

Tema 8: Operaciones financieras simples

Matemáticas Aplicadas al Marketing

Grado en Marketing

¿Qué es la matemática financiera?

Son las “matemáticas de los préstamos”

- El prestatario tiene que devolver al prestamista una cantidad superior a la recibida
 - Por el riesgo que asume el prestamista
 - Por la falta de disponibilidad que supone desprenderse del capital un tiempo
- El dinero extra a devolver es el interés
 - Pactado entre prestamista y prestatario
 - Ejemplo: préstamo a dos años de 1000 € con un tipo de interés del 5 % anual
 - Evolución de la deuda por año:
 - Opción 1: $1000 \Rightarrow 1000 + 1000 \times 0,05 \Rightarrow 1000 + 1000 \times 0,05 + 1000 \times 0,05 = 1000(1 + 2 \times 0,05)$
 - » (cada año la deuda aumenta 50 €)
 - Opción 2: $1000 \Rightarrow 1000 + 1000 \times 0,05 = 1000(1 + 0,05) \Rightarrow 1000(1 + 0,05) + 1000(1 + 0,05) \times 0,05 = 1000(1 + 0,05)(1 + 0,05) = 1000(1 + 0,05)^2$
 - » (cada año la deuda aumenta 5 % de la deuda del año anterior)

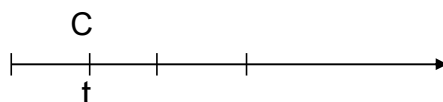
■ Operación Financiera

- Intercambio de dinero/bienes en distintos momentos
- “Préstamos” de distintos tipos (inversiones, hipotecas, rentas...)
- Comprar al contado en una tienda NO es una operación financiera
- Comprar a plazos SÍ es una operación financiera



Capital financiero

- **Matemática Financiera** = estudio de Operaciones Financieras
- Las fórmulas matemáticas que usamos son las **Leyes Financieras**
- **Capital financiero**
 - Un capital financiero es un par dinero-tiempo (C,t)
 - (C,t) representa la cantidad de dinero C en el tiempo t
 - No hablamos de dinero, sino de dinero-en-un-momento-determinado
 - C es la cuantía
 - t el vencimiento
- **Ejemplo:**
 - (1000 €, 6) puede representar, por ejemplo, “1000 € el 6 de agosto”
- **Representación del capital financiero**

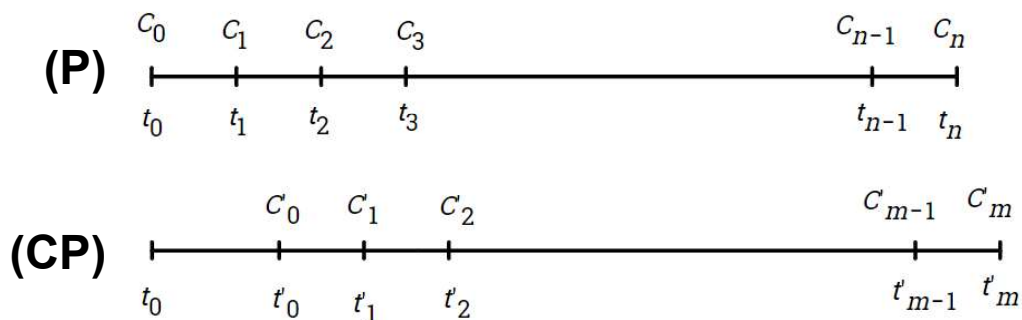


■ Prestación

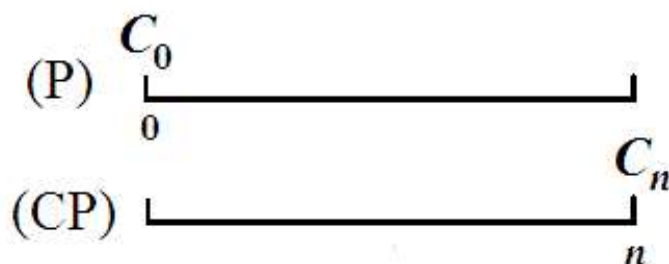
- Conjunto de capitales financieros que entrega el acreedor
- $P = \{(C_0, t_0); (C_1, t_1); (C_2, t_2); \dots; (C_n, t_n)\}$

■ Contraprestación:

- Conjunto de capitales financieros que entrega el deudor
- $CP = \{(C'_0, t'_0); (C'_1, t'_1); (C'_2, t'_2); \dots; (C'_m, t'_m)\}$



- **Operación financiera simple** si únicamente se intercambian dos capitales.
 - Prestación y contraprestación formadas por un único capital.
- $P = \{(C_0, 0)\}$
 - Se entrega todo el dinero ahora
- $CP = \{(C_n, n)\}$
 - Se devuelve todo el dinero después de n unidades de tiempo (años, meses, días,..)



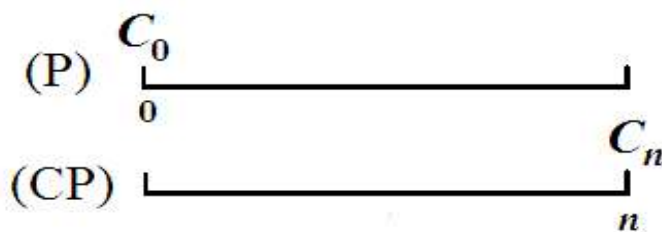
■ Leyes de capitalización

- Calculamos el equivalente futuro de un capital actual
- Ejemplo:
 - ¿A cuánto equivalen en diez años 1000 € de ahora?
 - Necesario acordar un tipo de interés (entre las partes implicadas)
 - Es el caso de los préstamos habituales
- Capitalización simple y compuesta

■ Leyes de descuento

- Calculamos el equivalente actual de un capital futuro
- Ejemplo:
 - ¿A cuánto equivalen ahora 1000 € de dentro de 10 años?
 - Necesario acordar un descuento
 - Es el caso de los pagos adelantados de una hipoteca
- Descuento simple y compuesto

- **Estudiamos el valor futuro de una inversión**
 - Cantidad a la que crecerá una inversión después de añadirle los intereses.
- **El interés es la recompensa que recibe el prestamista porque:**
 - No puede disponer de ese capital durante la vida del préstamo.
 - Está corriendo el riesgo de que el prestatario no le devuelva el dinero.



$$\text{Intereses: } I_{0,n} = C_n - C_0$$

- **Capital inicial** C_0
 - Montante prestado durante el intervalo $(0, n)$.
 - Si pedimos 1000 € al banco, el banco es el prestamista.
 - Si invertimos 1000 € a plazo fijo, nosotros somos el prestamista.
- **Capital final** C_n
 - Capital final a devolver por el acreedor.
- **Duración de la operación** n
 - Considerando una cierta unidad temporal: año, mes, etc..
- **Cantidad de interés de la operación** $I_{0,n} = C_n - C_0$
 - Es el importe que ha producido el capital inicial en el intervalo $(0, n)$.

- **Ley de Capitalización simple**

$$C_n = C_0 (1 + i \cdot n)$$

- Cada unidad de tiempo aumenta lo mismo
 - Aumenta la proporción del capital inicial determinada por el interés.
 - Los intereses acumulados NO contribuyen al aumento del montante
- **Ejemplo:**
 - Si 1000 € se transforman en 1150 € en 3 años:

$$i = \frac{1150 - 1000}{1000 \cdot 3} = \frac{150}{1000 \cdot 3} = \frac{0,15}{3} = 0,05$$

- Se divide el interés producido entre el capital aportado y el número de años.
- Conclusión: el capital ha producido 0,05 euros por cada euro cada año.
 - Interés de 5% anual.

- Dos tipos de interés son equivalentes si producen el mismo montante
 - Invertiendo el misma cuantía durante el mismo tiempo.
- En capitalización simple se relacionan de forma proporcional
 - Consideramos m sub-periodos iguales en cada periodo general

$$i = i_m \cdot m \Rightarrow \boxed{i_m = \frac{i}{m}}$$

■ Ejemplo-ejercicio

- ¿A qué tipo de interés simple mensual, semestral, trimestral y bienal equivale a un tipo del 9% anual simple?

$$\begin{aligned} \frac{9}{12} &= 0,75 \text{ mensual,} & \frac{9}{2} &= 4,5 \text{ semestral} \\ \frac{9}{4} &= 2,25 \text{ trimestral,} & 9 \cdot 2 &= 18 \text{ bianual} \end{aligned}$$

- Para cada periodo
 - El montante se calcula a partir del capital disponible a principio de cada periodo.

(P) C_0

0

(CP) C_n

n

$$\left\{ \begin{aligned} C_1 &= C_0(1+i) = C_0(1+i) \\ C_2 &= C_1(1+i) = C_0(1+i)^2 \\ &\dots \\ C_n &= C_{n-1}(1+i) = C_0(1+i)^n \end{aligned} \right.$$

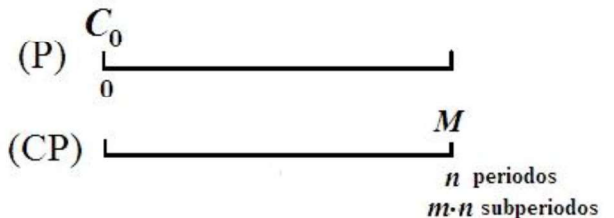
- Ley de Capitalización compuesta

$$\boxed{C_n = C_0(1+i)^n}$$

- También llamado efectivo
- Medida de rentabilidad si mi operación es de inversión
- Medida de coste: si mi operación es de financiación

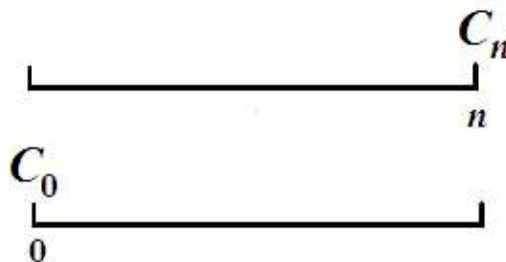
- Dos tipos de interés son equivalentes si producen el mismo montante
 - Invirtiendo el misma cuantía durante el mismo tiempo.
- En capitalización compuesta NO se relacionan de forma proporcional
- Consideramos

- n periodos: interés compuesto i .
- $m \cdot n$ subperiodos: interés compuesto i_m .

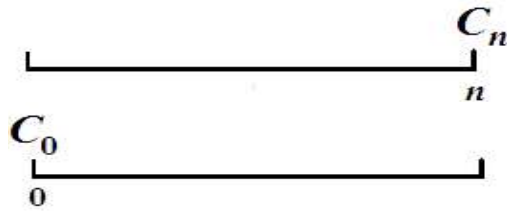


$$\left. \begin{array}{l} M = C_0(1+i)^n \\ M = C_0(1+i_m)^{m \cdot n} \end{array} \right\} \Rightarrow C_0(1+i)^n = C_0(1+i_m)^{m \cdot n} \Rightarrow 1+i = (1+i_m)^m$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i = (1+i_m)^m - 1 \\ i_m = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 \end{cases}$$



- **Objetivo**
 - Anticipar la disponibilidad de un capital.
 - Calculamos el valor actual de una cantidad en el futuro.
 - Cantidad a la que se reduce una cantidad después aplicarle los descuentos.
- **Tipo de descuento**
 - El descuento se expresa por unidad de tiempo.
 - Denominado tanto o tipo de descuento: d



- **Nominal o Capital a descontar** C_n
- **Efectivo a percibir** C_0
 - Valor descontado, anticipado o actualizado.
- **Duración de la operación** n
 - Considerando una cierta unidad temporal: año, mes, etc..
- **Cantidad de descuento de la operación**
 - Diferencia entre el valor futuro y el valor actual.

$$D_{0,n} = C_n - C_0$$

- **Ley de Descuento Simple Comercial**

$$C_0 = C_n (1 - d \cdot n)$$

- **Similar a la capitalización simple**
- **Ejemplo:**
 - Actualización de 1000 € en 3 años con un descuento simple comercial de 5%:

$$C_0 = 1000(1 - 0,05 \cdot 3) = 1000(1 - 0,15) = 850$$

- **Dos tipos de descuento son equivalentes si producen el mismo efectivo**
 - Descontando el mismo nominal durante el mismo tiempo.
- **En descuento simple comercial se relacionan de forma proporcional**
 - Consideramos m sub-periodos iguales en cada periodo general

$$d = d_m \cdot m \Rightarrow \boxed{d_m = \frac{d}{m}}$$

- **Ejemplo-ejercicio**
 - ¿Qué tipos de descuento simple comercial mensual, semestral, trimestral y bienal equivalen a un tipo del 9%?

$$\begin{aligned} \frac{9}{12} &= 0,75 \text{ mensual,} & \frac{9}{2} &= 4,5 \text{ semestral} \\ \frac{9}{4} &= 2,25 \text{ trimestral,} & 9 \cdot 2 &= 18 \text{ bianual} \end{aligned}$$

- **Convenio**
 - Año Comercial: 360 días (12 meses de 30 días).
 - La fracción de año se expresa como $t = k/360$, siendo k el número de días.
 - Año Civil: 365 días.
 - La fracción de año se expresa como $t = k/365$, siendo k el número de días.
- **Ejemplo**
 - La actualización de 1000 € en 100 días con un descuento simple comercial anual del 5% es:

$$1000 \cdot \left(1 - 0,05 \cdot \frac{100}{365} \right) = 986,30 \text{ con año civil}$$

$$1000 \cdot \left(1 - 0,05 \cdot \frac{100}{360} \right) = 986,11 \text{ con año comercial}$$

■ Ley de Descuento Simple Racional

- Despejando en la formula de capitalización simple

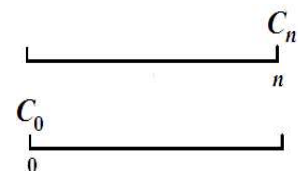
$$C_0 = \frac{C_n}{(1 + i \cdot n)}$$

- El tanto de descuento coincide con el interes simple.
- Por eso usamos i en lugar de d .

Interés compuesto vs. descuento compuesto

■ Descuento compuesto:

$$C_0 = C_n (1 - d)^n$$



- Similar a la ley de capitalización compuesta
 - Pero restando un descuento en lugar de añadiendo un interés.

■ Contracapitalización compuesta:

$$C_0 = C_n (1 + i)^{-n}$$

- “Misma” fórmula que la ley de capitalización compuesta
 - Pero con una “capitalización negativa”, “hacia el pasado”.