Universidad Rey Juan Carlos

TEORÍA DE LA SEÑAL Y COMUNICACIONES

Señales y Sistemas

Curso 2009/2010

Grado en ineniería en Tecnologías de la Telecomunicación
Grado en Ingeniería en Sistemas de Telecomunicación
Grado en Ingeniería en Telemática

EXAMEN FINAL: 17 DE MAYO DE 2010

Duración: 3 horas

PARTE 1

P1. Sea la señal $x(t) = -t + 1$ en el intervalo $[0,1]$, y $x(t) = 0$ en el resto del tiempo. Sean las señales siguientes:

$$r(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \delta(t - 2k); \qquad z(t) = x(t) * r(t)$$

$$s(t) = -2x(-t/2 - 1) + 2; \qquad y(t) = \frac{dz(t)}{dt} + 1$$

a) Representar gráficamente *z(t)* y dar una expresión analítica en función de *x(t)*. ¿Es *z(t)* una señal periódica? Si es así, ¿cuál es su periodo? ¿Cuál es su valor medio?
b) Representar gráficamente *s(t)* e *y(t)*. (Recomendación: trabaje por separado con cada término antes de agrupar las soluciones).

[2.5 puntos]

P2. Sea el siguiente sistema:

$$y(t) = |x(t)| + \frac{dx(t)}{dt}$$

Estudie sus propiedades de invertibilidad, invarianza y linealidad.

[1.25 puntos]

P3. Calcule la convolución de las siguientes señales:

$$h(t) = e^{-5(t-1)} u(t-1); \qquad x(t) = u(t) - u(t-1)$$

[1.25 puntos]

PARTE 2

P4. Sea la señal $x(t) = -t + 1$ en el intervalo $[0,1]$, y $x(t) = 0$ en el resto del tiempo. Sean las señales siguientes:

$$r(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \delta(t - 2k)$$

$$z(t) = x(t) * r(t)$$

Calcular el desarrollo en series de Fourier de $y(t) = \dfrac{dz(t)}{dt}$.

[2.5 puntos]

P5. Sea el sistema definido por la siguiente relación entre la entrada *x(t)* y la salida *y(t)*, que parte del reposo inicial:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

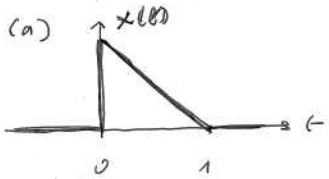
(a) Encontrar el valor de *a*, teniendo en cuenta que cuando la entrada es $x(t) = e^{-2t}u(t)$, la salida es $y(t) = e^{-t}u(t)$. (Recomendación: trabaje en el dominio de la frecuencia).

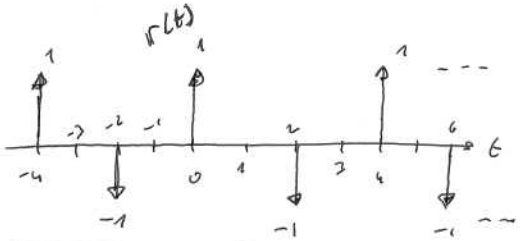
(b) Para el valor encontrado, calcular, en el dominio de la frecuencia y en el tiempo, la salida *y(t)* cuando la entrada es $x(t) = 1 + \cos(t)$, sin realizar la convolución.

[2.5 puntos]

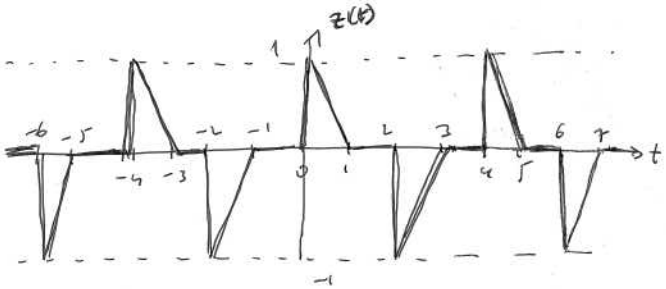
P1 $x(t) = -t+1$ en $[0,1]$ y 0 en el resto. Por tanto:

(a)





$$\boxed{z(t) = x(t) * r(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k x(t-2k)}$$

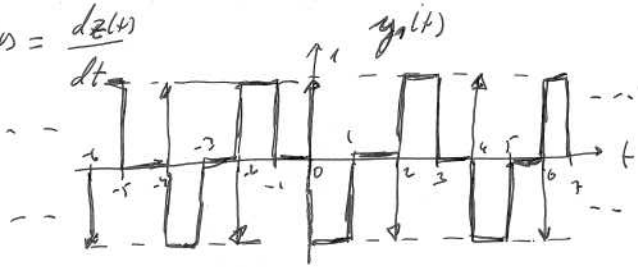


Es una señal periódica, de periodo $T_0 = 4s$

$$\boxed{\langle z(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t)\, dt = 0}$$

(b) $y(t) = y_1(t) + 1$; $s(t) = s_1(t) + 2$

$$y_1(t) = \frac{dz(t)}{dt}$$

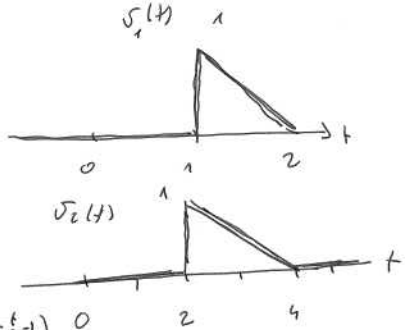


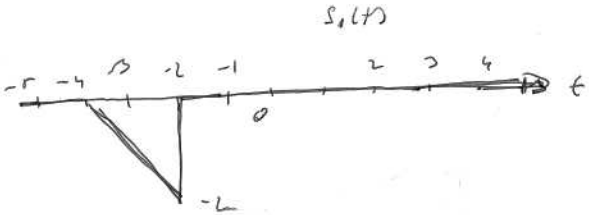
$s_1(t) = -2\,x(t/2 - 1)$

$s_1(t) = x(t-1)$

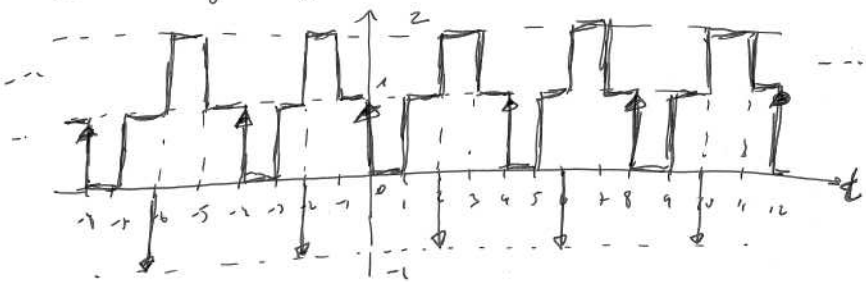
$s_2(t) = s_1(t/2) = x(t/2-1)$

$s_3(t) = = -2\,s_2(-t) = -2x(-\frac{t}{2}-1)$

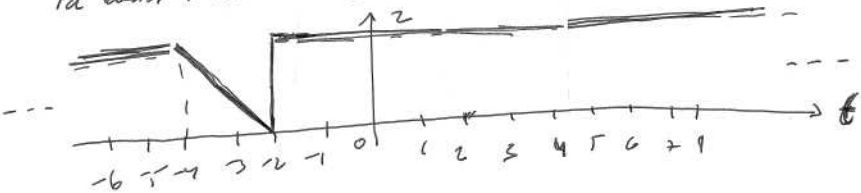




Por tanto: $y(t) = y_1(t) + 1$



Por tanto, $s(t) = s_1(t) + 2$



P2 $y(t) = |x(t)| + \frac{dx(t)}{dt}$

- Invertibilidad. Se destruye información al derivar y en el valor absoluto. Busco un contraejemplo.

$$x_1(t) = 2 \rightarrow y_1(t) = |2| + 0 = 2 \quad \forall t$$

$$x_2(t) = -2 \rightarrow y_2(t) = |-2| + 0 = 2 \quad \forall t$$

Por tanto, $y_1(t) = y_2(t)$ pero $x_1(t) \neq x_2(t) \Rightarrow$ $\boxed{\text{NO ES INVERTIBLE}}$

- Invarianza. Utilizo el procedimiento general.

(a) $x_1(t) \rightarrow y_1(t) = |x_1(t)| + \frac{dx_1(t)}{dt} \rightarrow$

$$\rightarrow y_1(t-t_0) = |x_1(t-t_0)| + \frac{dx_1(t-t_0)}{dt}$$

$\boxed{d(t-t_0) = dt - \cancel{dt_0} = dt}$

(b) $x_2(t) = x_1(t-t_0) \rightarrow y_2(t) = |x_2(t)| + \frac{dx_2(t)}{dt} =$

$$= |x_1(t-t_0)| + \frac{dx_1(t-t_0)}{dt}$$

$\Rightarrow$ Coinciden, luego $\boxed{\text{ES INVARIANTE}}$

- Linealidad. Comienzo analizando su aditividad.

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) \rightarrow y_1(t) = |x_1(t)| + \frac{dx_1(t)}{dt} \\ x_2(t) \rightarrow y_2(t) = |x_2(t)| + \frac{dx_2(t)}{dt} \end{array}\right\}$$

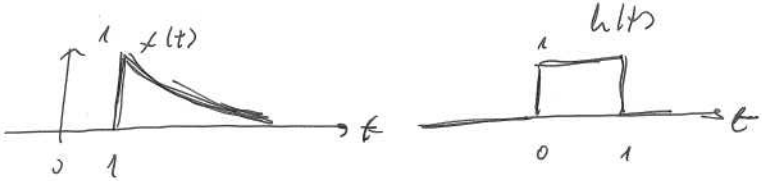
$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) \rightarrow$

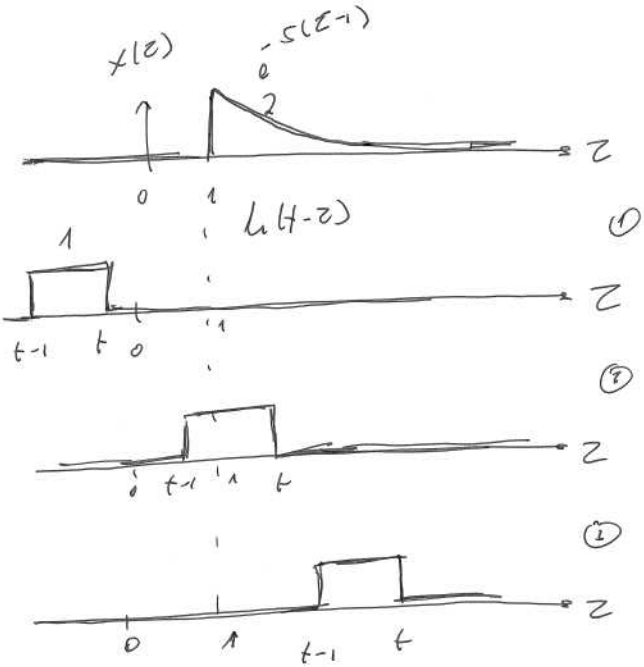
$$\rightarrow y_3(t) = |x_3(t)| + \frac{dx_3(t)}{dt} = |x_1(t) + x_2(t)| + \frac{dx_3(t)}{dt} + \frac{dx_4(t)}{dt}$$

Pero $y_1(t) + y_2(t) = |x_1(t)| + |x_2(t)| + \frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{dx_2(t)}{dt}$

Como $y_3(t) \neq y_1(t) + y_2(t) \Rightarrow$ $\boxed{\text{NO ES LINEAL}}$

P3 Nos pelem $y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$





① $y(t) = 0, \quad t < 1$

② $y(t) = \int_1^t e^{-5(\tau-1)}\, d\tau = \frac{e^5}{-5}\left[e^{-5\tau}\right]_1^t = \frac{e^5}{-5}\left[e^{-5t} - e^{-5}\right] =$

$= \frac{1}{5}\left(1 - e^{-5(t-1)}\right)$

Válido em $\left\{ \begin{matrix} t \geq 1 \\ t-1 < 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \quad 1 \leq t < 2$

3 $y(t) = \int_{t-1}^{t} e^{-5(\tau-1)} d\tau = \frac{e^{5}}{-5} \left[e^{-5\tau} \right]_{t-1}^{t} =$

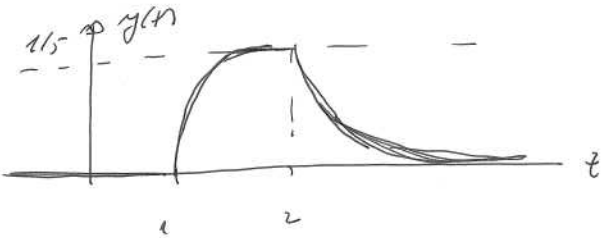
$= \frac{e^{5}}{5} \left(e^{-5(t-1)} - e^{-5t} \right) = \frac{1}{5} \left(e^{-5(t-2)} - e^{-5(t-1)} \right),$

$(t \geq 2)$

Por tanto, agrupando la solución:

$$\boxed{y(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ \frac{1}{5}\left(1 - e^{-5(t-1)}\right), & 1 \leq t < 2 \\ \frac{1}{5}\left(e^{-5(t-2)} - e^{-5(t-1)}\right), & t \geq 2 \end{cases}}$$

La representación (aproximada) es:



P4 En el problema 1 tenemos expresado $\frac{dz(t)}{dt}$

$\frac{dz(t)}{dt} = y(t) = y_1(t) + y_2(t)$, donde $y_1(t)$ es un tren periódico formado por deltas e $y_2(t)$ es un onda cuadrada.

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \xleftrightarrow{DSF} C_k = a_k + b_k$$

$$\boxed{a_k} = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} y_1(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{4}\int_{-0.5}^{3.5} (\delta(t) - \delta(t-2)) \cdot$$

$$\cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}} dt = \frac{1}{4}\int_{-0.5}^{3.5} (\delta(t) - e^{-jk\pi}\delta(t-2))\, dt =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{-jk\pi} = \boxed{\frac{1}{4}\left(1 - (-1)^k\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k \text{ impar} \\ 0, & k \text{ par} \end{cases}}$$

$$\boxed{b_k} = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} y_2(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{4}\int_{-2}^{-1} e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt + \frac{1}{4}\int_{0}^{1} (-1)\, e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt =$$

$k \neq 0$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{-j\frac{\pi}{2}k}\left[e^{-jk\frac{\pi}{2}t}\right]_{-2}^{-1} - \frac{1}{-jk\frac{\pi}{2}}\left[e^{-jk\frac{\pi}{2}t}\right]_{0}^{1}\right] =$$

$$= \frac{j}{2k\pi}\left(e^{-jk\frac{\pi}{2}} - e^{-jk\pi} - 1 + e^{-jk\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{-j}{2k\pi}\left(1 - 2e^{-jk\frac{\pi}{2}} + e^{-jk\pi}\right) =$$

$$= \frac{-j}{2k\pi}\left(1 - e^{-jk\frac{\pi}{2}}\right)^2 = \frac{-j}{2k\pi}\left(1 - (-j)^k\right)^2 =$$

$$= \frac{-j}{2k\pi} e^{-jk\frac{\pi}{4}}\left(e^{jk\frac{\pi}{4}} - e^{-jk\frac{\pi}{4}}\right) = \boxed{\frac{(-j)^k}{k\pi}\operatorname{sen}\frac{k\pi}{4} \quad (k \neq 0)}$$

$$b_0 = \frac{1}{T_0} \int_{CTOO} y_1(t) = 0 \quad \text{(valor medio nulo)}.$$

Resumiendo:

$$\boxed{\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{4}\left(1 - (-1)^k\right) \\ b_k &= \frac{(-j)^k}{k\pi} \cdot \operatorname{sen} \frac{k\pi}{4}, \quad k \neq 0 \\ b_0 &= 0 \\ c_k &= a_k + b_k \end{aligned}}$$

P5 Sistema dado por: $\frac{dy(t)}{dt} + a \cdot y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$

(a) Cuando $x(t) = e^{-2t} \cdot u(t) \rightarrow y(t) = e^{-t} \cdot u(t)$.

Por la ecuación del sistema (que es LIT por partir del reposo inicial) sabemos:

$$(j\omega)\, Y(j\omega) + a\, Y(j\omega) = (j\omega)\, X(j\omega) + 2\, X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{2 + (j\omega)}{a + (j\omega)}$$

Para las señales que nos dan:

$$x(t) = e^{-2t} u(t) \xrightarrow{TF} X(j\omega) = \frac{1}{2 + j\omega}$$

$$y(t) = e^{-t} \cdot u(t) \xrightarrow{TF} Y(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

Por tanto, $H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{2 + j\omega}{1 + j\omega}$

Comparando, vemos que necesariamente $\boxed{a = 1}$

(b) Calcular $y(t)$ para $x(t) = 1 + \cos t$

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega) + \pi\delta(\omega + 1) + \pi\delta(\omega - 1)$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega) = 2\pi H(0)\delta(\omega) +$$

$$+ \pi H(-1)\delta(\omega + 1) + \pi H(+1)\delta(\omega - 1)$$

$$H(j\omega) = \frac{2 + j\omega}{1 + j\omega} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} H(0) &= 2 \\ H(1) &= \frac{2+j}{1+j} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}j = 1'58\, e^{-j0'32} \\ H(-1) &= \frac{2-j}{1-j} = H(1)^{*} = 1'58\, e^{+j0'32} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow Y(j\omega) = 2\pi \cdot 2 \cdot \delta(\omega) + \pi \cdot 1'58\, e^{j0'32}\, \delta(\omega+1) + \pi \cdot 1'58 \cdot e^{-j0'32}\, \delta(\omega-1)}$$

$$\Rightarrow y(t) = 2 + 1'58 \cdot e^{j0'32} \frac{\pi}{2} e^{-jt} + 1'58\, e^{-j0'32} \frac{\pi}{2} e^{jt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = 2 + 1'58 \cos(t - 0'32)}$$