

Consultor: Francesc Tarrés
Fecha entrega: 30 de octubre de 2017

Normas de entrega

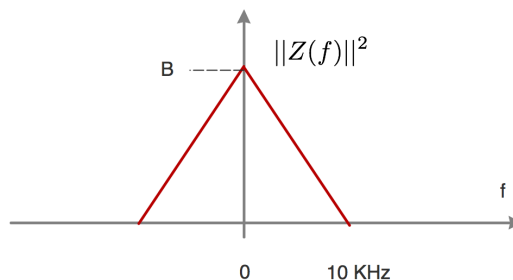
- Entregar preferiblemente un documento en PDF y comprobar que todas las ecuaciones se visualizan correctamente. Es posible incluir páginas escaneadas de documentos elaborados manualmente. En este caso, procure tener una letra y organización del documento clara. Si se desea, se puede entregar el PDF y el formato Word Office conjuntamente. Se recomienda no entregar solo el formato Word ya que no siempre se mantienen las fórmulas en todas las versiones. No se aceptan entregas en OpenOffice.
- Nombre del documento: Apellido_1_Apellido_2_Nombre_PEC1.pdf.
- Se tienen que numerar todas las páginas del documento, especialmente cuando se entregan documentos manuscritos escaneados.
- Todos los resultados de los problemas se tienen que demostrar o razonar. Si algunas de las demostraciones necesarias aparecen en el libro de texto sólo es necesario referenciar la fórmula del libro. El detalle con el que se espera la resolución de los ejercicios es el mismo que el de los ejercicios resueltos que se proporcionan en las guías de estudio de cada módulo.
- Las soluciones finales de cada apartado deben identificarse de forma clara.

Problema 1. Sistemas no lineales y modulaciones (30%)

Supongamos una señal $x(t) = z(t) + \cos 2\pi f_0 t + \sin 2\pi 1.5 f_0 t$ que se aplica al siguiente sistema lineal



Sabemos que la señal $z(t)$ tiene potencia unidad y un ancho de banda de 10 kHz, con un espectro como el que se representa en la figura adjunta. Por otra parte, la frecuencia portadora es $f_0 = 100 \text{ kHz}$.



- Calcula el valor de B
- Calcula la expresión matemática temporal de la señal de salida $y(t)$.
- Representa de forma esquemática el espectro (módulo al cuadrado de la Transformada de Fourier) para la señal que has calculado en el apartado b)
- Define un filtro que aplicado a la señal de salida del sistema ($y(t)$) nos permita obtener una señal modulada en DSB (Doble Banda Lateral) en la frecuencia portadora f_0 y que tenga como información útil la señal $z(t)$. Identifica el tipo de filtro, su ancho de banda y las frecuencias de corte.
- Repite el apartado anterior para obtener una DSB en la frecuencia portadora $f_1 = 1.5 f_0$

Solución

- a) Para calcular el valor de B podemos aplicar la siguiente relación:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} ||Z(f)||^2 df = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot B}{2} = 1$$

De manera que obtenemos

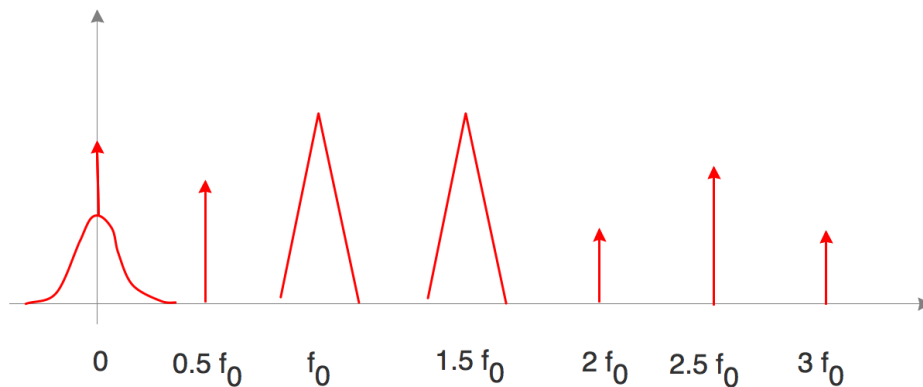
$$B = 10^{-4}$$

- b) Elevamos al cuadrado la señal obteniendo:

$$x(t) = z(t) + \cos 2\pi f_0 t + \sin 2\pi 1.5 f_0 t$$

$$\begin{aligned} x^2(t) = & 2z(t)\sin(1.5\omega t) + \sin(0.5\omega t) + \\ & + 2z(t)\cos(\omega t) + z^2(t) + 1 + \\ & \frac{1}{2}\cos(2\omega t) + \sin(2.5\omega t) - \frac{1}{2}\cos(3\omega t) \end{aligned}$$

- c) Esquemáticamente, el espectro de señales que obtenemos es:



- d) Se trataría de un filtro paso banda centrado en la frecuencia f_0 con un ancho de banda de 20 kHz; es decir, las frecuencias de corte serían:

$$f_{min} = 90 \text{ kHz} \quad f_{max} = 110 \text{ kHz}$$

- e) Igual que en el caso anterior pero con una frecuencia central de 150 kHz

$$f_{min} = 140 \text{ kHz} \quad f_{max} = 160 \text{ kHz}$$

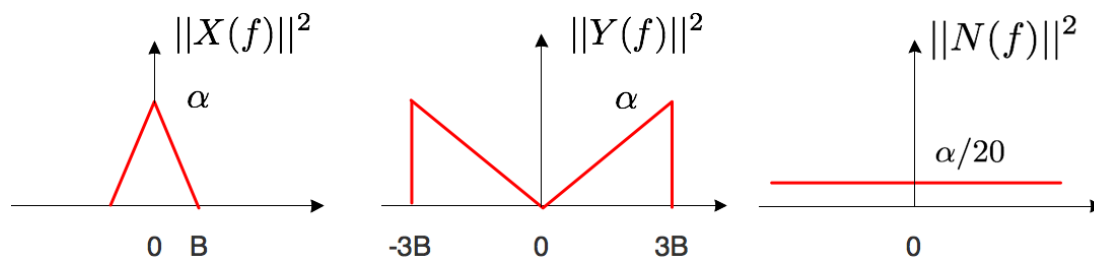
Problema 2. Modulaciones analógicas en fase i cuadratura (30%)

Consideremos un sistema de comunicaciones con modulación en fase y cuadratura en el que se recibe la siguiente señal:

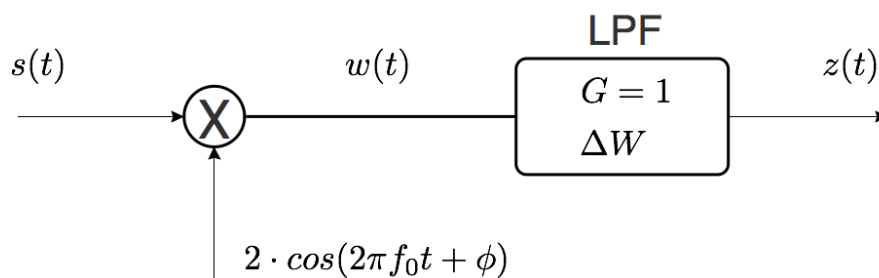
$$s(t) = A_c \cdot x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) - A_c \cdot y(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t) + n(t)$$

Las señales $x(t)$ i $y(t)$ tienen valor medio cero y son estadísticamente independientes. La señal $x(t)$ tiene una potencia de 5 mW i $n(t)$ es un ruido blanco y gaussiano con valor medio cero. La señal $x(t)$ representa la componente útil que queremos obtener en la salida y la señal $y(t)$ representa una interferencia no deseada. Los anchos de banda de todas las señales está referidos al parámetro $B = 10 \text{ kHz}$

En la figura se representan los espectros de potencia de $x(t)$, $y(t)$ i $n(t)$



La señal $s(t)$ se desmodula con el siguiente receptor:



Donde el filtro de salida es un filtro paso bajo con ganancia unidad y ancho de banda ΔW .

- Determina el valor del parámetro α .
- Calcula la potencia de la señal $y(t)$.
- Calcula la expresión matemática de la señal $w(t)$ en función del parámetro ϕ (suponga que para este apartado la componente de ruido puede despreciarse)
- Determina la componente de la señal $x(t)$ en la salida, sin tener en cuenta el ruido y suponiendo que $\phi = 0$, $\Delta W = B$ i $A_c = 1$.
- En estas condiciones ($\phi = 0$, $\Delta W = B$, $A_c = 1$), Determina la relación señal a ruido en la salida.
- Determina la potencia de la componente interferentes que tenemos en la salida cuando $\phi = \frac{\pi}{20}$ i $\Delta W = 3B$, $A_c = 1$.
- Determina la potencia de la componente interferentes que tenemos en la salida cuando $\phi = \frac{\pi}{20}$ i $\Delta W = B$, $A_c = 1$.
- Calcula la SINR para el caso $\phi = \frac{\pi}{20}$ i $\Delta W = 3B$, $A_c = 1$.
- Calcula la SINR para el caso $\phi = \frac{\pi}{20}$ i $\Delta W = B$, $A_c = 1$.

Solución

- a) Para calcular el valor de α aplicamos:

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} ||X(f)||^2 df = B \cdot \alpha = 5 \cdot 10^{-3} \text{ W}$$

Por tanto, sustituyendo el valor del ancho de banda por 10 kHz obtenemos el valor de α .

$$\alpha = 5 \cdot 10^{-7}$$

- b) También podemos aplicar el cálculo de área bajo el espectro de potencia.

$$P_y = 3 \cdot B \cdot \alpha = 15 \text{ mW}$$

- c) Desarrollando los productos y aplicando propiedades trigonométricas obtenemos:

$$\begin{aligned} w(t) &= 2 \cdot s(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \\ &= A_c \cdot x(t) \cdot \cos(2\pi 2f_0 t + \phi) - A_c \cdot y(t) \cdot \sin(2\pi 2f_0 t + \phi) + \\ &+ A_c x(t) \cdot \cos(\phi) + A_c \cdot y(t) \cdot \sin\phi \end{aligned}$$

- d) Si suponemos que el filtro es ideal y que $\phi = 0$ i $A_c = 1$, en la salida tendremos $z(t) = x(t)$, por lo tanto la potencia útil en la salida será de 5 mW.
- e) Podemos calcular la potencia del ruido en la salida utilizando los resultados del análisis del ruido paso banda que aparecen en los apuntes de la asignatura, obtenemos que a potencia de ruido será

$$P_{noise} = \frac{\alpha}{20} \cdot 2B$$

Así pues, sustituyendo B y α obtenemos $P_{noise} = 0,5 \text{ mW}$. Finalmente tendremos:

$$SNR = 10 \cdot \log_{10} \frac{5 \text{ mW}}{0,5 \text{ mW}} = 10 \text{ dB's}$$

- f) Para la señal interferente, tendremos que cuando $\phi = \frac{\pi}{20}$ la salida es:

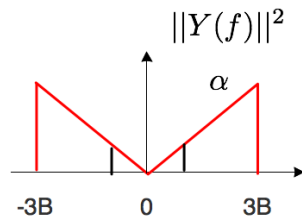
$$z(t) = x(t) \cdot \cos\phi + y(t) \cdot \sin\phi$$

Donde no hemos tenido en cuenta el ruido. Observamos que en este caso, la señal interferente pasa toda a través del filtro paso bajo del sistema receptor.

Por tanto, tendremos que las componentes de las potencias útiles e interferentes en la salida serán:

$$\begin{aligned} P_{util} &= P_x \cdot \cos^2(\pi/20) = 4.877 \text{ mW} \\ P_{interf} &= P_y \cdot \sin^2(\pi/20) = 0,3670 \text{ mW} \end{aligned}$$

- g) En este último caso la señal interferente queda parcialmente eliminada por el filtro y solo una parte de la potencia aparecerá en la salida.



$$P_{util} = P_x \cdot \cos^2(\pi/20) = 4.877 \text{ mW}$$

$$P_{interf} = B \cdot \frac{\alpha}{3} \cdot \sin^2(\pi/20) = 0,04078 \text{ mW}$$

- h) Simplemente, sustituyendo los valores para este caso:

$$SINR = 10 \cdot \log_{10} \frac{4,877}{1,5 + 0,367} = 4,17 \text{ dB}$$

- i) Análogamente obtenemos:

$$SINR = 10 \cdot \log_{10} \frac{4,877}{0,5 + 0,04078} = 9,5513 \text{ dB}$$

Problema 3. Modulaciones en frecuencia i amplitud, comparativas (30%)

Queremos transmitir una señal de voz con un ancho de banda de 4 kHz utilizando una modulación en FM que tiene una desviación en frecuencia de $f_d = 100\text{ kHz}$.

- a) Determina la relación de desviación y el ancho de banda de la señal modulada teniendo en cuenta una formula de Carson aproximada para esta relación de desviación.

Suponga que filtramos la señal resultante de la modulación con un filtro pasa banda adaptado al valor de ancho de banda calculado el apartado a). Suponga también que se multiplexan varias señales en FM con portadoras diferentes y una separación de frecuencias igual a la anchura de banda de las señales moduladas en FM.

- a) Determina cuantas señales diferentes podemos llegar a multiplexar en la banda de FM comercial que va de 88 MHz hasta 108 MHz.
b) Calcula cuantos se podrían multiplexar en la misma banda del apartado a) si se usasen modulaciones de amplitud, con una separación de frecuencias portadoras igual al ancho de banda de la modulación AM.

La relación SNR en una modulación de FM se determina como:

$$SNR_{FM} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{3f_d^2 A_c^2 P_s}{2B^3 \cdot N_0} \right) = 10 \cdot \log_{10} (3D^2(C/N))$$

siendo B el ancho de banda de la señal a modular, f_d la desviación en frecuencia, N_0 la densidad espectral de ruido, A_c la amplitud de la portadora (en el receptor) y P_s la potencia de la señal que supondremos normalizada a la unidad. También supondremos que la potencia de la portadora es de $1\text{ W} = \frac{A_c^2}{2}$ y que la densidad espectral del ruido es de $N_0/2 = 25\text{ }\mu\text{W/Hz}$.

- c) Determina la SNR_{FM} de la señal que obtendremos en la salida del demodulador FM.
d) Calcula cuál sería la SNR si usáramos una modulación AM con un índice de modulación unidad, suponiendo que tenemos la misma amplitud A_c de portadora y la misma densidad espectral de ruido.
e) Determina cuál debería ser la potencia de la portadora en AM ($A_c^2/2$) para que la SNR en recepción de la modulación en AM sea igual a la que hemos obtenido para la señal en FM.

Nota: Debido a que la fórmula de Carson es una aproximación, el valor del ancho de banda obtenido en el primer apartado puede ser diferente en función de la aproximación hecha. El resto de apartados se puntuarán de forma consistente con el valor propuesto en el primer apartado, siempre que las aproximaciones realizadas sean aceptables.

Solución

- a) Para saber como aplicar la fórmula de Carson tenemos que calcular la relación de desviación:

$$D = \frac{f_d}{W} = \frac{100}{4} = 25 \gg 1$$

En este caso, la fórmula de Carson se puede aplicar debido a que D es mucho más grande que la unidad. Obtenemos:

$$B_T = 2(f_d + W) = 2 \cdot 104 = 208\text{ MHz}$$

- b) El ancho de banda de la FM comercial es:

$$\Delta_{FM} = 108 \text{ MHz} - 88 \text{ MHz} = 20 \text{ MHz}$$

Por lo que podremos calcular los canales que pueden incluirse sin solapamiento y sin bandas de guarda.

$$\# \text{ canals} = \frac{20 \cdot 10^3 \text{ kHz}}{208 \text{ kHz}} \approx 96 \text{ canals}$$

- c) En el caso de AM, el ancho de banda de la modulación de un canal sería:

$$B_{AM} = 2 \cdot 4 \text{ kHz} = 8 \text{ kHz}$$

Y por lo tanto el número de canales que podríamos incluir en el ancho de la FM comercial sería muchísimo mayor:

$$\# \text{ canals} = \frac{20 \cdot 10^3 \text{ kHz}}{8 \text{ kHz}} = 2500 \text{ canals}$$

- d) En este caso, aplicando la fórmula propuesta obtenemos

$$SNR_{FM} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{3 \cdot (100 \cdot 10^3)^2 \cdot 1}{(4 \cdot 10^3)^3 50 \cdot 10^{-6}} \right) = 39,71 \text{ dB}$$

- e) Para el caso de la modulación AM, la relación señal a ruido sería:

$$SNR_{AM} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{A_c^2 \cdot m^2 \cdot P_x}{2 \cdot N_0 \cdot B} \right) = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{1}{50 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^3} \right) = 6,9 \text{ dB}$$

- f) En este caso queremos obtener la misma SNR en AM que en FM pero lo intentamos aumentando la potencia de la portadora. Tendremos:

$$\begin{aligned} 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{A_c^2}{2} \cdot \frac{1}{50 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^3} \right) &= \\ = 10 \cdot \log_{10} \frac{A_c^2}{2} + 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{1}{50 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^3} \right) &= \\ = 10 \cdot \log_{10} \frac{A_c^2}{2} + 6,9 \text{ dB} &= 39,71 \text{ dB} \end{aligned}$$

Finalmente

$$10 \cdot \log_{10} P = 32,81 \text{ dB} \implies P = 10^{3,281} = 1909,85 \text{ W}$$

Cuestiones (+/-1 punto)

Indique si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

En una modulación $s(t) = Ax(t) \cos(2\pi f_0 t) - A_c y(t) \sin(2\pi f_0 t)$ la envolvente de la señal siempre es constante.	F
En modulaciones AM es muy importante tener una buena sincronización entre la portadora de la señal modulada y la del receptor	F
Dos señales $x(t)$ e $y(t)$, con anchos de banda 100 kHz son moduladas en AM empleando una portadora de 1MHz y una de 1,1MHz respectivamente. Entonces, las señales no pueden ser desmoduladas independientemente sin ambigüedades ya que se producirán interferencias entre ellas.	V
En una modulación FM la potencia transmitida se mantiene constante cuando aumentamos el nivel de amplitud de la moduladora $x(t)$.	V
Los sistemas de Doble Banda Lateral ocupan el mismo ancho de banda que los sistemas AM.	V
En transmisión en el espacio libre si doblamos la distancia entre las antenas la SNR cae 3 dB.	F
Si una señal paso bajo de banda limitada W se filtra con un filtro paso bajo ideal con ganancia unidad y frecuencia de corte $W/2$, entonces la potencia de la señal en la salida del filtro siempre es la mitad que en la entrada.	F
En un canal ideal $h(t) = 0.85 \cdot \delta(t - 0.8 \cdot 10^{-5})$, entonces la atenuación de la señal es aproximadamente de 1.41 dBs	V
En el código Morse, los caracteres que más se repiten son los que se codifican con secuencias de puntos-rayas más largas para así minimizar la probabilidad de error.	F
El receptor superheterodino tiene una frecuencia fija del oscilador local que es independiente de la banda que deseemos desmodular.	F

NOTA: Cada respuesta correcta suma 0.1 puntos, la respuesta incorrecta resta 0.1. Si no se contesta ni suma ni resta. Contestando erróneamente todas las cuestiones se puede llegar a perder 1 punto sobre el resto de la PEC. Si lo desea puede incluir una explicación de su interpretación o razonamiento de la respuesta, aunque la evaluación, en principio, es binaria