PEC Análisis II (grado Físicas-2019)

1). Dada una función $f(x,y)$ sin puntos críticos y una curva $\vec{r}(t)$ la cual es siempre perpendicular a gradiente de $f(x,y)$ entonces ¿$\vec{r}(t)$ es una parte de una curva de nivel de f? (razonad la respuesta).
(vale 0.5)

2). ¿Es $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 1 dzdydx = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^2 \sin(\phi) dr d\phi d\theta$? (razonar la respuesta).
(vale 0.5p)

3). ¿Cuál es el valor máximo del área del rectángulo inscrito en la región plana $x^4 + y^8 = 17$.?El área del rectángulo inscrito es $f(x,y) = 4xy$
(vale 1p)

4). Sea la curva definida por la parametrización $\vec{r}(t)=(e^{-t}\cos(t), e^{-t}\sin(t)), t > 0$. Probar que la curva es suave y calcular la tangente unitaria y la normal principal en un punto cualquiera. Estudiar la curvatura y el radio de curvatura en un punto.
(vale 1p)

5). Hallar los valores máximos y mínimos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$, en el disco $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.
(vale 2p)

6). La trayectoria cicloidal de una partícula en el borde de un disco de rádio R que se mueve con velocidad v está definida por $\vec{r}(t) = (vt - R\sin(vt/R), R - R\cos(vt/R))$. a) Hallar la velocidad r´(t) de la particula en función de t. b) ¿Cuándo el valor de la velocidad es igual a cero?
(vale 1p)

7). Demostrar que es posible despejar u y v del conjunto de ecuaciones $\{xu + yvu^2 = 2, xu^3 + y^2v^4 = 2\}$,como función x, y, de manera única, cerca del punto $(x,y,u,v) = (1,1,1,1)$. Calcular $\partial u/\partial x$ en el punto $(1,1)$.
(vale 2p)

8). La temperatura en los puntos del cubo $W = \{[-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]\}$ es proporcional al cuadrado de la distancia al origen. a) ¿cuál es la tempereatura media? b) ¿En qué puntos del cubo es la temperatura igual a la temperatura media?
(vale 2p)

1) - Sí. Siendo perpendicular al gradiente es paralela necesariamente a las curvas de nivel.

2) - Sí. Es la integral de un octante cortado por una esfera sólida.

3) - Hay que buscar los extremos de $f(x,y) = 4xy$ en la región $x^4 + y^8 = 17$ (para ello se utilizan los multiplicadores de Lagrange)

$$\left.\begin{array}{l} 4y = \lambda 4x^3 \\ 4x = \lambda 8y^7 \\ x^4 + y^8 = 17 \end{array}\right| \quad \frac{x}{y} = \frac{2y^7}{x^3} \Rightarrow x^4 = 2y^8$$

$$3y^8 = 17 \quad \circ \left[\begin{array}{l} y = \left(\frac{17}{3}\right)^{1/8} \\ x = \left(\frac{34}{3}\right)^{1/4} \end{array}\right]$$

4) - Es suave, ya que para todo $t > 0$, $\vec{r}\,'(t) = -e^{-t}(\operatorname{sen} t + \cos t, \operatorname{sen} t - \cos t)$ y $\|\vec{r}\,'(t)\| = e^{-t}\sqrt{2} > 0$

Tangente Unitaria

$$\hat{T}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t + \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t - \cos t)$$

Normal Principal

$$\vec{N}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(-\operatorname{sen} t + \cos t, \cos t + \operatorname{sen} t)$$

Curvatura $\boxed{\vec{K}(t)} = \frac{1}{e^{-t}\sqrt{2}}$, que tiende a $+\infty$ cuando $t \to +\infty$

El radio de curvatura $R(t) = e^{-t}\sqrt{2}$ tiende a cero cuando $t \to +\infty$

5) - $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ $\left.\begin{matrix} 2x-1=0 \\ 2y-1=0 \end{matrix}\right\}$ $(x,y)=(1/2,1/2)$ es el único punto crítico en $U=\{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$

La frontera ∂U se puede parametrizar mediante $\vec{r}(t)=(\operatorname{sen} t, \cos t)$, $0\leq t\leq 2\pi$

Luego $f(\vec{r}(t))=\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t-\operatorname{sen} t-\cos t+1$
$=2-\operatorname{sen} t-\cos t$; si $g(t):=2-\operatorname{sen} t-\cos t$, entonces los valores de máximo y mínimo de f en ∂U son los que corresponden a los valores de máximo y mínimo de $g(t)$: $g'(t)=0$ si $\operatorname{sen} t=\cos t$, es decir, $t=\{\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\}$. Por lo tanto los candidatos son $\vec{r}(\pi/4)$, $\vec{r}(5\pi/4)$ y los extremos $\vec{r}(0)=\vec{r}(2\pi)$

Los valores de f en los puntos críticos son

$f(1/2,1/2)=1/2$

$f(\vec{r}(\pi/4))=f(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})=2-\sqrt{2}$

$f(\vec{r}(\frac{5\pi}{4}))=f(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})=2+\sqrt{2}$

$f(\vec{r}(0))=f(\vec{r}(2\pi))=f(0,1)=1$

Luego el mínimo absoluto es $\boxed{\frac{1}{2}}$ y el máximo $\boxed{2+\sqrt{2}}$

———o———

6)- $\vec{r}'(t) = \left(\frac{d}{dt}(vt - R \operatorname{sen}\frac{vt}{R}), \frac{d}{dt}(R - R\cos\frac{vt}{R})\right) =$
$= (v - v\cos\frac{vt}{R}, v \operatorname{sen}\frac{vt}{R})$

La componente en la dirección de $\vec{i}$ es $v(1-\cos(\frac{vt}{R}))$, que vale cero cuando $\frac{vt}{R} = 2\pi m$, para dichos valores de t, $\operatorname{sen}(\frac{vt}{R})$ también es igual a cero. Por tanto los únicos instantes en los que la velocidad es cero son $t = 2\pi m R/v$, para cualquier entero m. En estos instantes $\vec{r}(t) = (2\pi m R, 0)$, de forma que el punto en movimiento está tocando el suelo. Estos instantes ocurren tras intervalos de tiempo de $2\pi R$

7)-
$F_1(x,y,u,v) = xu + yvu^2 - 2$
$F_2(x,y,u,v) = xu^3 + y^2v^4 - 2$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}_{(1,1,1,1)} = \begin{vmatrix} x+2yuv & yu^2 \\ 3u^2x & 4y^2v^3 \end{vmatrix}_{(1,1,1,1)} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9$$

Como $\Delta \neq 0$ el teorema de la función implícita nos asegura que es posible despejar $\{u, v\}$

¿$\partial u/\partial x$? $\quad x\frac{\partial u}{\partial x} + u + y\frac{\partial v}{\partial x}u^2 + yv2u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

$$3xu^2\frac{\partial u}{\partial x} + u^3 + 4y^2v^3\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Si $(x,y,u,v) = (1,1,1,1) \Rightarrow 3\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -1$

$$3\frac{\partial u}{\partial x} + 4\frac{\partial v}{\partial x} = -1$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{3}}$$

8) — $T = c(x^2+y^2+z^2)$

$$[T]_m = \frac{1}{8}\iiint_V T\,dx\,dy\,dz = \frac{c}{8}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$[T]_m = \frac{3c}{8}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} z^2\,dx\,dy\,dz = \frac{3c}{2}\left(\frac{z^3}{3}\right)_{-1}^{1} = \boxed{c}$$

La temperatura es igual a la temperatura media en todos los puntos donde se satisface
$c(x^2+y^2+z^2) = c \Rightarrow$ que dichos puntos están en la esfera $x^2+y^2+z^2=1$, inscrita en $[W]$

———— o ————