

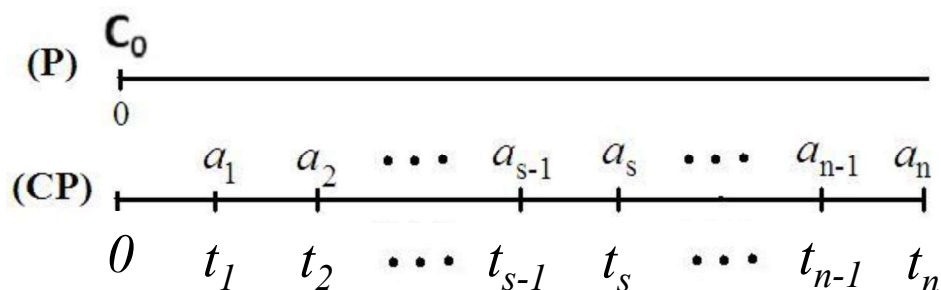
Tema 10: Préstamos

Matemáticas Aplicadas al Marketing

Grado en Marketing

■ Un **préstamo** es una operación financiera

- de prestación única
- y contraprestación, habitualmente múltiple



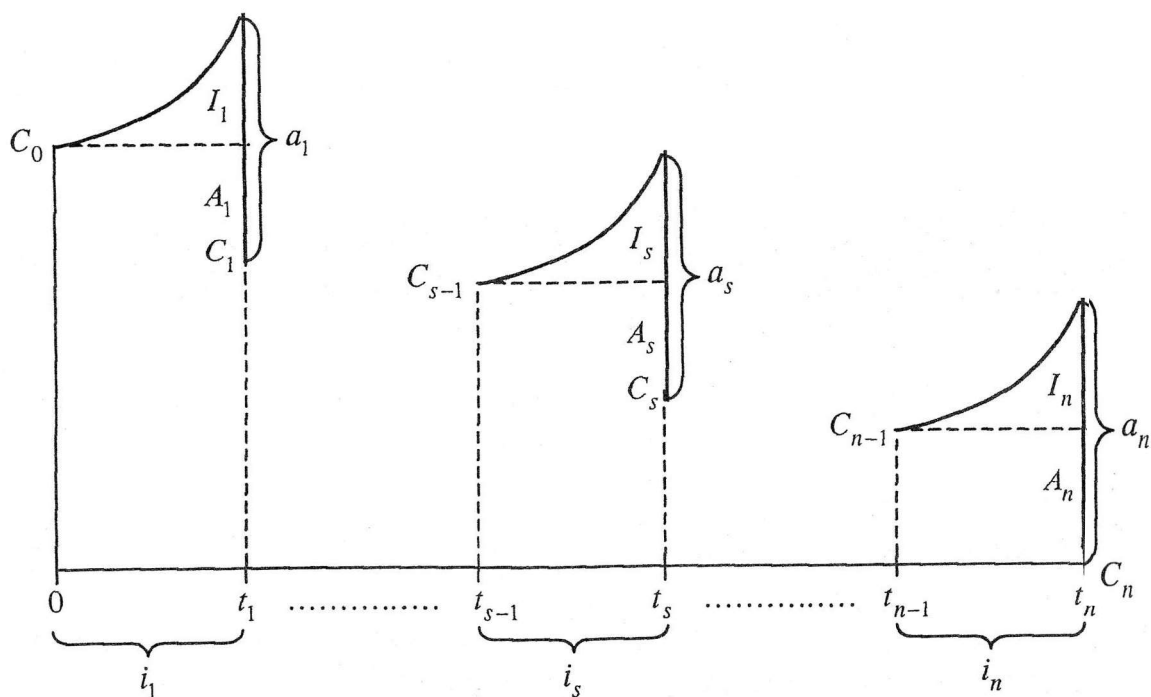
- Una operación de amortización consiste en
 - entrega de un capital por parte del prestamista al inicio de la operación...
 - ...que será devuelto junto con los intereses por el deudor mediante el sistema de amortización acordado.

- **Nominal o Principal:** C_0
 - Cuantía entregada por el prestamista y que debe ser devuelta junto con los intereses que vaya devengando
- **Termino amortizativo del período s:** a_s
 - Cuantía de la contraprestación que vence al final del período s y que es entregado por el deudor al acreedor (cuota a pagar)
- **Capital vivo al final del período s:** C_s
 - Deuda pendiente o capital pendiente de amortizar al finalizar el período s
 - Es el saldo financiero o reserva matemática por la derecha de la operación
- **Cuota de intereses del período s:** I_s
 - Intereses devengados durante el período s por la deuda que existe al comienzo de dicho período
- **Observación:** $I_s = C_{s-1} \cdot i_s$
 - Donde i_s es el interés aplicado en el periodo s

- **Cuota de amortización del período s:** A_s
 - Parte del término amortizativo a_s que se destina para la amortización del principal del préstamo.
- **Capital amortizado hasta el período s:** M_s
 - Capital amortizado durante los s primeros períodos
 - Capital devuelto por el deudor sobre el nominal del préstamo, es decir, sin considerar los intereses pagados
 - Diferencia entre el principal y el capital vivo al final del período s.
- **Relaciones entre magnitudes**

$$A_s = a_s - I_s \qquad A_s = C_{s-1} - C_s \qquad M_s = C_0 - C_s$$

$$C_0 = \sum_{k=1}^n A_k \qquad C_s = \sum_{k=s+1}^n A_k \qquad M_s = \sum_{k=1}^s A_k$$

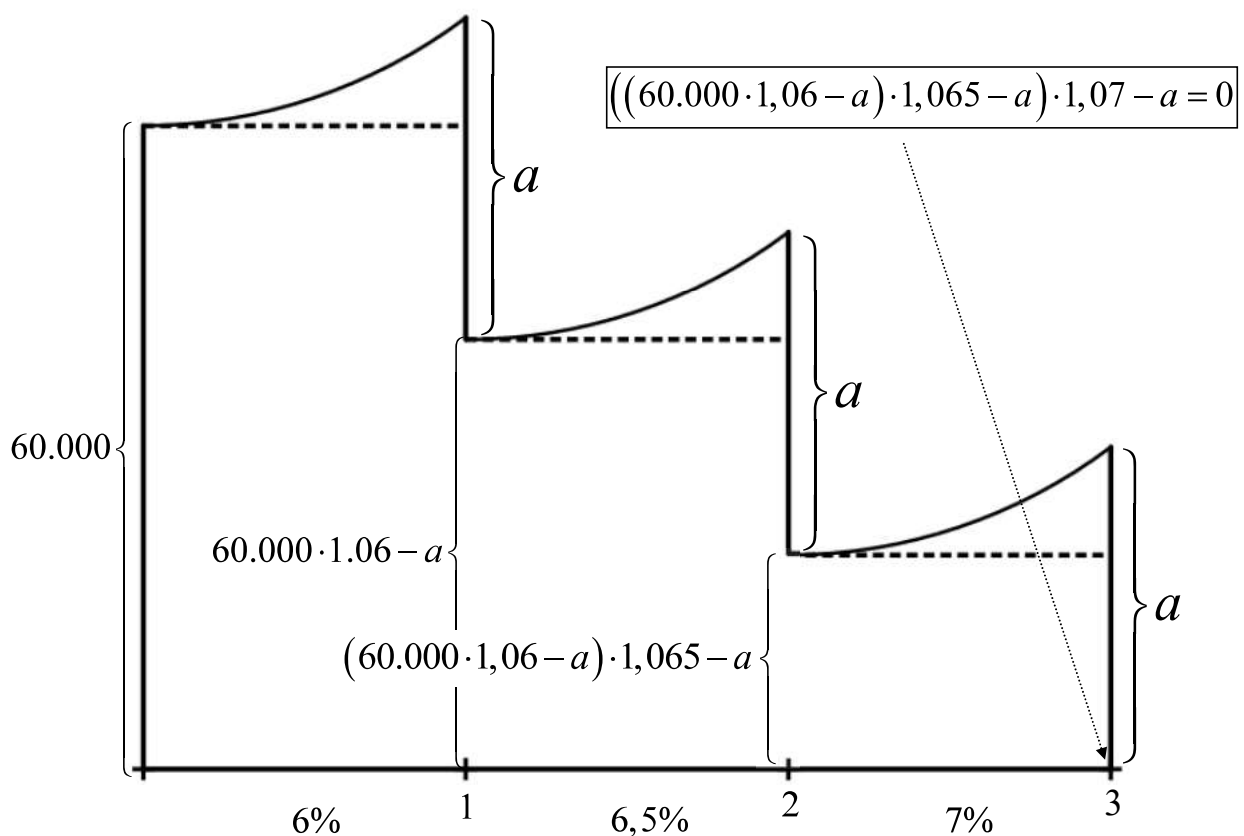
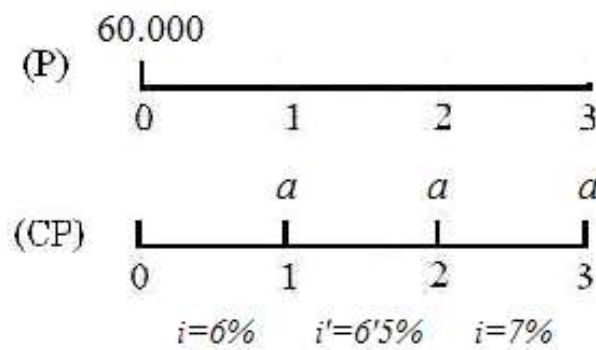


- Es la tabla que indica las distintas magnitudes para cada periodo

Periodo	Tipo de Interés	Término amortizativo	Cuota de intereses	Cuota de amortización	Capital vivo	Capital amortizado
0	--	--	--	--	C_0	0
t_1	i_1	a_1	$I_1 = C_0 \cdot i_1$	$A_1 = a_1 - I_1$	$C_1 = C_0 - A_1$	$M_1 = C_0 - C_1$
t_2	i_2	a_2	$I_2 = C_1 \cdot i_2$	$A_2 = a_2 - I_2$	$C_2 = C_1 - A_2$	$M_2 = C_0 - C_2$
...	...	...	...	...	...	...
t_s	i_s	a_s	$I_s = C_{s-1} \cdot i_s$	$A_s = a_s - I_s$	$C_s = C_{s-1} - A_s$	$M_s = C_0 - C_s$
...	...	...	...	...	...	...
t_n	i_n	a_n	$I_n = C_{n-1} \cdot i_n$	$A_n = a_n - I_n$	$C_n = C_{n-1} - A_n = 0$	$M_n = C_0 - C_n = C_0$

Ejemplo:

- Considera un préstamo ...
 - De 60.000 € de principal
 - de 3 años de duración
 - que se amortiza mediante el pago de terminos amortizativos anuales de cuantia constante a .
 - con tipos de interés acordados del 6%, 6,5% y 7% anual efectivo durante el primer, segundo y tercer año, respectivamente.
- Construir el cuadro de amortización



- Calculo de cuota (término amortizativo)

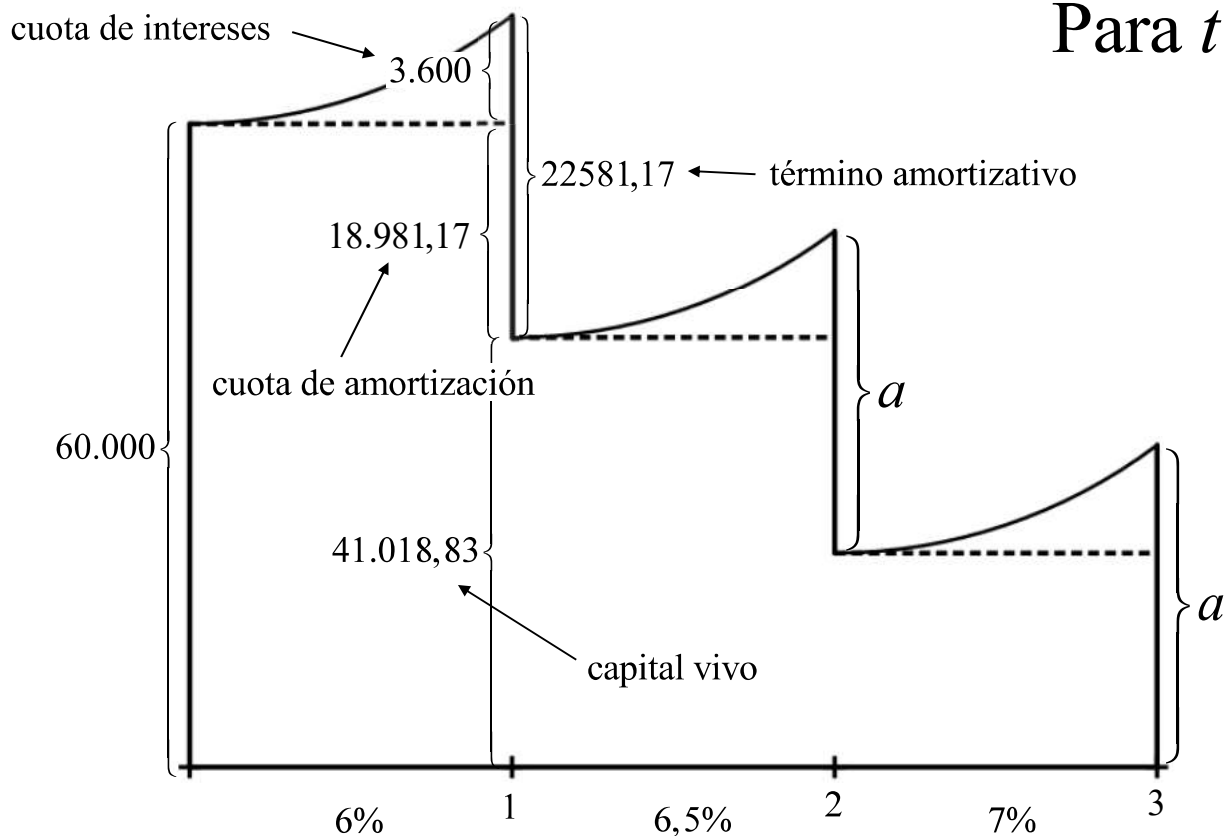
$$((60.000 \cdot 1,06 - a) \cdot 1,065 - a) \cdot 1,07 - a = 0$$

$$60.000 \cdot 1,06 \cdot 1,065 \cdot 1,07 - a(1,06 \cdot 1,07 + 1,07 + 1) = 0$$

$$a = \frac{60.000 \cdot 1,06 \cdot 1,065 \cdot 1,07}{(1,06 \cdot 1,07 + 1,07 + 1)} = 22.581,17$$

$$a = a_1 = a_2 = a_3 = 22.581,17$$

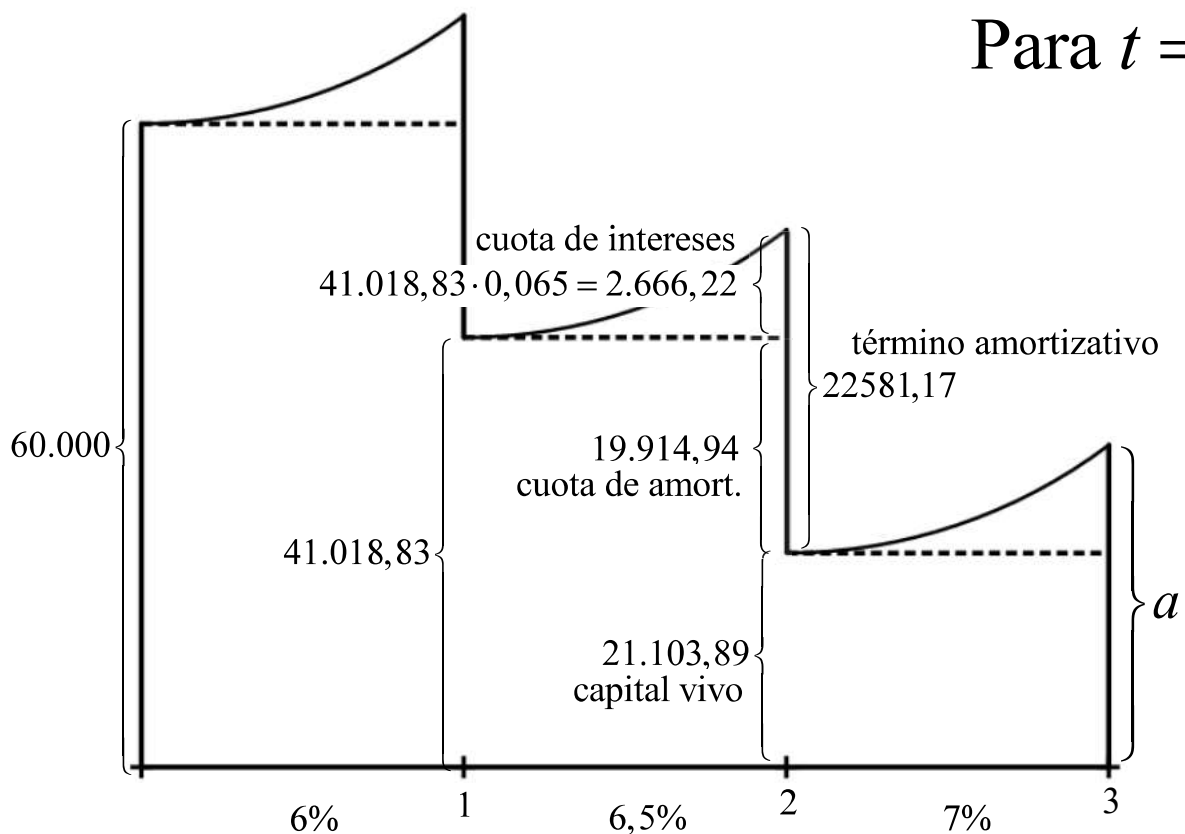
Para $t = 1$



- Cuadro de amortización:

Periodo	Tipo de Interés	Término amortizativo	Cuota de intereses	Cuota de amortización	Capital vivo	Capital amortizado
0	--	--	--	--	60.000	0
1	6%	22.581,17	3.600,00	18.981,17	41.018,83	18.981,17
2	6,5%	22.581,17				
3	7%	22.581,17			0	60.000

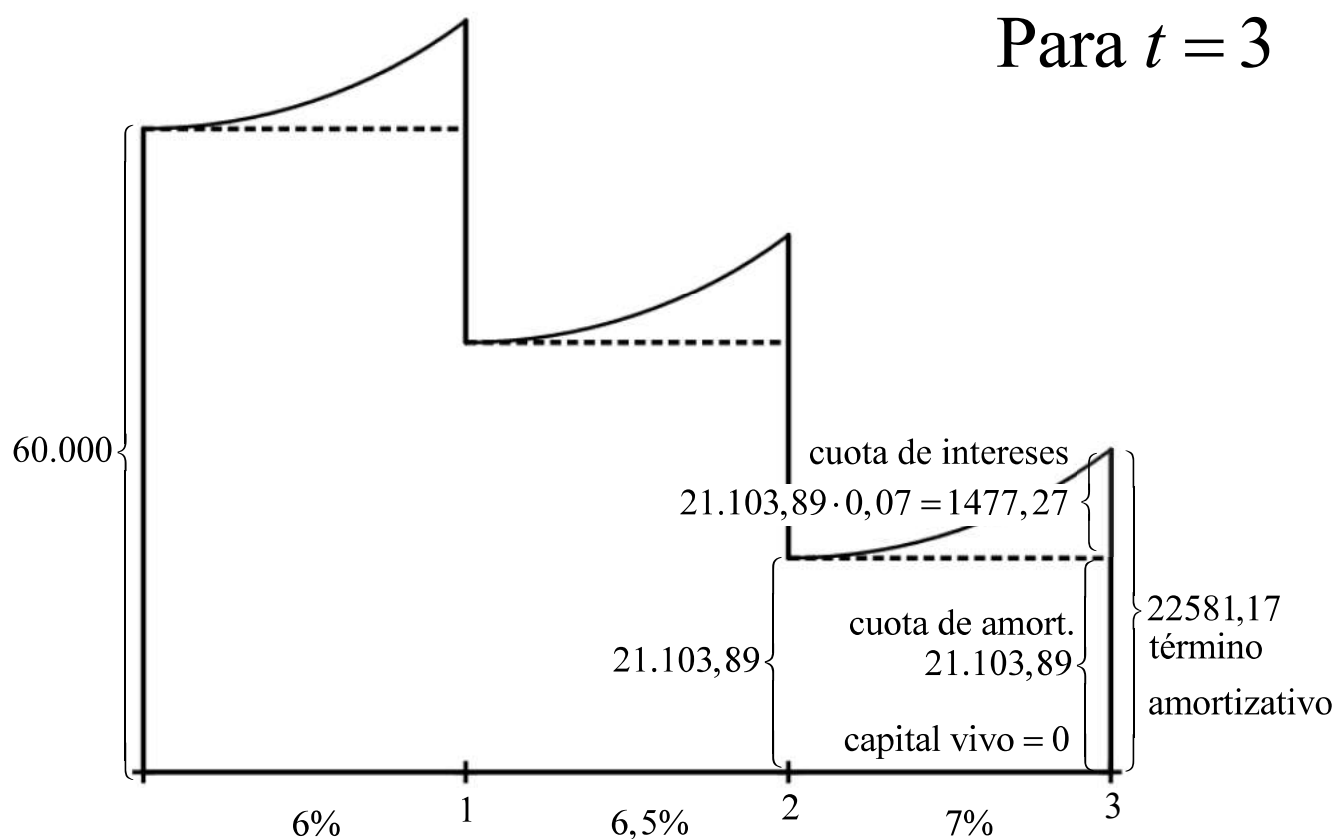
Para $t = 2$



- Cuadro de amortización:

Periodo	Tipo de Interés	Término amortizativo	Cuota de intereses	Cuota de amortización	Capital vivo	Capital amortizado
0	--	--	--	--	60.000	0
1	6%	22.581,17	3.600,00	18.981,17	41.018,83	18.981,17
2	6,5%	22.581,17	2666,22	19.914,94	21.103,89	38.896,11
3	7%	22.581,17			0	60.000

Para $t = 3$



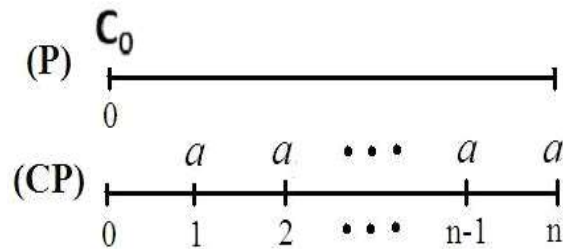
- Cuadro de amortización:

Periodo	Tipo de Interés	Término amortizativo	Cuota de intereses	Cuota de amortización	Capital vivo	Capital amortizado
0	--	--	--	--	6.0000	0
1	6%	22.581,17	3.600,00	18.981,17	41.018,83	18.981,17
2	6,5%	22.581,17	2666,22	19.914,94	21.103,89	38.896,11
3	7%	22.581,17	1.477,27	21.103,89	0	60.000

- **Préstamo de tipo francés**
 - Tipo de interés constante
 - Términos amortizativos periódicos y de igual cuantía
- **Préstamo de tipo americano**
 - Al final de cada periodo solo abono de intereses (excepto el último)

■ Se caracteriza por

- Tipo de interés constante (interés fijo)
- Todos los términos amortizativos (cuotas) son periódicos y de igual cuantía



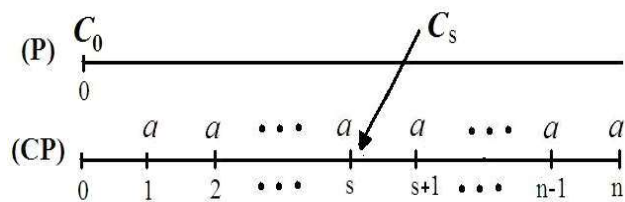
■ Términos amortizativos

- Por equivalencia financiera en $t = 0$ (Igualdad valor financiero de prestación y contraprestación)

$$C_0 = V_0(CP) = a \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow \boxed{a = C_0 \cdot \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}}$$

■ Capital vivo (o deuda pendiente)

- ¿Cuánto habría que pagar en el momento s para cancelar la deuda?



- Lo recibido menos lo devuelto:

$$C_s = C_0 \cdot (1+i)^s - a \cdot \frac{(1+i)^s - 1}{i}$$

- La suma de los pagos pendientes:

$$C_s = a \cdot \frac{1 - (1+i)^{-(n-s)}}{i}$$

■ Cuotas de amortización

$$\begin{cases} C_s = C_{s-1} \cdot (1+i) - a \\ C_{s+1} = C_s \cdot (1+i) - a \\ C_s - C_{s+1} = (C_{s-1} - C_s) \cdot (1+i) \end{cases}$$

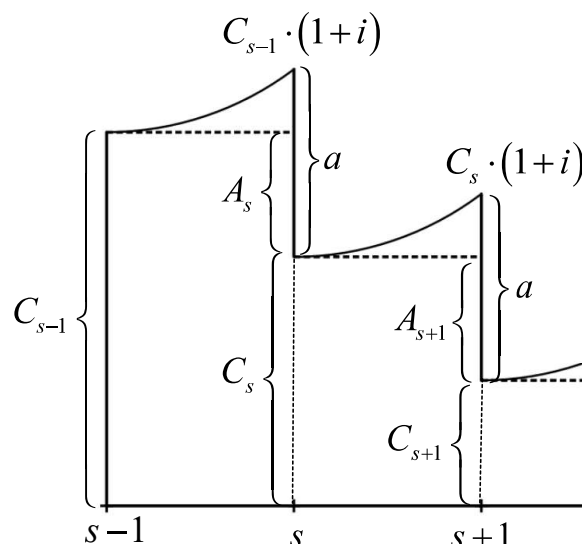
- Así $A_{s+1} = A_s \cdot (1+i)$
➤ Las cuotas de amortización varían en progresión geométrica de razón $(1+i)$
- Con lo que

$$A_s = A_1 \cdot (1+i)^{s-1}$$

- Además

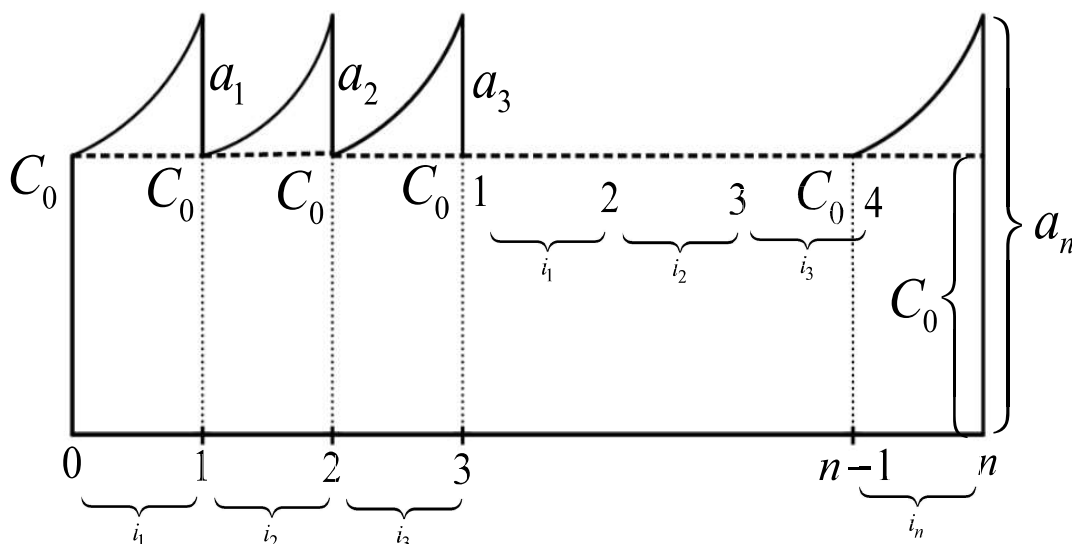
$$C_0 = A_1 + \dots + A_n \Rightarrow C_0 = A_1 \cdot (1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-1})$$

$$\Rightarrow C_0 = A_1 \cdot S_{\overline{n}|i} \Rightarrow A_1 = \frac{C_0}{S_{\overline{n}|i}} = C_0 \cdot \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right)^{-1} = C_0 \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$



■ Se caracteriza por

- El deudor, al final de cada periodo solo abona intereses
- Excepto el último, en el que abona además el nominal del préstamo



■ Términos amortizativos

- Las cuotas son solo intereses

$$\begin{cases} a_s = I_s = C_0 \cdot i_s & \text{si } s \neq n \\ a_n = I_n + C_0 = C_0 \cdot i_n + C_0 & \text{si } s = n \end{cases}$$

■ Capital vivo (o reserva matemática)

- No varía hasta el final del último periodo

$$\begin{cases} C_s = C_0 & \text{si } s \neq n \\ C_n = 0 & \text{si } s = n \end{cases}$$

■ Cuotas de amortización

- No se amortiza nada hasta el final del último periodo

$$\begin{cases} A_s = 0 & \text{si } s \neq n \\ A_n = C_0 & \text{si } s = n \end{cases}$$