de T_2. Reiterando este proceso obtenemos por inducción una sucesión $\mathcal{T}_j$, $j = 0, 1, 2, ...$ de triángulos sólidos con bordes T_j tales que:

1. $\mathcal{T}_j \subset \mathcal{T}_{j-1}$ para cada $j \in \mathbb{N}$, con $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}$;

2. $|\int_T f| \leq 4^j |\int_{T_j} f|$;

3. $2^j \text{long}(T_j) = \text{long}(T)$.

En particular, como el perímetro de un triángulo es mayor o igual que su diámetro, se tiene que $\{\mathcal{T}_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una familia de compactos encajados en $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ cuyos diámetros tienden a cero, y por tanto existe un único punto z_0 tal que

$$z_0 \in \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathcal{T}_j.$$

Puesto que estamos suponiendo que $p \notin \mathcal{T}$, la función f es holomorfa en z_0 y por tanto, dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| \leq \delta$ entonces

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0|.$$

Por otro lado, como $\lim_{j\to\infty} \text{long}(T_j) = 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $j \geq j_0$ entonces $\text{long}(T_j) < \delta$, luego $|z - z_0| \leq \delta$ para todo $z \in \mathbb{T}_j$, de donde deducimos que, para $j \geq j_0$ es

$$\begin{aligned}\left|\int_{T_j} f\right| &= \left|\int_{T_j} \big(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\big)\, dz\right| \\ &\leq \varepsilon \sup_{z\in T_j} |z - z_0| \,\text{long}(T_j) \leq \varepsilon \text{long}(T_j)^2 = \frac{\varepsilon}{4^j} \text{long}(T)^2,\end{aligned}$$

donde en la primera igualdad hemos usado que $\int_{T_j} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0))\, dz = 0$ por ser la integral en una curva cerrada de una función que tiene primitiva; en la segunda desigualdad hemos vuelto a usar que el diámetro de un triángulo es menor o igual que su perímetro, y en la última igualdad hemos utilizado la propiedad (3) de la sucesión de triángulos. Combinando la desigualdad anterior con la propiedad (2) de la sucesión de triángulos obtenemos que

$$\frac{1}{4^j}\left|\int_T f\right| \leq \left|\int_{T_j}\right| \leq \frac{\varepsilon}{4^j} \text{long}(T)^2,$$

y por tanto

$$\left|\int_T f\right| \leq \varepsilon \,\text{long}(T)^2.$$

Haciendo $\varepsilon \to 0$ concluimos que $\int_T f = 0$.

Caso 2: supongamos que $p \in \mathcal{T}$**.** Distinguiremos a su vez tres subcasos.
Caso 2.1: supongamos que p **es un vértice de** T**.** Podemos suponer además $a = p$; recordemos que a, b, c denotan los vértices de T. Como f es continua en el compacto T, existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in T$. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos dos puntos $x \in [a, b]$, $y \in [c, a]$ tales que la longitud del triángulo T_1 de vértices a, x, y sea menor que ε/M. Denotemos por T_2 el triángulo de vértices x, b, y, y por T_3 el de vértices b, c, y, con las orientaciones inducidas por la de T. Por lo demostrado en el caso 1, tenemos

$$\int_{T_2} f = 0 = \int_{T_3} f.$$

Luego

$$\left|\int_T f\right| = \left|\sum_{j=1}^{3} \int_{T_j} f\right| = \left|\int_{T_1} f\right| \leq M \text{long}(T_1) \leq \varepsilon,$$

y haciendo $\varepsilon \to 0$ se deduce que $\int_T f = 0$.

Caso 2.2: supongamos que p está en un lado de T. Digamos por ejemplo que $p \in [a, b]$. Sean T_1 el triángulo de vértices a, p, c, y T_2 el triángulo de vértices p, b, c. Se tiene entonces, usando el caso anterior que

$$\int_T f = \int_{T_1} f + \int_{T_2} f = 0 + 0 = 0.$$

Caso 2.3: supongamos por último que p está en la región interior a $\mathcal{T}$. Definamos T_1 como el triángulo de vértices a, p, c; T_2 el de vértices a, b, p; y T_3 el de vértices b, c, p. Usando de nuevo el caso 2.1 tenemos

$$\int_T f = \sum_{j=1}^{3} \int_{T_j} f = 0 + 0 + 0 = 0.$$

$\square$

Teorema 5.2 (Existencia de primitivas en abiertos convexos)**.** *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto convexo, $p \in \Omega$, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua tal que f es holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$. Entonces existe $F : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $F' = f$.*

Demostración. Fijemos un punto $z_0 \in \Omega$, y definamos la función $F : \Omega \to \mathbb{C}$ por

$$F(z) = \int_{[z_0, z]} f,$$

donde $[z_0, z]$ es el segmento que une z_0 con z, orientado en la dirección de $z - z_0$, Nótese que para cada $z \in \Omega$ se tiene $[z_0, z] \subset \Omega$ gracias a la convexidad de Ω y por tanto F está bien definida. Fijemos ahora $z \in \Omega$, y tomemos $r > 0$ tal que $D(z, r) \subset \Omega$. Para cada $h \in \mathbb{C}$ con $|h| < r$ se tiene, gracias de nuevo a la convexidad de Ω, que el triángulo $T_{z,h}$ de vértices $z_0, z, z + h$, así como su región interior, está contenido en Ω. Por el teorema de Goursat tenemos pues

$$\int_{T_{z,h}} f = 0,$$

y esto equivale a decir que

$$\int_{[z_0, z]} f + \int_{[z, z+h]} f + \int_{[z+h, z_0]} f = 0,$$

lo que a su vez implica que

$$F(z + h) - F(z) = \int_{[z, z+h]} f(\xi) d\xi.$$

Por tanto, observando que $f(z)h = \int_{[z,z+h]} f(z) d\xi$, tenemos

$$|F(z+h) - F(z) - f(z)h| = \left| \int_{[z,z+h]} (f(\xi) - f(z)) d\xi \right| \leq$$
$$\sup_{\xi \in [z,z+h]} |f(\xi) - f(z)| \operatorname{long}([z, z+h]) = \sup_{\xi \in [z,z+h]} |f(\xi) - f(z)| \, |h| = o(h),$$

ya que $\lim_{h \to 0} \sup_{\xi \in [z,z+h]} |f(\xi) - f(z)| = 0$ por ser f continua en z. Esto prueba que existe $F'(z)$ y es igual a $f(z)$. $\square$

Obsérvese que la demostración anterior funciona igual si se cambia la hipótesis de que f sea holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$ por la de que $\int_T f = 0$ para cada triángulo $T \subset \Omega$.

Teorema 5.3 (Teorema integral de Cauchy, versión 1.0)**.** *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto convexo, $p \in \Omega$, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua tal que f es holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$. Entonces, para toda curva cerrada Γ en Ω se tiene que*

$$\int_\Gamma f = 0.$$

Demostración. Por el teorema anterior existe $F : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $F' = f$ en Ω. Entonces, al ser Γ una curva cerrada se tiene $\int_\Gamma f = 0$. $\square$

5.2. La fórmula integral de Cauchy y la analiticidad de las funciones holomorfas

A continuación estudiaremos la fórmula integral de Cauchy, que tiene una cantidad ingente de consecuencias importantísimas, una de las cuales es que toda función compleja, si es derivable una vez en un abierto, entonces es derivable infinitas veces, y de hecho analítica, en dicho abierto.

Teorema 5.4 (Fórmula integral de Cauchy)**.** *Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa. Entonces, para cada disco cerrado D contenido en Ω se tiene que*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

donde el borde ∂D de D está orientado positivamente, para todo $z \in$ int(D).

Demostración. Cambiando Ω por un disco abierto ligeramente mayor que D contenido en Ω, podemos suponer sin pérdida de generalidad que Ω es convexo. Fijemos $z \in \text{int}(D)$ y definamos $g : \Omega \to \mathbb{C}$ por

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} \text{ si } w \neq z, \\ f'(z) \text{ si } w = z. \end{cases}$$

Es claro que g es continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{z\}$. Por el teorema anterior tenemos entonces

$$\int_{\partial D} g(w)dw = 0,$$

es decir

$$\int_{\partial D} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = 0,$$

luego

$$f(z)2\pi i = f(z)\int_{\partial D} \frac{1}{w - z} dw = \int_{\partial D} \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

donde en la primera igualdad hemos usado el Corolario 4.7. □

Corolario 5.5 (Propiedad del valor medio)**.** *Si f es holomorfa en un entorno abierto de $\overline{D}(z_0, r)$ entonces*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta.$$

Demostración. La prueba se reduce a calcular la integral $\int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}$ y aplicar el teorema anterior con $z = z_0$. □

Combinando este Corolario con los problemas sobre funciones armónicas del Capítulo 2, obtenemos también lo siguiente.

Corolario 5.6 (propiedad del valor medio de las funciones armónicas)**.** *Si u es armónica en un entorno abierto de $\overline{D}(z_0, r)$ entonces*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})d\theta.$$

A partir de la fórmula integral de Cauchy y usando el Teorema de derivación bajo el signo integral podemos demostrar que una función holomorfa tiene infinitas derivadas, y encontrar una fórmula de estilo parecido para estas derivadas.

Teorema 5.7 (Fórmulas integrales de Cauchy para las derivadas)**.** *Sean* Ω *un abierto de* $\mathbb{C}$*, y* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorfa. Entonces su derivada* f' *también es holomorfa, y en particular continua. De hecho* f *tiene derivadas de todos los órdenes, y si* D *es un disco cerrado contenido en* Ω*, la derivada* n*-ésima de* f *satisface*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

para todo $z \in$ *int*(D) *y todo* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demostración. Por inducción. Para $n = 0$ el enunciado es cierto: se reduce a la fórmula integral de Cauchy. Supongamos que la fórmula es válida para n; entonces aplicando el Teorema de derivación bajo el signo integral obtenemos

$$f^{(n+1)}(z) = \frac{d}{dz} f^{(n)}(z) = \frac{d}{dz} \left(\frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \right) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{d}{dz} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$
$$= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{(n+1) f(\xi)}{(\xi - z)^{n+2}} d\xi = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+2}} d\xi,$$

luego por el principio de inducción el enunciado y la fórmula son válidos para cualquier $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. □

Corolario 5.8 (Desigualdades de Cauchy)**.** *Si* f *es holomorfa en un abierto de* $\mathbb{C}$ *que contiene un disco cerrado* $D = \overline{D}(z_0, R)$*, entonces*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{R^n} \sup_{z \in \partial D} |f(z)|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Aplicando el teorema anterior obtenemos

$$|f^{(n)}(z_0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it}) Rie^{it}}{(z_0 + Re^{it} - z_0)^{n+1}} dt \right| \leq$$
$$\frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(z_0 + Re^{it}) Rie^{it}}{(Re^{it})^{n+1}} \right| dt = \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + Re^{it})| R}{R^{n+1}} dt \leq \frac{n!}{R^n} \sup_{z \in \partial D} |f(z)|.$$

□

Se deduce inmediatamente de este corolario, aplicando el criterio de la raíz, que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

tiene radio de convergencia mayor o igual que el radio de cualquier disco cerrado contenido en z_0. A continuación vemos que de hecho esta serie converge a la propia función $f(z)$ uniformemente en cualquiera de dichos discos. Es decir, que toda función holomorfa es analítica.

Teorema 5.9 (Analiticidad de las funciones holomorfas)**.** *Sean* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *abierto y* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorfa. Entonces, para cada disco cerrado* $D = \overline{D}(z_0, R)$ *contenido en* Ω*, la función* f *tiene una expansión en serie de potencias centrada en* z_0

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

que converge a $f(z)$ *uniformemente en* $z \in D$.

Demostración. Fijemos $z \in \operatorname{int}(D)$. Para cada $\xi \in \partial D$ se tiene

$$\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{R} < 1,$$

y por tanto la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n = \frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)}$$

converge, uniformemente en $\xi \in \partial D$. Esto implica que

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}},$$

uniformemente en $\xi \in \partial D$. Por tanto, usando las fórmulas integrales de Cauchy obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(\xi) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right) d\xi$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\partial D} \frac{f(\xi)(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right) (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

donde el intercambio de suma infinita e integral se justifica gracias a la convergencia uniforme de la suma en $\xi \in \partial D$. Esto prueba que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

converge a $f(z)$ para cada $z \in \operatorname{int}(D)$. Como el mismo argumento vale cambiando $\overline{D}(z_0, R)$ por $\overline{D}(z_0, R + \varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que el disco $\overline{D}(z_0, R + \varepsilon)$ siga estando contenido en Ω, es obvio que la serie también converge a $f(z)$ para $z \in \partial D$. Finalmente, para dicho ε, de las desigualdades de Cauchy se deduce que

$$\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right|^{1/n} \leq \frac{C^{1/n}}{(R + \varepsilon)},$$

donde $C = \sup_{z \in \partial D(z_0, R+\varepsilon)} |f(z)|$ puede suponerse positivo, luego

$$\frac{1}{\limsup_{n \to \infty} \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right|^{1/n}} \geq \lim_{n \to \infty} \frac{R + \varepsilon}{C^{1/n}} = R + \varepsilon,$$

y por tanto aplicando el teorema de Hadamard se deduce que la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

tiene radio de convergencia mayor o igual que $R + \varepsilon$, y en particular converge uniformemente en el disco cerrado $\overline{D}(z_0, R)$. $\square$

El teorema anterior, combinado con el de Hadamard, nos da inmediatamente el suguiente resultado:

Corolario 5.10. *El radio de convergencia de la serie de potencias centrada en z_0,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n,$$

de una función holomorfa f en un abierto Ω de $\mathbb{C}$ viene dado por $\sup\{r > 0 \,:\, D(z_0, r) \subset \Omega\}$*; es decir, es el radio del mayor disco abierto de centro z_0 que esté contenido en Ω.*

En particular se tiene que si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa entonces para todo $z \in \mathbb{C}$ es

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n,$$

y la serie de potencias tiene radio de convergencia infinito. Esto puede usarse por ejemplo para deducir fácilmente las siguientes fórmulas para las funciones exponencial, seno y coseno complejas:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad \operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

Otra consecuencia del teorema anterior es:

Corolario 5.11. *Sean $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfas, donde Ω es un abierto conexo de $\mathbb{C}$. Supongamos que para algún $z_0 \in \Omega$ se tiene que $f(z_0) = g(z_0)$ y que $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $f = g$ en Ω.*

Demostración. Considerando la diferencia $f - g$ basta probar el resultado en el caso especial en que $g = 0$. Consideremos el subconjunto U de Ω definido por

$$U = \{z \in \Omega \,:\, f(z) = 0 \text{ y } f^{(n)}(z) = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Por hipótesis $z_0 \in U$, luego $U \neq \emptyset$. Puesto que f y sus derivadas son continuas, es claro que U es un cerrado relativo a Ω. Por otro lado, si $w_0 \in U$ entonces $f(w_0) = 0 = f^{(n)}(w_0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y aplicando el teorema anterior tenemos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(w_0)}{n!}(z - w_0)^n = 0$$

para todo z en un disco abierto $D(w_0, r)$ que esté contenido en Ω. Se deduce entonces que $f(z) = 0 = f^{(n)}(z)$ para todo z en dicho disco y todo $n \in \mathbb{N}$, luego $D(w_0, r) \subset U$. Esto prueba que U es abierto. Como U es abierto no vacío y cerrado relativo a Ω, que es conexo, se concluye que $U = \Omega$ y por tanto $f = 0$ en Ω. □

5.3. Más consecuencias

Otra consecuencia muy importante de la analiticidad de las funciones holomorfas es que una pequeña parte de la función determina la totalidad: si dos funciones holomorfas definidas en un mismo abierto conexo Ω coinciden en un conjunto con algún punto de acumulación dentro de Ω, entonces son iguales.

Teorema 5.12 (de identidad)**.** *Sean Ω abierto conexo de $\mathbb{C}$, y $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ funciones holomorfas. Supongamos que existe un subconjunto E de Ω que tiene algún punto de acumulación dentro de Ω y tal que $f = g$ en E. Entonces $f = g$ en todo Ω.*

Demostración. Cambiando f por $f-g$ podemos suponer que $g=0$. También podemos suponer que E es una sucesión (z_n) que converge a un punto $z_0 \in \Omega$, y tal que $f(z_n)=0$ y $z_n \neq z_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como f es holomorfa en Ω, si tomamos $R>0$ tal que $\overline{D}(z_0,R) \subset \Omega$, sabemos que

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

para todo $z \in D(z_0,R)$, donde

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Afirmamos que $f(z)=0$ para todo $z \in D(z_0,R)$. En efecto, supongamos que f no fuera idénticamente 0 en este disco. Entonces existiría algún n tal que $a_n \neq 0$. Llamemos m al primero de tales números naturales. Entonces tendríamos que

$$f(z)=\sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = (z-z_0)^m \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k = (z-z_0)^m g(z),$$

donde $b_j = a_{m+j}$ para cada $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y $g(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k$. Puesto que $b_0 = a_m \neq 0$, por continuidad de g existiría $r>0$ tal que $g(z) \neq 0$ si $z \in D(z_0,r)$. Pero entonces $f(z)=(z-z_0)^n g(z) \neq 0$ si $z \in D(z_0,r) \setminus \{z_0\}$, y esto contradice que $f(z_n)=0$ y $z_n \neq z_0$ para todo n, con $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$.

Por tanto f es idénticamente nula en $D(z_0,R)$, y como este conjunto es abierto se deduce que todas las derivadas de f se anulan en z_0, y por supuesto también $f(z_0)=0$. Entonces el Corolario 5.11 nos dice que $f=0$ en todo el abierto conexo Ω. □

Corolario 5.13 (Principio de permanencia de las ecuaciones funcionales)**.** *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto conexo, $E \subset \Omega$ un subconjunto con algún punto de acumulación dentro de Ω, y $F: \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ tal que las funciones $\Omega \ni z \mapsto F(z,w)$ y $\Omega \ni w \to F(z,w)$ son holomorfas para cada $w \in \Omega$ y cada $z \in \Omega$ respectivamente. Supongamos que $F(z,w)=0$ para todos los $z,w \in E$. Entonces $F(z,w)=0$ para todos los $z,w \in \Omega$.*

Demostración. Fijemos en primer lugar $z_0 \in E$. Como la función $w \mapsto F(z_0,w)$ es holomorfa y se anula en E, por el teorema anterior tenemos que $F(z_0,w)=0$ para todo $w \in \Omega$.

Fijemos ahora un punto $w \in \Omega$ cualquiera. Sabemos que $F(z_0,w)=0$, donde $z_0 \in E$ es arbitrario. Es decir, sabemos que la función $z \mapsto F(z,w)$ se anula en E, y es holomorfa. Por el teorema anterior deducimos que $F(z,w)=0$ para todo $z \in \Omega$. Y como $w \in \Omega$ es arbitrario, se concluye que $F(z,w)=0$ para todos $z,w \in \Omega$. □

Utilizando el teorema anterior se deduce inmediatamente la validez de las siguientes igualdades

$$\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w \tag{5.1}$$
$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w \tag{5.2}$$
$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1 \tag{5.3}$$

para todos $z,w \in \mathbb{C}$, a partir de las correspondientes igualdades para números reales.

A continuación probamos un teorema de Liouville que nos dice que no hay funciones enteras y acotadas que no sean constantes, y como consecuencia directa obtenemos una breve demostración del teorema fundamental del álgebra.

Teorema 5.14 (de Liouville)**.** *Si $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa y acotada entonces f es constante.*

Demostración. Puesto que $\mathbb{C}$ es abierto y conexo, basta probar que $f'=0$. Esto es consecuencia de las desigualdades de Cauchy: dados cualesquiera $z_0 \in \mathbb{C}$, $R>0$, sabemos que

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{R^n} \sup_{z \in \partial D(z_0,R)} |f(z)|.$$

En particular, para $n = 1$, usando que f está acotada en $\mathbb{C}$, tenemos

$$|f'(z_0)| \leq \frac{\|f\|_\infty}{R},$$

y haciendo $R \to \infty$ obtenemos que $f'(z_0) = 0$. □

Corolario 5.15 (Teorema fundamental del álgebra). *Todo polinomio $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con coeficientes complejos y de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n raíces (posiblemente repetidas, contadas con su multiplicidad).*

Demostración. Supongamos que P no tenga ninguna raíz en $\mathbb{C}$. Entonces la función

$$f(z) = \frac{1}{P(z)},\ z \in \mathbb{C}$$

está bien definida y es holomorfa en $\mathbb{C}$. Es inmediato comprobar que

$$\lim_{|z| \to \infty} f(z) = 0,$$

y junto con la continuidad de f esto implica que f está acotada en $\mathbb{C}$. Pero entonces, por el teorema anterior, f es constante, luego P también lo es, y esto contradice que p sea de grado mayor o igual que uno.

Por tanto P tiene al menos una raíz; llamémosla z_1. Entonces P se puede factorizar en la forma $P(z) = (z - z_1)Q_1(z)$, donde Q_1 es un polinomio de grado $n - 1$. Si $n = 1$ hemos acabado. En caso contrario, aplicamos el argumento anterior a Q_1 para obtener $z_2 \in \mathbb{C}$ tal que $Q_1(z_2) = 0$. En particular $Q_1(z) = (z - z_2)Q_2(z)$, donde Q_2 es un polinomio de grado $n - 2$, y se tiene por tanto

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)Q_2(z).$$

Reiterando el argumento $n - 2$ veces llegamos a que

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n)Q_n,$$

donde Q_n es una constante. □

Por último estudiaremos el teorema de Morera, un recíproco del teorema de Cauchy que tiene consecuencias directas muy relevantes en relación con las propiedades de las sucesiones de funciones holomorfas.

Teorema 5.16 (Morera). *Sean Ω abierto de $\mathbb{C}$, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua. Supongamos que*

$$\int_T f = 0$$

para todo triángulo T contenido en Ω cuya región interior también está contenida en Ω. Entonces f es holomorfa en Ω.

Demostración. Supongamos primero que Ω es convexo. Entonces, como se observó después de la demostración del Teorema 5.2, la misma demostración de ese resultado (cambiando la utilización del teorema de Goursat por la presente hipótesis) sirve para probar que existe $F : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $F' = f$. Pero como ahora sabemos que las funciones holomorfas tienen derivadas holomorfas (de todos los órdenes), deducimos que $F' = f$ es holomorfa.

En el caso general en que Ω no es necesariamente convexo, para cada $z_0 \in \Omega$ consideramos un disco abierto $D(z_0, r)$ contenido en Ω. Entonces, puesto que este disco es convexo, el argumento anterior prueba que f es holomorfa en $D(z_0, r)$. Como z_0 es arbitrario se deduce que f es holomorfa en todo el abierto Ω. □

Teorema 5.17. *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones holomorfas en un abierto Ω de $\mathbb{C}$, $f:\Omega\to\mathbb{C}$ una función, y supongamos que (f_n) converge a f, uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω. Entonces f es holomorfa.*

Demostración. Observemos primero que f es continua en Ω, por ser límite uniforme de funciones continuas en cada subconjunto compacto de Ω, y en particular en cada disco cerrado contenido en Ω. Sea D un disco abierto contenido en Ω, y sea T un triángulo cualquiera contenido en D. Al ser f_n holomorfa en el abierto convexo D, sabemos por el teorema de Cauchy que

$$\int_T f_n = 0$$

para cada $n\in\mathbb{N}$ y cada triángulo T contenido en D. Entonces, dado T uno cualquiera de estos triángulos, como $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ uniformemente en $z\in T$, se tiene que

$$\int_T f = \int_T \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty}\int_T f_n = 0.$$

Por el teorema de Morera esto implica que f es holomorfa en D. Por último, como D es arbitrario, se deduce que f es holomorfa en todo Ω. □

Puede resultar instructivo comparar el resultado anterior con el teorema de Weierstrass que dice que toda función continua definida en un compacto de $\mathbb{R}^n$, y con valores en $\mathbb{R}^m$, puede aproximarse uniformemente por polinomios. Si aplicamos este teorema con $n=m=2$ obtenemos que toda función continua en un subconjunto compacto de $\mathbb{C}\equiv\mathbb{R}^2$ puede aproximarse uniformemente por polinomios. Sin embargo estos polinomios serán en general polinomios reales, no complejos (puesto que todo polinomio complejo es una función holomorfa, y evidentemente hay funciones continuas que no son holomorfas). Recordemos que por ejemplo la función $f(z)=\overline{z}$ no es holomorfa: es el ejemplo más simple de polinomio real (incluso $\mathbb{R}$-lineal) que no es un polinomio complejo (ni por supuesto tampoco $\mathbb{C}$-lineal).

Teorema 5.18. *Con las mismas hipótesis del teorema anterior, se tiene también que la sucesión de derivadas f_n' converge a f', uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω. Más en general, para cualquier $j\in\mathbb{N}$ y cualquier compacto K de Ω, la sucesión de derivadas j-ésimas $(f_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a la derivada j-ésima $f^{(j)}$, uniformemente en K.*

Demostración. Sea K un compacto contenido en Ω, y definamos

$$\delta = \frac{1}{3}\mathrm{dist}(K,\partial\Omega)$$

si $\Omega\neq\mathbb{C}$, o $\delta=1$ si $\Omega=\mathbb{C}$. Entonces el conjunto

$$K_\delta := \{z\in\Omega : \mathrm{dist}(z,K)\leq\delta\}$$

sigue siendo compacto y está contenido en Ω, y por tanto $f_n\to f$ uniformemente en K_δ.

Para cada $j\in\mathbb{N}$ y cada $z\in K$, se tiene que $\overline{D}(z,\delta)\subseteq K_\delta\subset\Omega$, y aplicando las desigualdades de Cauchy a la función holomorfa $f_n - f$ obtenemos que

$$|f_n^{(j)}(z) - f^{(j)}(z)| \leq \frac{j!}{\delta^j}\sup_{\xi\in\partial D(z,\delta)}|f_n(\xi)-f(\xi)| \leq \frac{j!}{\delta^j}\sup_{\xi\in K_\delta}|f_n(\xi)-f(\xi)|,$$

y como el miembro de la derecha de la anterior desigualdad tiende a 0 cuando $n\to\infty$ y no depende de $z\in K$, se concluye el resultado. □

Corolario 5.19. *Si $f_n:\Omega\to\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$, son funciones holomorfas y la serie $F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω, entonces $F:\Omega\to\mathbb{C}$ es holomorfa.*

Usando los resultados anteriores podemos dar también una versión más refinada[1] del teorema de derivación bajo el signo integral.

Teorema 5.20 (de derivación compleja bajo el signo integral, versión 2.0)**.** *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $F : \Omega \times [a,b] \to \mathbb{C}$ continua y tal que $\Omega \ni z \mapsto F(z,s)$ es holomorfa para cada s en el intervalo $[a,b]$. Entonces la función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por*

$$f(z) = \int_a^b F(z,s)ds$$

es holomorfa en Ω. Además, para cada $z_0 \in \Omega$, la función $[a,b] \ni s \mapsto \frac{\partial F}{\partial z}(z_0,s)$ es integrable, y se tiene

$$f'(z_0) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial z}(z_0,s)ds.$$

Demostración. Salvo un cambio de variable evidente, podemos suponer que $[a,b] = [0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos la suma de Riemann

$$f_n(z) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F(z, \frac{k}{n}),$$

de forma que

$$f(z) = \int_0^1 F(z,s)ds = \lim_{n\to\infty} f_n(z).$$

Como cada función $z \mapsto F(z,k/n)$ es holomorfa por hipótesis, es claro que f_n es holomorfa para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, en virtud del Teorema 5.18, bastará probar que f_n converge a f uniformemente en cada disco cerrado $\overline{D}(z_0,r)$ contenido en Ω. Y en efecto, como F es continua y $\overline{D}(z_0,r) \times [0,1]$ es compacto, F es uniformemente continua en este conjunto, luego para cada $\varepsilon > 0$ existirá $\delta > 0$ tal que si $z_1, z_2 \in \overline{D}(z_0,r)$, $s_1, s_2 \in [0,1]$ y $|z_1 - z_2| + |s_1 - s_2| \leq \delta$ entonces

$$|F(z_1,s_1) - F(z_2,s_2)| \leq \varepsilon,$$

y en particular

$$|F(z,s_1) - F(z,s_2)| \leq \varepsilon \text{ si } z \in \overline{D}(z_0,r),\ s_1,s_2 \in [0,1],\ \text{y } |s_1 - s_2| \leq \delta. \qquad (*)$$

Por tanto, para todo $n \geq 1/\delta$, $z \in z \in \overline{D}(z_0,r)$, se tiene

$$|f_n(z) - f(z)| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F\left(z, \frac{k}{n}\right) - \int_0^1 F(z,s)ds\right|$$
$$= \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(F\left(z,\frac{k}{n}\right) - F(z,s)\right)ds\right| \leq \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left|F\left(z,\frac{k}{n}\right) - F(z,s)\right| ds \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon,$$

y esto prueba la convergencia uniforme de f_n a f en $\overline{D}(z_0,r)$, y por tanto que f es holomorfa en $D(z_0,r)$.

Por último, usando otra vez el Teorema 5.18, sabemos que la sucesión de derivadas f_n' también converge a la derivada f', uniformemente en $\overline{D}(z_0,r)$. En particular, asumiendo por un momento que la función $[a,b] \ni s \mapsto \frac{\partial F}{\partial z}(z_0,s)$ es integrable, tendríamos

$$f'(z_0) = \lim_{n\to\infty} f_n'(z_0) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial z}\left(z_0,\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial z}(z_0,s)ds.$$

Veamos que, de hecho, esta derivada parcial es siempre integrable Riemann, con integral $f'(z_0)$. Usando el teorema de Darboux, bastará ver que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier partición

[1] Nótese que esta versión del teorema no presupone ni continuidad ni integrabilidad de la derivada parcial $\partial F/\partial z$.

$P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b\}$ de $[0,1]$ en subintervalos de longitud menor o igual que δ, y para cualesquiera $s_j \in [t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, ..., n$ se tiene

$$\left| f'(z_0) - \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial z}(z_0, s_j)\,(t_j - t_{j-1}) \right| \leq \varepsilon.$$

Supongamos que esto no fuera así: entonces existirían $\varepsilon_0 > 0$, una sucesión de particiones $P_n = \{a = t_0^n < t_1^n < ... < t_{N_n}^n\}$ de $[0,1]$ en subintervalos de longitudes menores que $1/n$, y puntos s_j^n en cada subintervalo $[t_{j-1}^n, t_j^n]$, $j = 1, ..., N_n$, tales que

$$\left| f'(z_0) - \sum_{j=1}^{N_n} \frac{\partial F}{\partial z}(z_0, s_j^n)\left(t_j^n - t_{j-1}^n\right) \right| > \varepsilon_0. \tag{$**$}$$

Definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función

$$g_n(z) = \sum_{j=1}^{N_n} F(z, s_j^n)\left(t_j^n - t_{j-1}^n\right).$$

Cada g_n es holomorfa. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, usando $(*)$ obtenemos que si $n > 1/\delta$ y $z \in \overline{D}(z_0, r)$ entonces

$$|g_n(z) - f(z)| = \left| \sum_{k=1}^{n} F\left(z, s_k^n\right)\left(t_k^n - t_{k-1}^n\right) - \int_0^1 F(z,s)ds \right|$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{N_n} \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \left(F\left(z, s_k^n\right) - F(z,s)\right) ds \right| \leq \sum_{k=1}^{N_n} \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \left|F\left(z, s_k^n\right) - F(z,s)\right| ds \leq \sum_{k=1}^{N_n} \varepsilon\left(t_k^n - t_{k-1}^n\right) = \varepsilon,$$

lo que prueba que $\lim_{n\to\infty} g_n(z) = f(z)$, uniformemente para $z \in \overline{D}(z_0, r)$. Entonces, usando el Teorema 5.18, deducimos que g_n' converge a f' uniformemente en los compactos de $D(z_0, r)$, y en particular $\lim_{n\to\infty} g_n'(z_0) = f'(z_0)$, lo cual contradice $(**)$. $\square$

Se deduce ahora fácilmente la siguiente variante del teorema anterior para integrales sobre curvas C^1 a trozos en $\mathbb{C}$.

Corolario 5.21. *Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es abierto, Γ es una curva de clase C^1 a trozos en $\mathbb{C}$, y $\varphi : \Omega \times \Gamma \to \mathbb{C}$ es continua y tal que para cada $\xi \in \Gamma$ la función $\Omega \ni z \mapsto \varphi(z, \xi)$ es holomorfa, entonces la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por*

$$g(z) = \int_\Gamma \varphi(z, \xi) d\xi$$

es holomorfa. Además, para cada $z_0 \in \Omega$ se tiene

$$g'(z_0) = \int_\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z_0, \xi) d\xi.$$

5.4. Problemas

Problema 5.1. Calcular las siguientes integrales para una curva de clase C^1 a trozos Γ que vaya de $-\pi i$ a πi en el semiplano derecho.

1. $\int_\Gamma z^4 dz$;
2. $\int_\Gamma e^z dz$;

3. $\int_\Gamma \cos z dz$;
4. $\int_\Gamma \operatorname{senh} z dz$.

Problema 5.2. Calcular $\int_C z^n dz$, donde C es cualquier circunferencia centrada en 0 y con orientación positiva, y $n \in \mathbb{Z}$.

Problema 5.3. Hacer lo mismo que en el ejercicio anterior, suponiendo ahora que C es cualquier circunferencia que no tenga al origen en su círculo interior.

Problema 5.4. Si $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $f(z) = 1/z$, demostrar que f no tiene ninguna primitiva en Ω.

Problema 5.5. Demostrar que si $|a| < r < |b|$ entonces

$$\int_{C_r} \frac{1}{(z-a)(z-b)} dz = \frac{2\pi i}{a-b},$$

donde C_r es la circunferencia de radio r centrada en 0, con orientación positiva.

Problema 5.6. Demostrar que dos primitivas de una misma función en un abierto conexo difieren en una constante.

Problema 5.7. Demostrar que

$$\int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2) dx = \int_0^\infty \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Indicación: integrar la función e^{-z^2} sobre un sector de circunferencia de radio R y ángulo $\pi/4$, y hacer $R \to \infty$.

Problema 5.8. Demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Problema 5.9. Calcular las integrales

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx dx, \text{ y } \int_0^\infty e^{-ax} \operatorname{sen} bx dx, \text{ donde } a > 0.$$

Indicación: integrar la función e^{-Ax}, con $A = \sqrt{a^2+b^2}$ sobre un sector de circunferencia apropiado, de ángulo ángulo ω, con $\cos\omega = a/A$.

Problema 5.10. Demostrar que para todo $\xi \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\pi x^2} e^{2\pi i x \xi} dx = e^{-\pi \xi^2}.$$

Indicación: Integrar $f(z) = e^{-\pi z^2}$ en el rectángulo de vértices $\pm R$, $\pm R + i\xi$.

Problema 5.11. Supongamos que f es holomorfa con derivada continua en un abierto Ω y que $\Gamma \subset \Omega$ es una curva cerrada simple de clase C^1 a trozos cuya región interior está contenida en Ω. Aplicar el teorema de Green para demostrar que

$$\int_\Gamma f = 0,$$

obteniendo así una versión del teorema de Cauchy válida para curvas más generales (bajo la suposición adicional de que f' sea continua, la cual puede ser obviada puesto que ya hemos demostrado que las funciones holomorfas son infinitamente diferenciables en sentido complejo). Después usar esta versión del teorema de Cauchy para probar que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

para todo z en la región interior a Γ.

Problema 5.12. Sea $P(z) = c_0 + c_1 z + ... + c_n z^n$ un polinomio. Demostrar que

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta = \pi \sum_{j=0}^{n} |c_j|^2.$$

Demostrar también que

$$\left| \sum_{j,k=0}^{n} \frac{c_j c_k}{j+k+1} \right| \leq \pi \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2.$$

Indicación: considerar primero el caso en que los c_j son reales, aplicando el teorema de Cauchy a la función $f(x)^2$ separadamente en la mitad superior y la mitad inferior del disco unidad.

Problema 5.13. Supongamos que f es continua en el disco cerrado $\{z : |z| \leq R\}$ y holomorfa en su interior. Demostrar que

$$\int_{|z|=R} f(z)dz = 0.$$

Indicación: aproximar $f(z)$ uniformemente por $f_r(z) = f(rz)$, $r \to 1^-$.

Problema 5.14. Sean $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $T \subset \Omega$ un triángulo cuya región interior también está contenida en Ω. Supongamos que f es holomorfa en Ω excepto quizás en un punto $w \in \Omega$, y que f está acotada en un entorno de w. Probar que

$$\int_T f = 0.$$

Problema 5.15. Calcular las siguientes integrales usando la fórmula integral de Cauchy:

1. $\int_{|z|=2} \frac{z^n}{z-1} dz$, $n \geq 0$
2. $\int_{|z|=1} \frac{z^n}{z-2} dz$, $n \geq 0$
3. $\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{sen} z}{z} dz$
4. $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^m} dz$, $m \in \mathbb{Z}$
5. $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2(z^2-4)e^z}$
6. $\int_{|z-1|=4} \frac{dz}{z(z^2-4)e^z}$

Problema 5.16. Demostrar que si $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es armónica entonces es de clase C^∞.

Problema 5.17. Usar la fórmula integral de Cauchy para demostrar la *propiedad del valor medio de las funciones armónicas*, a saber: si $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es armónica y el disco de radio ρ y centro z está contenido en Ω, entonces

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} u(z + \rho e^{i\theta}) d\theta.$$

Problema 5.18 (Versión débil del principio del máximo para funciones holomorfas)**.** Supongamos que Ω es un abierto de $\mathbb{C}$, y que $\Gamma \subset \Omega$ es una curva cerrada simple de clase C^1 a trozos cuyo interior está contenido en Ω. Dado z_0 un punto de la región interior a Γ, usar la versión de la fórmula integral de Cauchy del problema 5.11 para demostrar que existe una constante C tal que

$$|f(z_0)| \leq C \sup\{|f(z)| : z \in \Gamma\}$$

para cualquier función f holomorfa en Ω. Después aplicar esta desigualdad a $f(z)^n$, tomar raíces n-ésimas, y hacer $n \to \infty$ para concluir que puede tomarse $C = 1$. Concluir que si f es holomorfa en Ω, el máximo de $|f|$ en la región interior a Γ se alcanza siempre en su frontera Γ.

Problema 5.19. Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorfa. Demostrar que el diámetro de $f(\mathbb{D})$ cumple

$$2|f'(0)| \leq \sup_{z,w\in\mathbb{D}} |f(z) - f(w)|.$$

Problema 5.20. Si f es holomorfa en la banda $-1 < y < 1, x \in \mathbb{R}$ y cumple

$$|f(z)| \leq A(1 + |z|)^\eta$$

para todo z en dicha banda, donde $\eta \in \mathbb{R}$, demostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $A_n \geq 0$ tal que

$$|f^{(n)}(x)| \leq A_n(1 + |x|)^\eta$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Problema 5.21. Demostrar que si $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es armónica y acotada entonces es constante.

Problema 5.22. Demostrar que si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es entera y no constante entonces $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$.

Problema 5.23. Digamos que una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es doblemente periódica si existen dos períodos $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ de f que no están alineados con 0 (es decir, ω_1, ω_2 son linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$, y se tiene $f(z + \omega_1) = f(z) = f(z + \omega_2)$ para todo $z \in \mathbb{C}$). Demostrar que las únicas funciones enteras doblemente periódicas son las constantes.

Problema 5.24. Supongamos que $f(z)$ es una función entera y $f(z)/z^n$ está acotada para $|z| \geq R$. Demostrar que entonces $f(z)$ es un polinomio de grado menor o igual que n. ¿Qué más puede saberse si $f(z)/z^n$ está acotada en $\mathbb{C}$?

Problema 5.25. Sea h una función continua en un intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Demostrar que la función

$$H(z) = \int_a^b h(t)e^{-itz}dt$$

es una función entera para la que existen constantes $A, C > 0$ tales que

$$|H(z)| \leq Ce^{A|y|} \text{ para todo } z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

A una función entera que satisfaga este tipo de restricción en su crecimiento se le llama *función entera de tipo finito*.

Problema 5.26. Supongamos que la función h del problema anterior está definida en un subintervalo $[a, b]$ de $[0, \infty)$. Demostrar que entonces la correspondiente función H está acotada en el semiplano inferior.

Problema 5.27. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto acotado, y $f : \Omega \to \Omega$ holomorfa. Supongamos que existe $z_0 \in \Omega$ tal que $f(z_0) = z_0$ y $f'(z_0) = 1$. Demostrar que entonces f es lineal.
Indicación: puede suponerse $z_0 = 0$. Escribir $f(z) = z + a_n z^n + O(z^{n+1})$ cerca de 0, y comprobar que para $f_k = f \circ ... \circ f$ (composición de f consigo misma k veces) se tiene $f_k(z) = z + ka_n z^n + O(z^{n+1})$. Aplicar entonces las desigualdades de Cauchy y hacer $k \to \infty$.

Problema 5.28. Supongamos que f es una función entera y que para cada $z_0 \in \mathbb{C}$ existe al menos algún coeficiente c_n en su expansión

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

que se anula. Demostrar que f es un polinomio. Indicación: usar un argumento de numerabilidad.

Problema 5.29. Para cada abierto $U \subseteq \mathbb{C}$ se definen

$$\|f\|_{L^2(U)} = \left(\int_U |f|^2\right)^{1/2}, \quad \text{y } \|f\|_{L^\infty(U)} = \sup\{|f(z)| : z \in U\}.$$

Si f es una función holomorfa en un entorno de $\overline{D}(z_0, r)$, demostrar que para cada $s \in (0, r)$ existe una constante $C = C(r, s)$ tal que

$$\|f\|_{L^\infty(D(z_0,s))} \leq C\|f\|_{L^2(D(z_0,r))}.$$

Deducir que si (f_n) es una sucesión de funciones holomorfas en un abierto $U \subseteq \mathbb{C}$ que es de Cauchy en la norma $\|\cdot\|_{L^2(U)}$, entonces (f_n) converge a una función holomorfa en U, uniformemente en cada subconjunto compacto de U.

Indicación: usar la propiedad del valor medio de las funciones holomorfas.

Capítulo 6

Resultados de extensión y aproximación

6.1. El principio de reflexión de Schwarz

Dada una función definida en un conjunto, a menudo resulta útil poder extenderla a un conjunto mayor de manera que siga conservando algunas de sus propiedades (continuidad, diferenciabilidad, etc) en su nuevo dominio. Recordemos dos resultados básicos para funciones reales: los teoremas de extensión de Tietze y de Whitney. El teorema de Tietze permite extender funciones continuas en cerrados de un espacio métrico al espacio total.

Teorema 6.1 (Tietze). *Sean X un espacio métrico, C un subconjunto cerrado no vacío de X, y $f : C \to \mathbb{R}^m$ continua. Entonces existe $F : X \to \mathbb{R}^m$ continua tal que $F(x) = f(x)$ para todo $x \in C$.*

Por otro lado el teorema de extensión de Whitney da condiciones necesarias y suficientes para poder encontrar una extensión diferenciable de una función, junto con un candidato a derivada de esa función, definidos en un cerrado de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 6.2 (Whitney). *Sean C un cerrado de $\mathbb{R}^n$, $f : C \to \mathbb{R}^m$, y $G : C \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Supongamos que G es continua y que*

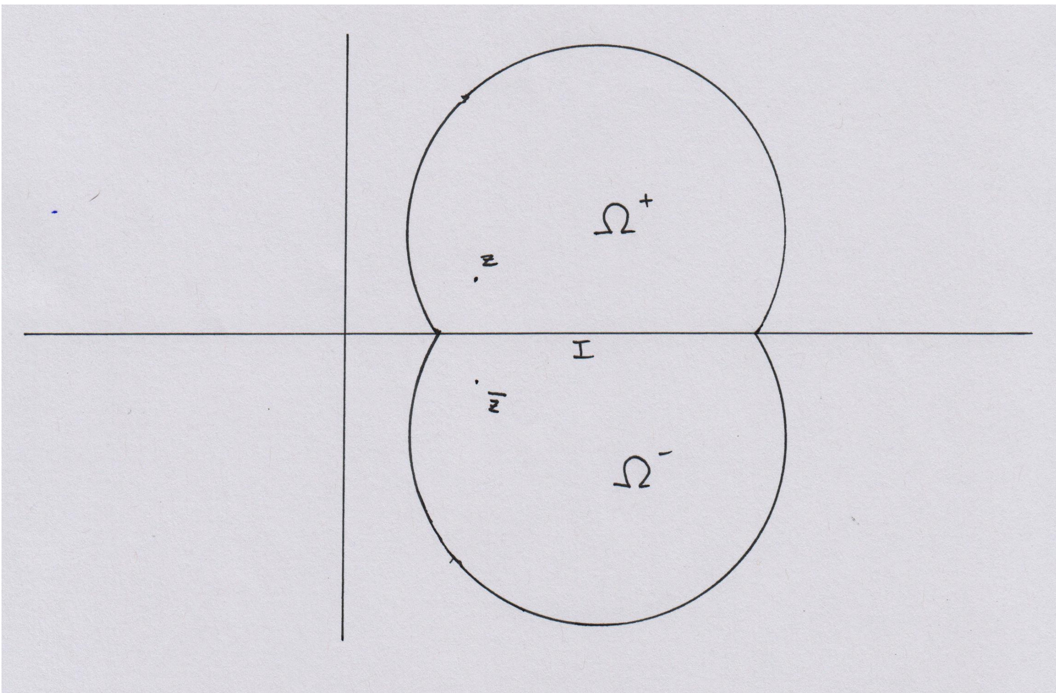
$$\lim_{\substack{y \to x \\ x,y \in C}} \frac{f(y) - f(x) - G(x)(y-x)}{|y-x|} = 0$$

uniformemente para x en cada subconjunto compacto de C. Entonces existe $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tal que $F = f$ en C y $DF = G$ en C.

El recíproco también es cierto (y evidente). Hay también una versión del teorema de Whitney para funciones de clase $C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ para $k \geq 2$, con condiciones más complicadas que no procede reseñar en estos comentarios introductorios a una de nuestras preguntas principales en este capítulo: dado un abierto acotado Ω de $\mathbb{C}$ y una función compleja f definida en la adherencia $\overline{\Omega}$ de $\mathbb{C}$, ¿puede extenderse f a una función holomorfa definida en un abierto que contenga a $\overline{\Omega}$? Una observación importante que explica la aparentemente escasa ambición de nuestra pregunta es que en general este abierto no podrá ser todo $\mathbb{C}$: por ejemplo, sabemos que es imposible extender la función $z \mapsto 1/z$, definida en $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$, a todo $\mathbb{C}$ conservando su holomorfía. Sin embargo, como veremos en este capítulo, si la frontera de Ω es buena y f es continua en $\overline{\Omega}$ y holomorfa en Ω, sí que habrá una extensión holomorfa de f definida en un abierto que contiene a $\overline{\Omega}$. Este tipo de resultado es falso en general para funciones reales.

Comenzaremos estudiando una situación muy especial. Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ que es simétrico respecto de la recta real, es decir, tal que

$$z \in \Omega \iff \overline{z} \in \Omega.$$



Definamos

$$
\begin{aligned}
&\Omega^+ = \{z \in \Omega : \text{Im}(z) > 0\}, \\
&\Omega^- = \{z \in \Omega : \text{Im}(z) < 0\}, \\
&I = \Omega \cap \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Obviamente es $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup I$.

Teorema 6.3. *[Principio de simetría]: Si f^+ y f^- son funciones holomorfas en Ω^+ y Ω^- respectivamente, que pueden extenderse continuamente a I, y que cumplen*

$$f^+(x) = f^-(x)$$

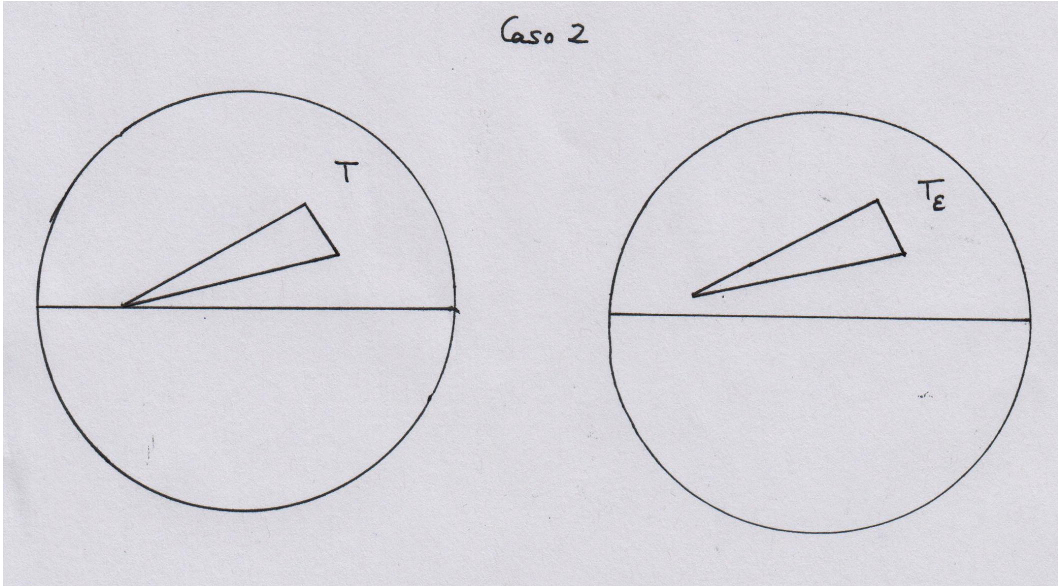
para todo $x \in I$, entonces la función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} f^+(z) & \text{si } z \in \Omega^+; \\ f^-(z) & \text{si } z \in \Omega^-; \\ f^+(z) = f^-(z) & \text{si } z \in I \end{cases}$$

es holomorfa en Ω.

Demostración. Es claro que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ está bien definida y es continua. También es obvio que f es holomorfa en $\Omega^+ \cup \Omega^-$. La única dificultad está en probar que f es holomorfa en cada punto de I. Para ello usaremos el teorema de Morera. Dado D un disco centrado en un punto x_0 de I y contenido en Ω, tenemos que comprobar que $\int_T f = 0$ para cada triángulo $T \subset D$. Consideraremos tres casos:

Caso 1. El triángulo T no corta al segmento I. Entonces T está enteramente contenido o bien en D^+ o bien en D^-, y como cualquiera de estos dos semidiscos es abierto y convexo, y f es holomorfa en ellos, el teorema de Cauchy nos dice que $\int_T f = 0$.



Caso 2. El triángulo T está contenido o bien en $D^+ \cup I$ o bien en $D^- \cup I$. Supongamos por ejemplo que $T \subset D^+ \cup I$ (el razonamiento es análogo en la otra situación). Entonces, definiendo

$$T_\varepsilon = i\varepsilon + T,$$

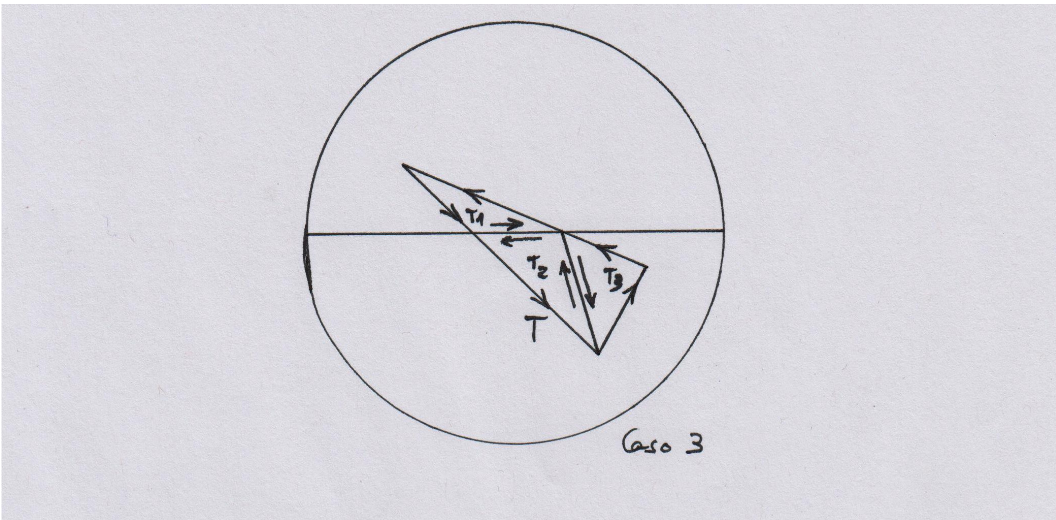
tenemos que $T_\varepsilon \subset D^+$, luego

$$\int_{T_\varepsilon} f = 0.$$

Por otra parte es inmediato comprobar que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{T_\varepsilon} f = \int_T f.$$

Por tanto concluímos que $\int_T f = 0$ también en este caso.



Caso 3. La región interior a T corta a I. Podemos reducir la situación al caso anterior escribiendo la región interior a T como unión de tres triángulos sólidos con bordes T_1, T_2, T_3 cada uno de los cuales tiene un vértice o un lado contenido en I, y orientados de forma compatible con la orientación de T (véase la figura). Entonces tenemos

$$\int_T f = \int_{T_1} f + \int_{T_2} f + \int_{T_3} f = 0 + 0 + 0 = 0$$

gracias al caso 2.

Por el teorema de Morera, resulta que f es holomorfa en D. $\square$

Otras variantes del principio de simetría de Schwarz se estudian en el Problema 6.2.

Obsérvese que un análogo del teorema anterior es falso para funciones reales: por ejemplo, las funciones $f^+(x) = \sqrt{x}$, definida en $(0, \infty)$, y $f^-(x) = \sqrt{-x}$, definida en $(-\infty, 0)$, son de clase C^∞ en sus respectivos dominios, y admiten extensiones continuas a $[0, \infty)$ y $(-\infty, 0]$ respectivamente, pero la única función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que coincide con f^+ en $(0, \infty)$ y con f^- en $(-\infty, 0)$, a saber la función $f(x) = \sqrt{|x|}$, no es derivable en 0.

Teorema 6.4. *[Principio de reflexión de Schwarz] Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ que es simétrico respecto de $\mathbb{R}$, y sea f una función holomorfa en Ω^+ que se extiende con continuidad a I y toma valores reales en I. Entonces existe $F : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $F = f$ en $\Omega^+ \cup I$.*

Demostración. Definamos $F : \Omega \to \mathbb{C}$ por

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in \Omega^+ \cup I; \\ \overline{f(\overline{z})} & \text{si } z \in \Omega^-, \end{cases}$$

y sean

$$f^-(z) = \overline{f(\overline{z})}, \text{ definida para } z \in \Omega^- \cup I,$$

y

$$f^+(z) = f(z), \text{ definida para } z \in \Omega^- \cup I.$$

Es claro que f^+ y f^- son continuas, y que coinciden en I (ya que $f(x) = \overline{f(x)} = \overline{f(\overline{x})}$ para todo $x \in I$, puesto que por hipótesis f toma valores reales en I). También es obvio que f^+ es holomorfa en Ω^+, y que las restricciones de F a $\Omega^+ \cup I$ y a $\Omega^- \cup I$ son, respectivamente, f^+ y f^-. Por tanto, para concluir la prueba usando el teorema anterior, sólo falta ver que f^- es holomorfa en Ω^-. Esto es sencillo: si $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega^-$, entonces, por la simetría de Ω respento de $\mathbb{R}$, $\overline{D}(\overline{z_0}, r) \subset \Omega^+$. Al ser f holomorfa en Ω^+ , tiene una expansión en serie de potencias centrada en $\overline{z_0}$; es decir, para cada $z \in D(z_0, r)$, puesto que $\overline{z} \in D(\overline{z_0}, r)$, podemos escribir

$$f(\overline{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\overline{z} - \overline{z_0})^n,$$

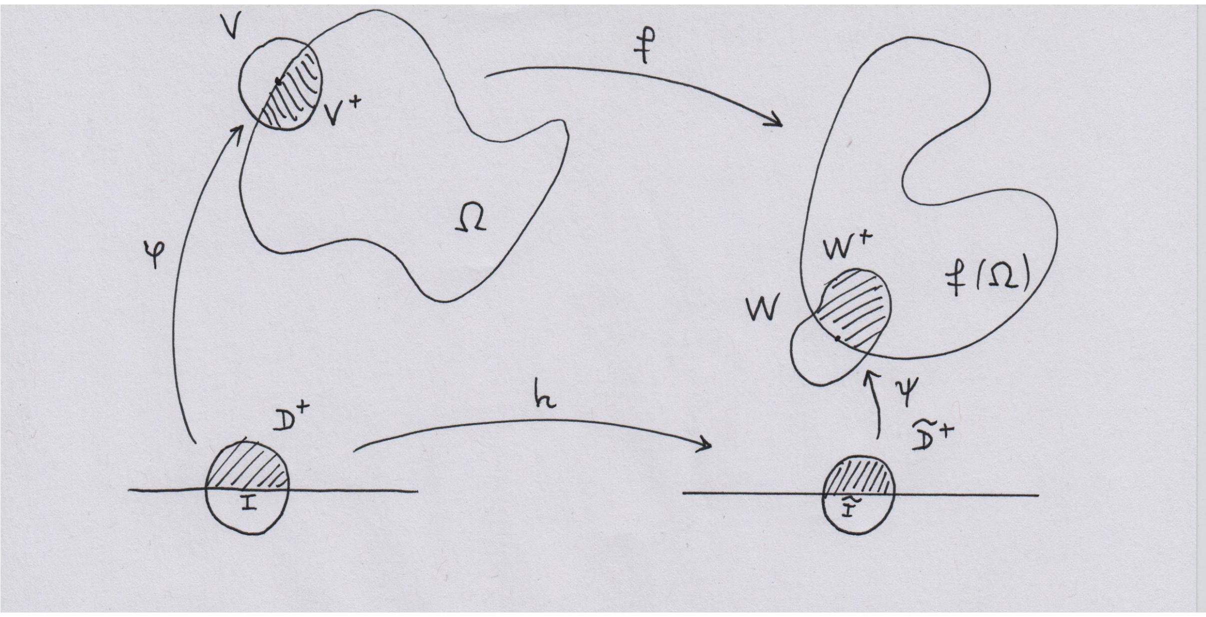
de donde, tomando conjugados,

$$f^-(z) = \overline{f(\overline{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} (z - z_0)^n$$

para cada $z \in D(z_0, r)$. Esto prueba que f^- es holomorfa en un entorno de z_0, y como $z_0 \in \Omega^-$ es arbitrario concluímos que f^- es holomorfa en Ω^-. $\square$

De nuevo el ejemplo $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, \infty)$, muestra que el resultado anterior es falso para funciones reales. A continuación aplicamos el principio de reflexión para obtener un resultado de extensión para recintos con fronteras analíticas.

Definición 6.1. Diremos que la frontera $\partial\Omega$ de un subconjunto abierto Ω del plano complejo $\mathbb{C}$ es *analítica* si cada punto $z \in \partial\Omega$ tiene un entorno abierto U para el que existe una aplicación conforme (es decir, holomorfa, biyectiva, y con inversa holomorfa) $\varphi : D \to U$ definida de un disco centrado en un punto de la recta real $\mathbb{R}$ y que toma valores en U, de manera que $\varphi(D^+) = U \cap \Omega$ y $\varphi(D \cap \mathbb{R}) = U \cap \partial\Omega$.



Teorema 6.5. *[Principio de reflexión de Schwarz, versión 2.0] Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ con frontera analítica, y supongamos que $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ es continua en $\overline{\Omega}$, holomorfa en Ω, y que $f(\Omega)$ es también un abierto*[1] *con frontera analítica que contiene a $f(\partial\Omega)$. Entonces existen U abierto que contiene a $\overline{\Omega}$ y $F : U \to \mathbb{C}$ holomorfa tales que $F(z) = f(z)$ para todo $z \in \overline{\Omega}$.*

Demostración. Veamos primero que para cada $z_0 \in \partial\Omega$ existen V entorno abierto de z_0 y $g : V \to \mathbb{C}$ tales que g coincide con f en $V \cap \overline{\Omega}$ (gracias al principio de identidad de las funciones holomorfas luego podremos deducir fácilmente el resultado general). Puesto que $\partial\Omega$ y $f(\partial\Omega)$ son analíticas, existen V y W, entornos abiertos de z_0 y $f(z_0)$ respectivamente, y existen aplicaciones conformes $\varphi : D \to U$, $\psi : \widetilde{D} \to W$ definidas en discos centrados en puntos de la recta real, tales que $\varphi(D \cap \mathbb{R}) = V \cap \partial\Omega$, $\varphi(D^+) = V \cap \Omega$, $\Psi(\widetilde{D} \cap \mathbb{R}) = W \cap f(\partial\Omega)$, y $\Psi(\widetilde{D}^+) = W \cap f(\Omega)$. Denotemos $V^+ = \varphi(D^+)$, $W^+ = \psi(\widetilde{D}^+)$, $I = D^+ \cap \mathbb{R}$, $\widetilde{I} = \widetilde{D}^+ \cap \mathbb{R}$. Podemos suponer que $f(V^+) \subset W^+$ haciendo D más pequeño si fuera necesario. Sea $h : D^+ \cup I \to \widetilde{D}^+ \cup \widetilde{I}$ definida por

$$h = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi.$$

La aplicación h es continua en $D^+ \cup I$ y holomorfa en D^+, y se tiene $h(I) \subset \widetilde{I} \subset \mathbb{R}$. Por el teorema anterior existe entonces $H : D \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $H = h$ en D^+. Podemos suponer que $H(D) \subseteq \widetilde{D}$ haciendo D más pequeño si fuera preciso. Basta definir entonces $g : V \to \mathbb{C}$ por

$$g = \psi \circ H \circ \varphi^{-1},$$

que es holomorfa en V y coincide con f en $V \cap \overline{\Omega}$.

Veamos ahora cómo pueden definirse U u F con las propiedades del enunciado. Para cada $z \in \partial\Omega$ sean V_z entorno abierto de z y $g_z : V_z \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $g_z(\xi) = f(\xi)$ para todo $\xi \in V_z \cap \overline{\Omega}$. Definamos

$$U = \Omega \cup \bigcup_{z \in \partial\Omega} V_z,$$

y $F : U \to \mathbb{C}$ por

$$F(\xi) = f(\xi) \text{ si } \xi \in \Omega, \text{ y } F(\xi) = g_z(\xi) \text{ si } \xi \in V_z \text{ para algún } z \in \partial\Omega.$$

Obsérvese que si $z_1, z_2 \in \partial\Omega$ y $V_{z_1} \cap V_{z_2} \neq \emptyset$ entonces $V_{z_1} \cap V_{z_2}$ es un abierto no vacío en el que las funciones g_{z_1}, g_{z_2} y f coinciden, luego por el principio de identidad de las funciones holomorfas se tiene

[1] Como veremos más adelante, por el Teorema de la aplicación abierta, resulta que la imagen de un abierto por una aplicación holomorfa no constante es abierto, de forma que esta hipótesis es redundante en la práctica.

que $g_{z_1} = g_{z_2}$ en $V_{z_1} \cap V_{z_2}$. Análogamente $f = g_{z_1}$ en $V_{z_1} \cap \Omega$, y $f = g_{z_2}$ en $V_{z_2} \cap \Omega$. Por tanto F está bien definida. Además, como localmente F coincide o bien con f o bien con alguna de las g_z, que son holomorfas, es claro que F es holomorfa. □

Conviene observar que si $f(\Omega)$ no tiene frontera analítica el resultado anterior es en general falso: ver por ejemplo el problema 6.5 de este capítulo.

Se dice que una función $f_2 : \Omega_2 \to \mathbb{C}$ es prolongación analítica de otra función $f_1 : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ si Ω_2 es un abierto que contiene a Ω_1, f_2 es holomorfa en Ω_2, y f_2 coincide con f_1 en Ω_1. Es evidente que la relación

$$f_1 \preceq f_2 \iff f_2 \text{ es prolongación analítica de } f_1$$

es un orden parcial. Un argumento de zornicación estándar muestra que toda función holomorfa tiene una prolongación analítica maximal. Sin embargo, las prolongaciones maximales no son únicas, ya que sus dominios son en general diferentes.

6.2. El teorema de aproximación de Runge

Hay importantes diferencias entre los resultados de aproximación por funciones diferenciables en sentido real (o incluso funciones real-analíticas) y por funciones holomorfas. Por ejemplo, recordemos que, como consecuencia del teorema de Weierstrass si K es un compacto de $\mathbb{R}^n$ y $f : K \to \mathbb{R}^m$ es continua, existe una sucesión (P_k) de polinomios reales tales que $P_k \to f$ uniformemente en K. Por otro lado, puede demostrarse que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua y acotada entonces

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{(4\pi\varepsilon)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4\varepsilon}} dy = f * H_\varepsilon(x)$$

(donde $H_\varepsilon(x) = \frac{1}{(4\pi\varepsilon)^{n/2}} e^{-|x|^2/4\varepsilon}$, el *núcleo del calor*) es una función real-analítica en $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} f_\varepsilon(x) = f(x)$$

uniformemente en $x \in \mathbb{R}^n$; ver el Problema 11.9 y la Proposición 11.4 del capítulo 11 para más información. La terminología proviene del hecho de que $u(t,x) = f * H_t(x)$ es la solución de la *ecuación del calor*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x u = 0 & \text{en } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n; \\ u(0,x) = f(x) & \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

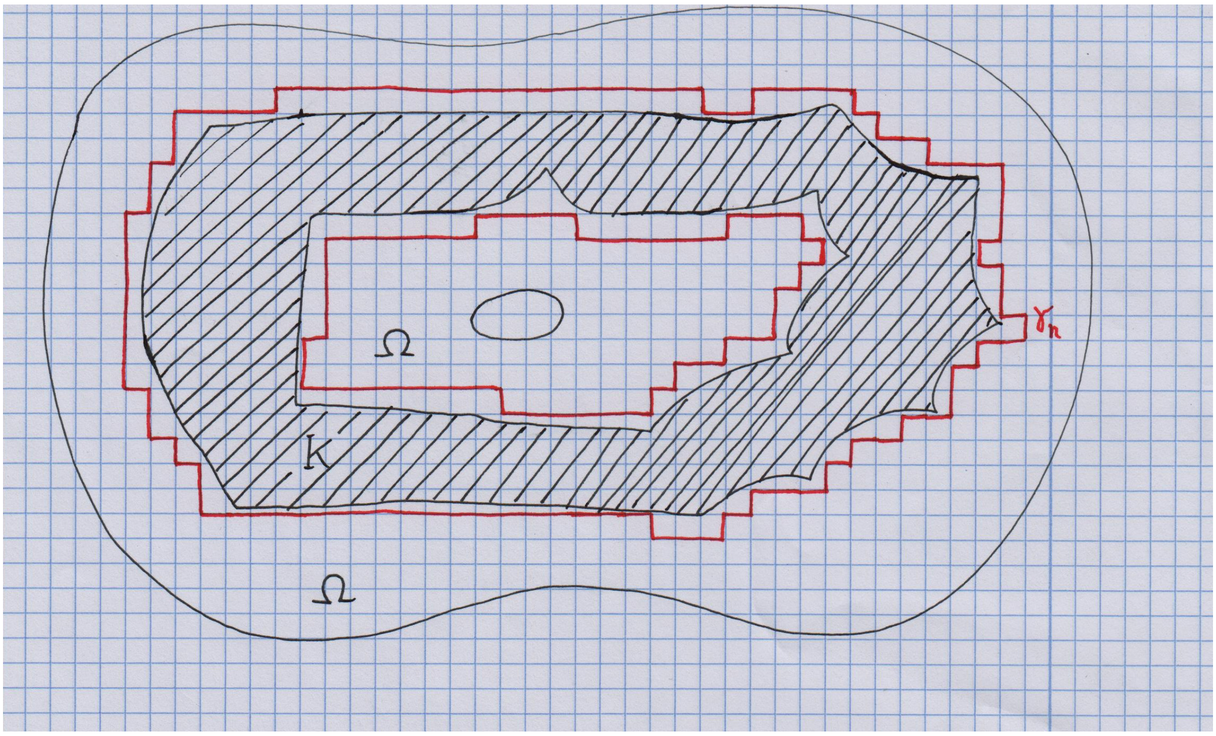
En $\mathbb{C}$, este tipo de resultados de aproximación de funciones continuas por funciones diferenciables en sentido complejo (es decir, holomorfas) son falsos. Por ejemplo, ya sabemos que si una función compleja es límite, uniforme en compactos, de una sucesión de funciones holomorfas, entonces es holomorfa. Pero obviamente existen funciones continuas que no son holomorfas (por ejemplo $z \mapsto \overline{z}$).

No obstante, cabe preguntarse: si f es holomorfa, ¿es cierto que f puede aproximarse, uniformemente en cada compacto, por polinomios complejos?[2] La respuesta a esta pregunta es que ello depende de la geometría del dominio de f. Por ejemplo, observemos que si f es holomorfa en un disco entonces tiene una expansión en serie de potencias que converge uniformemente en los subconjuntos compactos de ese disco, y por tanto puede aproximarse uniformemente en tales compactos por polinomios (las sumas parciales de la serie de potencias). Por otro lado, si $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $K = \partial D(0,1)$, $f(z) = 1/z$ es holomorfa en Ω pero no puede aproximarse uniformemente en K por polinomios (puesto que $\int_K f = 2\pi i$, mientras que $\int_K P = 0$ para cualquier polinomio).

El teorema de Runge clarifica completamente la situación.[3]

[2]Los polinomios que proporciona el teorema de Weierstrass no son en general complejos, como se ha observado en el capítulo anterior.

[3]Como veremos en los ejercicios, si $\mathbb{C} \setminus K$ no es conexo entonces existe F holomorfa en un entorno de K que no puede aproximarse uniformemente en K por polinomios; es decir, el recíproco de la segunda parte del teorema es también verdad.



Teorema 6.6. *[Runge] Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $K \subset \Omega$ compacto, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa. Entonces f puede aproximarse uniformemente en K por funciones racionales (es decir cocientes de polinomios). Si además $\mathbb{C} \setminus K$ es conexo, entonces f puede aproximarse uniformemente en K por polinomios.*

Demostración. La primera parte del enunciado se deducirá de los siguientes lemas.

Lema 6.7. *Existe una colección finita de segmentos $\gamma_1, ..., \gamma_N$ contenidos en $\Omega \setminus K$ tales que*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

para todo $z \in K$.

Demostración. Sea $d = \frac{1}{2} d(K, \partial\Omega)$, y consideremos una cuadrícula del plano formada por cuadrados sólidos Q paralelos a los ejes coordenados, y de lados de longitud d. Denotemos

$$\{Q_1, ..., Q_M\} := \mathcal{Q} := \{Q : Q \cap K \neq \emptyset\}$$

(la subfamilia de estos cuadrados que cortan a K), orientemos positivamente el borde ∂Q_j de cada Q_j, y denotemos por $\gamma_1, ..., \gamma_N$ la colección de lados de cuadrados de $\mathcal{Q}$ que no son comunes a dos cuadrados adyacentes de $\mathcal{Q}$.

Nótese que para cada $n = 1, ..., N$ se tiene $\gamma_n \subset \Omega \setminus K$. En efecto: si γ_n no estuviera contenido en Ω tendríamos $d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) \leq \text{diam}(Q_j) = \sqrt{2}d = \frac{\sqrt{2}}{2} d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)$, lo que es absurdo. Por otra parte, si γ_n cortara a K entonces al menos uno de los ocho cubos adyacentes al cubo Q_j del cual γ_n es un lado intersecaría también a K, contradiciendo la elección de γ_n.

Ahora, si $z \in K$ no está en la frontera de ningún cuadrado $Q \in \mathcal{Q}$ y está en el interior de algún $Q_j \in \mathcal{Q}$, tenemos, por el teorema de Cauchy y la fórmula integral de Cauchy, que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_m} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \begin{cases} f(z) & \text{si } m = j; \\ 0 & \text{si } m \neq j. \end{cases}$$

Por tanto, para todos estos z se tiene

$$f(z) = \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_m} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Por otro lado, si Q_m y $Q_{m'}$ son adyacentes, las integrales sobre su lado común se toman una vez en un sentido y otra vez en el sentido opuesto, de modo que las integrales sobre los lados que son comunes a dos cuadrados se cancelan entre sí, y por tanto

$$f(z) = \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_m} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

lo que prueba el lema en el caso en que z no esté en la frontera de ningún cuadrado $Q \in \mathcal{Q}$.

Para demostrar el caso general, observemos que, puesto que $\rho_n := d(\gamma_n, K) > 0$ las funciones

$$z \mapsto \int_{\gamma_n} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

son continuas en $K + \frac{1}{2}\rho_n D(0,1)$, y entonces la función

$$z \mapsto \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

es continua en $K + \frac{1}{2}\rho D(0,1) := U$, donde $\rho = min_{1 \leq n \leq N} \rho_n$. Como la función $z \mapsto f(z)$ es también continua en U, y ambas funciones coinciden en $U \setminus \bigcup_{m=1}^{M} \partial Q_m$, que es un subconjunto denso de U, estas funciones son iguales en todo U. Es decir,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

para todo $z \in U$, y en particular para todo $z \in K$. □

Lema 6.8. *Si γ es un segmento contenido en $\Omega \setminus K$, existe una sucesión de funciones racionales, con singularidades contenidas exclusivamente en γ, que aproxima la función $\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$, uniformemente en $z \in K$.*

Demostración. Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ una parametrización de γ (abusamos de la notación), de forma que

$$\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_0^1 \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} \gamma'(t) dt.$$

Puesto que $\gamma \cap K = \emptyset$ la función

$$z \mapsto F(z,t) := \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} \gamma'(t)$$

es uniformemente continua en el compacto $K \times [0,1]$, luego dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{z \in K} |F(z,t_1) - F(z,t_2)| \leq \varepsilon \text{ si } |t_1 - t_2| \leq \delta.$$

Definamos

$$f_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} F\left(z, \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{f(\gamma(k/n))}{\gamma(k/n) - z} \gamma'(k/n),$$

que es una suma de Riemann para $\int_0^1 F(z,t)dt$ y también una función racional, por ser suma de funciones del tipo

$$\frac{b_j}{a_j - z},$$

con $a_j, b_j \in \mathbb{C}$. Para $n \geq 1/\delta$ y $z \in K$ tenemos entonces

$$\left| f_n(z) - \int_0^1 \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z}\gamma'(t)dt \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} \left(F(z, \frac{j}{n}) - F(z,s) \right) ds \right| \leq$$

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} \left| F(z, \frac{j}{n}) - F(z,s) \right| ds \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon,$$

lo quue prueba que $f_n(z)$ converge a $\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$ uniformemente en $z \in K$. □

Combinando los dos lemas anteriores deducimos inmediatamente la primera parte del teorema de Runge. Para demostrar la segunda parte (es decir que la aproximación uniforme de f en K por polinomios es posible si $\mathbb{C} \setminus K$ es conexo), en vista de demostración del lema anterior es suficiente probar que cualquier función del tipo

$$z \mapsto \frac{1}{z - a}$$

puede aproximarse, uniformemente en K, por polinomios, siempre que $a \in \mathbb{C} \setminus K$ y $\mathbb{C} \setminus K$ sea conexo.

Lema 6.9. *Si $\mathbb{C} \setminus K$ es conexo y $z_0 \in \mathbb{C} \setminus K$ entonces la función $z \mapsto \frac{1}{z - z_0}$ puede aproximarse por polinomios, uniformemente en $z \in K$.*

Sea D un disco abierto suficientemente grande para que $K \subset D$, y sea $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$. Se tiene

$$\frac{1}{z - z_1} = -\frac{1}{z_1} \frac{1}{1 - \frac{z}{z_1}} = -\frac{1}{z_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_1} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{z_1^{n+1}} z^n,$$

donde la serie converge uniformemente en $z \in K$. Las sumas parciales de esta serie son polinomios en z que aproximan la función $z \mapsto \frac{1}{z - z_1}$ uniformemente en $z \in K$. Dado que, para cada $j \in \mathbb{N}$, la función $g(z) = z^j$ es uniformemente continua en cualquier acotado y que la imagen de K por la función $\frac{1}{z - z_1}$ es compacta, es inmediato deducir que cualquier potencia de $\frac{1}{z - z_1}$ puede aproximarse, uniformemente en K, por polinomios en la variable z. Y por tanto también que cualquier polinomio en la variable $\frac{1}{z - z_1}$ puede aproximarse, uniformemente en K, por polinomios en la variable z. Por tanto bastará demostrar que si $\mathbb{C} \setminus K$ es conexo entonces $z \mapsto \frac{1}{z - z_0}$ puede aproximarse, uniformemente en K, por polinomios en la variable $\frac{1}{z - z_1}$.

Sea γ una curva en $\mathbb{C} \setminus K$ que conecta z_0 con z_1, digamos que $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus K$ es continua, $\gamma(0) = z_0$, y $\gamma(1) = z_1$. Pongamos

$$\rho = \frac{1}{2} d(K, \gamma),$$

y elijamos puntos $w_0 = z_0, w_1, ..., w_l = z_1$ en la traza de γ tales que

$$|w_j - w_{j+1}| < \rho$$

para todo $j = 0, 1, ..., l - 1$.

Afirmamos que *si $w \in \gamma$ y w' es tal que $|w - w'| < \rho$ entonces $z \mapsto \frac{1}{z - w}$ puede aproximarse, uniformemente en K, por polinomios en la variable $\frac{1}{z - w'}$*. En efecto,

$$\frac{1}{z - w} = \frac{1}{z - w'} \frac{1}{1 - \frac{w - w'}{z - w'}} = \frac{1}{z - w'} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w - w'}{z - w'} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (w - w')^n \left(\frac{1}{(z - w')} \right)^{n+1},$$

donde la serie converge uniformemente en $z \in K$, ya que, si $z \in K$,

$$\left|\frac{w-w'}{z-w'}\right| < \frac{\rho}{2\rho} = \frac{1}{2}.$$

Las sumas parciales de esta serie son polinomios en la variable $\frac{1}{z-w'}$ que convergen, uniformemente en $z \in K$, a la función $\frac{1}{z-w}$.

Usando reiteradamente este aserto junto con la observación de que si una función del tipo $z \mapsto \frac{1}{z-w}$ puede aproximarse uniformemente en K por polinomios en la variable $\frac{1}{z-w'}$ entonces cualquier potencia suya (y por consiguiente también cualquier polinomio en la variable $\frac{1}{z-w}$) puede aproximarse uniformemente en K por polinomios en la variable $\frac{1}{z-w'}$, y por supuesto también el hecho de que si una función puede aproximarse uniformemente en un conjunto por funciones de un tipo A, y las funciones de tipo A pueden aproximarse uniformemente en ese conjunto por funciones de otro tipo B entonces la función puede aproximarse uniformemente en el conjunto por funciones de tipo B, obtenemos lo siguiente. La función $\frac{1}{z-z_0}$ puede aproximarse, uniformemente en K, por polinomios en la variable $\frac{1}{z-w_1}$, que a su vez pueden aproximarse, uniformemente en K, por polinomios en la variable $\frac{1}{z-w_2}$, que pueden aproximarse, uniformemente en K por polinomios en la variable $\frac{1}{z-w_3}$, etc, hasta llegar en l pasos a que $\frac{1}{z-z_0}$ puede aproximarse por polinomios en la variable $\frac{1}{z-z_1}$, que como hemos visto al principio pueden aproximarse por polinomios en la variable z. Por tanto $\frac{1}{z-z_0}$ puede aproximarse por polinomios en z, uniformemente para $z \in K$. $\square$

6.3. Problemas

Problema 6.1. Supongamos que f es una función continua y que no se anula en el disco unidad cerrado, y tal que f es holomorfa en el disco unidad abierto. Demostrar que si $|f(z)| = 1$ para todo z con $|z| = 1$, entonces f es constante.

Indicación: extender f a todo $\mathbb{C}$ poniendo $f(z) = 1/\overline{f(1/\overline{z})}$ para $|z| > 1$, y razonar como en las demostraciones del principio de simetría y del principio reflexión de Schwarz.

Problema 6.2. Sea f una función continua en un abierto Ω tal que f es holomorfa en $\Omega \setminus \mathbb{R}$. Probar que f es holomorfa en Ω. Generalizar (por ejemplo, cambiar $\mathbb{R}$ por una línea cualquiera de $\mathbb{C}$, o una curva inyectiva de clase C^1 a trozos).

Problema 6.3. Probar el recíproco del teorema de Runge: si K es un compacto de $\mathbb{C}$ cuyo complementario no es conexo, entonces existe una función holomorfa en un entorno de K que no puede ser aproximada uniformemente en K por polinomios.

Indicación: Sea $z_0 \in K^c$ y definamos $f(z) = 1/(z - z_0)$. Suponiendo que f pueda ser aproximada uniformemente en K por polinomios, comprobar que existe un polinomio p tal que $|(z - z_0)p(z) - 1| < 1$, y usar el Problema 5.18 del capítulo anterior para demostrar que esta desigualdad sigue valiendo en la componente conexa de K^c que contiene a z_0.

Problema 6.4. Consideremos la función $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}.$$

Demostrar que:

1. f es holomorfa.

2. dado cualquier $z \in \partial\mathbb{D}$, no existe ninguna función holomorfa g definida en un entorno U de z tal que $f = g$ en U.

3. En particular, f no tiene ninguna extensión holomorfa a un entorno abierto de $\overline{\mathbb{D}}$.

Indicación: si $\theta = 2\pi\ell/2^k$, donde $\ell, k \in \mathbb{N}$, considerar $z_r = re^{i\theta}$, y probar que $\lim_{r\to 1^-} |f(z_r)| = \infty$.

Problema 6.5. En 1872 Weierstrass dio el primer ejemplo de una función continua en $\mathbb{R}$ que no es diferenciable en ningún punto de $\mathbb{R}$: la función

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(3^n t)$$

tiene esta propiedad. Suponiendo cierta esta afirmación, consideremos la función

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^{3^n}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Demostrar lo siguiente:

1. f es holomorfa en $\mathbb{D}$.
2. f puede extenderse con continuidad a $\overline{\mathbb{D}}$.
3. Dado cualquier $z \in \partial\mathbb{D}$, no existe ninguna función holomorfa g definida en un entorno U de z tal que $f = g$ en U.
4. En particular, f no tiene ninguna extensión holomorfa a un entorno abierto de $\overline{\mathbb{D}}$.

Problema 6.6. Buscar en internet, y estudiar, una demostración de que la función W de Weierstrass definida en el problema anterior no es diferenciable en ningún punto.

Problema 6.7. En este problema se demostrará que existe una función entera F con la siguiente propiedad: dada cualquier otra función entera, existe una sucesión creciente (n_k) de números naturales tales que

$$\lim_{k\to\infty} F(z + n_k) = h(z)$$

uniformemente en cada subconjunto compacto de $\mathbb{C}$.

Para ello, consideremos una enumeración $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ de los polinomios cuyos coeficientes tienen partes reales e imaginarias en $\mathbb{Q}$.

(a) Demostrar que basta con encontrar una función entera F y una sucesión creciente M_n de naturales tales que

$$|F(z) - p_n(z - M_n)| < \frac{1}{n} \text{ para todo } z \in D_n,$$

donde D_n denota el disco de centro 0 y radio n.

(b) Construir una función con la propiedad anterior poniendo

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z),$$

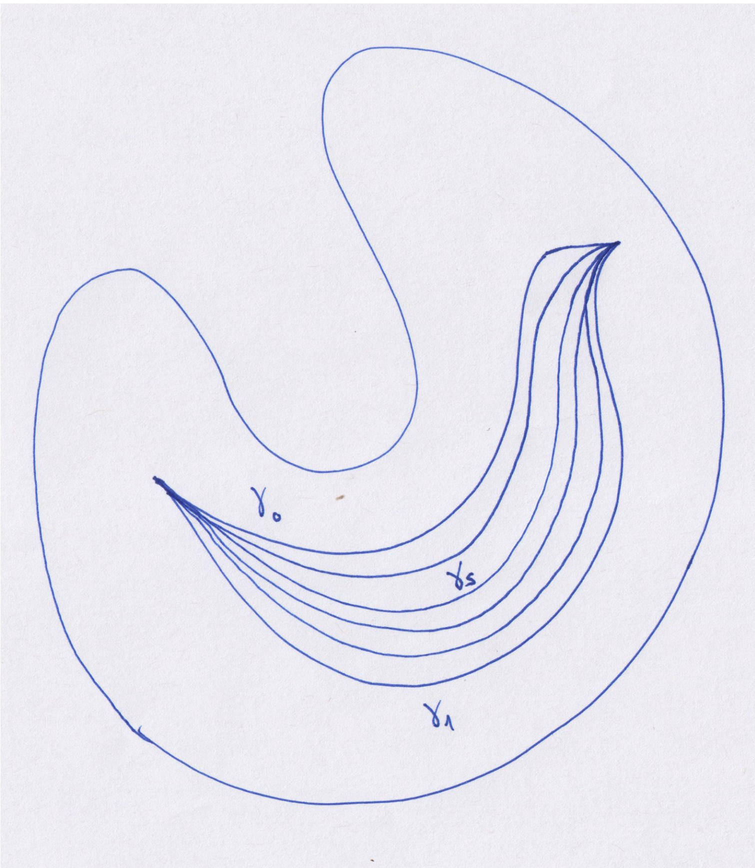
donde $u_n(z) = p_n(z - M_n)e^{-c_n(z-M_n)^2}$ y c_n, M_n son números positivos elegidos adecuadamente y tales que $\lim c_n = 0, \lim M_n = \infty$ (téngase en cuenta que la función e^{-z^2} tiende a cero rápidamente cuando $|z| \to \infty$ en los sectores $|\arg z| < \pi/4 - \delta$ y $|\pi - \arg z| < \pi/4 - \delta$).

Capítulo 7

Teoría global de Cauchy

7.1. Homotopías y recintos simplemente conexos

Una cuestión importante de la teoría de funciones de variable compleja es saber en qué tipos de regiones pueden definirse primitivas de una función holomorfa dada (por ejemplo, ¿en qué subregiones de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ puede definirse un *logaritmo*, es decir una primitiva de la función $1/z$?). Ya sabemos que en las regiones convexas esto puede hacerse, pero la condición de convexidad es demasiado restrictiva cuando se desea hacer una teoría suficientemente general de carácter global. La respuesta depende de los conceptos de homotopía de curvas y de conexión simple. Intuitivamente, un abierto simplemente conexo es un abierto conexo que no tiene *agujeros*. La presencia de *agujeros* puede detectarse encontrando curvas con los mismos puntos inicial y final que no pueden deformarse continuamente una en otra manteniendo fijos los extremos. Tales deformaciones continuas de una curva en otra son lo que se llama *homotopías*.



Definición 7.1. Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to \Omega \subseteq \mathbb{C}$ dos curvas continuas con los mismos puntos inicial y

final (es decir $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$, y $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$). Diremos que γ_0 y γ_1 son *homótopas en* Ω si existe una aplicación continua $H : [0,1] \times [a,b] \to \Omega$ tal que

$$H(s,a) = \gamma_0(a) = \gamma_1(a) \text{ y } H(s,b) = \gamma_0(b) = \gamma_1(b) \text{ para todo } s \in [0,1], \text{ y}$$

$$H(0,t) = \gamma_0(t) \text{ y } H(1,t) = \gamma_1(t) \text{ para todo } t \in [a,b].$$

Se dice en este caso que H es una homotopía entre γ_0 y γ_1.

Así, para cada $s \in [0,1]$, la curva $[a,b] \ni t \mapsto \gamma_s(t) := H(s,t)$ es continua, y tiene los mismos puntos inicial y final que γ_0 y γ_1. Conforme s varía de 0 a 1, la curva γ_0 va transformándose gradualmente en γ_1.

Proposición 7.1. *Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es abierto y γ_0, γ_1 son curvas de clase C^1 que son homótopas en Ω, siempre puede encontrarse una homotopía H entre ellas en Ω que es de clase C^1. Por otro lado, si γ_0 y γ_1 son de clase C^1 a trozos y son homótopas en Ω, existe una homotopía H entre ellas en Ω de forma que para cada $s \in [0,1]$ la curva $\gamma_s = H(s,\cdot)$ es de clase C^1 a trozos.*

La demostración de esta proposición se deja como ejercicio (ver el problema 7.3 de este capítulo).

Teorema 7.2. *Si f es holomorfa en un abierto Ω de $\mathbb{C}$ y γ_0, γ_1 son curvas de clase C^1 a trozos homótopas en Ω, entonces*

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f.$$

Demostración. Supongamos γ_0 y γ_1 parametrizadas en un intervalo $[a,b]$. Por la proposición anterior existe $H : [0,1] \times [a,b] \to \Omega$ homotopía entre γ_0 y γ_1 con la propiedad adicional de que cada curva $\gamma_s = H(s,\cdot)$ es de clase C^1 a trozos en $[a,b]$. Como $K := H([0,1] \times [a,b])$ es compacto y está contenido en Ω, existe $\varepsilon > 0$ tal que $K + D(0, 3\varepsilon) \subset \Omega$. Por otro lado, al ser H uniformemente continua en $[0,1] \times [a,b]$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|H(s_1,t_1) - H(s_2,t_2)| \leq \varepsilon \text{ si } |s_1 - s_2| \leq \delta \text{ y } |t_1 - t_2| \leq \delta \qquad (*)$$

y en particular se cumple que

$$\sup_{t \in [a,b]} |\gamma_{s_1}(t) - \gamma_{s_2}(t)| \leq \varepsilon \text{ si } |s_1 - s_2| \leq \delta.$$

Fijemos por el momento $s_1, s_2 \in [0,1]$ tales que $|s_1, s_2| \leq \delta$, sean $a := t_0 < t_1 < ...t_n < t_{n+1} := b$ tales que $|t_j - t_{j+1}| \leq \delta$, y definamos

$$z_j = \gamma_{s_1}(t_j),\ w_j = \gamma_{s_2}(t_j),\ D_j = D(z_j, 2\varepsilon),$$

para $j = 0, 1, ..., n+1$. Gracias a $(*)$ se tiene que

$$\begin{aligned} |z_j - w_j| &= |\gamma_{s_1}(t_j) - \gamma_{s_2}(t_j)| \leq \varepsilon, \\ |z_{j+1} - z_j| &= \gamma_{s_1}(t_{j+1}) - \gamma_{s_1}(t_j)| \leq \varepsilon \\ |z_j - w_{j+1}| &= |\gamma_{s_1}(t_j) - \gamma_{s_2}(t_{j+1})| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

de modo que $z_j, z_{j+1}, w_j, w_{j+1} \in D_j$ para cada $j = 0, 1, ..., n$. Ahora bien, como cada disco D_j es convexo, existe $F_j : D_j \to \mathbb{C}$, primitiva de f en D_j. En cada intersección $D_j \cap D_{j+1}$ las funciones F_j y F_{j+1} son primitivas de la misma función f, y por tanto difieren en una constante. Entonces

$$F_{j+1}(z_{j+1}) - F_{j+1}(w_{j+1}) = F_j(z_{j+1}) - F_j(w_{j+1}),$$

lo que implica que

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_{s_1}} f - \int_{\gamma_{s_2}} f = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_{s_1}[t_j,t_{j+1}]} f - \sum_{j=0}^{n} \int_{\gamma_{s_2}[t_j,t_{j+1}]} f = \\
&\sum_{j=1}^{n} (F_j(z_{j+1}) - F_j(z_j)) - \sum_{j=0}^{n} (F_j(w_{j+1}) - F_j(w_j)) = \\
&\sum_{j=0}^{n} [(F_j(z_{j+1}) - F_j(w_{j+1}) - (F_j(z_j) - F_j(w_j))] = \\
&\sum_{j=0}^{n} [(F_{j+1}(z_{j+1}) - F_{j+1}(w_{j+1}) - (F_j(z_j) - F_j(w_j))] = \\
&F_n(z_{n+1}) - F_n(w_{n+1}) - (F_0(z_0) - F_0(w_0)) = \\
&(F_n(\gamma_{s_1}(b)) - F_n(\gamma_{s_2}(b))) - (F_0(\gamma_{s_1}(a)) - F_0(\gamma_{s_2}(a))) = 0 - 0 = 0.
\end{aligned}$$

Así pues

$$\int_{\gamma_{s_1}} f = \int_{\gamma_{s_2}} f$$

siempre que $|s_1 - s_2| \leq \delta$.

Si ahora hacemos variar s_1, s_2, eligiendo $s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_m < s_{m+1} = 1$ de tal forma que $|s_j - s_{j+1}| \leq \delta$, obtenemos de lo anterior que

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_{s_1}} f = \dots = \int_{\gamma_{s_m}} f = \int_{\gamma_1} f.$$

□

Definición 7.2. Un abierto conexo Ω de $\mathbb{C}$ diremos que es *simplemente conexo* si todo par de curvas en Ω con los mismos puntos inicial y final son homótopas en Ω.

Por ejemplo, es sencillo demostrar que todo abierto convexo de $\mathbb{C}$ es simplemente conexo. También lo es el probar (usando por ejemplo coordenadas polares y observando que $(0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ es convexo en $\mathbb{R}^2$) que $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ es simplemente conexo. Un ejemplo de abierto que *no* es simplemente conexo es $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (veremos un poco más adelante en este capítulo una demostración rigurosa de este hecho).

Es un ejercicio rutinario probar que los homeomorfismos conservan los conjuntos simplemente conexos. En particular, cualquier abierto de $\mathbb{C}$ que sea homeomorfo a un disco es simplemente conexo.[1]

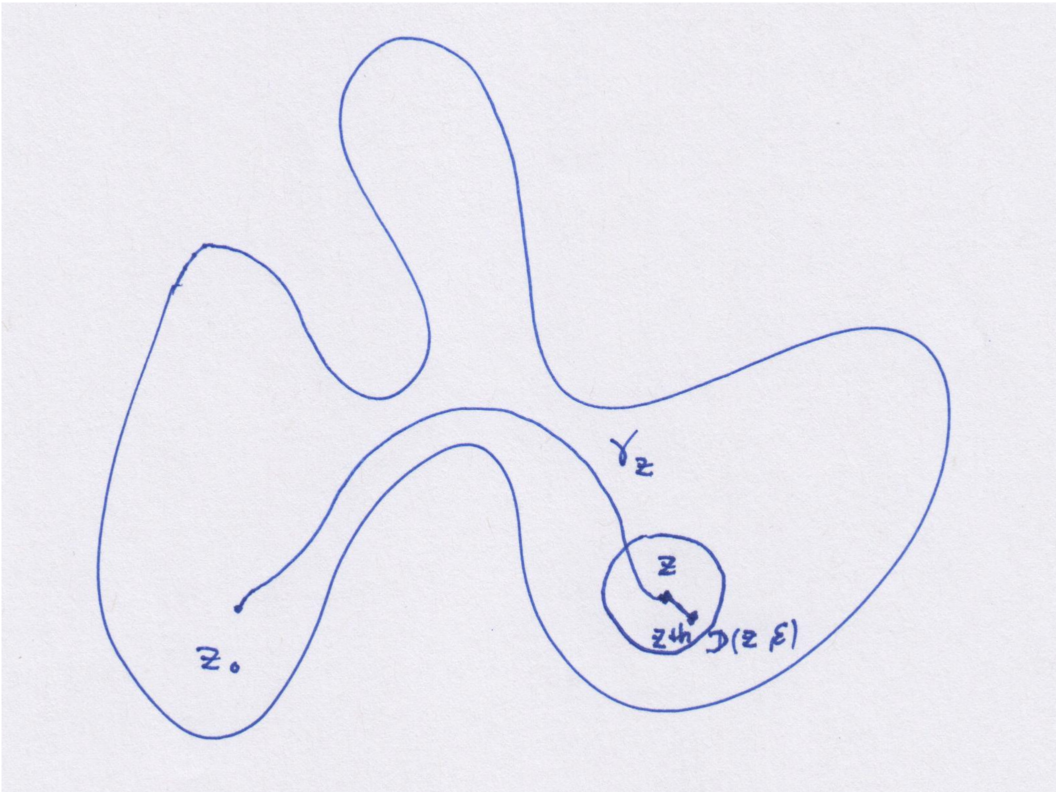
Teorema 7.3. *[Existencia de primitivas en abiertos simplemente conexos] Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es un abierto simplemente conexo y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces existe $F : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $F' = f$.*

Demostración. Fijemos $z_0 \in \Omega$ y definamos $F : \Omega \to \mathbb{C}$ por

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f,$$

donde γ_z es cualquier curva C^1 a trozos en Ω que une z_0 con z (siempre existe tal γ_z por ser Ω conexo). La definición de F es independiente de la curva γ_z escogida, ya que si $\widetilde{\gamma_z}$ es otra curva que une z_0 con z en Ω, como este abierto es simplemente conexo entonces γ_z y $\widetilde{\gamma_z}$ son homótopas en Ω, y por tanto $\int_{\gamma_z} f = \int_{\widetilde{\gamma_z}} f$ gracias al teorema anterior.

[1] Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre con la conexión (la imagen continua de un conjunto conexo es conexo), una aplicación continua puede transformar un conjunto simplemente conexo en otro conjunto que no es simplemente conexo. Por ejemplo, $\mathbb{C}$ es simplemente conexo, $f(z) = e^z$ es continua, y $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ no es simplemente conexo.



Veamos que $F'(z) = f(z)$ para cada $z \in \Omega$. En efecto, fijemos $z \in \Omega$ y elijamos $\varepsilon > 0$ tal que $D(z, \varepsilon) \subset \Omega$. Como $D(z, \varepsilon)$ es convexo, existe G primitiva de f en $D(z, \varepsilon)$. Dada una curva C^1 a trozos γ_z que una z_0 con z, la concatenación $\gamma_z \cup [z, z+h]$ es una curva que une z_0 con $z+h$, y por tanto

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f = G(z+h) - G(z),$$

lo que implica que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{G(z+h) - G(z)}{h} = G'(z) = f(z).$$

□

Teorema 7.4. *[de Cauchy, versión 2.0] Si Ω es un abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces*

$$\int_\gamma f = 0$$

para toda curva cerrada $\gamma : [a, b] \to \Omega$ de clase C^1 a trozos.

Demostración. Por el teorema anterior existe $F : \Omega \to \mathbb{C}$ primitiva de f, y entonces se tiene

$$\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0.$$

□

Usando el teorema anterior podemos dar un argumento riguroso que demuestra que $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ no es simplemente conexo: si lo fuera, tendríamos

$$0 = \int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i,$$

lo que es absurdo.

En los cursos de topología algebraica se demuestra fácilmente que un conjunto abierto, conexo y acotado Ω de $\mathbb{R}^2$ es simplemente conexo si y sólo si $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{C}$ es conexo. También se ve que si Γ es una curva cerrada simple en $\mathbb{R}^2$ entonces $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ tiene exactamente dos componentes conexas: una no acotada, que se llama región exterior a Γ, y otra acotada, que se llama región interior a Γ; este resultado se conoce como el Teorema de la curva de Jordan.[2] En lo que resta de capítulo usaremos con frecuencia estos teoremas.

7.2. Teoremas de Cauchy para recintos múltiplemente conexos

A veces se llama región múltiplemente conexa a cualquier abierto limitado exteriormente por una curva cerrada simple de clase C^1 a trozos, e interiormente por una cantidad finita de curvas del mismo tipo, que son los bordes de los *agujeros* del abierto. Para este tipo de regiones es válida una versión del teorema de Green que nos servirá para deducir versiones más generales del teorema de Cauchy y de la fórmula integral de Cauchy.

Teorema 7.5. *[de Green] Sea Ω un abierto simplemente conexo y acotado de $\mathbb{R}^2$ cuyo borde $\partial\Omega$ es una curva cerrada simple de clase C^1 a trozos, y sean $U_1, ..., U_m$ abiertos simplemente conexos con adherencias $\overline{U_j}$ que están contenidas en Ω, y con bordes $\partial U_1, ..., \partial U_m$ que son curvas cerradas simples de clase C^1 a trozos. Supongamos que $\overline{U_j} \cap \overline{U_k} = \emptyset$ si $j \neq k$. Sean P, Q funciones de clase C^1 definidas en un entorno abierto de $\overline{\Omega} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^m U_j\right)$. Entonces se tiene que*

$$\int_{\partial\Omega} Pdx + Qdy - \sum_{j=1}^{m} \int_{\partial U_j} Pdx + Qdy = \int_{\Omega \setminus \left(\bigcup_{j=1}^m U_j\right)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

en donde $\partial\Omega$, $\partial U_1, ..., \partial U_m$ están orientadas positivamente.

Recordemos que la orientación positiva del borde $\partial\Omega$ de un recinto Ω limitado por una curva cerrada simple γ en $\mathbb{R}^2$ es aquella que recorre $\partial\Omega$ una vez en el sentido de las agujas del reloj, lo que equivale a recorrer $\partial\Omega$ una vez dejando Ω a la izquierda.[3]

Teorema 7.6. *[de Cauchy, versión 3.0] Sean Ω, $U_1, ..., U_m$ como en el teorema anterior, y sea f una función holomorfa definida en un entorno abierto de $\overline{\Omega} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^m U_j\right)$. Entonces*

$$\int_{\partial\Omega} f - \sum_{j=1}^{m} \int_{\partial U_j} f = 0,$$

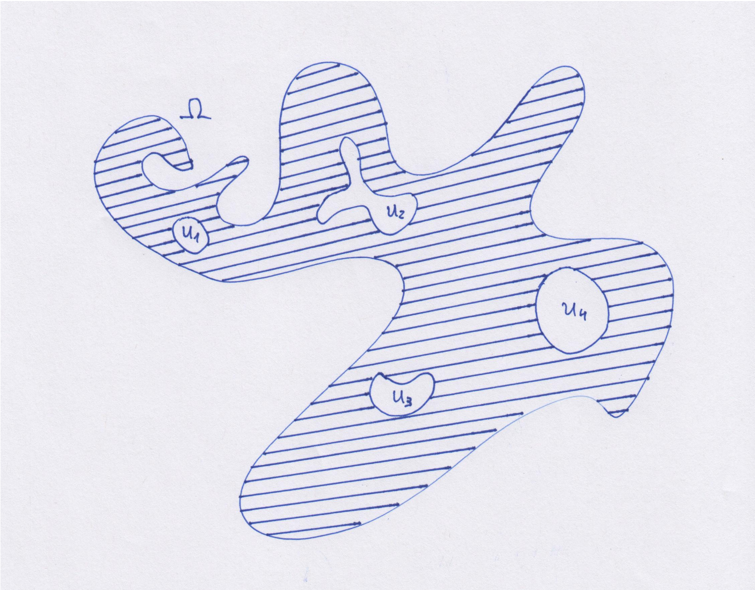
en donde $\partial\Omega$, $\partial U_1, ..., \partial U_m$ están orientadas positivamente.

Demostración. Escribamos $f = u + iv$, con $u, v : W \to \mathbb{R}$, siendo W un entorno abierto de $\overline{\Omega} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^m U_j\right)$ en donde f es holomorfa, y $u = \text{Re}(f)$, $v = \text{Im}(f)$. Sea $\gamma : [a, b] \to W$ una parametrización de $\partial\Omega$, y escribamos $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Se tiene que

$$\int_{\partial\Omega} f = \int_a^b \left(u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))\right) \gamma'(t)dt = \int_a^b \left(u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))\right) \left(x'(t) + iy'(t)\right) dt =$$
$$\int_a^b \left(u(\gamma(t))x'(t) - v(\gamma(t))y'(t)\right) dt + i \int_a^b \left(u(\gamma(t))y'(t) - v(\gamma(t))x'(t)\right) dt =$$
$$\int_{\partial\Omega} udx - vdy + i \int_{\partial\Omega} vdx + udy.$$

[2]Más en general, se demuestra que si S es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que es homeomorfo a la esfera $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ entonces $\mathbb{R}^n \setminus S$ tiene exactamente dos componentes conexas.

[3]También equivale, como veremos más adelante en este mismo capítulo, a que $W(\gamma, z) = 1$ para todo $z \in \Omega$, donde $W(\gamma, \cdot)$ es la *función índice*.



Análogamente resulta que

$$\sum_{j=1}^{m}\int_{\partial U_j} f=\sum_{j=1}^{m}\int_{\partial U_j} udx-vdy+i\sum_{j=1}^{m}\int_{\partial U_j} vdx+udy.$$

Entonces, usando primero el teorema de Green y después las ecuaciones de Cauchy-Riemann, obtenemos que

$$\int_{\partial\Omega} f-\sum_{j=1}^{m}\int_{\partial U_j} f=$$

$$\int_{\partial\Omega} udx-vdy-\sum_{j=1}^{m}\int_{\partial U_j} udx-vdy+i\left(\int_{\partial\Omega} vdx+udy-\sum_{j=1}^{m}\int_{\partial U_j} vdx+udy\right)=$$

$$\int_{\Omega\setminus(\bigcup_{j=1}^m U_j)}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy+i\int_{\Omega\setminus(\bigcup_{j=1}^m U_j)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy=$$

$$\int_{\Omega\setminus(\bigcup_{j=1}^m U_j)} 0dxdy+i\int_{\Omega\setminus(\bigcup_{j=1}^m U_j)} 0dxdy=0+0=0.$$

□

Teorema 7.7 (Fórmula integral de Cauchy, versión 3.0)**.** *Sean Ω, $U_1,\dots,U_m$ como en el teorema anterior, y sea f una función holomorfa definida en un entorno abierto de $\overline{\Omega}\setminus\bigcup_{j=1}^m U_j$. Entonces, para todo $z\in\Omega\setminus\bigcup_{j=1}^m\overline{U_j}$ se tiene que*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m}\int_{\partial U_j}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi,$$

y también

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi-\frac{n!}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m}\int_{\partial U_j}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi,$$

para todo $n\in\mathbb{N}$, donde $\partial\Omega$, $\partial U_1,\dots,\partial U_m$ están orientadas positivamente.

En particular, si Ω es simplemente conexo y $\partial\Omega$ es una curva de clase C^1 a trozos, se tiene

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi$$

para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $z \in \Omega$.

Demostración. Fijemos $z \in \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^m \overline{U_j}$, y sea $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{D}(z,\varepsilon) \subset \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^m \overline{U_j}$. Consideremos la función

$$g(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - z},$$

que es holomorfa en un entorno abierto de $\left(\overline{\Omega} \setminus \bigcup_{j=1}^m U_j\right) \setminus D(z,\varepsilon) = \overline{\Omega} \setminus \left(D(z,\varepsilon) \cup \bigcup_{j=1}^m U_j\right)$. Por el teorema anterior (aplicado con g en lugar de f y $D(z,\varepsilon), U_1, ..., U_m$ en lugar de $U_1, ..., U_m$) tenemos que

$$0 = \int_{\partial\Omega} g - \int_{\partial D(z,\varepsilon)} g - \sum_{j=1}^m \int_{\partial U_j} g,$$

es decir

$$0 = \int_{\partial\Omega}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi - \int_{\partial D(z,\varepsilon)}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi - \sum_{j=1}^m \int_{\partial U_j}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi.$$

Por otro lado, por la fórmula integral de Cauchy para un disco sabemos que

$$2\pi i f(z) = \int_{\partial D(z,\varepsilon)}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi,$$

lo que combinado con la igualdad anterior nos da

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi - \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^m \int_{\partial U_j}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi.$$

El resto de las afirmaciones del enunciado se demuestran análogamente. □

7.3. El logaritmo complejo

Recordemos que se define la *rama principal del logaritmo* como la función

$$\log z = \log |z| + i\mathrm{Arg} z, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0],$$

donde $\mathrm{Arg} z = \theta$ si $z = re^{i\theta}$ con $\theta \in (-\pi, \pi)$. Esta función no puede extenderse continuamente a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. También hemos visto que la función $1/z$ no tiene ninguna primitiva en ningún conjunto de la forma $D(0,\varepsilon) \setminus \{0\}$. A continuación vemos que puede definirse una rama del logaritmo en cualquier abierto simplemente conexo que contenga al número 1 y no contenga a 0.

Teorema 7.8. *Sea Ω un abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}$ tal que $1 \in \Omega$ y $0 \notin \Omega$. Entonces existe una función $F : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que:*

1. *F es holomorfa en Ω, y $F'(z) = 1/z$ para todo $z \in \Omega$;*
2. *$e^{F(z)} = z$ para todo $z \in \Omega$;*
3. *$F(r) = \log r$ si r es un número real positivo cerca de 1.*

Además F es la única función en Ω con estas tres propiedades.

Demostración. Como $0 \notin \Omega$, la función $1/z$ es holomorfa en Ω. Definamos

$$F(z) = \int_{\gamma_z} \frac{1}{\xi} d\xi,$$

donde γ_z es cualquier curva de clase C^1 a trozos en Ω que conecta 1 con z. Puesto que Ω es simplemente conexo, la definición de $F(z)$ no depende de la curva γ_z escogida. Repitiendo el argumento de la demostración del Teorema 7.3 se ve que para cada $z \in \Omega$ existe $F'(z) = 1/z$, lo que prueba (1).

Para comprobar (2) es suficiente ver que $ze^{-F(z)} = 1$ para todo $z \in \Omega$. Y en efecto, como

$$\frac{d}{dz}\left(ze^{-F(z)}\right) = e^{-F(z)} - zF'(z)e^{-F(z)} = 0,$$

el conjunto Ω es conexo, y la función $\Omega \ni z \mapsto ze^{-F(z)}$ vale 1 en 1 (ya que $F(1) = 0$), esta función debe ser constantemente 1.

Finalmente, si $r \in (0, +\infty)$ y $\varepsilon > 0$ es tal que $r \in D(1, \varepsilon) \subset \Omega$ entonces el segmento $[1, r]$ está contenido en Ω, y por tanto

$$F(r) = \int_{[1,r]} \frac{1}{\xi} d\xi = \int_1^r \frac{1}{t} dt = \log r,$$

lo que prueba (3). La unicidad de F se deduce del teorema de identidad y de (3). $\square$

En el caso $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, si $z = re^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi)$, escogiendo γ_z como la concatenación del segmento $[1, r]$ con la curva $t \mapsto re^{it}$, $0 \leq t \leq \theta$, es claro que la función F construida en el teorema anterior coincide con $\log z = \log r + i\theta$. Esto también puede deducirse de la propiedad (3) y el teorema de identidad, ya que tanto F como $\log$ son funciones holomorfas en Ω que coinciden en un disco de Ω. Más en general, este último argumento demuestra que, dado un abierto Ω de $\mathbb{C}$ simplemente conexo y tal que $1 \in \Omega$, $0 \notin \Omega$, sólo existe una primitiva de $1/z$ que vale 0 en 1.

Es también útil observar que

$$\log(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \quad \text{para todo } |z| < 1,$$

identidad que puede comprobarse derivando ambos miembros de la igualdad, sumando la serie geométrica obtenida, y observando que ambos miembros se anulan en $z = 0$.

A partir del teorema anterior podemos también definir ramas de la función z^α para cualquier $\alpha \in \mathbb{C}$: dado Ω abierto simplemente conexo que contiene a 1 pero no a 0, se define

$$z^\alpha = e^{\alpha \log_\Omega z},$$

donde $\log_\Omega$ denota la única primitiva de $1/z$ en Ω que vale 0 en 1, es decir la función F del teorema. Obsérvese que $1^\alpha = 1$, y que si $\alpha = 1/n$ entonces $(z^{1/n})^n = z$.

A continuación vemos que cualquier función definida en un abierto simplemente conexo y que no se anula en ningún punto de su dominio tiene un *logaritmo*.

Teorema 7.9. *Si Ω es un abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa y no se anula en ningún punto de Ω, entonces existe una función holomorfa $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que*

$$f(z) = e^{g(z)} \quad \textit{para todo } z \in \Omega.$$

Además, si h es otra función holomorfa en Ω con la misma propiedad, entonces $g - h$ es constante.

Demostración. Fijemos un punto $z_0 \in \Omega$ y definamos, para cada $z \in \Omega$,

$$g(z) = \int_{\gamma_z} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi + c_0,$$

donde γ_z es cualquier curva C^1 a trozos en Ω que une z_0 con z, y c_0 es una constante tal que $e^{c_0} = f(z_0)$. La definición es independiente de la curva γ_z escogida, y usando el argumento de la demostración del Teorema 7.3 se ve que g es holomorfa en Ω con

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Además la función $z \mapsto f(z)e^{-g(z)}$ es constantemente 1 en Ω, puesto que su derivada es cero (lo que se comprueba inmediatamente), y vale $1 = f(z_0)e^{-c_0}$ en $z = z_0$. Es decir que $f(z) = e^{g(z)}$ para todo $z \in \Omega$. Por último, si h es otra función con la misma propiedad que g, se tiene

$$g'(z)f(z) = g'(z)e^{g(z)} = f'(z) = h'(z)e^{h(z)} = h'(z)f(z),$$

de lo que se deduce que $g'(z) = h'(z)$, y por tanto que g y h difieren en una constante. $\square$

7.4. La función índice

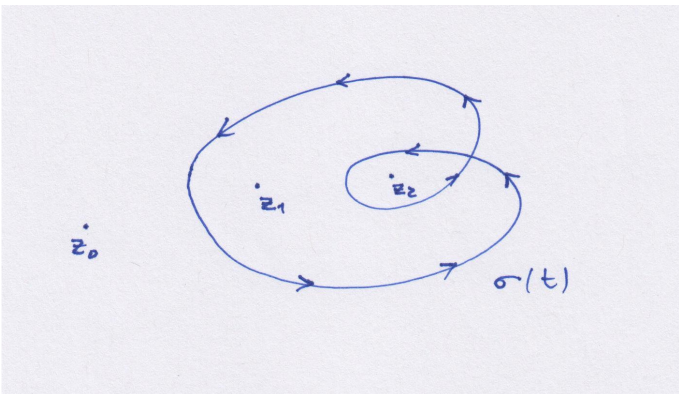
En esta sección será importante distinguir entre una curva parametrizada γ y su traza Γ, ya que γ podrá recorrer varias veces su traza, y hacerlo en sentido negativo. Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ es una curva parametrizada, cada vez que γ da una vuelta alrededor de un punto z, la cantidad $\frac{1}{2\pi}\arg(\gamma(t) - z)$ aumenta o disminuye una unidad (dependiendo del sentido de giro). Recordando que $w \mapsto \log(w-z) := \log|w-z| + i\arg(w-z)$ tiene por derivada $1/(w-z)$, si γ es cerrada resulta natural llamar a la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{w-z}dw$$

el número de vueltas que γ da alrededor de z.

Definición 7.3. Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ es una curva cerrada y $z \notin \Gamma := \gamma([a, b])$, se define el *índice de z con respecto a γ* (o el número de vueltas de γ alrededor de z; en inglés *the winding number*) por

$$W(\gamma, z) = W_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\xi - z}d\xi.$$



Por ejemplo, es fácil ver, usando la fórmula integral de Cauchy y un sencillo cambio de variable, que para $\gamma(t) = e^{ikt}$, $0 \le t \le 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, se tiene

$$W_\gamma(z) = \begin{cases} k & \text{si } |z| < 1; \\ 0 & \text{si } |z| > 1. \end{cases}$$

Por otro lado, para la curva σ de la figura, tenemos

$$W_\sigma(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z = z_0; \\ 1 & \text{si } z = z_1 \\ 2 & \text{si } z = z_2. \end{cases}$$

Proposición 7.10. *Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva cerrada, y $\Gamma = \gamma([a,b])$. Se tiene:*

1. *Si $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ entonces $W_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.*
2. *Si z y w están en una misma componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ entonces $W_\gamma(z) = W_\gamma(w)$.*
3. *Si z está en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, entonces $W_\gamma(z) = 0$.*

Demostración. Podemos suponer $[a,b] = [0,1]$. Definamos $G : [0,1] \to \mathbb{C}$ por

$$G(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds,$$

que es una función continua que además es derivable, salvo quizás en una cantidad finita de puntos, con

$$G'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}.$$

Consideremos también la función $H : [0,1] \to \mathbb{C}$ definida por

$$H(t) = (\gamma(t) - z)\, e^{-G(t)},$$

que también es continua, y derivable salvo a lo sumo en una cantidad finita de puntos, con

$$H'(t) = \gamma'(t) e^{-G(t)} - G'(t)\,(\gamma(t) - z)\, e^{-G(t)} = 0.$$

Esto implica que H es constante. Como además, puesto que $\gamma(0) = \gamma(1)$, se tiene

$$\gamma(0) - z = (\gamma(0) - z)\, e^{-G(0)} = H(0) = H(1) = (\gamma(1) - z)\, e^{-G(1)} = (\gamma(0) - z)\, e^{-G(1)},$$

deducimos que $e^{-G(1)} = 1$, luego $G(1)$ es un múltiplo entero de $2\pi i$, y como

$$W_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} G(1),$$

esto prueba (1).

Por otra parte, por el teorema de derivación bajo el signo integral, la función $W_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, y en particular continua en este conjunto, y como por (1) esta función sólo toma valores enteros, debe ser constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Esto prueba (2).

Finalmente, (3) se deduce de (2) y del hecho de que

$$\lim_{|z| \to \infty} W_\gamma(z) = \lim_{|z| \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\xi - z} d\xi = 0.$$

□

Teorema 7.11. *Sea Ω un abierto conexo y acotado de $\mathbb{C}$. Entonces Ω es simplemente conexo si y sólo si $W_\gamma(z) = 0$ para toda curva cerrada γ en Ω de clase C^1 a trozos y todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.*

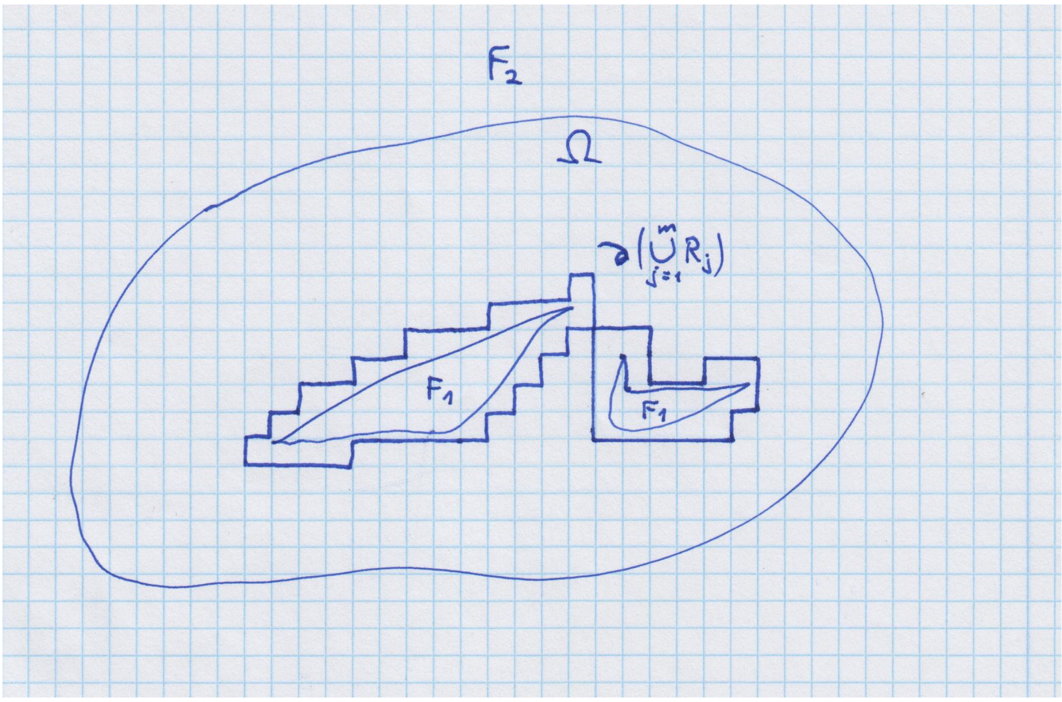
Demostración. Si Ω es simplemente conexo y $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ entonces la función $f(\xi) = \frac{1}{\xi - z}$ es holomorfa en Ω, y por el Teorema 7.4 tenemos

$$\int_\gamma f = 0,$$

luego $W_\gamma(z) = 0$, para toda curva γ cerrada en Ω de clase C^1 a trozos.

Para demostrar el recíproco usaremos que, al ser Ω abierto conexo y acotado, Ω es simplemente conexo si y sólo si $\mathbb{C} \setminus \Omega$ es conexo. Razonando por reducción al absurdo, basta entonces probar que si $\mathbb{C} \setminus \Omega$ no es conexo entonces existen una curva γ cerrada en Ω de clase C^1 a trozos y un punto $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ con $W_\gamma(w) \neq 0$.

Al ser $\mathbb{C} \setminus \Omega$ desconexo, podemos escribir $\mathbb{C} \setminus \Omega = F_1 \cup F_2$, con F_1, F_s cerrados disjuntos no vacíos. Además, como sólo uno de ellos es no acotado, podemos suponer que F_2 es la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \Omega$, y que F_1 es compacto.



Lema 7.12. *Dado $w \in F_1$, existe una familia finita $\mathcal{Q} = \{Q_1, ..., Q_n\}$ de cuadrados cerrados pertenecientes a una cuadrícula del plano formada por cuadrados de igual tamaño y lados paralelos a los ejes, tal que:*

1. $w \in int(Q_1)$;
2. $int(Q_j) \cap int(Q_k) = \emptyset$ *si* $k \neq j$;
3. $F_1 \subset int\left(\bigcup_{j=1}^{n} Q_j\right)$;
4. $F_2 \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} Q_j\right) = \emptyset$;
5. *La frontera de* $\bigcup_{j=1}^{n} Q_j$ *está contenida en* Ω *y consiste en una unión finita de curvas cerradas simples poligonales que son disjuntas dos a dos.*

Suponiendo cierto el lema por un momento, terminemos la demostración del teorema. Puesto que $w \in \mathrm{int}(Q_1)$ y $w \notin Q_j$ para $j > 1$, se tiene que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_j} \frac{d\xi}{\xi - w} = 1,$$

donde los Q_j están orientados positivamente. Sean $\gamma_1, ..., \gamma_M$ las curvas poligonales dadas por (5) del lema; entonces se tiene, debido a las cancelaciones al integrar dos veces la función en cada lado común a dos cuadrados, una vez en un sentido y otra en el sentido opuesto, que

$$1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_j} \frac{d\xi}{\xi - w} = \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{d\xi}{\xi - w}.$$

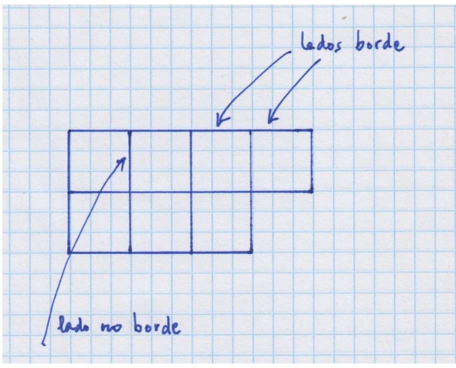
En particular, alguna de las integrales de la suma del miembro de la derecha tiene que ser no nula: existe $k_0 \in \{1, ..., M\}$ tal que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{k_0}} \frac{d\xi}{\xi - w} \neq 0,$$

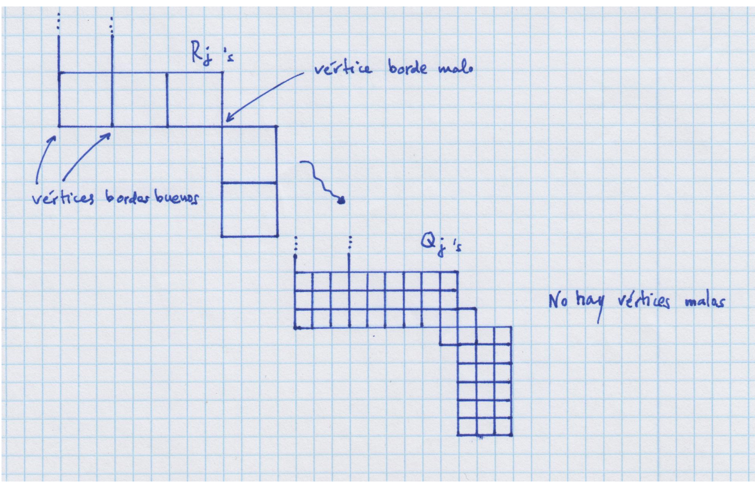
es decir $W_{\gamma_{k_0}}(w) \neq 0$ para esta curva cerrada γ_{k_0} que, según (5) del lema, está contenida en Ω, mientras que $w \in F_1 \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$. Esto concluye la prueba del teorema.

Demostremos ahora el lema. Como F_1 es compacto y F_2 es cerrado, y $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, tenemos que la distancia $d := d(F_1, F_2)$ es positiva. Sea $\mathcal{G}_0$ una cuadrícula del plano formada por cuadrados cerrados de lados de longitud menor que $d/10$, paralelos a los ejes coordenados, y de forma que w está en el centro de un cuadrado de esta cuadrícula. Denotemos por $\mathcal{R} = \{R_1, ..., R_m\}$ la subcolección de $\mathcal{G}_0$ formada por los cuadrados de $\mathcal{G}_0$ que cortan a F_1; obviamente $\mathcal{R}$ es finita por ser F_1 acotado, y podemos suponer que w está en el centro de R_1. La frontera de cada cuadrado R_j de $\mathcal{R}$ se considera orientada positivamente. Es claro que $\mathcal{R}$ cumple las propiedades $(1) - (4)$ del enunciado, aunque quizás no la (5).

Diremos que un lado de un cuadrado R_j de $\mathcal{R}$ es un *lado borde* si no pertenece a dos cuadrados adyacentes de $\mathcal{R}$. Llamaremos *vértices borde* a los extremos de cada lado borde. Diremos que un vértice borde es *malo* si es punto extremo de más de dos lados borde, y que es *bueno* en caso contrario. La frontera de $\bigcup_{j=1}^{n} R_j$ es igual a la unión de los lados borde de los cuadrados de $\mathcal{R}$. Si hay vértices malos entonces esta frontera no será unión de curvas cerradas simples y la propiedad (5) no se cumplirá. Para corregir esta posible situación, refinamos la cuadrícula $\mathcal{G}_0$, subdividiendo cada cuadrado de $\mathcal{G}_0$ en 9 subcuadrados de igual tamaño, obteniendo así una sub cuadrícula que llamaremos $\mathcal{G}$.



Denotemos por $\{Q_1, ..., Q_p\}$ los cuadrados de $\mathcal{G}$ que son subcuadrados de cuadrados de $\mathcal{R}$ (así que $p = 9m$). Podemos suponer que w está en el centro de Q_1. Podemos ahora añadir una cantidad finita de cuadrados de $\mathcal{G}$ alrededor de cada vértice malo de $\{R_1, ..., R_m\}$ (exactamente dos cuadrados más por cada vértice malo) de forma que la familia resultante $\mathcal{Q} = \{Q_1, ..., Q_n\}$ no tiene ningún vértice malo.



Es claro que $\mathcal{Q}$ cumple $(1)-(4)$. Veamos que también cumple (5). Sea $[a_1, a_2]$ un lado borde de $\bigcup_{j=1}^n Q_j$. Entonces a_2 es el punto inicial de otro lado borde $[a_2, a_3]$. Continuando así, obtenemos una sucesión de lados borde $[a_1, a_2]$, $[a_2, a_3]$, $[a_3, a_4]$, etc. Como hay una cantidad finita de lados borde, se tiene que $a_k = a_j$ para ciertos $j > k \geq 1$. Podemos elegir como j' el menor j para el que existe $k < j$ con $a_k = a_j$, y llamar k' al menor de los $k < j$ tales que $a_k = a_{j'}$. Si $k' > 1$ entonces a'_j sería punto extremo de tres lados borde, a saber $[a_{k'-1}, a_{k'}]$, $[a_{k'}, a_{k'+1}]$, y $[a_{j'-1}, a_{j'}]$, luego $a_{j'}$ sería un vértice malo, lo cual es absurdo. Por tanto $k' = 1$. Esto quiere decir que el polígono formado por $[a_1, a_2]$, $[a_2, a_3]$, ..., $[a_{j'-1}, a_{j'}]$ es una curva cerrada simple, a la que llamamos γ_1.

Repitiendo el proceso, en una cantidad finita de pasos obtenemos curvas poligonales cerradas simples $\gamma_2, ..., \gamma_M$, disjuntas dos a dos y también disjuntas con γ_1, y de forma que la unión $\bigcup_{j=1}^M \gamma_j$ es precisamente la frontera de $\bigcup_{j=1}^n Q_j$. □

El siguiente resultado resume lo que sabemos sobre los abiertos acotados simplemente conexos, en relación con las propiedades de las funciones holomorfas.[4]

Teorema 7.13. *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{C}$. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *Ω es simplemente conexo.*
2. *$\mathbb{C} \setminus \Omega$ es conexo.*
3. *Toda función holomorfa $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tiene una primitiva.*
4. *Para toda curva cerrada γ en Ω de clase C^1 a trozos y toda función holomorfa $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se tiene que $\int_\gamma f = 0$.*
5. *$W_\gamma(z) = 0$ para toda curva cerrada γ en Ω de clase C^1 a trozos y todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.*

Demostración. Por todo lo anterior sabemos que $(1) \iff (2) \implies (3) \iff (4)$. Es obvio, poniendo $f(w) = \frac{1}{w-z}$ en (4), que $(4) \implies (5)$. Y también sabemos $(5) \implies (1)$ por el teorema anterior. Luego todas las propiedades son equivalentes. □

Usando la función índice podemos también dar una versión de la fórmula integral de Cauchy que es válida para curvas parametrizadas cerradas cuyas trazas pueden recorrerse varias veces.

Teorema 7.14. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa, y $\gamma : [a, b] \to \Omega$ una curva cerrada. Entonces*

$$W_\gamma(z)\, f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

para todo $z \in \Omega \setminus \gamma([a, b])$.

Demostración. Definamos $g : \Omega \to \mathbb{C}$ por

$$g(\xi) = \begin{cases} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z} & \text{si } \xi \neq z; \\ f'(z) & \text{si } \xi = z. \end{cases}$$

Es claro que g es continua, en Ω, y que g es holomorfa en $\Omega \setminus \{z\}$. Por un ejercicio (o simplemente como consecuencia de los teoremas de Goursat y Morera), sabemos que entonces g es de hecho holomorfa en todo Ω; otra forma de comprobar esto es escribir $f(\xi) - f(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(\xi - z)^n$, luego $g(\xi) = \frac{1}{\xi - z} \sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(\xi - z)^n = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(\xi - z)^n$.

[4] Las equivalencias del teorema, exceptuando la propiedad (2), son válidas también para abiertos no acotados, como veremos en el capítulo 10.

Por el teorema de Cauchy tenemos entonces

$$\int_\gamma g = 0.$$

Pero, puesto que $z \in \Omega \setminus \gamma([a,b])$,

$$\begin{aligned} 0 = \int_\gamma g \quad &= \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_\gamma \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi \\ &= \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - f(z) \int_\gamma \frac{1}{\xi - z} d\xi \\ &= \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - f(z) 2\pi i W_\gamma(z), \end{aligned}$$

de donde se sigue la igualdad del enunciado. □

7.5. Problemas

Problema 7.1. Esbozar la traza de la curva $\gamma(t) = e^{it}\operatorname{sen}(2t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, y determinar $W(\gamma, z)$ para todo z que no está en dicha traza. Después hacer lo mismo con la curva $\sigma(t) = e^{it}\cos(2t)$.

Problema 7.2. Probar que si $f : U \to V$ es un homeomorfismo y U es simplemente conexo entonces también lo es V.

Problema 7.3. Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ dos curvas de clase C^1 a trozos, y supongamos que son homótopas en Ω. Demostrar que existe una homotopía $H : [0,1] \times [a,b] \to \Omega$ entre γ_0 y γ_1 tal que para cada $s \in [0,1]$ la curva $[a,b] \ni t \mapsto \gamma_s(t) := H(s,t)$ es de clase C^1 a trozos. Demostrar también que si γ_0, γ_1 son de clase C^1 entonces H puede tomarse de clase $C^1([0,1] \times [a,b])$.
Indicación: usar por ejemplo el teorema de Weierstrass para aproximar una homotopía continua por un polinomio real $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $P([0,1] \times [a,b]) \subset \Omega$. Después combinar γ_0, γ_1 y P mediante sumas y multiplicaciones por funciones adecuadas para obtener una función H con las propiedades deseadas.

Problema 7.4. Probar que todo abierto Ω estrellado respecto de un punto (es decir, que existe $z_0 \in \Omega$ tal que para todo $z \in \Omega$ el segmento $[z_0, z]$ está contenido en Ω) es simplemente conexo.

Problema 7.5. Probar que no existe ninguna función f holomorfa en el disco unidad abierto que se extienda con continuidad a su frontera y tal que $f(z) = 1/z$ en dicha frontera.

Problema 7.6. Sean $\gamma, \sigma : [a,b] \to \mathbb{C}$ curvas cerradas de clase C^1 a trozos, $z \in \mathbb{C}$, y supongamos que para cada t se tiene $z \notin [\gamma(t), \sigma(t)]$. Probar que $W(\gamma, z) = W(\sigma, z)$.

Problema 7.7. Sean γ y σ son curvas cerradas en un abierto Ω de $\mathbb{C}$, de clase C^1 a trozos. Supongamos que γ y σ son homótopas en Ω. Probar que $W(\gamma, z) = W(\sigma, z)$ para todo $z \notin \Omega$.

Problema 7.8. Sean Ω abierto de $\mathbb{C}$, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ diferenciable en sentido real, con Df continua. Supongamos que

$$\int_{\partial D} f = 0$$

para todo disco cerrado D contenido en Ω. Demostrar que entonces f es holomorfa en Ω.
Observación: en realidad no hace falta que f sea de clase C^1; es suficiente con que f sea continua. Ver el Problema 11.10.

Capítulo 8

Singularidades aisladas y series de Laurent

8.1. Series de Laurent

En este capítulo estudiaremos las funciones que son holomorfas en un entorno de un punto z_0 salvo quizás en z_0; veremos que estas funciones pueden expandirse en series de la forma $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$, y que una fórmula similar a la de Cauchy permite calcular los coeficientes a_n en función de los valores de f en una circunferencia de centro z_0. Después clasificaremos los tipos de singularidades que este tipo de funciones pueden tener en z_0.

Definición 8.1. Diremos que una función f definida en un entorno de ∞ en $\mathbb{C}^*$ es holomorfa en ∞ si la función g definida por

$$g(z) = f(1/z),$$

donde convenimos que $1/\infty = 0$ y $1/0 = \infty$, es holomorfa en 0.

Por ejemplo, la función $f(z) = 1/z$ es holomorfa en ∞. Lo mismo ocurre con $z \mapsto P(1/z)$, donde P es cualquier polinomio. Sin embargo ningún polinomio $P(z)$ no constante es holomorfo en ∞. Obsérvese también que si f es holomorfa en ∞ entonces f está acotada en un entorno de ∞ en $\mathbb{C}^*$ (es decir, está acotada fuera de algún disco centrado en 0).

El teorema de descomposición de Laurent nos permite expresar una función holomorfa en un anillo $D(z_0,\sigma)\setminus\overline{D}(z_0,\rho)$ como suma de una función holomorfa en $D(z_0,\sigma)$ más una función holomorfa en $\mathbb{C}^*\setminus D(z_0,\rho)$.

Teorema 8.1. *[Descomposición de Laurent] Sean $0 \leq \rho < \sigma \leq +\infty$, y supongamos que f es una función holomorfa en el anillo $\Omega := D(z_0,\sigma)\setminus\overline{D}(z_0,\rho)$. Entonces existen $f_0 : D(z_0,\sigma) \to \mathbb{C}$ y $f_1 : \mathbb{C}^*\setminus\overline{D}(z_0,\rho) \to \mathbb{C}$ funciones holomorfas tales que*

$$f(z) = f_0(z) + f_1(z) \text{ para todo } z \in \Omega.$$

Además, si normalizamos f_1 de forma que $f_1(\infty) = 0$, entonces esta descomposición es única.

Obsérvese que si f es holomorfa en el disco grande $D(z_0,\sigma)$ esta descomposición es la trivial: $f = f_0$, y $f_1 = 0$. Si f es holomorfa en $\mathbb{C}^*\setminus\overline{D}(z_0,\rho)$ entonces también tenemos una descomposición trivial: $f = f_1 + c_0$, con $f_0(z) = c_0$, constante. Si suceden ambas cosas, entonces f está acotada en $\mathbb{C}$, y por el teorema de Liouville debe ser constante, luego en este caso $f_1 = 0$ y $f_0 = c_0$, constante.

Demostración. Comencemos probando la unicidad de la descomposición. Supongamos que $f(z) = g_0(z) + g_1(z)$ es otra descomposición con las mismas propiedades. Entonces $g_0 - f_0 = f_1 - g_1$ en Ω. Definamos

$$h(z) = \begin{cases} g_0(z) - f_0(z) & \text{si } z \in D(z_0,\sigma); \\ f_1(z) - g_1(z) & \text{si } z \in \mathbb{C}^*\setminus\overline{D}(z_0,\rho). \end{cases}$$

Es claro que la función $h : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ está bien definida y es holomorfa; además $h(\infty) = f_1(\infty) - g_1(\infty) = 0 - 0 = 0$. Luego $\lim_{|z|\to\infty} h(z) = 0$, y como además h es continua esto implica que h está acotada en $\mathbb{C}$. Por el teorema de Liouville esto implica que h es constante, y sólo puede ser la constante 0. Por tanto $g_0 = f_0$, y $g_1 = f_1$.

Demostremos ahora la existencia de esta descomposición. Por la fórmula integral de Cauchy para recintos múltiplemente conexos, aplicada al subanillo $\Omega_{r,s} := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < s\}$, donde $\rho < r < s < \sigma$, conjunto en el que f es holomorfa, tenemos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi - z_0| = s} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \qquad (*)$$

para todo $z \in \Omega_{r,s}$. Definamos $f_{0,s} : D(z_0, s) \to \mathbb{C}$ por

$$f_{0,s}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi - z_0| = s} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

y $f_{1,r} : \mathbb{C}^* \setminus \overline{D}(z_0, s) \to \mathbb{C}$ por

$$f_{1,r}(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

entendiendo que $f_{1,r}(\infty) = 0$. Por el teorema de derivación bajo el signo integral, es claro que $f_{0,s}$ y $f_{1,r}$ son holomorfas en $D(z_0, s)$ y en $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(z_0, r)$, respectivamente. Además es inmediato comprobar que $\lim_{z\to\infty} f_{1,r}(z) = 0$, luego la función

$$z \mapsto \begin{cases} f_{1,r}(1/z)(z) & \text{si } z \neq 0; \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

es continua en un entorno de 0, y holomorfa en dicho entorno menos 0. Por tanto (combinando los teoremas de Goursat y Morera) es holomorfa en un entorno de 0, y esto significa que f_1 es holomorfa en ∞. En consecuencia $f_{1,r}$ es holomorfa en todo su dominio.

Nótese que si $\rho < s < s' < \sigma$ entonces, por el teorema de Cauchy para regiones múltiplemente conexas, aplicado al subanillo $\{w \in \mathbb{C} : s < |w - z_0| < s'\}$ y a la función $\xi \mapsto \frac{f(\xi)}{\xi - z}$, que es holomorfa en un entorno de la adherencia de dicho subanillo siempre que $|z - z_0| < s$, se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi - z_0| = s'} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi - z_0| = s} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0,$$

lo que significa que

$$f_{0,s}(z) = f_{0,s'}(z) \text{ si } |z - z_0| < s \text{ y } \rho < s < s' < \sigma.$$

Análogamente se ve que

$$f_{1,r}(z) = f_{1,r'}(z) \text{ si } r < |z - z_0| \text{ y } \rho < r' < r < \sigma.$$

Esto nos permite definir finalmente $f_0 : D(z_0, \sigma) \to \mathbb{C}$ por

$$f_0(z) = f_{0,s}(z)$$

para cualquier s tal que $|z - z_0| < s < \sigma$, y $f_1 : \mathbb{C}^* \setminus \overline{D}(z_0, \rho) \to \mathbb{C}$ por

$$f_1(z) = f_{1,r}(z)$$

para cualquier r tal que $\rho < r < |z - z_0|$, con $f_1(\infty) = 0$. Es claro que las definiciones de f_0 y f_1 son independientes de los números s, r elegidos. Además f_0 es holomorfa en cada disco $D(z_0, s)$ con $s < \sigma$, por coincidir con $f_{0,s}$ en tal disco, y por tanto f_0 es holomorfa en la unión de todos esos discos abiertos, que es precisamente $D(z_0, \sigma)$. Análogamente se razona que f_1 es holomorfa en $\mathbb{C}^* \setminus \overline{D}(z_0, \rho)$. Finalmente, puesto que $(*)$ nos dice que $f(z) = f_{0,s}(z) + f_{1,r}(z)$ para todo $z \in \Omega_{r,s}$ y cada $\rho < r < s < \sigma$, se deduce que $f = f_0 + f_1$ en Ω. $\square$

Teorema 8.2. *[Desarrollo en series de Laurent] Sean $0 \leq \rho < \sigma \leq +\infty$, y supongamos que f es una función holomorfa en el anillo $\Omega := D(z_0,\sigma) \setminus \overline{D}(z_0,\rho)$. Entonces f tiene una expansión de la forma*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \ \ \rho < |z-z_0| < \sigma,$$

que converge absolutamente en cada punto del anillo Ω, y que converge uniformemente en cada subanillo de la forma $r \leq |z-z_0| \leq s$ siempre que $\rho < r < s < \sigma$. Los coeficientes a_n vienen dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}} d\xi$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, en donde r es cualquier número tal que $\rho < r < \sigma$. Además, las funciones f_0 y f_1 del teorema anterior vienen dadas por

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \ \ |z-z_0| < \sigma,$$

y

$$f_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{a_n}{(z-z_0)^n}, \ \ \rho < |z-z_0|.$$

Demostración. Podemos suponer que $z_0 = 0$ salvo un cambio de variable $w = z - z_0$. Consideremos las funciones $f_0 : D(0,\sigma) \to \mathbb{C}$ y $f_1 : \mathbb{C}^* \setminus \overline{D}(0,\rho) \to \mathbb{C}$ dadas por el teorema anterior. Como f_0 es holomorfa en $D(0,\sigma)$, sabemos que tiene un desarrollo en serie de potencias

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

que converge absoluta y uniformemente en cada disco $D(0,r)$ con $r < \sigma$. Por otra parte, como f_1 es holomorfa en $\mathbb{C}^* \setminus \overline{D}(0,\rho)$ sabemos que $z \mapsto f_1(1/z)$ es holomorfa en $D(0,1/\rho)$, y también tiene un desarrollo de la forma

$$f_1\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \ \ |z| < 1/\rho,$$

que converge absoluta y uniformemente en cada disco de la forma $D(0,\alpha)$ con $\alpha < 1/\rho$. Por tanto, poniendo $w = 1/z$, tenemos que

$$f_1(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^{-n}, |w| > 1/\rho,$$

con convergencia absoluta y uniforme en cada conjunto de la forma $\mathbb{C}^* \setminus \overline{D}(0,r)$, con $r > \rho$. Además $b_0 = 0$ ya que $f_1(\infty) = 0$. Definiendo entonces $a_n = b_{-n}$ para $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, tenemos que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \ \ \rho < |z| < \sigma,$$

con convergencia absoluta y uniforme en cualquier subanillo de la forma $r \leq |z| \leq s$ con $\rho < r < s < \sigma$.

Para calcular los a_n dividimos por $(z-z_0)^{n+1}$ e integramos en la circunferencia $|z-z_0| = r$. Como la converencia de la serie es uniforme en esta circunferencia, podemos intercambiar el orden de la suma y la integral, obteniendo que

$$\begin{aligned}
\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz &= \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \right) dz \\
&= \int_{|z-z_0|=r} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-n-1} \right) dz \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^{k-n-1} dz = a_n 2\pi i,
\end{aligned}$$

puesto que $\int_{|z-z_0|=r}(z-z_0)^m dz$ es igual a 0 si $m \neq -1$, y es igual a $2\pi i$ para $m = -1$. □

8.2. Singularidades aisladas

Definición 8.2. Se dice que un punto z_0 es una singularidad aislada de una función f si f está definida en el *disco agujereado* $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ para algún $r > 0$, y f es holomorfa en este conjunto.

Por ejemplo $1/z$ tiene una singularidad aislada en 0; $\operatorname{sen}(1/z)$ tiene singularidades aisladas en cada punto de la forma πk, con $k \in \mathbb{Z}$, y $1/\operatorname{sen}(1/z)$ no tiene una singularidad aislada en 0.

Si f tiene una singularidad aislada en z_0, sabemos por el teorema anterior que f admite una representación

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \;\; 0 < |z-z_0| < r.$$

Según cuántos y cuáles coeficientes a_n se anulen en esta serie, diremos que f tiene una singularidad de uno u otro tipo en z_0:

1. Si $a_n = 0$ para todo $n < 0$, se dice que f tiene una *singularidad evitable* en z_0. En este caso tenemos $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, y si definimos $f(z_0) = a_0$ entonces f es holomorfa en $D(z_0, r)$.

2. Si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_{-N} \neq 0$ y $a_k = 0$ para todo $k < -N$, se dice que f tiene un *polo de orden* N en z_0. En este caso tenemos

$$f(z) = \frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N} + ... + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

   y a $P(z) = \frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N} + ... + \frac{a_{-1}}{z-z_0}$ se le llama *parte principal* de f en z_0. Si $N = 1$ se habla de polo simple, si $N = 2$ de polo doble, etc.

3. Finalmente, si $a_k \neq 0$ para una cantidad infinita de $k < 0$, se dice que f tiene una *singularidad esencial* en z_0.

Es obvio que estas tres posibilidades son exhaustivas y mutuamente excluyentes. A continuación estudiamos cómo caracterizar cada tipo de singularidad (sin tener que calcular los a_n, lo que podría resultar inmanejable en muchas situaciones).

Teorema 8.3 (Riemman)**.** *Si $f : D(z_0, r) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ está acotada y es holomorfa entonces f tiene una extensión F que es holomorfa en $D(z_0, r)$.*

El recíproco es obvio, y por tanto este resultado caracteriza las singularidades evitables de una función holomorfa.

Demostración. Podemos suponer que f es holomorfa en un entorno de $\overline{D}(z_0,r)\setminus\{z_0\}$ tomando un r más pequeño si hace falta. Para cada $\varepsilon \in (0,r)$, por la fórmula integral de Cauchy para recintos múltiplemente conexos aplicada en el anillo $\Omega_{r,\varepsilon} := \{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z-z_0| < r\}$ tenemos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z_0|=r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z_0|=\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

para cada $z \in \Omega_{r,\varepsilon}$. Usando que f está acotada en $D(z_0,r)$, es fácil comprobar que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z_0|=\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = 0 :$$

En efecto,

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z_0|=\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi\right| \leq \frac{2\pi\varepsilon \,\|f\|_\infty}{2\pi \operatorname{dist}(z, \partial D(z_0,\varepsilon))} \to 0$$

cuando $\varepsilon \to 0^+$. Por tanto se deduce que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z_0|=r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

para todo $z \in D(z_0,r)\setminus\{z_0\}$. Pero, según el teorema de derivación bajo el signo integral, el miembro de la derecha define una función holomorfa en $D(z_0,r)$, a la que podemos llamar $F(z)$, y se concluye el resultado. □

El siguiente teorema caracteriza los polos de una función.

Teorema 8.4. *Sea z_0 una singularidad aislada de una función f. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *z_0 es un polo de f;*
2. $\lim_{z\to z_0}|f(z)| = \infty$*;*
3. *La función $g(z) = 1/f(z)$ si $z \neq z_0$, $g(z_0) = 0$, es holomorfa en un entorno de z_0;*
4. *f puede escribirse en la forma*
$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^N}$$
con $N \in \mathbb{N}$, h holomorfa en un entorno de z_0, y $h(z_0) \neq 0$.

Demostración. (1) $\implies$ (2): si f tiene un polo de orden N en z_0 podemos escribir

$$f(z) = \frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N} + ... + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

con $a_{-N} \neq 0$, luego

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_0}|f(z)| &= \lim_{z\to z_0}\left|\frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N} + ... + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\right| \\
&= \lim_{z\to z_0}\frac{1}{|z-z_0|^N}\left|a_{-N} + a_{-N+1}(z-z_0) + ... + a_{-1}(z-z_0)^{N-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n+N}\right| \\
&= \lim_{z\to z_0}\frac{1}{|z-z_0|^N}|a_{-N}| = \infty.
\end{aligned}$$

$(2) \implies (3)$: La función g es obviamente holomorfa en un entorno de z_0 excepto quizás z_0; además es continua, ya que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

por (2). Luego g está acotada en un entorno de z_0. Por el teorema anterior se deduce que g es holomorfa en un entorno de z_0.

$(3) \implies (4)$: Si g es holomorfa y $g(z_0) = 0$, como no es idénticamente nula existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $g(z) = \sum_{n=N}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = (z - z_0)^N \sum_{k=0}^{\infty} c_{N+k}(z - z_0)^k$, donde $c_N \neq 0$. Entonces

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^N \sum_{k=0}^{\infty} c_{N+k}(z - z_0)^k} = \frac{1}{(z - z_0)^N} h(z),$$

donde

$$h(z) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} c_{N+k}(z - z_0)^k}$$

es holomorfa en un entorno de z_0, ya que $c_N \neq 0$.

$(4) \implies (1)$: Si $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_0)^k$ es la expansión en serie de potencias de h en un entorno de z_0, $b_0 = h(z_0) \neq 0$, y

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^N},$$

entonces

$$f(z) = \frac{b_0}{(z - z_0)^N} + \frac{b_1}{(z - z_0)^{N-1}} + ... + \frac{b_{N-1}}{z - z_0} + \sum_{j=0}^{\infty} b_{N+j}(z - z_0)^j$$

es una serie de Laurent con $b_0 \neq 0$, lo que implica que f tiene un polo de orden N en z_0. $\square$

Corolario 8.5. *De la demostración del teorema anterior se sigue que las siguientes afirmaciones son equivalentes, para una singularidad aislada z_0 de una función f:*

1. *z_0 es un polo de orden N de f;*
2. *$f(z) = h(z)/(z - z_0)^N$, donde h es holomorfa en un entorno de z_0 y $h(z_0) \neq 0$;*
3. *$1/f(z)$ es holomorfa en un entorno de 0 y tiene un cero de orden N en z_0.*

Recordemos que se dice que una función g tiene un cero de orden N en z_0 si g y sus primeras $N - 1$ derivadas se anulan en z_0. Tratándose de funciones holomorfas, esto significa que g puede escribirse $g(z) = \sum_{n=N}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = (z - z_0)^N \sum_{k=0}^{\infty} c_{N+k}(z - z_0)^k$, con $c_N \neq 0$.

Finalmente, el siguiente teorema caracteriza las singularidades esenciales.

Teorema 8.6. *[Casorati-Weierstrass] Sea z_0 una singularidad aislada de una función f. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f tiene una singularidad esencial en z_0;*
2. *Para todo $w \in \mathbb{C}$ existe una sucesión (z_n) que converge a z_0 tal que $f(z_n)$ converge a w. Es decir, $f(D(z_0, r) \setminus \{z_0\})$ es denso en $\mathbb{C}$, para cada $r > 0$.*

Demostración. $(1) \implies (2)$: De lo contrario existen $w \in \mathbb{C}$, $r > 0$, y $\delta > 0$ tales que

$$|f(z) - w| > \delta$$

para todo $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Podemos definir entonces $g : D(z_0, r) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ por

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w},$$

que es holomorfa y acotada (por $1/\delta$). Entonces por el teorema de Riemann de las singularidades evitables g puede extenderse a una función holomorfa en $D(z_0, r)$, que seguiremos denotando g. Se presentan ahora dos posibilidades:
Caso 1. Si $g(z_0) \neq 0$ entonces $f = w + 1/g$ es holomorfa en $D(z_0, r)$, lo que contradice que f tiene una singularidad esencial en z_0.
Caso 2. Si $g(z_0) = 0$ entonces, como g no es idénticamente nula y es holomorfa en $D(z_0, r)$, g tiene un cero de orden $N \geq 1$ en z_0, lo que por el teorema anterior significa que $f - w$, y por tanto también f, tiene un polo de orden $N \geq 1$ en z_0, también contradiciendo la hipótesis de que z_0 es una singularidad esencial de f.
(2) $\implies$ (1): si z_0 no es una singularidad esencial de f entonces se tiene que, o bien $\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell_0$ existe y es finito (cuando f tiene una singularidad evitable en z_0), o bien $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$ (cuando z_0 es un polo de f). En cualquiera de los casos es imposible que se cumpla (2), ya que los valores de $f(z)$ cuando z tiende a z_0 se acumularán en ℓ_0 o en ∞. $\square$

De hecho hay un resultado mucho más fuerte: un teorema de Picard asegura que si z_0 es una singularidad esencial de f, entonces el complemento de $f(D(z_0, r) \setminus \{z_0\})$ tiene a lo sumo un punto p_0 para todo $r > 0$ suficientemente pequeño, y para todo $w \in \mathbb{C} \setminus \{p_0\}$ el conjunto $f^{-1}(\{w\})$ es infinito. Puede consultarse una demostración de este teorema en el libro de Gamelin, páginas 315-322.

8.3. Problemas

Problema 8.1. Supongamos que f es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostrar que existe una constante c tal que $g(z) = f(z) - cz$ tiene una primitiva en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Problema 8.2. Consideremos una serie de Laurent centrada en 0, digamos $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. Encontrar una fórmula (en términos de los coeficientes a_n) para ρ y σ definidos respectivamente como el menor $r \in [0, +\infty]$ y el mayor $R \in [0, +\infty]$ tales que la serie converge en el anillo $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$.

Problema 8.3. Escribir las expansiones de Laurent, centradas en 0, de las funciones siguientes:

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1}; \;\; g(z) = \frac{1}{(z^2-1)(z^2-9)}.$$

Problema 8.4. Si $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es continua y $g(z) = f(z)^6$ es holomorfa en Ω, demostrar que f es holomorfa. Generalizar.

Problema 8.5. Determinar las singularidades aisladas de las siguientes funciones, y decir si son evitables, esenciales o polos (en este último caso determinar el orden del polo, y la parte principal de la función en el polo):

$$f(z) = \frac{ze^z}{z^2-1}, \;\; g(z) = z^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right), \;\; h(z) = \frac{\log z}{(z-1)^3}, \;\; \varphi(z) = e^{1/(z^2+1)}, \;\; \psi(z) = \frac{\cos z}{z^2 - \pi^2/4}.$$

Problema 8.6. Probar que si f tiene una singularidad aislada en z_0 y $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$ entonces la singularidad es evitable.

Problema 8.7. Demostrar que toda función entera f que sea inyectiva es de la forma $f(z) = az + b$, con $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Problema 8.8. Probar que si z_0 es una singularidad aislada de una función holomorfa f y $(z - z_0)^N f(z)$ está acotada cerca de z_0 para algún $N \in \mathbb{N}$ entonces la singularidad o bien es evitable o bien es un polo de orden menor o igual que N.

Problema 8.9. Sea $S = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de $\mathbb{C}$ que converge a un punto z_0, y sea f una función holomorfa en $D(z_0, r) \setminus (S \cup \{z_0\})$. Demostrar que entonces o bien f puede extenderse a una función meromorfa en $D(z_0, r)$, o bien para todo $w \in \mathbb{C}$ existe $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión convergente a z_0 tal que $f(\xi_n)$ converge a w.

Problema 8.10. Demostrar que si $f(z)$ es una función entera no constante entonces $e^{f(z)}$ tiene una singularidad esencial en ∞.

Problema 8.11. Sea f una función holomorfa en un entorno abierto del disco unidad cerrado, excepto en un punto z_0 de la circunferencia unidad en el cual f tiene un polo. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la expansión en serie de potencias de f centrada en 0. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = z_0.$$

Capítulo 9

Funciones meromorfas. El teorema de los residuos y algunas de sus consecuencias

9.1. Funciones meromorfas

Definición 9.1. Se dice que una función es meromorfa en un abierto Ω de $\mathbb{C}$ si f es holomorfa en Ω excepto quizás en un conjunto aislado de singularidades, en cada una de las cuales f tiene un polo.

Por ejemplo, todo cociente de polinomios (lo que se llama una función racional) es meromorfa en $\mathbb{C}$, ya que tiene un número finito de singularidades (los ceros del denominador, si la fracción es irreducible) que son polos. La función $f(z) = 1/\operatorname{sen} z$ es meromorfa en $\mathbb{C}$, ya que sus singularidades son los puntos $k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, donde f tiene polos simples, ya que $\operatorname{sen} z$ tiene ceros de orden uno en dichos puntos. Por otro lado, la función $e^{1/z}$ no es meromorfa, ya que aunque sólo tiene una singularidad (en $z = 0$), esta es esencial.

Observaciones 9.2. La suma de funciones meromorfas es meromorfa. Lo mismo ocurre con el producto, y también con el cociente si el denominador no es idénticamente nulo. Por otra parte, si f es meromorfa en Ω y denotamos $S_f = \{w \in \Omega : f \text{ tiene una singularidad esencial en } w\}$, entonces S_f es a lo sumo numerable y, en caso de ser infinito, sus puntos de acumulación[1] están en $\partial\Omega$.

Definición 9.3. Diremos que una función f tiene una singularidad aislada en ∞ si f es holomorfa en un entorno de ∞ en $\mathbb{C}^*$, menos quizás en ∞ (dicho de otro modo, f es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus D(0, R)$ para algún $R > 0$). Equivalentemente: f tiene una singularidad aislada en ∞ si $g(z) = f(1/z)$ tiene una singularidad aislada en 0. Diremos también que:

1. f tiene un polo de orden N en ∞ si $g(z) = f(1/z)$ tiene un polo de orden N en 0.
2. f tiene una singularidad evitable en ∞ si $g(z) = f(1/z)$ tiene una singularidad evitable en 0.
3. f tiene una singularidad esencial en ∞ si $g(z) = f(1/z)$ tiene una singularidad esencial en 0.

Equivalentemente, si consideramos el desarrollo en serie de Laurent de f fuera de un disco suficientemente grande,

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k, \quad |z| > \sigma,$$

se tiene que:

1. f tiene un polo de orden $N \geq 1$ en ∞ si y sólo si $b_N \neq 0$ y $b_k = 0$ para todo $k > N$.
2. f tiene una singularidad evitable en ∞ si y sólo si $b_k = 0$ para todo $k > 0$ (en cuyo caso f es holomorfa en ∞ si se define $f(\infty) = b_0$).

[1] Cuando los haya; por ejemplo, si Ω es acotado

3. f tiene una singularidad esencial en ∞ si y sólo si $b_k \neq 0$ para una cantidad infinita de $k > 0$.

Además, si f tiene un polo de orden N en ∞, definimos la parte principal de f en ∞ como el polinomio

$$P_\infty(z) = b_0 + b_1 z + ... + b_N z^N;$$

en particular $f - P_\infty$ es holomorfa en un entorno de ∞ en $\mathbb{C}^*$, y se anula en ∞.

Por ejemplo, si P es un polinomio de grado N en $\mathbb{C}$ entonces P tiene un polo de orden N en ∞, y su parte principal en ∞ coincide con el propio polinomio P. Por otro lado, la función e^z tiene una singularidad esencial en ∞. Como ejemplo de singularidad evitable en ∞ podemos considerar $f(z) = 1 + \frac{1}{z}$.

Definición 9.4. Diremos que f es meromorfa en un abierto Ω de $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ si f es holomorfa excepto quizás en un conjunto aislado de singularidades en cada una de las cuales f tiene un polo.

Observación 9.5. Si f es meromorfa en todo $\mathbb{C}^*$ entonces su conjunto de singularidades S_f es finito, puesto que $\mathbb{C}^*$ es compacto.

Observación 9.6. Ya hemos observado que toda función racional es meromorfa en $\mathbb{C}$. De hecho también lo es en $\mathbb{C}^*$, ya que si $P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ y $Q(z) = b_0 + b_1 z + ... + b_m z^m$ son polinomios con $a_n \neq 0 \neq b_m$ entonces

$$\frac{P(1/z)}{Q(1/z)} = \frac{z^m \left(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n\right)}{z^n \left(b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + ... + b_{m-1} z + b_m\right)}$$

sigue siendo una función racional, que tendrá un polo de orden $n - m$ en 0 si $n > m$, o una singularidad evitable en 0 si $n \leq m$. Por tanto P/Q tiene un polo de orden $n - m$ en ∞ si $n > m$, o una singularidad evitable en ∞ si $n \leq m$. El siguiente teorema demuestra que el recíproco es cierto: las funciones meromorfas en $\mathbb{C}^*$ son precisamente las funciones racionales.

Teorema 9.1. *Toda función meromorfa en $\mathbb{C}^*$ es racional.*

Demostración. Sea $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ meromorfa. Ya hemos observado que f sólo puede tener una cantidad finita de singularidades, que son polos. Definamos

$$P_\infty(z) = \begin{cases} f(\infty) & \text{si } f \text{ es holomorfa en } \infty; \\ \text{Parte principal de } f \text{ en } \infty & \text{si } f \text{ tiene un polo de orden } N \geq 1 \text{ en } \infty. \end{cases}$$

Entonces P_∞ es un polinomio, y se tiene

$$\lim_{|z| \to \infty} f(z) - P_\infty(z) = 0.$$

Por otro lado sean $z_1, ..., z_m$ los polos de f en $\mathbb{C}$, y P_k la parte principal de f en z_k para cada $k = 1, ..., m$. Cada función P_k es de la forma

$$P_k(z) = \frac{\alpha_{k,1}}{z - z_k} + ... + \frac{\alpha_{k,N_k}}{(z - z_k)^{N_k}},$$

y en particular P_k es holomorfa en ∞, con $P_k(\infty) = 0$. Además $f - P_k$ es holomorfa en z_k, por definición de parte principal.

Consideremos ahora la función

$$g(z) = f(z) - P_\infty(z) - \sum_{j=1}^{m} P_j.$$

Puesto que $f(z) - P_k(z)$ es holomorfa en z_k y cada P_j es holomorfa en z_k si $k \neq j$, es claro que g es holomorfa en z_k, para cada $k = 1, ..., m$. Por tanto g es entera. Además

$$\lim_{|z|\to\infty} g(z) = 0,$$

y como g es continua se deduce que g es acotada en $\mathbb{C}$. Luego por el teorema de Liouville f es constante en $\mathbb{C}$. Puesto que el límite de g en ∞ es 0, dicha constante sólo puede ser 0. Esto quiere decir que

$$f(z) = P_\infty(z) + \sum_{j=1}^{m} P_j(z)$$

y por tanto que f es racional. $\square$

Como subproducto de la demostración del teorema anterior obtenemos lo siguiente.

Corolario 9.2. *Toda función racional admite una descomposición en fracciones simples como la suma de un polinomio en z y sus partes principales en cada uno de sus polos en $\mathbb{C}$.*

9.2. El teorema de los residuos y algunas de sus consecuencias

Definición 9.7. Sea z_0 una singularidad aislada de f, y consideremos su serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \;\; 0 < |z - z_0| < \sigma.$$

Se define el *residuo* de $f(z)$ en z_0, y se denota $\text{Res}(f, z_0)$, como el coeficiente a_{-1} que aparece en esta expansión. Dicho de otro modo,

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f,$$

siendo r cualquier número con $0 < r < \sigma$.

Por ejemplo, es inmediato comprobar que $\text{Res}(\frac{1}{z}, 0) = 1$, $\text{Res}(\frac{1}{(z-z_0)^2}, z_0) = 0$, $\text{Res}(\frac{1}{1+z^2}, i) = \frac{1}{2i}$.

Teorema 9.3 (de los residuos)**.** *Sean Ω, $U_1, ..., U_m$ abiertos simplemente conexos y acotados cuyos bordes $\partial\Omega$, $\partial U_1, ..., \partial U_m$ son curvas cerradas simples de clase C^1 a trozos, y tales que $\overline{U_j} \subset \Omega$ y $\overline{U_j} \cap \overline{U_k} = \emptyset$ para todo $j \neq k$. Definamos $D = \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^m \overline{U_j}$, y supongamos que f es holomorfa en un entorno abierto de $\overline{D}$ excepto quizás en una cantidad finita de singularidades $z_1, ..., z_n$ en D. Entonces se tiene que*

$$\int_{\partial D} f := \int_{\partial\Omega} f - \sum_{j=1}^{m} \int_{\partial U_j} f = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathit{Res}(f, z_j),$$

en donde $\partial\Omega$, ∂U_j están orientadas positivamente

Es obvio que este teorema generaliza el teorema de Cauchy, versión 3. De hecho es equivalente a éste ya que puede demostrarse fácilmente usando el teorema de Cauchy.

Demostración. Elijamos $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{D}(z_j, \varepsilon) \subset D$ para cada $j = 1, ..., n$. Sea D_ε la región obtenida al quitar de D la unión de estos discos $\overline{D}(z_j, \varepsilon)$, es decir,

$$D_\varepsilon = \Omega \setminus \left(\left(\bigcup_{j=1}^{m} \overline{U_j} \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n} \overline{D}(z_k, \varepsilon) \right) \right).$$

Por el teorema de Cauchy, versión 3, tenemos que

$$0 = \int_{\partial D_\varepsilon} f = \int_{\partial\Omega} f - \sum_{j=1}^{m} \int_{\partial U_j} f - \sum_{k=1}^{n} \int_{\partial D(z_k,\varepsilon)} f,$$

y como

$$\int_{\partial D(z_k,\varepsilon)} f = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_k)$$

se sigue el resultado. □

El teorema de los residuos puede usarse para calcular integrales que pueden resultar muy difíciles de evaluar por otros medios; véanse los problemas de este capítulo. A continuación damos algunas reglas que pueden agilizar el cálculo de residuos en la práctica.

Proposición 9.4.

1. *Si f tiene un polo simple en z_0, entonces Res$(f, z_0) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z)$.*

2. *Si f tiene un polo doble en z_0, entonces*

$$\textit{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{d}{dz}\left((z - z_0)^2 f(z)\right).$$

3. *Si f y g son holomorfas en un entorno de z_0 y g tiene un cero de orden 1 en z_0, entonces*

$$\textit{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

4. *Si g es holomorfa en un entorno de z_0 y tiene un cero de orden 1 en z_0 entonces*

$$\textit{Res}\left(\frac{1}{g}, z_0\right) = \frac{1}{g'(z_0)}.$$

Demostración. Para demostrar (1) podemos escribir

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + h(z),$$

donde h es una función holomorfa en un entorno de z_0, y multiplicando por $z - z_0$ y tomando límites se deduce el resultado. Para ver (2), observamos que

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \varphi(z),$$

donde φ es holomorfa en un entorno de z_0. Luego

$$(z - z_0)^2 f(z) = a_{-2} + a_{-1}(z - z_0) + (z - z_0)^2\varphi(z),$$

y derivando una vez y tomando después $\lim_{z\to z_0}$ en ambos miembros se obtiene lo que queremos. Obviamente (4) es consecuencia de (3) con $f \equiv 1$. Con las hipótesis de (3) sabemos por un resultado anterior que f/g tiene un polo simple en z_0. Usando (1) y la definición de derivada obtenemos entonces

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

□

Teorema 9.5 (Principio del argumento)**.** *Sea D un recinto como el del enunciado del teorema de los residuos, y supongamos que f es meromorfa en un entorno abierto de $\overline{D}$, que f no se anula en ningún punto de ∂D, y que f no tiene ningún polo en ∂D. Entonces se cumple que*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = N_0 - N_\infty,$$

donde N_0 denota el número de ceros de f en D y N_∞ representa el número de polos de f en D, en ambos casos contados con sus multiplicidades.

Demostración. Se deduce aplicando el teorema de los residuos a $f'(z)/f(z)$. En efecto, esta función es holomorfa en un entorno abierto de $\overline{D}$ excepto quizás en los ceros y en los polos de f en D. Sea z_0 un cero o un polo de f, y definamos

$$N = N_{z_0} := \begin{cases} \text{orden de } z_0 & \text{si } z_0 \text{ es un cero de } f; \\ -\text{orden de } z_0 & \text{si } z_0 \text{ es un polo de } f, \end{cases}$$

de modo que

$$f(z) = (z - z_0)^N g(z),$$

donde g es holomorfa en un entorno de z_0 y $g(z_0) \neq 0$. Entonces

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{N(z-z_0)^{N-1}g(z)}{(z-z_0)^N g(z)} + \frac{(z-z_0)^N g'(z)}{(z-z_0)^N g(z)} = \frac{N}{z-z_0} + h(z),$$

donde $h(z) := g'(z)/g(z)$ es holomorfa en un entorno de z_0 ya que g lo es y g no se anula en z_0. Por tanto f'/f tiene un polo simple en z_0, con residuo N. Entonces, si $z_1, ..., z_m$ denotan los ceros o polos de f (y por tanto los polos de f'/f) se deduce, aplicando el teorema de los residuos a f'/f, que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{m}\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_j\right) = \sum_{j=1}^{m} N_{z_j} = N_0 - N_\infty.$$

□

La interpretación geométrica del teorema anterior es la siguiente. En las condiciones del teorema, si suponemos además que ∂D es una curva cerrada simple, parametrizada por $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, entonces se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\,\gamma'(t)}{f(\gamma(t))}dt = W(\sigma, 0),$$

donde $\sigma(t) = f(\gamma(t))$, $t \in [a, b]$. Así el teorema anterior nos dice que *el incremento en el argumento de σ (o sea el número de vueltas que da la curva $\sigma = f \circ \gamma$ alrededor del origen) coincide con el número de ceros de f en la región interior a γ, menos el número de polos de f en dicha región, contados con sus multiplicidades*.

Una aplicación importante del principio del argumento es el teorema de Rouché, que nos dice que el número de ceros de una función holomorfa en una región dada es estable con respecto a pequeñas perturbaciones de la función.

Teorema 9.6 (Rouché)**.** *Sea Ω un abierto simplemente conexo y acotado tal que su frontera $\partial\Omega$ es una curva cerrada simple de clase C^1 a trozos, y sean f, g funciones holomorfas en un abierto que contiene a $\overline{\Omega}$. Supongamos que*

$$|g(z)| < |f(z)| \text{ para todo } z \in \partial\Omega.$$

Entonces f y $f + g$ tienen el mismo numero de ceros en Ω, contando sus multiplicidades.

Demostración. Daremos dos demostraciones del teorema, ya que ambas son instructivas y contienen ideas que resultan útiles para probar otros resultados o resolver problemas.

La primera demostración usa la interpretación geométrica del principio del argumento: por hipótesis $|f+g| \geq |f| - |g| > 0$ en $\partial\Omega$, lo que implica que $f \neq 0 \neq f+g$ en $\partial\Omega$. Escribiendo

$$f + g = f\left(1 + \frac{g}{f}\right),$$

obtenemos

$$\arg(f+g) = \arg(f) + \arg\left(1 + \frac{g}{f}\right),$$

y puesto que $|g/f| < 1$ en $\partial\Omega$, los valores de $1 + g(z)/f(z)$, $z \in \partial\Omega$, están en el semiplano derecho, lo que implica que el incremento en el argumento de $1 + g(z)/f(z)$ cuando z se mueve en una curva cerrada tal como $\partial\Omega$ es cero. Por tanto las funciones $\arg(f(z)+g(z))$ y $\arg(f(z))$ experimentan el mismo incremento cuando z se mueve a lo largo de $\partial\Omega$. Por el principio del argumento este incremento coincide con el número de ceros de f dentro de Ω, y también con el de $f+g$. Por tanto f y $f+g$ tienen el mismo número de ceros en Ω.

La segunda demostración es analítica: para cada $t \in [0,1]$ definamos

$$f_t(z) = f(z) + tg(z),$$

de forma que $f_0 = f$, $f_1 = f+g$. Denotemos por n_t el número de ceros de f_t en Ω, contados con sus multiplicidades. Puesto que por hipótesis es $|f| > |g|$ en $\partial\Omega$, se tiene que

$$|f_t(z)| = |f(z) + tg(z)| \geq |f(z)| - t|g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0 \text{ si } z \in \partial\Omega, t \in [0,1],$$

y por tanto f_t no tiene ningún cero en $\partial\Omega$. Por el principio del argumento obtenemos entonces que

$$n_t = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f_t'(z)}{f_t(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b H(t,\gamma(s))\gamma'(s)ds,$$

donde $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ parametriza $\partial\Omega$ y H es la función definida por

$$H(t,z) = \frac{f'(z) + tg'(z)}{f(z) + tg(z)}, \quad (t,z) \in [a,b] \times \partial\Omega.$$

Es fácil ver que la función $[0,1] \ni t \mapsto n_t = \int_a^b H(t,\gamma(s))\gamma'(s)ds$ es continua (o aplíquese el ejercicio 4.7 del capítulo 4). Pero como n_t sólo toma valores enteros y $[0,1]$ es conexo, se deduce que n_t debe ser constante, y en particular $n_0 = n_1$ (es decir, el número de ceros de $f_0 = f$ coincide con el de $f_1 = f+g$). □

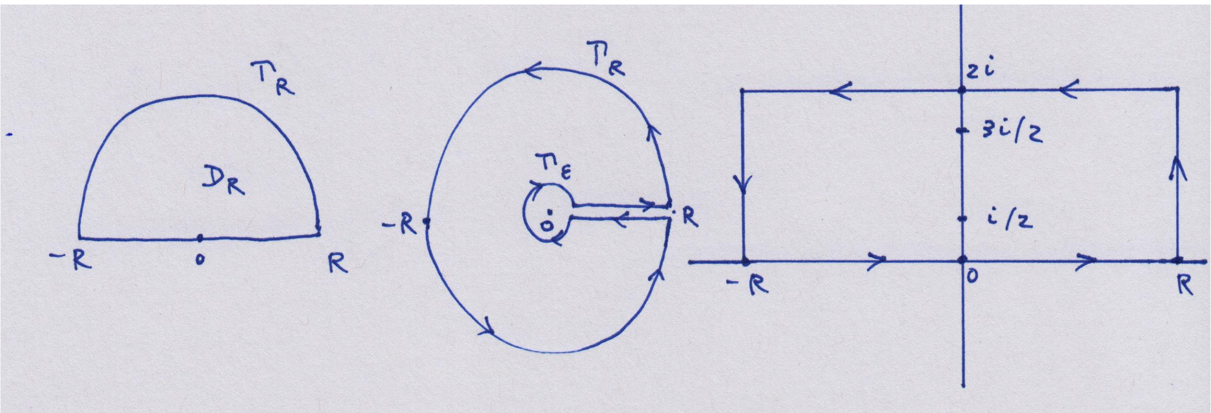
9.3. Problemas

Problema 9.1. Si P y Q son polinomios complejos tales que grado(Q) $\geq$ grado$(P) + 2$ y Q no tiene ceros en $\mathbb{R}$, demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}, z_j\right),$$

donde $z_1, ..., z_m$ son los polos de P/Q en el semiplano superior.

Indicación: aplicar el teorema de los residuos en el recinto D_R de la figura y hacer $R \to \infty$.



Problema 9.2. Probar que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx = \pi e^{-a}$.

Problema 9.3. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx$.

Problema 9.4. Sean $Q(z)$ un polinomio complejo sin ceros en $\mathbb{R}$, y f una función holomorfa en un abierto que contiene el semiplano superior cerrado. Supongamos que existe $b < m-1$ tal que $|f(z)| \leq |z|^b$ para $|z| > 1$. Probar que, si $z_1, ..., z_m$ son los ceros de $Q(z)$ en el semiplano superior abierto, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \text{Res}\left(\frac{f}{Q}, z_j\right).$$

Problema 9.5. Calcular $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos\theta} d\theta$ si $a > 1$.
Indicación: usar el teorema de los residuos en el círculo unidad.

Problema 9.6. Demostrar que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\,\text{sen}\,\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

para todos $a > b > 0$.

Problema 9.7. Demostrar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} d\theta = \frac{2\pi}{1-r^2}$$

para todo $0 < r < 1$.

Problema 9.8. Demostrar que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^{2k}\theta d\theta = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$$

si $k \geq 0$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Indicación: probar primero que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{w+\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{w^2-1}}$$

para todo $w \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, y luego expandir los dos miembros de esta igualdad en series de potencias centradas en ∞.

Problema 9.9. Demostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{(1+x)^2} dx = \frac{\pi\alpha}{\text{sen}(\pi\alpha)}$$

para $-1 < \alpha < 1$.
Indicación: considerar la rama de la función $z^\alpha/(1+z)^2$ definida en $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ por $f(z) = r^\alpha e^{i\alpha\theta}/(1+z)^2$ si $z = re^i\theta$, $0 < \theta < 2\pi$, y usar el teorema de los residuos en uno de los recintos de la figura.

Problema 9.10 (Lema de Jordan). Si Γ_R es la traza de $z(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, probar que

$$\int_{\Gamma_R} |e^{iz}|\,|dz| < \pi.$$

Indicación: $\operatorname{sen} t \geq 2t/\pi$ si $t \in [0, \pi/2]$.

Problema 9.11. El lema de Jordan puede usarse para calcular mediante el teorema de los residuos integrales del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \operatorname{sen} x dx$ o del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos x dx$, donde P y Q son polinomios con grado(Q) = grado$(P) + 1$ y Q no tiene ceros en $\mathbb{R}$. Por ejemplo, demostrar que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^3 \operatorname{sen} x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

Problema 9.12. Probar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{\cosh(\pi x)} dx = \frac{1}{\cosh(\pi\xi)}.$$

Indicación: usar el teorema de los residuos en el rectángulo de la figura.

Problema 9.13. Usar el teorema de Rouché para averiguar cuántos ceros tiene el polinomio $P(z) = z^6 + 9z^4 + z^3 + 2z + 4$ dentro del círculo unidad.

Problema 9.14. Demostrar que $2z^5 + 6z - 1$ tiene una raíz en el intervalo $(0,1)$ y cuatros raíces en el anillo $\{z : 1 < |z| < 2\}$.

Problema 9.15. Probar que para todos $m, n \in \mathbb{N}$, el polinomio

$$P(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + ... + \frac{z^m}{m!} + 3z^n$$

tiene exactamente n raíces en el disco unidad.

Problema 9.16. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ meromorfa, y supongamos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sharp(f^{-1}(w)) \leq m$ para cada $w \in \mathbb{C}$. Probar que f es racional.

Problema 9.17. Sea $f = P/Q$ una función racional, donde P y Q no tienen ceros en común, y definamos $d = \text{máx}\{\text{grado}(P), \text{grado}(Q)\}$. Probar que para cada $w \in \mathbb{C} \setminus \{f(\infty)\}$ se tiene $\sharp(f^{-1}(w)) = d$, y que $\sharp(f^{-1}(w)) = d$ para todo $w \in \mathbb{C}^*$ (contando multiplicidades).

Problema 9.18. Sea Ω un dominio simplemente conexo con frontera una curva cerrada de clase C^1 a trozos, y sean f, g meromorfas en un entorno abierto de Ω tales que ni f ni g tienen ceros o polos en $\partial\Omega$. Dar un ejemplo que muestre que f y $f + g$ pueden tener un número diferente de ceros en Ω.

Problema 9.19. Sin embargo, en la situación del ejercicio anterior, puede encontrarse una relación entre el número de ceros y el número de polos de f y de $f + g$. Encuéntrese y demuéstrese.

Capítulo 10

El teorema de la aplicación abierta. Las aplicaciones conformes y el teorema de la aplicación de Riemann.

10.1. El teorema de la aplicación abierta y algunas consecuencias

Se dice que una aplicación es abierta si transforma conjuntos abiertos en conjuntos abiertos. Las funciones holomorfas tienen la importante propiedad de ser abiertas siempre que no sean constantes.

Teorema 10.1 (de la aplicación abierta)**.** *Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es abierto conexo y f es holomorfa y no constante en Ω, entonces $f(\Omega)$ es abierto en $\mathbb{C}$.*

Demostración. Sea $w_0 \in f(\Omega)$, digamos $f(z_0) = w_0$ con $z_0 \in \Omega$. Queremos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que $D(w_0, \varepsilon) \subset f(\Omega)$. Por el teorema de identidad, puesto que f no es constante, existe $\delta > 0$ tal que $D(z_0, \delta) \subset \Omega$ y $f(z) \neq w_0$ para todo $z \in \overline{D}(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$. Entonces, como $\partial D(z_0, \delta)$ es compacto y $f - w_0$ es continua y no se anula en este conjunto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(z) - w_0| \geq \varepsilon \text{ para todo } z \in \partial D(z_0, \delta).$$

Veamos que para este ε se tiene $D(w_0, \varepsilon) \subset f(\Omega)$. Dado $w \in D(w_0, \varepsilon)$, definamos las funciones

$$\begin{aligned} g(z) &= f(z) - w; \\ F(z) &= f(z) - w_0; \\ G(z) &= w_0 - w, \end{aligned}$$

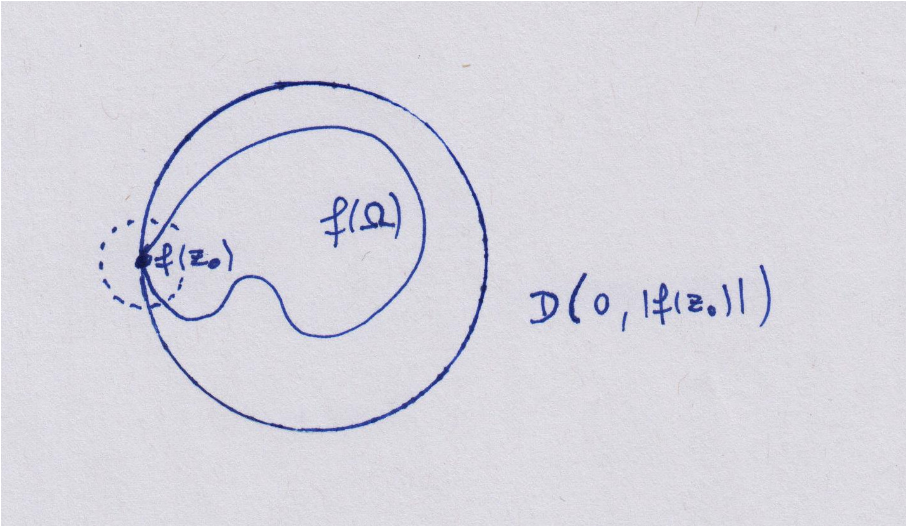
de modo que

$$g(z) = F(z) + G(z).$$

Se tiene $|F(z)| > |G(z)|$ para cada $z \in \partial D(z_0, \delta)$, y por supuesto F y G son holomorfas en un entorno de $\overline{D}(z_0, \delta)$. Entonces, por el teorema de Rouché, $g = F + G$ debe tener un cero en $D(z_0, \delta)$, ya que F lo tiene (en z_0). Esto significa que existe $z \in D(z_0, \delta)$ tal que $f(z) = w$, y por tanto que $w \in f(D(z_0, \delta)) \subset f(\Omega)$. □

Una consecuencia inmediata de este teorema es el teorema del módulo máximo.

Teorema 10.2 (del módulo máximo)**.** *Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es abierto conexo y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces $|f|$ no tiene ningún máximo en Ω.*



Demostración. Supongamos que $|f|$ alcanzara un máximo en $z_0 \in \Omega$, es decir $f(\Omega) \subseteq \overline{D}(0, |f(z_0|)$. Como $f(\Omega)$ es abierto y está contenido en $\overline{D}(0, |f(z_0|)$, debe estar de hecho contenido en el disco abierto $D(0, |f(z_0)|)$ (ya que ningún disco centrado en la frontera de otro disco puede estar contenido en el segundo). Pero $f(z_0) \in f(\Omega)$ está en la frontera de $D(0, |f(z_0)|)$, no en su interior. □

Corolario 10.3. *Sean Ω abierto conexo y acotado de $\mathbb{C}$, y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ continua tal que f es holomorfa en Ω. Entonces*

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|.$$

Demostración. Si f es constante esto es obvio. Y si no lo es, por el teorema anterior, el máximo de la aplicación continua $|f|$ en el compacto $\overline{\Omega}$ no podrá alcanzarse en Ω, luego debe alcanzarse en $\partial\Omega$. □

Es esencial pedir que Ω sea compacto en el corolario anterior, como muestra el ejemplo $\Omega = \{x + iy \in \mathbb{C} : x > 0, y > 0\}$, $f(z) = e^{-iz^2}$, para el que se tiene $|f(z)| = 1$ en $\partial\Omega$, y sin embargo $\lim_{r\to\infty} |f(re^{i\pi/4})| = \infty$.

A continuación estudiaremos algunas propiedades de las funciones que son a la vez holomorfas e inyectivas; a tales aplicaciones se les suele llamar conformes.[1] Veremos en primer lugar que el límite, uniforme en compactos, de aplicaciones conformes es o bien constante o bien conforme. Esto es consecuencia del siguiente resultado, que a su vez se sigue fácilmente del teorema de Rouché.

Teorema 10.4. *[de Hurwitz] Sea (f_n) una sucesión de funciones holomorfas en un abierto conexo Ω de $\mathbb{C}$ tales que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, uniformemente en los compactos de Ω. Supongamos que f tiene un cero de orden N en un punto $z_0 \in \Omega$. Entonces existen $\rho > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que para todo $n \geq n_0$ la función f_n tiene exactamente N ceros (contados con sus multiplicidades) en el disco $D(z_0, \rho)$. Además dichos ceros convergen a z_0 cuando $n \to \infty$.*

Demostración. Sabemos por un teorema anterior que f es holomorfa en Ω. Por el teorema de identidad, puesto que f no es constante, existe $\rho > 0$ tal que $\overline{D}(z_0, \rho) \subset \Omega$ y f no tiene ceros en $\overline{D}(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}$. Por hipótesis f_n converge uniformemente a f en $\overline{D}(z_0, \rho)$, luego, poniendo

$$\varepsilon := \min_{z \in \partial D(z_0, \rho)} |f(z)| > 0,$$

existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$\sup_{z \in \overline{D}(z_0, \rho)} |f_n(z) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

[1]En la literatura hay disparidades en cuanto a la definición de aplicación conforme: algunos autores piden que la aplicación sea holomorfa y tenga derivada no nula en todo punto, mientras que otros exigen además que sea inyectiva. Ambas definiciones coinciden localmente, es decir, toda aplicación f que sea holomorfa y con derivada no nula en todos los puntos tiene la propiedad de que para cada z_0 existe un disco $D(z_0, r)$ donde f es inyectiva; esto es consecuencia del teorema de la función inversa.

Entonces, si $n \geq n_0$,
$$f_n(z) = f_n(z) - f(z) + f(z) := g_n(z) + f(z),$$
donde g_n es holomorfa y $|g_n(z)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon \leq |f(z)|$ para todo $z \in \partial D(z_0, \rho)$. Por el teorema de Rouché (aplicado a $f + g_n$), resulta que $f_n = f + g_n$ y f tienen el mismo número de ceros, es decir N ceros, en el disco $D(z_0, \rho)$, para todo $n \geq n_0$. Además, puesto que ρ puede tomarse tan pequeño como se desee, es claro que estos N ceros convergerán a z_0 cuando $n \to \infty$. □

Corolario 10.5. *Sea (f_n) una sucesión de funciones holomorfas e inyectivas en un abierto conexo Ω de $\mathbb{C}$, y supongamos que f_n converge a una función f, uniformemente en cada compacto de Ω. Entonces f es o bien inyectiva o bien constante.*

Demostración. Supongamos que f no es constante, y sean $z_0, \xi_0 \in \Omega$ tales que $f(z_0) = f(\xi_0) = w_0$. Queremos ver que $z_0 = \xi_0$. Puesto que f no es constante, z_0 y ξ_0 son ceros de orden finito de $z \mapsto f(z) - w_0$. Por el teorema de Hurwitz existen sucesiones $z_n \to z_0$ y $\xi_n \to \xi_0$ tales que
$$f_n(z_n) = w_0 = f_n(\xi_n)$$
para todo n, y como f_n es inyectiva se deduce que $z_n = \xi_n$ para todo n, de donde, tomando límites, $z_0 = \xi_0$. □

Teorema 10.6 (de la función inversa, versión 2.0)**.** *Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa. Supongamos que $f'(z_0) \neq 0$. Entonces existen U entorno abierto de z_0 y V entorno abierto de $f(z_0)$ tales que $f_{|_U} : U \to V$ es un homeomorfismo con inversa holomorfa $f^{-1} : V \to U$. Además, si $\overline{D}(z_0, r)$ es un disco cerrado contenido en U, se tiene que*
$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{z\, f'(z)}{f(z) - w} dz$$
para todo $w \in f(D(z_0, r))$.

Demostración. La primera parte se deduce del Teorema 2.6 y del hecho que las funciones holomorfas son analíticas y en particular tienen derivada continua. Para demostrar la fórmula, observemos que la imagen homeomorfa de un conjunto simplemente conexo es simplemente conexa, y por tanto $f(D(z_0, r))$ es simplemente conexo, con adherencia $f(\overline{D}(z_0, r))$, interior $f(D(z_0, r))$ y borde $f(\partial D(z_0, r))$, que es una curva cerrada simple de clase C^1 parametrizada por $f \circ \gamma$, donde $\gamma(t) = z_0 + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Además sabemos que f^{-1} es holomorfa en V, abierto que contiene a $f(\overline{D}(z_0, r))$, luego podemos aplicar la fórmula integral de Cauchy a f^{-1} en este recinto, obteniendo
$$\begin{aligned} f^{-1}(w) &= \int_{f \circ \gamma} \frac{f^{-1}(\xi)}{\xi - w} d\xi = \int_0^{2\pi} \frac{f^{-1}(f(\gamma(t)))f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t)) - w} \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma(t) f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t)) - w} \gamma'(t) dt \\ &= \int_{|z-z_0|=r} \frac{z f'(z)}{f(z) - w} dz \end{aligned}$$
para cada $w \in f(D(z_0, r))$. □

El siguiente teorema garantiza que las funciones inyectivas y holomorfas son automáticamente conformes.

Teorema 10.7. *Sea U un abierto de $\mathbb{C}$. Si $f : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa e inyectiva entonces $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in U$. En particular f es conforme, y también lo es su inversa $f^{-1} : f(U) \to U$.*

Demostración. Supongamos que $f'(z_0) = 0$ para algún $z_0 \in U$. Pongamos $w_0 = f(z_0)$. Entonces, para $r_0 > 0$ con $\overline{D}(z_0, r_0) \subset U$ podemos escribir
$$f(z) = w_0 + \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, z \in D(z_0, r_0),$$

donde $k \geq 2$ y $a_k \neq 0$. En particular $f(z) - w_0$ tiene un cero de orden k en z_0, y f' tiene un cero de orden $k-1$ en z_0. Puesto que $f(z) - w_0$ y $f'(z)$ no son idénticamente nulas, por el teorema de identidad sabemos que sus ceros en $D(z_0, r_0)$ son aislados, luego podemos encontrar $\rho \in (0, r_0)$ tal que

$$f'(z) \neq 0 \neq f(z) - w_0 \text{ para todo } z \in \overline{D}(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}.$$

Pongamos entonces

$$\delta := \min_{z \in \partial D(z_0, \rho)} |f(z) - w_0| > 0,$$

y para cada $w \in D(z_0, \delta) \setminus \{w_0\}$ consideremos la función

$$g(z) := f(z) - w = (f(z) - w_0) + (w_0 - w) := \varphi(z) + \psi(z).$$

Las funciones φ, ψ así definidas son holomorfas en un entorno abierto de $\overline{D}(z_0, \rho)$, y satisfacen

$$|\psi(z)| < |\varphi(z)| \text{ para todo } z \in \partial D(z_0, \rho).$$

Entonces, por el teorema de Rouché, las funciones φ y g tienen el mismo número de ceros en $D(z_0, \rho)$, a saber, k ceros (ya que φ tiene un cero de orden k en z_0, y ningún otro en el disco $D(z_0, \rho)$). Es decir, la ecuación $f(z) = w$ tiene exactamente k soluciones para z dentro del disco $D(z_0, \rho)$. Además estas soluciones son distintas, ya que los ceros de orden mayor que uno de g en $D(z_0, \rho)$ son ceros de su derivada, que es igual a f', y f' no tiene ceros en $D(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}$. Por tanto, como $k \geq 2$, existen $z_1, z_2 \in D(z_0, \rho)$, $z_1 \neq z_2$, tales que

$$f(z_1) = w = f(z_2),$$

lo que contradice que f sea inyectiva. □

10.2. Aplicaciones conformes entre abiertos de $\mathbb{C}$

El teorema de la aplicación de Riemann (demostrado, en la forma que vamos a estudiar, por Osgood en 1900), dice que todo subconjunto propio y abierto Ω de $\mathbb{C}$ que sea simplemente conexo es conformemente equivalente a $\mathbb{D}$, el disco unidad abierto; es decir, existe $f : \mathbb{D} \to \Omega$ aplicación holomorfa, biyectiva, y con inversa holomorfa.[2] También veremos un teorema de Carathéodory que asegura que si Ω es acotado y su frontera es una curva cerrada simple entonces f puede extenderse a un homeomorfismo de $\overline{\mathbb{D}}$ en $\overline{\Omega}$. Si además $\partial\Omega$ es una curva analítica, deduciremos del principio de reflexión de Schwarz que f puede incluso extenderse a una aplicación conforme entre dos abiertos W_1 y W_2 que contienen a $\overline{\mathbb{D}}$ y $\overline{\Omega}$ respectivamente.

Un ingrediente sencillo pero esencial de la prueba del teorema de la aplicación de Riemann es el siguiente lema de Schwarz.

Lema 10.8 (Schwarz). *Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfa y tal que $f(0) = 0$. Entonces:*

1. $|f(z)| \leq |z|$ *para todo* $z \in \mathbb{D}$;

2. *Si para algún* $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ *es* $|f(z_0)| = |z_0|$, *entonces f es una rotación (es decir existe* $\theta \in [0, 2\pi]$ *tal que* $f(z) = e^{i\theta} z$*).*

3. $|f'(0)| \leq 1$.

4. *Si* $|f'(0)| = 1$ *entonces f es una rotación.*

[2] Obsérvese que por el teorema de Liouville la hipótesis de que $\Omega \neq \mathbb{C}$ es necesaria. También lo es, por supuesto, la de que Ω sea simplemente conexo, ya que los homeomorfismos preservan la conexión simple.

Demostración. Puesto que $f(0) = 0$ podemos escribir $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, y es claro que la función $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{si } z \neq 0; \\ f'(0) & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

es holomorfa. Si $|z| = r < 1$ entonces se tiene $|\varphi(z)| \leq 1/r$, y se deduce del teorema del módulo máximo que $|\varphi(z)| \leq 1/r$ para todo $z \in D(0,r)$. Haciendo $r \to 1^-$ obtenemos (1) y (3).

En la situación de (2), y también en la de (4), se tiene que $|\varphi|$ alcanza su máximo (igual a 1) en un punto interior de $\mathbb{D}$, lo que de nuevo por el teorema del módulo máximo implica que φ es constante, digamos $\varphi = c$, necesariamente con $|c| = 1$. Por tanto $f(z) = cz$ es una rotación. $\square$

Otro ingrediente fundamental en la demostración del teorema de la aplicación de Riemann es un teorema de Montel referente a la topología de los espacios de funciones holomorfas. Veamos primero algunas definiciones.

Definición 10.1. Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas de un abierto Ω de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

1. Diremos que $\mathcal{F}$ es *normal* si toda sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ tiene un subsucesión que converge a una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$, uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω. [3]

2. Diremos que $\mathcal{F}$ está *uniformemente acotada en los compactos de* Ω si para cada $K \subset \Omega$ compacto existe $M_K > 0$ tal que $|f(z)| \leq M_K$ para todo $z \in K$ y toda $f \in \mathcal{F}$.

3. Diremos que $\mathcal{F}$ es *equicontinua* en un conjunto $A \subseteq \Omega$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $z, w \in A$ y $|z - w| \leq \delta$ entonces $|f(z) - f(w)| \leq \varepsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$.

El teorema de Arzela-Ascoli dice que una familia de funciones $\mathcal{G}$ de un abierto U de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ tiene la propiedad de que toda sucesión $(g_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{G}$ tiene una subsucesión que converge, uniformemente en cada compacto de U, a una función $g : U \to \mathbb{R}^m$, si y sólo si $\mathcal{G}$ es uniformemente acotada en los compactos de U, y equicontinua en cada subconjunto compacto de U. El teorema de Montel nos dice que, en el caso de familias de funciones holomorfas, esta última hipótesis puede quitarse, ya que la acotación uniforme de la familia en cada compacto de Ω implica la equi-Lipschitzianidad de la misma en cada compacto de Ω gracias a la fórmula integral de Cauchy.

Teorema 10.9 (Montel)**.** *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas de un abierto Ω de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, y supongamos que $\mathcal{F}$ está uniformemente acotada en cada subconjunto compacto de Ω. Entonces:*

1. *$\mathcal{F}$ es equicontinua en cada subconjunto compacto de Ω, y*

2. *$\mathcal{F}$ es normal.*

Demostración. Sea $K \subset \Omega$ compacto, y tomemos

$$0 < r < \frac{1}{3} d(K, \partial\Omega).$$

Si $z, w \in K$ y $|z - w| \leq r$ tenemos, usando la fórmula integral de Cauchy,

$$\begin{aligned} |f(z) - f(w)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(w,2r)} f(\xi) \left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi - w} \right) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(w,2r)} f(\xi) \frac{z - w}{(\xi - z)(\xi - w)} \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi r |z - w|}{2r^2} \sup_{g \in \mathcal{F},\, \xi \in K + \overline{D}(0,2r)} |g(\xi)| := \frac{1}{r} M |z - w|. \end{aligned}$$

Esto prueba que

$$|f(z) - f(w)| \leq C(r) |z - w|$$

[3] La función f es necesariamente holomorfa en Ω, pero no tiene por qué pertenecer a la familia $\mathcal{F}$.

para todo $z, w \in K$ con $|z-w| \leq r$ y toda $f \in \mathcal{F}$. De aquí se deduce directamente que $\mathcal{F}$ es equicontinua: dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $\delta = \min\{r, \varepsilon/C(r)\}$, de forma que si $z, w \in K$ y $|z-w| \leq \delta$ entonces $|f(z) - f(w)| \leq \varepsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$.

La segunda parte del teorema puede deducirse inmediatamente del teorema de Arzela-Ascoli. Para los lectores que no hayan visto aún la demostración del teorema de Arzela-Ascoli, exponemos a continuación ésta, adaptada a nuestro contexto.

Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, y $K \subset \Omega$ compacto. Fijemos una sucesión $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ densa en K. Como $\{f_n(z_1) : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado en $\mathbb{C}$, existe $(f_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ subsucesión de (f_n) tal que $(f_{1,n}(z_1))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. Ahora, como la subfamilia $\{f_{1,n} : n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente acotada en los compactos de Ω, la sucesión $(f_{1,n}(z_2))_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en $\mathbb{C}$, luego existe una subsucesión $(f_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(f_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(f_{2,n}(z_2))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathbb{C}$, y por supuesto $(f_{2,n}(z_1))_{n\in\mathbb{N}}$ también converge en $\mathbb{C}$, por ser subsucesión de $(f_{1,n}(z_1))_{n\in\mathbb{N}}$. Continuamos así por inducción, extrayendo en cada paso j una subsucesión $(f_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(f_{j-1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(f_{j,n}(z_\ell))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para todo $\ell = 1, ..., j$.

Consideremos ahora la subsucesión diagonal $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $\varphi_n(z) = f_{n,n}(z)$ para cada $z \in \Omega$. Puesto que $\{\varphi_n : n \geq j\}$ es subsucesión de $(f_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$ para cada $j \in \mathbb{N}$, es claro que $(\varphi_n(z_j))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para cada $j \in \mathbb{N}$. Veamos cómo, gracias a la equicontinuidad de $\mathcal{F}$, esta sucesión converge uniformemente en K. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta > 0$ como en la definición de equicontinuidad de $\mathcal{F}$ en K. Como K es compacto y $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} D(z_j, \delta)$ recubre K, existe j_0 suficientemente grande tal que $K \subset \bigcup_{j=1}^{j_0} D(z_j, \delta)$. Puesto que $(\varphi_n(z_j))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para cada $j \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$ entonces

$$|\varphi_m(z_j) - \varphi_n(z_j)| \leq \varepsilon$$

para todo $j = 1, ..., j_0$. Ahora, si $z \in K$, existe $\ell = \ell_z \in \{1, ..., j_0\}$ tal que $z \in D(z_\ell, \delta)$, y por tanto para todos $n, m \geq n_0$ obtenemos

$$|\varphi_n(z) - \varphi_m(z)| \leq |\varphi_n(z) - \varphi_n(z_\ell)| + |\varphi_n(z_\ell) - \varphi_m(z_\ell)| + |\varphi_m(z_\ell) - \varphi_m(z)| \leq 3\varepsilon.$$

Esto prueba que (φ_n) es uniformemente de Cauchy en K, y por tanto converge uniformemente en K.

Sin embargo la subsucesión (φ_n) depende de K. Veamos ahora cómo otro argumento de diagonalización nos permite encontrar una subsucesión de (f_n) que converge uniformemente en cada compacto K de Ω. Podemos escribir

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j,$$

donde

$$K_j = \{z \in \Omega \,:\, d(z, \partial\Omega) \geq \frac{1}{j},\, |z| \leq j\}.$$

Cada K_j es compacto, y se cumple además que $K_j \subset \text{int}(K_{j+1})$. Por lo anterior, sabemos que existe $(\varphi_{1,n})$ subsucesión de (f_n) que converge uniformemente en K_1. Como $\{\varphi_{1,n} : n \in \mathbb{N}\}$ sigue siendo equicontinua en cada compacto, el argumento anterior también muestra que existe $(\varphi_{2,n})$ subsucesión de $(\varphi_{1,n})$ tal que $(\varphi_{2,n})$ converge en K_2. Continuamos el proceso de esta forma y definimos (ψ_n) como la subsucesión diagonal $\psi_n(z) = \varphi_{n,n}(z)$. Entonces (ψ_n) es una subsucesión de (f_n) que converge uniformemente en K_j, para cada $j \in \mathbb{N}$ (por ser $(\psi_n)_{n\geq j}$ subsucesión de $(\varphi_{j,n})$, que converge uniformemente en K_j). Puesto que para cada $K \subset \Omega$ compacto existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_{j_0}$, se deduce que (ψ_n) converge uniformemente en K. $\square$

Ya estamos en condiciones de demostrar el teorema de la aplicación de Riemann.

Teorema 10.10. *Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$, diferente de $\mathbb{C}$, y supongamos que Ω es simplemente conexo. Entonces, dado $z_0 \in \Omega$, existe una única aplicación conforme $f : \Omega \to \mathbb{D}$ tal que $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) \in (0, \infty)$.*

Corolario 10.11. *Si U, V son abiertos no vacíos de $\mathbb{C}$, simplemente conexos y distintos de $\mathbb{C}$, entonces existe $\varphi : U \to V$ biyectiva, holomorfa y con inversa holomorfa.*

La unicidad de la aplicación f del teorema es fácil de demostrar: si g es otra aplicación con las mismas propiedades entonces $H = f \circ g^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es conforme y tiene la propiedad de que $H(0) = 0$ luego, por el lema de Schwarz, $|H(z)| \leq |z|$. Pero $H^{-1} = g \circ f^{-1}$ tiene estas mismas propiedades, luego también $|z| \leq |H(z)|$. Por tanto $|H(z)| = |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y, otra vez por el lema de Schwarz, H es una rotación, es decir $H(z) = e^{i\theta} z$ para cierto $\theta \in [0, 2\pi)$. Pero además

$$H'(0) = f'(g^{-1}(0)) \frac{1}{g'(g^{-1}(0))} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} \in (0, \infty),$$

luego $\theta = 0$ y así $H(z) = z$, lo que significa que $f = g$.

La existencia es más difícil de probar. La idea fundamental de la demostración proviene en parte del lema de Schwarz, y consiste en considerar la familia $\mathcal{F}$ de todas las funciones holomorfas e inyectivas $f : \Omega \to \mathbb{D}$ que cumplen $f(z_0) = 0$, y elegir una f que sea sobreyectiva; esto podrá conseguirse, como en el lema de Schwarz, cuando $|f'(z_0)|$ sea lo más grande posible. Para elegir f usaremos el teorema de Montel para poder obtener una sucesión (f_n) de $\mathcal{F}$ que converge uniformemente en los compactos de Ω y tiene la propiedad de que $\lim_{n\to\infty} |f_n'(z_0)| = \sup_{g \in \mathcal{F}} |g'(z_0)|$.

Paso 1. Veremos primero que existe $\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega)$ conforme tal que $0 \in \varphi(\Omega) \subset \mathbb{D}$.

Por hipótesis existe $\xi_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, y por tanto $z - \xi_0 \neq 0$ para todo $z \in \Omega$, es decir $\widetilde{\Omega} = -\xi_0 + \Omega$ no contiene al origen; como además es simplemente conexo, existe una rama del logaritmo que es holomorfa en $\widetilde{\Omega}$. Es decir, existe $\widetilde{f} : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $e^{\widetilde{f}(z)} = z$ en $\widetilde{\Omega}$, o lo que es lo mismo,

$$e^{f(z)} = z - \xi_0$$

para todo $z \in \Omega$, donde $f(z) = \widetilde{f}(z - \xi_0)$. En particular f es inyectiva. Además

$$\inf_{z \in \Omega} |f(z) - f(w) - 2\pi i| > 0$$

cualquiera que sea $w \in \Omega$ (en efecto, de lo contrario existe $(z_n) \subset \Omega$ tal que $f(z_n)$ converge a $f(w) + 2\pi i$ luego, tomando exponenciales, $z_n - \xi_0$ converge a $w - \xi_0$, es decir $z_n \to w$, luego $f(w) = f(w) + 2\pi i$, que es absurdo). Fijemos pues $w \in \Omega$, tomemos

$$\rho = \inf_{z \in \Omega} |f(z) - f(w) - 2\pi i| > 0,$$

y definamos

$$\psi(z) = \frac{1}{f(z) - f(w) - 2\pi i}.$$

Es obvio que ψ es holomorfa e inyectiva, luego $\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega)$ es conforme. Además $\varphi(\Omega) \subseteq D(0, 1/\rho)$, y por supuesto $\varphi(\Omega)$ es abierto. Componiendo ψ con una traslación τ y una homotecia h adecuadas, obtenemos una función $\varphi = h \circ \tau \circ \psi$ con las propiedades deseadas.

Paso 2. Gracias al Paso 1, podemos suponer, y lo supondremos en todo lo que sigue, que $0 \in \Omega \subset \mathbb{D}$. Definamos

$$\mathcal{F} = \{f : \Omega \to \mathbb{D} \mid f \text{ es holomorfa, inyectiva, y } f(0) = 0\}.$$

Se tiene que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ (por ejemplo, la identidad está en $\mathcal{F}$), y que $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada en los compactos de Ω (y de hecho en todo Ω, puesto que $f(\Omega) \subseteq \mathbb{D}$ para toda $f \in \mathcal{F}$). Definamos ahora

$$\alpha = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(0)|,$$

y observemos que $\alpha < \infty$ (gracias a las desigualdades de Cauchy, tomando $r > 0$ tal que $D(0, r) \subseteq \Omega$ y recordando que $f(\Omega) \subseteq \mathbb{D}$, se tiene $|f'(0)| \leq \frac{1}{r}$ para toda $f \in \mathcal{F}$). Nótese también que $\alpha \geq 1$, ya que la identidad está en $\mathcal{F}$. Elijamos una sucesión $(f_n) \subset \mathcal{F}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} |f_n'(0)| = \alpha.$$

Por el teorema de Montel podemos extraer una subsucesión convergente uniformemente en cada compacto de Ω a una función holomorfa $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Por comodidad de notación, podemos seguir llamando (f_n) a esta subsucesión. Recordemos que las derivadas f_n' también convergen uniformemente en cada compacto a la derivada f', y así

$$1 \leq \alpha = \lim_{n\to\infty} |f_n'(0)| = |f'(0)|,$$

de lo que se deduce que f no puede ser constante. Entonces, gracias al Corolario 10.5, f es inyectiva . Por otra parte $|f_n(z)| \leq 1$ para todo n, luego también $|f(z)| \leq 1$, es decir $F(\Omega) \subseteq \overline{D}$. Pero por el teorema de la aplicación abierta, al ser $f(\Omega)$ un abierto contenido en $\overline{\mathbb{D}}$, debe estar de hecho contenido en $\mathbb{D}$. Además $f_n(0) = 0$ para todo n, luego también $f(0) = 0$. De todo ello deducimos que $f \in \mathcal{F}$, y que

$$|f'(0)| = \sup_{g\in\mathcal{F}} |g'(0)| = \alpha.$$

Paso 3. Veamos finalmente que $f : \Omega \to \mathbb{D}$ es conforme. Ya sabemos que es holomorfa e inyectiva, así que sólo queda comprobar que f es sobre. Por reducción al absurdo, si f no es sobre construiremos $F \in \mathcal{F}$ tal que $|F'(0)| > \alpha$. Supongamos pues que existe $w \in \mathbb{D}$ tal que $f(z) \neq w$ para todo $z \in \Omega$. Consideremos $\varphi_w : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ definida por

$$\varphi_w(z) = \frac{w - z}{1 - \overline{w}z}.$$

En el Problema 1.16 vimos que φ_w es conforme y su inversa es ella misma. Es obvio que $\varphi_w(0) = w$, y que $\varphi_w(w) = 0$. El conjunto $W = (\varphi_w \circ f)(\Omega)$ es simplemente conexo, por serlo Ω y ser $\varphi_w \circ f$ inyectiva y continua. Puesto que $\varphi_w(w) = 0$ y $w \notin f(\Omega)$, se tiene $0 \notin W$, y por tanto existe una rama holomorfa del logaritmo en W, que denotaremos $\log_W$ y podemos definir una rama holomorfa de la raíz cuadrada por

$$g(\xi) = e^{\frac{1}{2}\log_W(\xi)}.$$

Consideremos entonces la función

$$F = \varphi_{g(w)} \circ g \circ \varphi_w \circ f.$$

Es obvio que F es holomorfa, y que $F(0) = 0$. Además $f(\Omega) \subseteq \mathbb{D}$, $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, $g(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ (ya que $z \in \mathbb{D}$ si y sólo si $z^2 \in \mathbb{D}$), y $\varphi_{g(w)}(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, luego también $F(\Omega) \subseteq \mathbb{D}$. Por otro lado F es inyectiva, por ser composición de funciones inyectivas (nótese que cualquier rama de la función raíz cuadrada es inyectiva: si $g(\xi) = g(z)$ entonces $\xi = g(\xi)^2 = g(z)^2 = z$). Por todo esto se tiene $F \in \mathcal{F}$.

Ahora bien, definiendo $h(z) = z^2$, se tiene

$$f = \varphi_w^{-1} \circ h \circ \varphi_{g(w)} \circ F = \psi \circ F,$$

donde $\psi = \varphi_w^{-1} \circ h \circ \varphi_{g(w)}$, y como $\psi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ y $\psi(0) = 0$, gracias al Lema de Schwarz sabemos que $|\psi'(0)| < 1$ (de lo contrario ψ sería una rotación y en particular biyectiva, lo que es claramente falso ya que h no lo es y $\varphi_w, \varphi_{g(w)}$ sí lo son). Pero entonces

$$\alpha = |f'(0)| = |\psi'(0)|\,|F'(0)| < |F'(0)|,$$

lo que junto con el hecho de que $F \in \mathcal{F}$ contradice la definición de α.

Paso 4. Sabiendo ya que existe $f : \Omega \to \mathbb{D}$ conforme con $f(z_0) = 0$, sólo queda ver que existe una tal f con la propiedad adicional de que $f'(z_0) > 0$. Esto es muy fácil: si f no tiene ya esta propiedad, basta cambiarla por la función $\widetilde{f}(z) = cf(z)$, donde $c = \overline{f'(z_0)}/|f'(z_0)|$. Como $|c| = 1$, esta nueva función $\widetilde{f}$ sigue siendo conforme de Ω en $\mathbb{D}$, y es obvio que cumple $\widetilde{f}'(z_0) = |f'(z_0)| > 0$. $\square$

Observación 10.2. Conviene señalar que las únicas partes de la prueba anterior en las que se usa que Ω sea simplemente conexo son cuando se manejan la ramas holomorfas del logaritmo y de la raíz cuadrada en los pasos 1 y 3. Revisando la demostración de la construcción de $\log_\Omega$, se ve que estas funciones existen siempre que sepamos que cualquier función holomorfa en Ω tiene una primitiva, o bien, equivalentemente, que Ω sea *holomórficamente simplemente conexo*, en el sentido de que $\int_\gamma f = 0$ para toda $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa y toda curva cerrada γ en Ω de clase C^1 a trozos. Por tanto el teorema de la aplicación de Riemann es válido cambiando la hipótesis de que Ω sea simplemente conexo por esta otra.

Esto nos permite demostrar la siguiente versión del Teorema 4.5 del capítulo 7 para abiertos no necesariamente acotados.

Teorema 10.12. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *Ω es simplemente conexo.*
2. *Toda función holomorfa $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tiene una primitiva.*
3. *Para toda curva cerrada γ en Ω de clase C^1 a trozos, y toda función holomorfa $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se tiene que $\int_\gamma f = 0$.*

Demostración. Sabemos que $(1) \implies (2) \iff (3)$. Veamos que $(3) \implies (1)$. Por la observación anterior el teorema de la aplicación de Riemann es válido para el abierto Ω, luego existe $F : \mathbb{D} \to \Omega$ conforme. Como los homeomorfismos preservan la conexión simple y $\mathbb{D}$ es simplemente conexo, se deduce que Ω también lo es. □

Una pregunta natural y además importante (por cuestiones relacionadas con la solución del problema de Dirichlet que veremos en el próximo capitulo) es la de si la aplicación de Riemann puede extenderse a la frontera de Ω con continuidad e inyectividad. En general la respuesta a esta pregunta es negativa, pero si suponemos que Ω es acotado y su borde $\partial\Omega$ es una curva cerrada simple, entonces es positiva.[4]

Teorema 10.13. *[Carathéodory] Sean U abierto acotado de $\mathbb{C}$, y $f : \mathbb{D} \to U$ conforme. Entonces f puede extenderse a un homeomorfismo $\widetilde{f} : \overline{D} \to \overline{U}$ si y sólo si ∂U es una curva cerrada simple.*

Demostración. Si una tal extensión $\widetilde{f}$ existe entonces se tiene $\widetilde{f}(\partial D) = \partial U$, y por tanto ∂U es una curva cerrada simple. El recíproco no es en absoluto obvio; dividiremos la demostración en dos pasos.

Paso 1. *Si ∂U es una curva cerrada simple entonces f puede extenderse a $\partial\mathbb{D}$ con continuidad, de manera única.* Esto equivale a decir que $f : \mathbb{D} \to U$ es uniformemente continua (ya que toda función uniformemente continua en un conjunto A tiene una única extensión a la adherencia de A). Supongamos pues que f no es uniformemente continua, y llegaremos a una contradicción. Existen $\varepsilon > 0$, y sucesiones $(z_n) \subset \mathbb{D}$, $(w_n) \subset \mathbb{D}$ tales que $|z_n - w_n| \to 0$ pero

$$|f(z_n) - f(w_n)| \geq 2\varepsilon \tag{10.1}$$

para todo n. Puesto que $\overline{\mathbb{D}}$ es compacto, existe una subsucesión de (z_n), que podemos seguir denotando (z_n), que converge a un punto $\xi \in \mathbb{D}$. Necesariamente

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} w_n = \xi \in \partial\mathbb{D},$$

ya que f es continua en el interior de $\overline{\mathbb{D}}$. Para cada $r \in (0,1)$, sea $\gamma_r : (\alpha_r, \beta_r) \to \mathbb{C}$ la curva $\gamma_r(t) = \xi + re^{it}$, con α_r, β_r elegidos de tal forma que

$$\gamma_r(\alpha_r, \beta_r) = \mathbb{D} \cap \partial D(\xi, r).$$

La longitud de esta curva puede estimarse como sigue:

$$\text{long}(f\circ\gamma_r) = \int_{\alpha_r}^{\beta_r} |f'(\gamma_r(t))\gamma_r'(t)|dt = \int_{\alpha_r}^{\beta_r} \left(|\gamma_r'(t)|^{1/2}\right)\left(|f'(\gamma_r(t))|\,|\gamma_r'(t)|^{1/2}\right)dt$$
$$\leq \left(\int_{\alpha_r}^{\beta_r} |\gamma_r'(t)|dt\right)^{\frac12} \left(\int_{\alpha_r}^{\beta_r} |f'(\gamma_r'(t)|^2\,|\gamma_r'(t)|dt\right)^{\frac12} \leq (2\pi r)^{\frac12} \left(\int_{\alpha_r}^{\beta_r} |f'(\xi + re^{i\theta})|^2 r d\theta\right)^{\frac12},$$

[4] Este resultado es llamativo, ya que no supone que ∂U sea rectificable, ni siquiera localmente en algún punto: por ejemplo ∂U podría ser la curva de Koch con forma de copo de nieve.

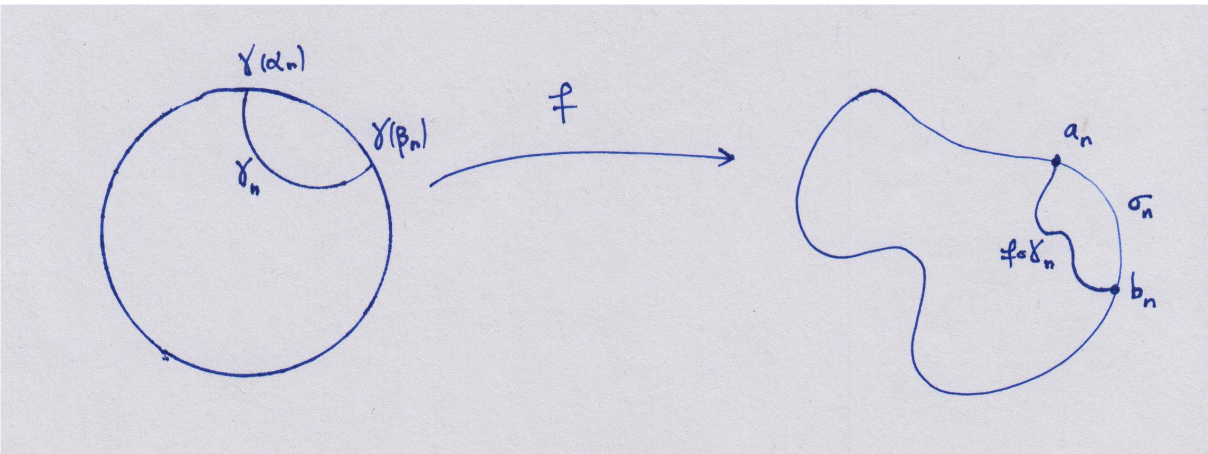
de donde

$$\frac{\text{long}(f\circ\gamma_r)^2}{r} \leq 2\pi \int_{\{\theta:|\xi+re^{i\theta}|\leq 1\}} |f'(\xi+re^{i\theta})|^2 r d\theta,$$

y así

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{\text{long}(f\circ\gamma_r)^2}{r}dr \leq \int_{\mathbb{D}\cap D(\xi,1)} |f'(x+iy)|^2 dxdy \leq \int_{\mathbb{D}} |f'(x+iy)|^2 dxdy = \text{área}(f(\mathbb{D})) < \infty,$$

puesto que $U = f(\mathbb{D})$ es acotado. Esto implica que debe existir una sucesión $r_n \to 0^+$ tal que long$(f\circ\gamma_{r_n}) \to 0$ (de lo contrario las integrales de las desigualdades anteriores serían infinitas). Por comodidad de notación escribiremos γ_n en lugar de γ_{r_n}, y α_n y β_n en lugar de α_{r_n} y β_{r_n} en todo lo que sigue. Tenemos así una sucesión de curvas $f\circ\gamma_n$ con longitudes finitas que tienden a 0 cuando $n\to\infty$.



Por tener longitud finita, la curva $f\circ\gamma_n : (\alpha_n,\beta_n) \to \mathbb{C}$ tiene una única extensión continua a $[\alpha_n,\beta_n]$, que seguiremos denotando γ_n, con

$$f\circ\gamma_n(\alpha_n) := a_n := f(\gamma_n(\theta_0)) + \int_{\alpha_n}^{\theta_0} f'(\gamma_n(t))\gamma_n'(t)dt,$$

y

$$f\circ\gamma_n(\beta_n) := b_n := f(\gamma_n(\theta_0)) + \int_{\theta_0}^{\beta_n} f'(\gamma_n(t))\gamma_n'(t)dt,$$

siendo θ_0 un número cualquiera en el intervalo (α_n,β_n). Como el diámetro de una curva es menor o igual que su longitud, tenemos que

$$|a_n - b_n| \leq \text{long}(f\circ\gamma_n) \to 0$$

cuando $n\to\infty$. Además es fácil ver que $a_n, b_n \in \partial U$. Sea σ_n la curva dentro de ∂U que conecta a_n con b_n y tiene menor diámetro de las dos curvas que hay en ∂U con esta propiedad. Recuérdese que ∂U es homeomorfo a la circunferencia unidad $\mathbb{S}^1$ por definición de curva cerrada simple. Si $h:\mathbb{S}^1\to\partial U$ es un tal homeomorfismo y elegimos $t_n, s_n \in \mathbb{S}^1$ con $h(s_n) = a_n$, $h(t_n) = b_n$, puesto que h es uniformemente continuo (por ser S^1 compacta) y $|a_n - b_n| \to 0$, se obtiene $|t_n - s_n| \to 0$, lo que, como se ve inmediatamente implica, usando otra vez la continuidad uniforme de h, que diam$(\sigma_n) \to 0$.

Consideremos ahora la curva cerrada simple $\sigma_n \cup (f\circ\gamma_n)$, y llamemos U_n a la región interior a ella, de forma que $\sigma_n \cup (f\circ\gamma_n) = \partial U_n$. Puesto que diam$(\sigma_n) \to 0$ y

$$\text{diam}(f\circ\gamma_n) \leq \text{long}(f\circ\gamma_n) \to 0,$$

tenemos que $\lim_{n\to\infty} \text{diam}(\partial U_n) = 0$, y por tanto también

$$\lim_{n\to\infty} \text{diam}(U_n) = 0. \tag{10.2}$$

Definamos $V_n = \mathbb{D} \cap D(\xi, r_n)$. Entonces, al menos para n grande,

$$f(V_n) = U_n$$

(de lo contrario, como sólo hay dos componentes conexas en $\mathbb{D} \setminus \gamma_n$ y en $f(\mathbb{D}) \setminus (f \circ \gamma_n)$, tendríamos $f(\mathbb{D} \setminus \overline{V_n}) = U_n$, luego también $\operatorname{diam}(U_n) \geq f(D(0, 1/2)) > 0$ para todo n, lo que contradice (10.2)). Por tanto hemos probado que

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(f(V_n)) = 0. \tag{10.3}$$

Pero, extrayendo subsucesiones de (z_n), (w_n) si fuera necesario, podemos suponer que $z_n, w_n \in V_n$ para todo n, y entonces (10.1) y (10.3) se contradicen mutuamente.

Paso 2. *La única extensión continua de f a $\overline{\mathbb{D}}$ es inyectiva, y define un homeomorfismo de $\overline{\mathbb{D}}$ en $\overline{U}$.* Llamemos también f a esta única extensión que ya sabemos que existe gracias al Paso 1. Se tiene que $f(\overline{\mathbb{D}})$ es compacto y contiene a U, luego $\overline{U} \subseteq f(\overline{\mathbb{D}})$. Además la continuidad de f también implica que $f(\overline{\mathbb{D}}) \subseteq \overline{f(\mathbb{D})} = \overline{U}$. Luego $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{U}$ es continua y sobreyectiva, y como $\overline{\mathbb{D}}$ es compacto, para ver que f es un homeomorfismo basta probar que f es inyectiva. Ya sabemos que lo es en $\mathbb{D}$. Además, es fácil ver, usando que $f : \mathbb{D} \to U$ es un homeomorfismo, que $f(\partial\mathbb{D}) \subseteq \partial U$. Por tanto para probar que f es inyectiva, supondremos que existen $\xi_1, \xi_2 \in \partial\mathbb{D}$ tales que $\xi_1 \neq \xi_2$ y $f(\xi_1) = f(\xi_2) \in \partial U$, y llegaremos a una contradicción. Pongamos $\xi_1 = e^{i\theta_1}$, $\xi_2 = e^{i\theta_2}$, donde podemos suponer $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi$, y definamos las curvas

$$\sigma(t) = e^{it}, t \in [\theta_1, \theta_2],$$

$$\gamma(t) = e^{it}, t \in [\theta_2, \theta_1],$$

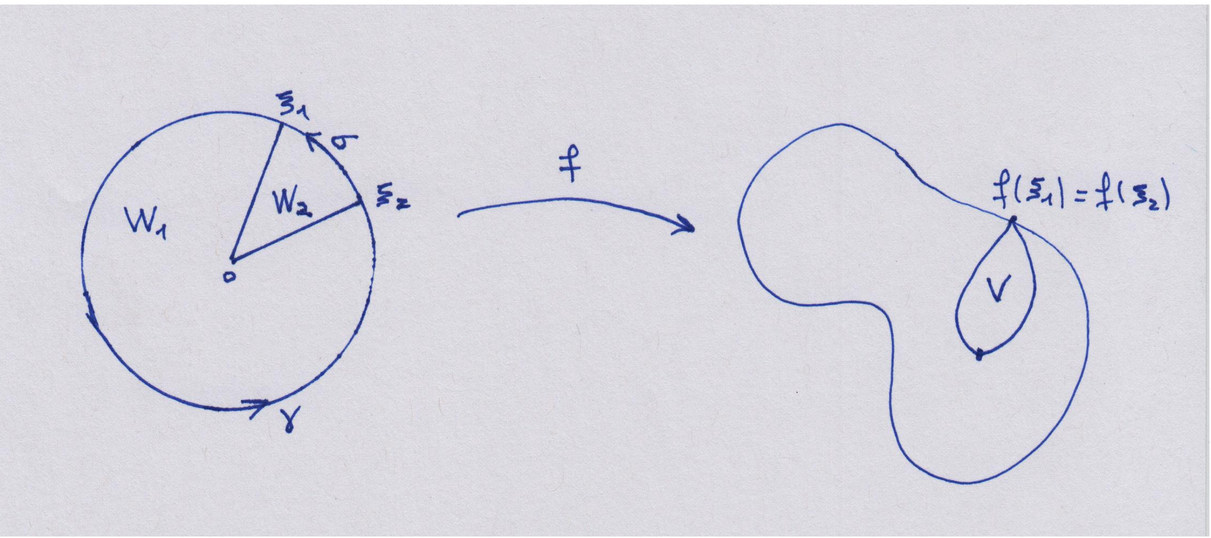
y las regiones

$$W_2 = \text{ región interior a } [0, \xi_1] \cup \sigma \cup [\xi_2, 0],$$

$$W_1 = \mathbb{D} \setminus \overline{W_2},$$

$$V = \text{ región interior a } f([0, \xi_1] \cup [\xi_2, 0]).$$

Véase el dibujo.



Por un argumento obvio de conexión, se tiene que o bien $f(W_1) = V$ o bien $f(W_2) = V$. Supongamos por ejemplo $f(W_2) = V$ (el argumento es análogo en el otro caso). Entonces

$$f(\sigma) \subseteq \overline{V} \cap \partial U = \{f(\xi_1)\} = \{f(\xi_2)\},$$

luego f es constante en el arco de circunferencia σ (en el caso en que $f(W_1) = V$ se obtendría f constante en el arco de circunferencia $\gamma = \partial\mathbb{D} \setminus \sigma$).

Ahora bien, componiendo f con la aplicación conforme F que lleva el semiplano superior $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ en $\mathbb{D}$, definida por

$$F(z) = \frac{i - z}{i + z}$$

(función que además se extiende con continuidad a $\mathbb{R}$ y lleva $\mathbb{R}$ en $\partial\mathbb{D} \setminus \{-1\}$), y multiplicando por una constante α adecuada obtenemos una función $\widetilde{f} = \alpha f \circ F$ que es holomorfa en $\Omega^+ := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0, |z - a_0| < r\}$ (donde $a_0 \in \mathbb{R}$ y $r > 0$ son tales que $F([a_0 - r, a_0 + r]) \subset \sigma$), que se extiende con continuidad a $I := (a_0 - r, a_0 + r)$, y toma un valor constante, y real, en I. Por el principio de simetría de Schwarz $\widetilde{f}$ puede extenderse holomorfamente a $D(a_0, r)$, y la extensión sólo puede ser constante (por el teorema de identidad, ya que $\widetilde{f}$ es constante en I). Esto implica que f es constante en $D(F(a_0), s) \cap \mathbb{D}$ para s suficientemente pequeño, lo que de nuevo por el teorema de identidad asegura que f es constante en $\mathbb{D}$, lo cual es absurdo. $\square$

Si además se supone que ∂U es una curva analítica, es inmediato deducir, del teorema anterior y del Teorema 6.5, que toda aplicación conforme $f : \mathbb{D} \to U$ puede extenderse (de manera única) a una aplicación holomorfa definida en un entorno abierto de $\overline{\mathbb{D}}$. De esto a su vez se desprende lo siguiente.

Corolario 10.14. *Si $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ es una aplicación conforme entre dos abiertos simplemente conexos y acotados de $\mathbb{C}$ cuyas fronteras son curvas cerradas simples analíticas, entonces existen abiertos W_1 y W_2 que contienen a $\overline{\Omega_1}$ y $\overline{\Omega_2}$ respectivamente, y una aplicación conforme $F : W_1 \to W_2$ tal que $F = f$ en Ω_1.*

10.3. Problemas

Problema 10.1. Sea U un conjunto acotado, y sea $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ continua tal que f es holomorfa en U. Demostrar que $\partial(f(U)) \subseteq f(\partial U)$.

Problema 10.2. El objetivo de este problema es dar una versión del teorema de la función implícita para funciones holomorfas. Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}^2$ y $F : \Omega \to \mathbb{C}$ continua. Supongamos que para cada w fijo la función $z \mapsto F(z, w)$ es holomorfa, y denotemos

$$F_1(z, w) = \frac{\partial F(z, w)}{\partial z}.$$

Supongamos que $F(z_0, w_0) = 0$ y que $F_1(z_0, w_0) \neq 0$, y elijamos $\rho > 0$ tal que $F(z, w_0) \neq 0$ si $z \in D(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}$.

1. Demostrar que existe $\delta > 0$ tal que para cada $w \in D(w_0, \delta)$ existe un único $z = g(w)$ tal que $z \in D(z_0, \rho)$ y $F(z, w) = 0$.

2. Probar que

   $$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{\xi F_1(\xi, w)}{F(\xi, w)} d\xi$$

   para todo $w \in D(w_0, \delta)$.

   Indicación: usar el teorema de los residuos con la función $\xi \mapsto \xi F_1(\xi, w)/F(\xi, w)$.

3. Si además se supone que $w \mapsto F(z, w)$ es holomorfa para cada z fijo, y se denota

   $$F_2(z, w) = \frac{\partial F(z, w)}{\partial w},$$

   probar que g es holomorfa, y que

   $$g'(w) = \frac{-F_2(g(w), w)}{F_1(g(w), w)}.$$

Problema 10.3. Sean f una función holomorfa definida en un entorno de z_0. Supongamos que z_0 es cero de orden n de la derivada f', y pongamos $w_0 = f(z_0)$. Demostrar que:

1. Existe $\rho > 0$ tal que $f'(z) \neq 0$ y $f(z) \neq w_0$ para todo $z \in \overline{D}(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}$.

2. Si $\delta = \min_{z \in \partial D(z_0,\rho)} |f(z) - w_0|$, entonces para todo $w \in D(w_0, \delta) \setminus \{w_0\}$, la ecuación $f(z) = w$ tiene exactamente $n+1$ soluciones distintas en $D(z_0, \rho)$.

Problema 10.4. Consideremos las funciones $F(z) = \frac{i-z}{i+z}$, $G(z) = i\frac{1-z}{1+z}$, y sea $\mathbb{H} = \{z : \mathrm{Im} z > 0\}$ el semiplano superior. Demostrar que $F : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ es conforme, con inversa $G : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$. Probar también que F se extiende con continuidad a $\mathbb{R}$ y lleva $\mathbb{R}$ en $\mathbb{D} \setminus \{-1\}$.

Problema 10.5. Comprobar que $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ lleva el semidisco unidad superior conformemente en el primer cuadrante del plano. ¿Qué ocurre con las fronteras?

Problema 10.6. Se llama automorfismo del disco unidad $\mathbb{D}$ a toda aplicación conforme de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$. Demostrar que todo automorfismo de $\mathbb{D}$ es de la forma

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{w - z}{1 - \overline{w}z} := e^{i\theta} \varphi_w(z)$$

para ciertos $\theta \in [0, 2\pi]$ y $w \in \mathbb{D}$.
Indicación: si $f(w) = 0$, aplicar el lema de Schwarz a $g := f \circ \varphi_w$ y a g^{-1}.

Problema 10.7. Probar que los únicos automorfismos de $\mathbb{D}$ que fijan el origen son las rotaciones.

Problema 10.8. Demostrar que para cualesquiera $a, b \in \mathbb{D}$ existe $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ conforme tal que $f(a) = b$.

Problema 10.9. Dar un ejemplo de abierto acotado simplemente conexo cuya frontera no es una curva cerrada simple.

Capítulo 11

Las funciones armónicas y el problema de Dirichlet

11.1. La ecuación de Laplace

Consideremos la ecuación del calor

$$u_t - \Delta_x u = 0 \text{ en } (0, +\infty) \times \Omega,$$

donde Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$. Después de un tiempo muy largo, el sistema alcanzará un equilibrio térmico, de modo que ya no habrá intercambio apreciable de calor, y las soluciones de esta ecuación deberían aproximarse (cuando $t \to \infty$) a las de

$$\Delta v = 0 \text{ en } \Omega$$

(es decir, la misma ecuación del calor cuando $u_t = 0$ o, equivalentemente, u no depende de t). Esta es la ecuación de Laplace (o steady-state heat equation). Las soluciones de esta ecuación se llaman funciones armónicas.

Ya hemos visto en los ejercicios que las partes reales de las funciones holomorfas son armónicas y también un recíproco parcial, a saber, que si $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es armónica y Ω es un disco abierto o un rectángulo abierto, entonces existe una función holomorfa $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que u es la parte real de f.

Supongamos que queremos resolver la ecuación de Laplace en $\Omega = \mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, con la condición de frontera $u = f$ en $\partial\mathbb{D}$ (una interpretación física del problema correspondería a fijar una distribución de temperatura f en $\partial\mathbb{D}$ y esperar un tiempo suficientemente largo para hallar la distribución resultante de temperatura en el interior del disco).

Como ya sabemos, haciendo un cambio a coordenadas polares se ve fácilmente que la ecuación

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

equivale a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Es fácil comprobar que las funciones

$$u_m(r, \theta) = r^{|m|} e^{im\theta},$$

con $m \in \mathbb{Z}$, son soluciones de la ecuación de Laplace.[1] Como la ecuación es lineal, las combinaciones lineales de estas soluciones siguen siendo soluciones, y también las combinaciones lineales infinitas,

$$u(r, \theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m r^{|m|} e^{im\theta},$$

[1]Permitiremos que las soluciones de $\Delta u = 0$ tomen valores complejos para simplificar muchos cálculos en este capítulo, aunque al final del mismo volveremos a centrarnos en soluciones $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

suponiendo que la serie converja y las series de las dos primeras derivadas también converjan.

Podríamos esperar incluso que *todas* las soluciones de la ecuación de Laplace en el disco sean de esta forma, lo que nos conduce inmediatamente a la siguiente pregunta: dada una función continua f en $\partial\mathbb{D}$, ¿existen números $a_n \in \mathbb{C}$ tales que $f(\theta) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m e^{im\theta}$? Esta es una de las preguntas fundamentales del Análisis de Fourier de la que hablaremos muy brevemente en la siguiente sección. Avanzamos que esto no siempre es así, aunque sí que es verdad si se supone, por ejemplo, que f es Lipchitz.

Cabe esperar, sin embargo, que incluso si la serie de Fourier de una función continua f no converge, aún tengamos que

$$f(\theta) = \lim_{r\to 1^-} \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m r^{|m|} e^{im\theta},$$

con lo cual la función $u : \overline{D} \to \mathbb{C}$ definida, en coordenadas polares, por $u(r,\theta) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m r^{|m|} e^{im\theta}$ si $0 \le r < 1$, y por $u(1,\theta) = f(\theta)$, sería continua en ∂D, dos veces diferenciable en $\mathbb{D}$, y satisfaría la ecuación $\Delta u = 0$. Es decir, habríamos resuelto el problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{D}, \\ u = f & \text{en } \partial\mathbb{D}. \end{cases}$$

En este capítulo probaremos que esto es realmente así, y que de hecho la función u así definida es la única solución de esta ecuación. Más en general, veremos cómo este tipo de problema puede resolverse en dominios que son conformemente equivalentes a $\mathbb{D}$ y están limitados por curvas cerradas simples.

11.2. Series de Fourier

La circunferencia unidad $\partial\mathbb{D}$ se denota también por $\mathbb{T}$ (y a veces se llama el toro unidimensional). Las funciones $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ pueden identificarse con las funciones 2π-periódicas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$, mediante la aplicación $\mathbb{R} \ni \theta \mapsto e^{i\theta} \in \mathbb{T}$. Es decir, si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ entonces $\theta \mapsto f(e^{i\theta})$ es una función 2π-periódica de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$, y recíprocamente, si $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ es 2π-periódica entonces $f(z) = g(\mathrm{Arg} z)$ es la única función de $\mathbb{T}$ en $\mathbb{C}$ tal que $f(e^{i\theta}) = g(\theta)$. Una función continua $\mathbb{T}$ y con valores en $\mathbb{C}$ puede identificarse por tanto con una función 2π-periódica y continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$. Cuando hablamos de funciones integrables, toda función integrable en $\mathbb{T}$ se identifica con una función integrable en $[0, 2\pi]$ mediante la misma correspondencia

Sea f una función integrable en $[0, 2\pi]$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ se define el n-ésimo coeficiente de Fourier de f por

$$\widehat{f}(n) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-int}dt.$$

Y se define la serie de Fourier de f por

$$S(f,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{int}.$$

También consideraremos la N-ésima suma parcial de la serie de Fourier de f, definida por

$$S_N(f,t) = S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e^{int},$$

y diremos que $S(f,t)$ converge si existe $\lim_{N\to\infty} S_N(f,t)$. Probaremos más adelante en este capítulo (ver los Corolarios 11.9 y 11.10) que si f es continua y la serie $S_N(f,t)$ converge uniformemente a una función $g(t)$, entonces necesariamente $f = g$.

Averiguar bajo qué condiciones y de qué forma converge una serie de Fourier es uno de los problemas fundamentales del Análisis de Fourier, y no resulta nada fácil de responder. Fourier (1768-1830) pensaba que toda función continua f debería tener la propiedad de que su serie de Fourier convergería a f, pero, como demostró Du Bois-Reymond en 1873, estaba equivocado. Sin embargo el conjunto de los puntos en los que la convergencia de la serie de Fourier de una función continua puede fallar, aunque posiblemente infinito, es relativamente pequeño: tiene medida cero. Esto fue demostrado en 1966 por Carleson.

En general puede demostrarse fácilmente (usando integración por partes) que cuanto más regular es una función f (en el sentido de tener mayor diferenciabilidad), más rápidamente decrecen sus coeficientes de Fourier $\widehat{f}(n)$ cuando $|n| \to \infty$, y por tanto más rápidamente convergerá su serie de Fourier. Por ejemplo, si f es de clase C^2 en $\mathbb{T}$, se ve que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, con $C = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f|$. También es cierto, aunque menos inmediato, que si f es de clase C^1 a trozos entonces $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < \infty$,[2] lo que implica la convergencia absoluta y uniforme de $S(f,t)$ a $f(t)$.

Por otro lado, si f es la restricción a $\partial\mathbb{D}$ de una serie de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ que converge en un anillo $0 < \rho \leq |z| \leq \sigma \leq \infty$ con $\rho < 1 < \sigma$, entonces sabemos que

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$$

uniformemente en θ, y se deduce además integrando el producto $f(e^{i\theta})e^{-ik\theta}$ en $[0,2\pi]$, que $a_k = \widehat{f}(k)$ para cada $k \in \mathbb{Z}$. En particular, si f es holomorfa en un entorno de $\mathbb{D}$, resulta que todos los coeficientes de Fourier $\widehat{f}(n)$ se anulan para $n < 0$.

Sin embargo todos estos resultados, y otros muchos aún más finos, no son suficientes para resolver problemas como el de Dirichlet si se desea imponer como dato de frontera una función meramente continua (es decir, resolver $\Delta u = 0$ en $\mathbb{D}$ con $u = f$ en $\partial\mathbb{D}$, suponiendo sólo que f es continua). En este tipo de problemas resulta muy útil considerar nociones de convergencia más débiles, que pueden definirse mediante *convoluciones* con diversos núcleos.

11.3. Convolución de funciones y núcleos de sumabilidad

La convolución de dos funciones $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ se define por

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy$$

cuando esta integral existe. La convolución de dos funciones f, g de $\mathbb{T}$ en $\mathbb{C}$ la definiremos en cambio como

$$f * g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t-s)g(s)ds = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(s)g(t-s)ds$$

si esta integral existe (es decir, normalizamos la medida en $\mathbb{T}$ para que sea de probabilidad).

En lo que resta de sección, salvo mención expresa en sentido contrario, L^1 nos servirá para denotar tanto $L^1(\mathbb{R}^d)$ como $L^1(\mathbb{T})$. Análogamente C^k denotará el espacio de las funciones diferenciables de clase C^k bien sobre $\mathbb{R}^d$ o bien sobre $\mathbb{T}$ (siendo C^0 el espacio de las funciones continuas sobre uno de estos conjuntos).

Teorema 11.1. *Si $f, g \in L^1$ entonces $f * g$ está bien definida en casi todo punto, y $f * g \in L^1$. Además, $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.*

Demostración. Consideremos la función $h(x,y) = f(x-y)g(y)$. Es fácil ver que h es medible, y puesto que

$$\int\Big(\int |h(x,y)|dx\Big)dy = \int\Big(\int |f(x-y)g(y)|dx\Big)dy =$$
$$\int\Big(|g(y)| \int |f(x-y)|dx\Big)dy = \int |g(y)|\Big(\int |f(z)|dz\Big)dy =$$
$$\int |g(y)| \|f\|_1 dy = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty,$$

[2] Esto puede verse fácilmente una vez que se ha estudiado la convergencia en media cuadrática de las series de Fourier, integrando por partes y usando que $f' \in L^2(\mathbb{T})$. Véanse los problemas 11.2 y 11.3.

resulta de los teoremas de Tonelli y Fubini que $h \in L^1$ y las secciones $x \mapsto \int h(x,y)dx$, $y \mapsto \int h(x,y)dy$ están bien definidas en casi todo punto y son integrables. En particular $f*g(x) = \int h(x,y)dy$ está bien definida para casi todo x, y $\int |f * g(x)|dx = \int |\int h(x,y)dy|dx \leq \int\int |h(x,y)dxdy = \|f\|_1 \, \|g\|_1$. $\square$

La siguiente proposición, cuya demostración es un ejercicio, resume las propiedades más básicas de la convolución de funciones.

Proposición 11.2. *Para todas $f, g, h \in L^1$ se tiene:*

1. $f * (g + h) = f * g + f * h$
2. $f * g = g * f$
3. $f * (g * h) = (f * g) * h.$

Además, en el caso en que $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, se tiene

4. $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n)\, \widehat{g}(n)$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$.

Otra de las propiedades más importantes de la convolución de dos funciones integrables es que, en general, conserva las mejores propiedades de cada una de esas dos funciones: por ejemplo, si una de ellas es continua, o diferenciable, entonces la convolución también lo es.

Proposición 11.3. *Si $f \in L^1$ y g tiene derivadas continuas y acotadas hasta el orden k, entonces $f * g \in C^k$, y*

$$D^j(f * g)(x) = (f * D^j g)(x)$$

para todo x y para todo $j \in 0, 1, ..., k$.

Aquí, en el caso en que f y g están definidas en $\mathbb{R}^d$, y si $\{e_1, ..., e_d\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^d$, denotamos por $f * D^j g(x)$ la aplicación j-lineal cuyo valor en cada vector de la forma $(e_{i_1}, ..., e_{i_j})$ es $f * (\partial g/\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_j})(x)$. Dicho de otro modo y empleando la notación de multi-índices, se tiene que

$$\partial^\alpha(f * g)(x) = (f * \partial^\alpha g)(x)$$

para cada multi-índice α con $|\alpha| = j$.

Demostración: Para $k = 0$, fijando x, se tiene que, para toda sucesión (x_n) convergente a x, la sucesión de funciones $f(y)g(x_n - y)$ converge a $f(y)g(x - y)$ para todo y. Además esta sucesión de funciones está acotada por la función $y \mapsto \|g\|_\infty f(y)$, que es integrable. Por el teorema de la convergencia dominada se tiene entonces que $f * g(x_n) = \int f(y)g(x_n - y)dy$ converge a $f * g(x) = \int f(y)g(x - y)$.

Para $k = 1$, fijemos x y denotemos por y_j la j-ésima coordenada de la variable y. Dada una sucesión de números reales (t_n) que tienda a 0, consideremos la sucesión de funciones $h_n(y)$ definida por

$$f(y_1, ..., y_d) \frac{g(x_1 - y_1, ..., x_j + t_n - y_j, ..., x_d - y_d) - g(x_1 - y_1, ..., x_d - y_d)}{t_n}.$$

Aplicando el teorema del valor medio se ve que

$$|h_n(y)| \leq |f(y)| \, \|\frac{\partial g}{\partial x_j}\|_\infty \leq \|Dg\|_\infty |f(y)|,$$

y como la función $\|Dg\|_\infty f$ es integrable, se sigue del teorema de la convergencia dominada que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f * g(x_1 ..., x_j + t_n, ..., x_d) - f * g(x_1, ..., x_d)}{t_n} = \lim_{n\to\infty} \int h_n(y)dy$$
$$= \int \lim_{n\to\infty} h_n(y) = \int f(y) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x - y)dy = f * \frac{\partial g}{\partial x_j}(x).$$

Esto prueba que

$$\frac{\partial(f * g)}{\partial x_j}(x) = f * \frac{\partial g}{\partial x_j}(x),$$

y como las funciones $\partial g/\partial x_j$ son continuas se sigue del caso $k = 0$ que también lo son las derivadas parciales $\partial(f * g)/\partial x_j$ para $j \in \{1, ..., n\}$. Por tanto $f * g \in C^1$ y $D(f * g)(x) = (f * Dg)(x)$. [3]

En el caso $k \geq 2$ la demostración se hace usando la misma idea y un sencillo argumento de inducción.

□

Definición 11.1. Se dice que una sucesión $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones de $L^1(\mathbb{T})$ es un *núcleo de sumabilidad* en $L^1(\mathbb{T})$ si

1. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\delta_n\|_1 < \infty$
2. $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \delta_n = 1$ para todo n
3. $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}\setminus[-r,r]} |\delta_n| = 0$ para todo $r \in (0, \pi)$.

Análogamente, se dice que una sucesión de funciones $\{\delta_n\}$ de $L^1(\mathbb{R}^m)$ es un núcleo de sumabilidad en $L^1(\mathbb{R}^m)$ si

1. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\delta_n\|_1 < \infty$
2. $\int_{\mathbb{R}^m} \delta_n = 1$ para todo n
3. $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m\setminus B(0,r)} |\delta_n| = 0$ para todo $r > 0$.

También puede cambiarse en esta definición la familia numerable de funciones $\{\delta_n\}$ por una familia no numerable $\{\delta_t\}$ con $t \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, y tomar límites cuando $t \to a^+$ (o cuando $t \to b^-$). Por ejemplo, en el caso $(a, b) = (0, \infty)$, $t \to 0^+$, una familia $\{\delta_t\}_{t>0}$ es un núcleo de sumabilidad en $L^1(\mathbb{R}^m)$ si

1. $\sup_{t>0} \|\delta_t\|_1 < \infty$
2. $\int_{\mathbb{R}^m} \delta_t = 1$ para todo $t > 0$, y
3. $\lim_{t\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^m\setminus B(0,r)} |\delta_t| = 0$ para todo $r > 0$.

Como ejemplo básico de núcleo de sumabilidad en $L^1(\mathbb{R}^m)$ tenemos el *núcleo del calor*, definido por

$$\delta_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/4t},$$

y llamado así porque $u(t, x) = f * \delta_t(x)$ es la solución de la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = 0 & \text{en } (0, +\infty) \times \mathbb{R}^m, \\ u(0, x) = f(x) & \text{para } x \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

En este ejemplo $t \in (0, \infty)$, y los límites se toman cuando $t \to 0^+$. Nótese que en el caso de *núcleos positivos* $\{\delta_t\}_{t>0}$ como es el del calor, la definición de núcleo de sumabilidad equivale a decir que:

1. $\int_{\mathbb{R}^m} \delta_t = 1$ para todo $t > 0$, y
2. $\lim_{t\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^m\setminus B(0,r)} \delta_t = 0$ para todo $r > 0$.

[3] Alternativamente, la prueba se obtiene aplicando un teorema de derivación bajo el signo integral; lo que acabamos de hacer esencialmente consiste en demostrar uno de estos teoremas.

Los núcleos de sumabilidad son *identidades aproximadas*, en el sentido de que la aplicación $f \mapsto \delta_n * f$ converge a la aplicación identidad cuando $n \to \infty$, en diversas maneras y contextos. Enunciaremos el siguiente resultado sólo en el caso de núcleos de sumabilidad de tipo sucesivo $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dejando a cuenta del lector el enunciado del mismo en el caso de identidades aproximadas de tipo $\{\delta_t\}_{t\in(a,b)}$.

Proposición 11.4. *Si $\{\delta_n\}$ es un núcleo de sumabilidad en L^1 y f es uniformemente continua y acotada, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \|f * \delta_n - f\|_\infty = 0.$$

Si f es sólamente continua y acotada, se tiene aún que $f * \delta_n \to f$ uniformemente sobre cada compacto. Más aún, si $f \in C^k$ con $D^k f$ continua y acotada, entonces

$$\lim_{n\to\infty} D^k(f * \delta_n)(x) = D^k f(x)$$

uniformemente sobre cada compacto (y si $D^k f$ es uniformemente continua y acotada entonces la convergencia es uniforme sobre todo el espacio).
Finalmente, en el caso especial en que todas las funciones δ_n tengan soporte contenido en un mismo conjunto acotado, puede prescindirse de la suposición de que f y sus derivadas estén acotadas.

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, al ser f uniformemente continua existe $r > 0$ tal que $|f(x-y) - f(x)| \leq \varepsilon/3\sup_n \|\delta_n\|_1$ si $|y| \leq r$. Por otro lado, como $\{\delta_n\}$ es un núcleo de sumabilidad se tiene $\int \delta_n = 1$, y también que $\lim_{n\to\infty} \int_{|y|>r} \delta_n(y)dy = 0$. Por tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\nu_n| \leq \varepsilon/2(1 + \|f\|_\infty)$ y $\int_{|y|>r} |\delta_n(y)|dy \leq \varepsilon/4(1 + \|f\|_\infty)$ para todo $n \geq N$. Entonces, para todo $n \geq N$ y todo x se tiene

$$|f * \delta_n(x) - f(x)| = |\int (f(x-y) - f(x))\,\delta_n(y)dy| \leq \int |f(x-y) - f(x)|\,|\delta_n(y)|dy \leq$$

$$\int_{|y|\leq r} |f(x-y) - f(x)|\,|\delta_n(y)|dy + \int_{|y|>r} |f(x-y) - f(x)|\,|\delta_n(y)|dy$$

$$\leq \varepsilon \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\delta_n\|_1 + 2\|f\|_\infty \int_{|y|>r} |\delta_n(y)|dy \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

La demostración en el caso $f \in L^\infty \cap C^0$ es similar, usando el hecho de que las funciones continuas son uniformemente continuas en cada compacto.

Por otro lado, cuando todas las δ_n se anulan fuera de una bola $B(0,R)$, poniendo $\sup_{y\in B(z,2R)} |f(y)|$ en lugar de $\|f\|_\infty$ en las desigualdades anteriores, se ve que, aún cuando f no sea acotada, la continuidad uniforme de f en el compacto $B(z,2R)$ es suficiente para permitirnos deducir que $f * \delta_n$ tiende a f uniformemente en $B(z,R)$.

Por último, cambiando f por $D^k f$ y usando el hecho de que $D^k(f * \delta_n) = (D^k f) * \delta_n$ se obtiene el resultado en el caso en que $f \in C^k$. □

De las propiedades anteriores se sigue que la convolución de una función continua f con un núcleo de sumabilidad $\{\delta_n\}$ produce una sucesión $f_n = f*\delta_n$ de funciones que aproximan a f y poseen las mismas buenas propiedades de diferenciabilidad que tengan las δ_n. A continuación mostramos una elección típica de un núcleo de sumabilidad que permite obtener resultados muy útiles sobre aproximación de funciones por funciones más regulares.

Definamos $\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ por

$$\delta(x) = \begin{cases} C\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1, \end{cases} \tag{11.1}$$

donde C está elegida de modo que $\int_{\mathbb{R}^n} \delta = 1$. Definamos también, para cada $\varepsilon > 0$, la función

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\delta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \tag{11.2}$$

Es fácil ver que cada función δ_ε es de clase $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, tiene soporte en $B(0,\varepsilon)$, e integral 1. Por tanto, $\{\delta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ es un núcleo de sumabilidad. En los textos en lengua inglesa a las funciones δ_ε se les llama *mollifiers*.

Usando estas propiedades y la proposición anterior, es inmediato comprobar que para toda función continua $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, la familia de funciones $f_\varepsilon := f*\delta_\varepsilon$ es de clase C^∞ y converge a f cuando $\varepsilon\to 0^+$, uniformemente sobre cada subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Más en general, si f es de clase C^p (con $p\geq 1$), entonces las derivadas de f_ε convergen a las derivadas de f (hasta el orden p), uniformemente sobre acotados, cuando $\varepsilon\to 0$. Si además D^kf es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$, se tiene que $D^kf_\varepsilon\to D^kf$ uniformemente en $\mathbb{R}^n$.

Una variante de estos resultados es la siguiente.

Teorema 11.5. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Para cada $\varepsilon>0$ definamos $\Omega_\varepsilon=\{x\in\Omega : d(x,\partial\Omega)>\varepsilon\}$. Si $f:\Omega\to\mathbb{R}$ es una función continua, pongamos*

$$f_\varepsilon(x) := \int_\Omega f(y)\delta_\varepsilon(x-y)dy$$

para cada $x\in\mathbb{R}^n$, donde $\{\delta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ está definida por (11.1) *y* (11.2). *Entonces se tiene que $f_\varepsilon\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f=0$ en $\mathbb{R}^n\setminus\Omega_\varepsilon$, y $\lim_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon = f$, uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω.*

La demostración queda como ejercicio para el lector.

11.4. El núcleo de Poisson y la solución del problema de Dirichlet en el disco

Se dice que una serie de números complejos $\sum_{n=1}^\infty c_n$ es convergente en el sentido de Abel (o A-convergente, para abreviar) a un número S, si para cada $0\leq r<1$ la serie

$$A_r=\sum_{n=1}^\infty c_n r^n$$

es convergente, y además se tiene que

$$S=\lim_{r\to 1^-} A_r.$$

Los números A_r se llaman las medias de Abel de la serie $\sum_{n=1}^\infty c_n$.

Ya vimos en el problema 3.2 que si $\sum_{n=1}^\infty c_n = S$ es convergente entonces también es A-convergente a S. El recíproco es falso en general (por ejemplo la serie $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n(n+1)$ es A-convergente a $1/4$, pero no es convergente). No obstante, bajo ciertas condiciones suplementarias sobre la rapidez de decaimiento de los coeficientes de la serie, la convergencia Abel equivale a la convergencia usual. Por ejemplo, se tiene el siguiente resultado (cuya demostración omitimos porque no es fácil y no lo vamos a usar).

Teorema 11.6 (Hardy-Littlewood)**.** *Si $c_n=O(1/n)$ y $\sum c_n$ es A-convergente a S, entonces $\sum c_n$ también converge a S.*

Dada una función $f\in C^1(\mathbb{T})$ con serie de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)e^{in\theta}$, definiremos sus sumas de Abel como

$$A_r(f,\theta)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\widehat{f}(n)e^{in\theta}.$$

Puesto que la sucesión doble $\{\widehat{f}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ está acotada por $\|f\|_\infty$, es obvio que $A_r(f,\theta)$ converge absoluta y uniformemente en $\theta\in\mathbb{T}$ para todo $r\in[0,1)$.

Para estudiar la convergencia de $A_r(f,\theta)$ cuando $r\to 1^-$, vamos a ver que $A_r(f,\cdot)=f*P_r$, donde

$$P_r(\theta) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in\theta}$$

es el *núcleo de Poisson*.

En efecto, tenemos

$$f * P_r(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in(\theta-t)}\right)dt =$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-int}dt\right)e^{in\theta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\widehat{f}(n)e^{in\theta} = A_r(f,\theta),$$

donde el cambio de orden entre integral y suma puede justificarse por la convergencia uniforme de la serie para cada $r \in [0,1)$.

El siguiente lema prueba que el núcleo de Poisson es un núcleo de sumabilidad.

Lema 11.7. *Para todo* $r \in [0,1)$ *se tiene*

$$P_r(\theta) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in\theta} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2},$$

y la familia $\{P_r\}_{r\in[0,1)}$ *es un núcleo de sumabilidad cuando* $r \to 1^-$.

Demostración. Escribamos $z = re^{i\theta}$. Tenemos

$$P_r(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{z}^n = \frac{1}{1-z} + \frac{\overline{z}}{1-\overline{z}} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}.$$

Es entonces obvio que $P_r(\theta) \geq 0$ para todo $\theta \in \mathbb{T}$. Además

$$1 - 2r\cos\theta + r^2 = (1 - r\cos\theta)^2 + r^2\operatorname{sen}^2\theta \geq (1 - r\cos\theta)^2 \geq (1 - |\cos\theta|)^2,$$

luego, para $\theta \in \mathbb{T}\setminus[-\delta,\delta]$ se tiene

$$0 \leq P_r(\theta) \leq \frac{1-r^2}{(1-|\cos\theta|)^2} \leq \frac{1-r^2}{(1-|\cos\delta|)^2},$$

lo que prueba que $P_r(\theta) \to 0$ cuando $r \to 1^-$, uniformemente en $\mathbb{T}\setminus[-\delta,\delta]$, y en particular también $\lim_{r\to 1^-}\int_{|\theta|>\delta} P_r(\theta)d\theta = 0$ para cada $\delta > 0$. Finalmente, es inmediato comprobar (integrando término a término la expresión $\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in\theta}$) que $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} P_r(\theta)d\theta = 1$ para todo $r \in (0,1)$, y por tanto $\{P_r\}_{0\leq r<1}$ es un núcleo de sumabilidad en $L^1(\mathbb{T})$. □

Combinando el lema anterior con la Proposición 11.4, obtenemos inmediatamente el siguiente

Teorema 11.8. *Si* $f \in C(\mathbb{T})$*, entonces* $\lim_{r\to 1^-} A_r(f,\theta) = f(\theta)$ *uniformemente en* $\theta \in \mathbb{T}$.

Corolario 11.9. *Si* $f, g \in C(\mathbb{T})$ *y* $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$*, entonces* $f = g$.

Demostración. Si $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ entonces obviamente

$$A_r(f,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\widehat{f}(n)e^{in\theta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\widehat{g}(n)e^{in\theta} = A_r(g,\theta),$$

para cada $r \in (0,1)$, y entonces por el teorema anterior

$$f(\theta) = \lim_{r\to 1^-} A_r(f,\theta) = \lim_{r\to 1^-} A_r(g,\theta) = g(\theta)$$

para todo $\theta \in \mathbb{T}$. □

Corolario 11.10. *Si $f \in C(\mathbb{T})$ y la serie de Fourier $S_N(f,t)$ converge uniformemente en $t \in \mathbb{T}$, entonces $S_N(f,t)$ converge a $f(t)$ uniformemente en $t \in \mathbb{T}$.*

Demostración. Llamemos $g(t) = \lim_{N\to\infty} S_N(f,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{int}$. Entonces g es continua en $\mathbb{T}$, por ser límite uniforme de una sucesión de funciones continuas. Los coeficientes de Fourier de esta función g vienen dados, para cada $k \in \mathbb{Z}$, por

$$\widehat{g}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{int}\right)e^{-ikt}dt = \tag{11.3}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{i(n-k)t}dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \widehat{f}(n)e^{i(n-k)t}dt = \widehat{f}(k) \tag{11.4}$$

(donde el intercambio de suma e integral se puede justificar por la convergencia uniforme de la serie). Es decir, f y g tienen los mismos coeficientes de Fourier. Como además ambas son continuas deducimos del corolario anterior que $f = g$. □

Con todo esto ya podemos demostrar la existencia y unicidad de las soluciones del problema de Dirichlet en el disco unidad.

Teorema 11.11. *Sea $f \in C(\mathbb{T},\mathbb{R})$, y definamos $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ en coordenadas polares por*

$$u(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\widehat{f}(n)e^{in\theta} = A_r(f,\theta) = (P_r * f)(\theta).$$

Entonces:

1. $u \in C^\infty(\mathbb{D})$, *y* $\Delta u = 0$.
2. $\lim_{r\to 1^-} u(r,\theta) = f(\theta)$, *uniformemente en* $\theta \in \mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$.
3. *La función $u : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$, definida en coordenadas polares por $P_r * f$ en $\mathbb{D}$ y por f en $\partial\mathbb{D} = \mathbb{T}$, es la única función de $C(\overline{\mathbb{D}}) \cap C^2(\mathbb{D})$ que satisface*

$$(*)\begin{cases}\Delta u = 0 & \textit{en } \mathbb{D},\\ u = f & \textit{en } \partial\mathbb{D}.\end{cases}$$

Demostración. Escribiendo $z = re^{i\theta}$ con $0 \le r < 1$, $\theta \in \mathbb{T}$, tenemos

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n\widehat{f}(n)e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\widehat{f}(-n)e^{-in\theta} = g_1(z) + g_2(\overline{z}),$$

donde las funciones $g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\widehat{f}(n)z^n$, $g_2(w) = \sum_{n=1}^{\infty}\widehat{f}(-n)\omega^n$ son holomorfas en $\mathbb{D}$, luego es claro que $u \in C^\infty(\mathbb{D})$. Además, diferenciando la serie término a término dos veces, se comprueba sin dificultad que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = 0,$$

lo que ya sabemos equivale a

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Esto prueba (1).

La propiedad (2) es consecuencia inmediata del Teorema 11.8.

Para demostrar (3) veamos primero que la función u así definida es continua en $\overline{\mathbb{D}}$. Puesto que $u \in C^\infty(\mathbb{D})$ sólo hay que comprobar que

$$\lim_{(r,\theta)\to(1,\theta_0)} u(r,\theta) = f(\theta_0)$$

para cada $\theta_0 \in \mathbb{T}$. Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim_{r\to 1^-} u(r,\theta) = f(\theta)$ uniformemente en $\theta \in \mathbb{T}$, podemos encontrar $\delta_1 > 0$ tal que si $1 - r < \delta_1$ entonces $|u(r,\theta) - f(\theta)| \leq \varepsilon/2$ para todo $\theta \in \mathbb{T}$. Por otro lado, por la continuidad de f en θ_0, existe $\delta_2 > 0$ tal que $|f(\theta) - f(\theta_0)| \leq \varepsilon/2$ siempre que $|\theta - \theta_0| \leq \delta_2$. Por tanto, si $\|(r,\theta) - (1,\theta_0)\| \leq \delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se tiene

$$|u(r,\theta) - f(\theta_0)| \leq |u(r,\theta) - f(\theta)| + |f(\theta) - f(\theta_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por tanto $u \in C(\overline{\mathbb{D}})$ es solución de $(*)$. Finalmente, la unicidad de esta solución es consecuencia del *principio del máximo* para las funciones armónicas, que estudiamos a continuación. □

Teorema 11.12 (Principio del máximo)**.** *Sean Ω un abierto acotado y conexo de $\mathbb{C}$, y $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Supongamos que u es armónica en Ω. Entonces*

$$\max_{z\in\overline{\Omega}} u(z) = \max_{z\in\partial\Omega} u(z).$$

Además, si u tiene un máximo en Ω, entonces u es constante en Ω.

Demostración. Supongamos que existe $z_0 \in \Omega$ con $u(z_0) = M \geq u(z)$ para todo $z \in \Omega$. Entonces, para cada $r \in (0, d(z_0, \partial\Omega))$, por la propiedad del valor medio de las funciones armónicas,

$$M = u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{D(z_0,r)} u \leq M,$$

y como, al ser u continua, la igualdad sólo puede darse si $u \equiv M$ en $D(z_0, r)$, se deduce que u es constante en $B(z_0, r)$. En particular esto prueba que el conjunto $\{z \in \Omega : u(z) = M\}$ es abierto. Como también es un cerrado relativo a Ω, que es conexo, se deduce que este conjunto coincide con Ω, lo que prueba la segunda parte del enunciado, que a su vez implica la primera. □

Corolario 11.13. *Sean Ω un abierto acotado de $\mathbb{C}$, $f \in C(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$. Entonces a lo sumo existe una única solución del problema*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = g & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Demostración. Si u, v son soluciones del problema entonces $u - v$ es armónica en Ω, y además $u - v = 0$ en $\partial\Omega$, luego por el teorema anterior $u - v \leq 0$ en Ω. Análogamente resulta que $v - u \leq 0$ en Ω. Por tanto $u = v$ en Ω. □

Corolario 11.14. *Para cada disco $\overline{D}(z,r) \subset \mathbb{R}^2$ y cada función continua $f : \partial D(z,r) \to \mathbb{R}$ existe una única función continua $u : \overline{D}(z,r) \to \mathbb{R}$ tal que $u = f$ en $\partial D(z,r)$ y u es armónica en $D(z,r)$.*

Demostración. Consideremos $g : \partial D(0,1) \to \mathbb{R}$, $g(\zeta) = f(z + r\zeta)$. Por el teorema 11.11 existe una única función v continua en $\overline{D}(0,1)$ y armónica en $D(0,1)$, tal que $v = g$ en $\partial D(0,1)$. Entonces la función $u(\zeta) = v\left((\zeta - z)/r\right)$ es armónica en $D(z,r)$, como se comprueba fácilmente, y coincide con f en $\partial D(z,r)$. Además u es la única función con estas dos propiedades: si hubiera otra tal función w entonces $h(\zeta) = w(z + r\zeta)$ sería una función armónica en D que coincidiría con g en su borde, con lo cual, otra vez por el teorema 11.11, tendríamos $h = v$ en D, lo que equivale a decir $w = u$ en $D(z,r)$. □

Ya sabemos que es posible recuperar el valor de una función armónica en el interior de un disco a partir del promedio de sus valores en el borde del disco. A continuación vemos que de hecho esta propiedad caracteriza a las funciones armónicas: basta que una función sea continua y tenga la propiedad del valor medio para que automáticamente sea armónica y en particular tenga derivadas de todos los órdenes.

Teorema 11.15 (Propiedad del valor medio, versión 2.0)**.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto, y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces u es armónica si y sólo si para cada disco $\overline{D}(z,r) \subset \Omega$ se tiene que*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})d\theta.$$

Demostración. Que las funciones armónicas tienen esta propiedad ya lo demostramos como consecuencia de la fórmula integral de Cauchy y el hecho de que toda función armónica es localmente la parte real de una función holomorfa. Recíprocamente, supongamos que la fórmula es válida para todo $\overline{D}(z,r)$, y veamos que $\Delta u = 0$. Es suficiente probar que $\Delta u = 0$ en $D(z,r)$ para cada $z \in \Omega$, $r > 0$ con $\overline{D}(z,r) \subset \Omega$. Fijado un tal disco, por el corolario anterior sabemos que existe una única v solución de $\Delta v = 0$ en $D(z,r)$ tal que $v = u$ en $\partial D(z,r)$. Veamos que $u = v$ en $D(z,r)$, y por tanto $\Delta u = 0$ en $D(z,r)$.

Supongamos que $v \neq u$, por ejemplo $v - u > 0$ en algún punto de $D(z,r)$. Definamos

$$E = \{p \in \overline{D}(z,r) \, : \, (v-u)(p) = \max_{\zeta \in \overline{D}(z,r)} (v-u)(\zeta)\},$$

que es un compacto no vacío contenido en $D(z,r)$ (ya que $v - u = 0$ en $\partial D(z,r)$), y sea $w \in E$ tal que

$$|w - z| = \max\{|\zeta - z| : \zeta \in E\}.$$

Como $w \in D(z,r)$, existe $r' > 0$ tal que $\overline{D}(w,r') \subset D(z,r)$, y por la hipótesis sobre u tenemos

$$u(w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(w + r'e^{i\theta})d\theta.$$

La misma propiedad tiene v por ser armónica, luego la diferencia también cumple

$$(v-u)(w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (v-u)(w + r'e^{i\theta})d\theta.$$

Pero por la elección de w como el punto en E más lejano de z se tiene $(v-u)(w + r'e^{i\theta}) \leq (v-u)(w)$ para todo $\theta \in \mathbb{T}$, con desigualdad estricta en un subconjunto abierto de $\mathbb{T}$, lo que implica que

$$(v-u)(w) > \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (v-u)(w + r'e^{i\theta})d\theta,$$

contradiciendo la ecuación anterior. Análogamente se ve que no puede haber puntos para los cuales $v - u < 0$. Por tanto $u = v$. □

11.5. El problema de Dirichlet en dominios limitados por curvas de Jordan

Finalmente veremos cómo el teorema de la aplicación de Riemann, junto con el de Carathéodory que estudiamos en el capítulo anterior, nos permiten transportar la solución del problema de Dirichlet en el disco unidad $\mathbb{D}$ a la solución del problema de Dirichlet en cualquier abierto acotado limitado por una curva cerrada simple.

Para ello observemos primero que la composición de una función holomorfa con una función armónica es armónica.

Lema 11.16. *Sean V y W abiertos de $\mathbb{C}$, $F : W \to V$ holomorfa, y $u : V \to \mathbb{R}$ armónica. Entonces $u \circ F$ es armónica en W.*

Demostración. Puesto que el resultado es de carácter local podemos suponer que V es un disco abierto. Entonces sabemos que existe $G : V \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $u = \mathrm{Re} G$. Como la composición de funciones holomorfas es holomorfa se tiene que $H = G \circ F$ es holomorfa, y por tanto $\mathrm{Re}(H) = \mathrm{Re}(G) \circ F = u \circ F$ es armónica. □

Teorema 11.17. *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{C}$ cuya frontera $\partial\Omega$ es una curva cerrada simple, y sea $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ continua. Entonces existe una única solución del problema*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = f & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Demostración. La unicidad es consecuencia del principio del máximo estudiado en la sección anterior. Para probar la existencia, sea $F : \mathbb{D} \to \Omega$ conforme (F existe gracias a teorema de la aplicación de Riemann). Por el teorema de Carathéodory sabemos que F puede extenderse a un homeomorfismo de $\overline{\mathbb{D}}$ en $\overline{\Omega}$, que seguiremos denotando F. Consideremos $g = f \circ F : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$, que es continua, y sea v la única solución del problema de Dirichlet en el disco, es decir

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{en } \mathbb{D}, \\ v = g & \text{en } \partial\mathbb{D}. \end{cases}$$

Por el lema anterior se tiene que $u := v \circ F^{-1} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ es armónica en Ω, es decir cumple $\Delta u = 0$ en Ω. Por otra parte es claro que u es continua en $\overline{\Omega}$, y cumple $u = g \circ F^{-1} = f$ en $\partial\Omega$. □

Como se ve en la prueba, la solución de este problema es de la forma $v \circ \varphi$, donde $\varphi : \Omega \to \mathbb{D}$ es conforme y v es la solución del problema de Dirichlet en el disco unidad con dato de frontera $v = f \circ \varphi^{-1}$ en $\partial\mathbb{D}$. Según hemos visto en la sección anterior, hay una fórmula explícita para la solución de este último problema. Sin embargo la demostración del teorema de la aplicación de Riemann no proporciona una fórmula explícita para φ. Por este, entre otros muchos motivos, resulta útil hallar fórmulas explícitas de aplicaciones conformes entre el disco unidad y un abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}$. En algunos de los problemas que siguen se proponen fórmulas de este tipo para recintos tales como semiplanos o bandas.

11.6. Problemas

Problema 11.1. Consideremos la banda horizontal $\Omega = \{x + iy : 0 < y < 1\}$, y sean $f_0, f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas. Definamos $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ por $f(x,0) = f_0(x)$ y $f(x,1) = f_1(x)$. Consideremos también las funciones

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \log\left(i \frac{1-z}{1+z} \right), \quad G(z) = \frac{i - e^{\pi z}}{i + e^{\pi z}}.$$

1. Demostrar que $F : \mathbb{D} \to \Omega$ es conforme, con inversa $F^{-1} = G : \Omega \to \mathbb{D}$.

2. Combinar la solución del problema de Dirichlet $\{\Delta v = 0 \text{ en } \mathbb{D}, v = f \circ F \text{ en } \partial\mathbb{D}\}$, y la aplicaciones F y G, para obtener una fórmula explícita para la solución del problema de Dirichlet $\{\Delta u = 0$ en Ω, $u = f$ en $\partial\Omega$, $\lim_{|z|\to\infty} u(z) = 0\}$.

Problema 11.2. Demostrar que si $f \in L^2(\mathbb{T})$ entonces

$$\sum_{k=-m}^{n} |\widehat{f}(k)|^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left| f(t) - \sum_{k=-m}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikt} \right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 dt.$$

Indicación: para comenzar, usar la fórmula $|z|^2 = z\overline{z}$ con el integrando del término de la izquierda.

Problema 11.3. Demostrar que si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ es de clase C^1 a trozos entonces $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < \infty$, y en particular $\lim_{N\to\infty} \sum_{|n|\le N} \widehat{f}(n)e^{int} = f(t)$, uniformemente en $t \in \mathbb{T}$.
Indicación: integrar por partes para demostrar que $\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n)$. Luego usar el ejercicio anterior (con f' en lugar de f), observando que
$$|\widehat{f}(n)| = \frac{1}{|n|}|\widehat{f'}(n)| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |\widehat{f'}(n)|^2\right).$$

Problema 11.4. Demostrar el *lema de Riemann-Lebesgue*: si $f \in C(\mathbb{T})$ se tiene que
$$\lim_{|n|\to\infty} \widehat{f}(n) = 0.$$

Indicación: suponer primero que $f \in C^1(\mathbb{T})$.

Problema 11.5. Si $f \in C^k(\mathbb{T})$, demostrar que
$$\lim_{|n|\to\infty} n^k \widehat{f}(n) = 0.$$

Problema 11.6. Sean $\alpha, C > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ con $m \ge 2$. Supongamos que $f \in C(\mathbb{T})$ verifica que
$$|\widehat{f}(n)| \le \frac{C}{n^{m+\alpha}}$$
para todo $n \in \mathbb{Z}$ con $|n|$ suficientemente grande. Demostrar que entonces $f \in C^{m-1}(\mathbb{T})$.

Problema 11.7. Sea $f \in C(\mathbb{T})$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

1. f es real analítica.
2. Existen $K, a > 0$ tales que $|\widehat{f}(n)| \le Ke^{-a|n|}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
3. Existe $a > 0$ tal que la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{inz}$ converge y define una función holomorfa en $|\mathrm{Im}(z)| < a$.

Problema 11.8. Demostrar el Teorema 11.5.

Problema 11.9. Dar una demostración del teorema de Weierstrass de aproximación polinómica siguiendo estas pautas (que son esencialmente las ideas que usó Weierstrass en su demostración):

1. Dado un compacto K de $\mathbb{R}^n$ y una función continua $f : K \to \mathbb{R}$, usar el teorema de extensión de Tietze para extender f a una función continua de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, que seguiremos denotando f. Demostrar que puede suponerse $f(x) = 0$ si $|x| \ge R$, para algún $R > 0$.

2. Demostrar que el núcleo del calor
$$\delta_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/4t},$$
es un núcleo de sumabilidad. Deducir que $\lim_{t\to 0^+} f * \delta_t = f$, uniformemente en K.

3. Escribir $e^{-|x-y|^2/4t}$ como una suma infinita del tipo $\sum_{j=0}^{\infty} P_j(x, y, t)$, donde cada función $x \mapsto P_j(x, y, t)$ es un polinomio j-homogéneo.

4. Escribir
$$f * \delta_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\delta_t(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=0}^{\infty} f(y)P_j(x, y, t)dy,$$
y probar que puede sacarse la suma infinita fuera de la integral, con convergencia uniforme para x en K.

5. Comprobar que la función $x \mapsto g_j(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} P_j(x,y,t)dy$ es un polinomio j-homogéneo, para cada $j \in \mathbb{N}$, $t > 0$.

6. Truncar la suma infinita $f * \delta_t(x) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(x,t)$ así obtenida para concluir el resultado buscado: toda función f continua en K puede aproximarse por polinomios reales, uniformemente en K.

Problema 11.10 (El teorema de Morera vale con círculos en lugar de triángulos)**.** Sean Ω abierto de $\mathbb{C}$, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua. Supongamos que

$$\int_{\partial D} f = 0$$

para todo disco cerrado D contenido en Ω. Demostrar que entonces f es holomorfa en Ω.
Indicación: Definir f_ε como en el Teorema 11.5, usar el teorema de Fubini para comprobar que $\int_{\partial D} f_\varepsilon(z)dz = 0$, y combinar con el problema 7.8.

Problema 11.11. Demostrar que el teorema de Morera es válido también si se cambian los triángulos por traslaciones y homotecias de cualquier curva cerrada simple fija, de clase C^1 a trozos (por ejemplo, un cuadrado, o un rectángulo).

Problema 11.12. Para cada $t > 0$ definamos

$$K_t(x) = \frac{t}{\pi}\frac{1}{x^2+t^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y acotada, definamos $f_t(x) = f * K_t(x)$, y $F(x,y) = f * K_y(x)$, es decir

$$F(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(s)}{(x-s)^2+y^2}ds,$$

para $x + iy \in \mathbb{H}$, el semiplano superior.

1. Demostrar que $\{K_t\}_{t>0}$ es un núcleo de sumabilidad. (A este núcleo se le llama núcleo de Poisson para el semiplano superior.)

2. Demostrar que F es armónica en $\mathbb{H}$, y que $\lim_{(x,y)\to x_0} F(x,y) = f(x_0)$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

3. Concluir que F es la única solución continua del problema $\{\Delta F = 0$ en $\mathbb{H}$, $F = f$ en $\mathbb{R} = \partial\mathbb{H}$, $\lim_{|z|\to\infty} F(z) = 0\}$.

Problema 11.13. Sea (u_n) una sucesión de funciones armónicas definidas en un abierto Ω de $\mathbb{C}$, y supongamos que (u_n) converge a una función u, uniformemente en cada compacto de Ω. Probar que u también es armónica.

Bibliografía

La originalidad que puede tener un manual de estas características es escasa. En este caso se limita a algunas variaciones en pruebas y enunciados, y en la selección y el orden de exposición de ciertos contenidos, y un puñado de ejercicios. Las referencias que hemos manejado con mayor intensidad durante la preparación de este texto son las siguientes.

[1] J.M.M. Ansemil, S. Ponte, *Manual de Análisis de Funciones de Variable Compleja*. Universidad Complutense, 2015.

[2] T.W. Gamelin, *Complex analysis.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2001.

[3] R.E. Greene, S.G. Krantz, *Function theory of one complex variable*. Third edition. Graduate Studies in Mathematics, 40. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

[4] W. Rudin, *Real and complex analysis*. Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[5] E.M. Stein, R. Shakarchi, *Complex analysis*. Princeton Lectures in Analysis, 2. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.