PEC AI 2017-18

- 1- Sea f la función $f: (-1,1) \to \mathbb{R}$ de forma que f es impar y creciente. (a) Probar que f es positiva en $(0,1)$ y negativa en $(-1,0)$. (b)Estudiar el número de soluciones de la ecuación $(f(x))^2-1 = 0$.

  (vale 2p)
- 2- Consideremos la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $f(x) = x+1$. Probar , utilizando la definición formal de límite, que para toda $a \in \mathbb{R}$ se verifica, $lim_{x \to a} f(x) = a+1$.

  (vale 2p)
- 3-Consideremos la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $f(x) = xcos(x)$. Aplicando la definición de derivada en un punto determinar la derivada de f en a.

  (vale 1p)
- 4- Dada la función $f.[0,2\pi] \to \mathbb{R}$ donde $f(x) = sen(x) + (1/2)cos(2x)$. Estudiar el crecimiento de la función f.

  (vale 1p)
- 5- El barco A navega a 24 km/h y el barco B, situado a 48 km al sur de A, navega hacia el este a 18 km/h. a)¿A qué razón se acercan o separan al cabo de 1h? b) ¿Cuándo dejan de acercarse y a qué distancia se encuentran en ese momento?

  (vale 1p)
- 6- Utilizar el teorema del valor medio para demostrar que el polinomio $f(x) = x^3+2x-1$ tiene un cero en el intervalo $[0,1]$, es decir, existe un punto c donde $f(c) = 0$. Calcular, utilizando algún método numérico el valor de dicho punto.

  (vale 2p)
- 7- Estudiar y representar graficamente la función $f(x) = (cos(x))/(1+sen(x))$.

  (vale 1p)

1) $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, f impar y creciente

a) $x\in(0,1)$, $f(x)=-f(-x)$, f es creciente, por tanto $f(-x)<f(x) \Rightarrow f(x)>-f(x) \Rightarrow f(x)>0$, de forma análoga se llega f es negativa en $(-1,0)$

b) $(f(x))^2-1=0 \Rightarrow (f(x)-1)(f(x)+1)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)=1$ y $f(x)=-1$. La ecuación $f(x)=1$ puede tener una solución o ninguna, ya que f es creciente. Si tiene una solución x^*, entonces se tiene, por ser f impar, que $f(-x^*)=-1$, es decir $-x^*$ es una solución de de la ecuación $f(x)=-1$. Por tanto el conjunto de soluciones o bien es vacío o bien tiene dos elementos.

———— o ————

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$, $\lim_{x\to a} f(x)=a+1$

$\forall\varepsilon>0$, $|f(x)-(a+1)|=|x+1-a-1|=|x-a|$

$\exists\delta=\varepsilon$, $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-(a+1)|<\varepsilon$

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\cos(x)$

¿$f'(a)$?

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)\cos(a+h)-a\cos a}{h}$$

$$=a\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h}+\lim_{h\to 0}\cos(a+h)=$$

$=-a\operatorname{sen} a+\cos a$; $f'(a)=-a\operatorname{sen} a+\cos a$

4) $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{sen}x+\frac{1}{2}\cos 2x$

$f'(x)=\cos x-\operatorname{sen}2x$

$f'(x)=0 \Rightarrow \cos(x)-\operatorname{sen}(2x)=0 \Rightarrow$

$\cos(x)-2\operatorname{sen}(x)\cos(x)=0 \Rightarrow \cos(x)(1-2\operatorname{sen}(x))=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\cos(x)=0$ ó $1-2\operatorname{sen}(x)=0\}$, las soluciones

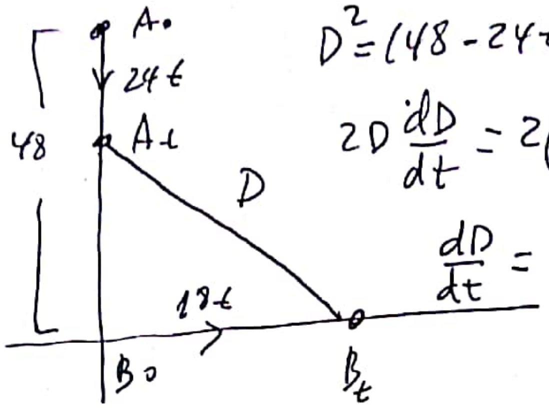
de $\cos(x)=0$, $\{x=\pi/2,\ x=\frac{3\pi}{2}\}$

$1-2\operatorname{sen}(x)=0$, $\{x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\}$

f' es continua, luego el signo de f' en cada uno de los subintervalos en los que queda dividido $[0,2\pi]$ a partir de las soluciones, es el mismo

Luego f es creciente en los intervalos
$(0,\frac{\pi}{6}), (\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6})$ y $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$
y decreciente en los intervalos $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$ y $(\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2})$

5) $v(A)=24$ Km/h.
$d(A,B)=48$ km
$v(B)=18$ km/h



$D^2=(48-24t)^2+(18t)^2$

$2D\frac{dD}{dt}=2(600t-768)$

$\frac{dD}{dt}=\frac{600t-512}{D}$

(a) Si $t=1$, $D=30$, $\frac{dD}{dt}=-8{,}4$ se acercan

(b) Dejan de acercarse cuando $\frac{dD}{dt}=0$, es decir,
Si $t=\frac{768}{600}=1.28$h., momento en que están a una distancia de $D=28.8$ km.

6) $f(0)=-1$, $f(1)=2$ | $f(0)<0$, $f(1)>0 \Rightarrow \exists c\in[0,1]$ tal que $f(c)=0$.

$c\simeq 0{,}4934$

$f'(x)=-\frac{1}{1+\operatorname{sen}(x)}$, $f''(x)=\frac{\cos(x)}{(1+\operatorname{sen}(x))^2}$

7) $y=\frac{\cos(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}$

asíntotas horizontales no hay

puntos críticos no hay

puntos inflexión $x=\pi/2$

periodo 2π
intersección en $x=(\frac{\pi}{2},0)$
intersección en $y=(0,1)$
Dominio $=\mathbb{R}-\{x=\frac{3+4n}{2}\pi\}$
asíntotas verticales, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$
intervalo de estudio $(-\pi/2,\pi/2)\cup(\pi/2,3\pi/2)$