

TEORÍA DE LA COMUNICACIÓN

PRÁCTICA 2: MODULACIÓN Y DETECCIÓN EN CANALES GAUSSIANOS CURSO ACADÉMICO 2016/2017

Objetivos

En esta práctica el alumno deberá

- implementar en Matlab un sistema básico de comunicación digital a través de un canal gaussiano,
- entender los efectos de un canal gaussiano en las comunicaciones y
- entender la estructura del receptor óptimo basado en un filtro adaptado.

Normas y plazos de entrega

- La práctica debe realizarse **por parejas o individualmente**.
- Cada grupo deberá entregar una **memoria** impresa realizada a ordenador, mostrando las figuras y respondiendo a las preguntas que se plantean en el enunciado. Además, deberá enviar al profesor el **código** Matlab en un fichero .m a su correo electrónico (NO incluya el código en la memoria impresa).
- El plazo de entrega de la memoria es de **dos semanas** a partir de la sesión de laboratorio.

1. Contenido Teórico

1.1. Introducción

En esta práctica se pide implementar un modelo sencillo de un sistema de comunicaciones digitales básico, considerando un canal gaussiano. En este apartado se introducen los conceptos teóricos necesarios para la realización de la práctica y se explican los detalles de diseño del sistema a simular. En la figura 1 se muestra un modelo de un sistema de comunicaciones digital para la transmisión de un único símbolo, que consta de un transmisor (codificador y modulador), un canal de transmisión y un receptor (demodulador y decisor).

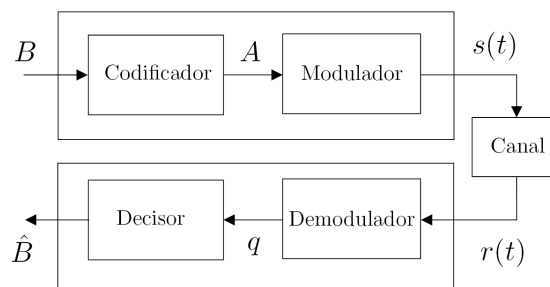


Figura 1: Modelo de un sistema de comunicación digital.

En esta práctica consideraremos un sistema de comunicación binario, de modo que el símbolo B a la entrada del sistema puede tomar uno de entre $M = 2$ valores, y cuyo alfabeto es $\{b_0, b_1\}$. Asumimos que los símbolos pertenecientes al alfabeto de B son $\{0, 1\}$ y que son equiprobables, es decir,

$$p_B\{0\} = p_B\{1\} = 1/2. \quad (1)$$

1.2. Transmisor: codificador y modulador

El transmisor transforma el símbolo B en una señal $s(t)$ que resulte adecuada para su envío a través del medio físico que representa el canal. El transmisor consta a su vez de dos bloques: codificador y modulador.

1.2.1. Codificador

El codificador transforma el símbolo B en un símbolo A haciendo la correspondencia $b_i \rightarrow a_i$. En esta práctica asumimos símbolos a_i reales y escalares, con un alfabeto o constelación, $A = \{a_0, a_1\}$.

1.2.2. Modulador

El modulador transforma el símbolo A en una señal analógica en tiempo continuo $s(t)$, haciendo la correspondencia $a_i \rightarrow s_i(t)$. En esta práctica se considera una modulación BPSK (*Binary Phase Shift Keying*). Asumimos que las señales $s_0(t)$ y $s_1(t)$ son los pulsos rectangulares de duración T mostrados en la figura 2 y cuya expresión matemática es

$$s_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}, \quad s_1(t) = \begin{cases} -1, & 0 < t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}. \quad (2)$$

En esta práctica consideramos que la duración de ambos pulsos es $T = 1$ segundo.

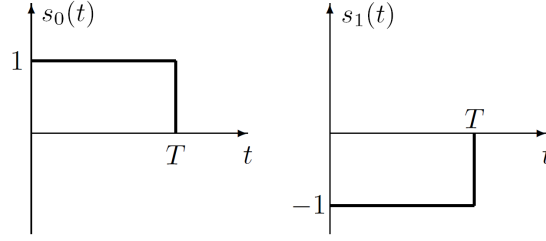


Figura 2: Señales $s_0(t)$ y $s_1(t)$.

Este conjunto de señales se puede representar mediante una base normalizada en energía con un único elemento $\phi(t)$, que viene representado en la figura 3 junto con los elementos de la constelación. De este modo, las señales a la salida del modulador se pueden expresar como $s_i(t) = a_i\phi(t)$.

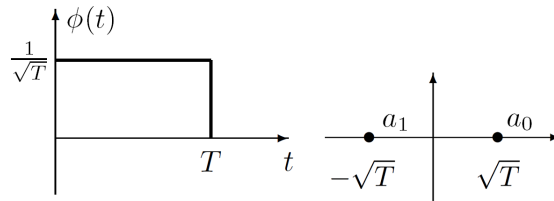


Figura 3: Base y constelación.

Para obtener la señal modulada $s(t)$ a partir del símbolo A se puede emplear el esquema mostrado en la figura 4. El primer bloque representa un proceso de inserción de $F - 1$ ceros entre cada par de símbolos A . El segundo bloque representa un filtro paso bajo de respuesta al impulso $\phi(t)$.

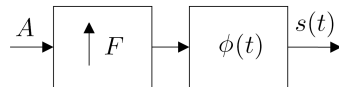


Figura 4: Esquema de modulación basado en inserción de ceros y filtrado.

La distancia entre las señales $s_0(t)$ y $s_1(t)$ se puede obtener a partir de los elementos de la constelación a_0 y a_1 mediante la expresión

$$d(s_0, s_1) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |s_0(t) - s_1(t)|^2 dt} = d(a_0, a_1) = \sqrt{(a_0 - a_1)^2}. \quad (3)$$

Asimismo, la energía media por símbolo se puede calcular a partir de a_0 y a_1 como

$$E_s = p_A(a_0) \int_0^T |s_0(t)|^2 dt + p_A(a_1) \int_0^T |s_1(t)|^2 dt = p_A(a_0)a_0^2 + p_A(a_1)a_1^2 \quad (4)$$

y la potencia de símbolo viene dada por $P_s = E_s/T$.

1.3. Canal AWGN

La señal $s(t)$ a la salida del modulador se transmite a través de un canal de comunicaciones. El canal representa el medio físico de transmisión e introduce una perturbación sobre la señal transmitida que en esta práctica modelamos como ruido aditivo blanco gaussiano (AWGN, *Additive White Gaussian Noise*).

El término aditivo hace referencia a que la componente de ruido se suma a la de señal. El término blanco indica que la densidad espectral de potencia es constante para todas las frecuencias e igual a $N_0/2$ W/Hz. Por tanto, la autocorrelación de la señal de ruido es $R_n(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$ (las muestras de ruido están incorreladas). El término gaussiano indica que su función densidad de probabilidad (o fdp) $f_n(n)$ es una gaussiana o normal (de media μ_n y varianza σ_n^2) definida como

$$f_n(n) \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(n-\mu_n)^2}{2\sigma_n^2}}. \quad (5)$$

Se asume que el ruido gaussiano tiene media $\mu_n = 0$. Por tanto, la señal de ruido $n(t)$ se genera como una secuencia de muestras i.i.d (independientes e idénticamente distribuidas) de una distribución gaussiana $\mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$.

La señal a la entrada del receptor es de la forma

$$r(t) = s(t) + n(t). \quad (6)$$

Dado que $s(t)$ toma un valor fijo para un símbolo dado a_i , se puede expresar la fdp de la señal recibida condicionada a que se ha transmitido el símbolo a_i como

$$f_{r|A}(r|a_i) \sim \mathcal{N}\left(\frac{a_i}{\sqrt{T}}, \sigma_n^2\right), \quad (7)$$

es decir, tiene una distribución gaussiana de media $a_i/\sqrt{T}$ y varianza σ_n^2 .

La fdp de la señal recibida viene dada por

$$f_r(r) = p_A(a_0)f_{r|A}(r|a_0) + p_A(a_1)f_{r|A}(r|a_1). \quad (8)$$

La relación señal a ruido (SNR, *Signal to Noise Ratio*) se define como $SNR = P_s/P_n$, donde P_s es la potencia de la señal y P_n es la potencia de ruido, que viene dada por su varianza. Es frecuente trabajar con la SNR en decibelios (dB), que se calcula como

$$SNR(dB) = 10 \log_{10} SNR. \quad (9)$$

1.4. Receptor: demodulador y decisor

El receptor es el encargado de recuperar el símbolo transmitido B a partir de la señal recibida $r(t)$. El receptor a su vez consta de dos bloques: el demodulador y el decisor. El demodulador se encarga de reconstruir un valor q que debe ser lo más similar posible al símbolo transmitido A . Finalmente, el decisor ha de asignar un símbolo $\hat{B}$ al valor de entrada q .

1.4.1. Demodulador

En esta práctica se considera el esquema de demodulación basado en un filtro adaptado, cuyo esquema aparece representado en la figura 5. Ya que en este ejemplo la base del conjunto de señales $s_i(t)$ está formada por un único elemento $\phi(t)$, el demodulador consta de un único filtro adaptado a $\phi(t)$ y retardado T segundos para que sea causal, cuya respuesta al impulso viene dada por $h(t) = \phi(T - t)$, y la señal a la salida del filtro es de la forma

$$y(t) = r(t) * h(t). \quad (10)$$

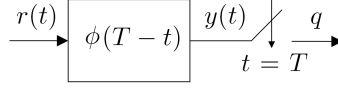


Figura 5: Estructura del demodulador basado en un filtro adaptado.

Esta señal toma su valor máximo en el instante óptimo de muestreo $t = T$. Se cumple, además, que considerando un canal AWGN y un filtro adaptado a $\phi(t)$, la SNR a la salida del demodulador (en q) es máxima.

La fdp de la señal q a la salida del demodulador condicionada a que se ha transmitido el símbolo a_i viene dada por una gaussiana de media a_i y varianza de ruido $\sigma_q^2 = \frac{N_0}{2}$

$$f_{q|A}(q|a_i) \sim \mathcal{N}(a_i, \sigma_q^2). \quad (11)$$

La fdp de la señal q a la salida del demodulador es una mezcla de dos gaussianas y tiene la expresión

$$f_q(q) = p_A(a_0)f_{q|A}(q|a_0) + p_A(a_1)f_{q|A}(q|a_1). \quad (12)$$

1.4.2. Decisor

El decisor asigna a cada valor de la señal q a la salida del demodulador un símbolo $\hat{B} = \{0, 1\}$ de modo que se minimice la probabilidad media de error de símbolo, que permite cuantificar las prestaciones del sistema de comunicaciones digitales y está definida como

$$P_e = \Pr\{\hat{B} \neq B\}. \quad (13)$$

El criterio de máximo a posteriori (MAP, *Maximum a posteriori*) consiste en asignar al valor q el símbolo b_i que maximiza la probabilidad a posteriori

$$p_{B|q}(b_i|q) = \frac{p_B(b_i)f_{q|B}(q|b_i)}{f_q(q)}. \quad (14)$$

En el caso particular de símbolos b_i equiprobables, el criterio MAP se reduce al criterio de máxima verosimilitud (ML, *Maximum Likelihood*), que maximiza $f_{q|B}(q|b_i) = f_{q|A}(q|a_i)$.

La probabilidad de error cuando se transmite el símbolo a_0 y a_1 respectivamente son idénticas dada la simetría del problema y vienen dadas por

$$P_{e|a_0} = \int_{-\infty}^0 f_{q|A}(q|a_0) = \int_0^{\infty} f_{q|A}(q|a_1) = P_{e|a_1}. \quad (15)$$

El umbral de decisión óptimo en este problema para símbolos equiprobables es $q = 0$, que minimiza la probabilidad de error media de símbolo definida como

$$P_e = p_A(a_0)P_{e|a_0} + p_A(a_1)P_{e|a_1}. \quad (16)$$

En el caso de una modulación BPSK, la P_e de símbolo tiene la siguiente expresión analítica

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right), \quad (17)$$

donde $E_b/N_0 = SNR$ (sólo en este caso particular) y erfc denota la función de error complementaria.

2. Ejercicios en Matlab

Se pide implementar un sistema de comunicaciones digitales de acuerdo con el esquema descrito en el apartado 1. Dicho sistema debe constar de todos los bloques descritos: transmisor (codificador y modulador), canal AWGN y receptor (demodulador y decisor). Además, se pide evaluar las prestaciones del sistema en términos de probabilidad de error de símbolo.

En la memoria de la práctica el alumno debe responder a las cuestiones planteadas, incluir las figuras que se indican en el guión y COMENTAR LOS RESULTADOS. Asegúrese de que todas las figuras tengan un título, los ejes nombrados y, en su caso, una leyenda.

Los pasos para implementar el sistema son los siguientes:

2.1. Parámetros del sistema

Defina todos los parámetros del sistema al comienzo del fichero Matlab.

1. Número de bits a transmitir $N_b = 100$.
2. Relación señal a ruido a la salida del demodulador $SNR = 10$ dB.
3. Tasa de bit $R = 1$ bit/s.
4. Período de bit $T = 1/R$ segundos.
5. Número de muestras por bit $F = 10$ (factor de sobremuestreo).
6. Número total de muestras $N_m = N_b F$.
7. Frecuencia de muestreo $f_m = FR$ Hz.
8. Período de muestreo (intervalo entre muestras) $T_m = 1/f_m$ segundos.

2.2. Transmisor

1. Genere una secuencia de N_b bits b_i . Para ello puede emplear las funciones `rand` o `randi`. Represente dicha secuencia en una figura.
2. Genere en Matlab un eje de tiempos t entre T_m y la duración correspondiente a N_b bits, con muestras espaciadas T_m .
3. ¿Qué valores toman los elementos de la constelación a_0 y a_1 ? ¿Cuál es la distancia entre las señales $s_0(t)$ y $s_1(t)$? ¿Y la energía media de símbolo E_s ? ¿Y la potencia de señal P_s ?
4. Convierta la secuencia de bits b_i en una secuencia de símbolos a_i mediante la asignación $0 \rightarrow a_0$, $1 \rightarrow a_1$ (codificador).
5. Obtenga una señal $s(t)$ modulada en BPSK con F muestras por símbolo, mediante los pasos de inserción de ceros y filtrado.

Para el proceso de inserción de ceros, genere un vector de ceros de longitud N_m y complete con los símbolos a_i las posiciones $1 + nF$, $n = 0, \dots, N_b - 1$.

Defina el filtro transmisor $\phi(t)$ como un pulso rectangular de la siguiente manera:

$$\text{phi_tx} = \text{ones}(1, F); \quad (18)$$

Realice el filtrado utilizando la función `conv` y elimine las muestras finales de la señal resultante. Represente la señal BPSK a la salida del modulador $s(t)$ en función del tiempo.

6. Calcule en Matlab la potencia de la señal $s(t)$ a la salida del modulador a partir de sus muestras y compruebe que coincide con la potencia teórica P_s . De lo contrario, en adelante considere como potencia de señal el valor teórico P_s .

2.3. Canal AWGN

1. Implemente en Matlab la fdp de una gaussiana $f_X(x) \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$. Represente dicha fdp con los parámetros $\mu_x = 3$ y $\sigma_x^2 = 2$, tanto con su implementación como con la función `normpdf` de Matlab (en la misma figura) y compruebe que obtiene el mismo resultado. Utilice un rango de valores de x entre $\mu_x \pm 4\sigma_x$, con un paso entre muestras adecuado, y preste atención a los parámetros de `normpdf`.
2. Calcule en Matlab la SNR en unidades naturales y la potencia de ruido P_n .
3. Genere la señal de ruido $n(t)$ como un vector **n** de N_m muestras de ruido blanco gaussiano de varianza $\sigma_n^2 = F P_n / 2$ mediante la función `randn`. El comando para generar una muestra de una distribución gaussiana de media `mu` y varianza `var` es `mu + sqrt(var)*randn`.
4. Obtenga la señal $r(t)$ a la salida del canal AWGN.
5. Represente en una misma figura las señales transmitida $s(t)$ y recibida $r(t)$, en distintos colores, y ponga una leyenda.
6. Represente el histograma normalizado del vector de ruido **n** generado en el apartado 3 con:

```
[h,c] = hist(n,20);  
h = h/sum(h)/diff(c(1:2));  
plot(c,h)
```

Compare el histograma obtenido con la fdp teórica del ruido gaussiano $f_n(n)$.
7. Represente el histograma de la señal recibida $r(t)$ generada en el apartado 4 y compárelo con la fdp de la señal recibida $f_r(r)$.

2.4. Receptor y cálculo de la probabilidad de error

1. Implemente el demodulador basado en un filtro adaptado a la señal $\phi(t)$. Para ello obtenga la señal $y(t)$ a la salida del filtro receptor definido como

$$\text{phi_rx} = \text{ones}(1,F)/F; \quad (19)$$

2. Realice el muestreo del eje de tiempos t y de la señal $y(t)$ en los instantes óptimos de muestreo nF , $n = 1, \dots, N_b$, para obtener la señal q .
3. Represente en una misma figura la señal a la salida del filtro adaptado $y(t)$ y la señal muestreada q , en distintos colores, y ponga una leyenda.
4. Implemente el decisor óptimo, que consiste en aplicar un umbral sobre la señal q para obtener los símbolos detectados $\hat{b}_i$.
5. Calcule la tasa de error de bit (BER), comparando los bits transmitidos b_i y detectados $\hat{b}_i$.
6. Represente en una misma figura la secuencia de bits transmitidos b_i y detectados $\hat{b}_i$, en distintos colores y ponga una leyenda. Identifique si se ha producido algún error de decisión.
7. Represente el histograma de la señal q a la salida del demodulador y compárela con la fdp $f_q(q)$, siendo la varianza de ruido a la salida del demodulador $\sigma_q^2 = P_n/2$.
¿Qué observa respecto al histograma de la señal recibida $r(t)$? ¿Cuál es el efecto del demodulador en la señal recibida? Identifique en la figura la probabilidad de error de símbolo P_e , dada por las ecuaciones 15 y 16.
8. Represente la curva de P_e teórica para E_b/N_0 entre 0 y 10 dB. Para ello, calcule la E_b/N_0 en unidades naturales para poder evaluar la ecuación 17. Sin embargo, en la figura represente la P_e en escala logarítmica con `semilogy` frente a la E_b/N_0 en dB.
¿Coincide la P_e teórica con la BER que ha obtenido mediante simulación? ¿Por qué?
9. Ejecute su programa en Matlab con un número de bits transmitidos $N_b = 10^4$ y una $SNR = 10, 5$ y 0 dB, respectivamente. Observe y comente las figuras y la BER. ¿Qué efecto tiene una reducción de la SNR? De nuevo, compare la P_e teórica con la BER obtenida mediante simulación.

3. Funciones Matlab útiles para la práctica

Función	Descripción
help	Ayuda de una función de Matlab
doc	Documento de ayuda ampliado, con ejemplos
length	Longitud de un vector
rand	Números aleatorios de una distribución uniforme
randi	Números aleatorios enteros de una distribución uniforme
randn	Números aleatorios de una distribución gaussiana
normpdf	Fdp de una distribución gaussiana o normal
normcdf	Fdc de una gaussiana o normal (función Q)
mean	Media muestral
conv	Convolución
erfc	Función de error complementaria
a == b	Comparación de vectores
a > b	
a ~= b	
figure	Crea una figura vacía
plot	Representa un vector o matriz en un gráfico 2D
semilogy	Representación en escala logarítmica (en base 10)
hist	Calcula y representa un histograma
hold on	Permite pintar varias gráficas en la misma figura
xlabel,ylabel	Añade texto en los ejes de una figura
title	Añade un título a la figura
legend	Añade una leyenda a la figura
print	Imprime una figura por impresora o a fichero

4. Referencias

- *Comunicaciones Digitales*. A. Artés, F. Pérez González, J. Cid Sueiro, R. López Valcarce, C. Mosquera Nartallo y F. Pérez Cruz. Ed. Pearson Educación. 2007.
- *Communication Systems Engineering*. J.G. Proakis y M. Salehi. Prentice-Hall. 1994.