PEC ANÁLISIS I (Grado en Físicas) 2018-19

1. Sea $f: (-a,a) \to \mathbb{R}$, donde a es un número real positivo, una función impar. Probar que $f(0) = 0$.

2. Consideramos la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x^2 + ax + b & \text{si} & x\langle 1 \\ & & a,b \in \mathbb{R} \\ 1/(x+a) & \text{si} & x \geq 1 \end{array} \right\}.$$ Derminar los valores de a, b sabiendo que existre $\lim_{x\to 1} f(x)$ y que $f(1) = \sqrt{2}$.

3. Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde f es una función lineal, es decir, $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x,y \in \mathbb{R}$ y $f(\lambda x) = \lambda f(x), \forall x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$. Probar que f es derivable y calcular el valor de su derivada $f'(a)$, donde $a \in \mathbb{R}$, sabiendo que $f(4) = 2 + f(2)$.

4. Un proyectil que se dispara hacia arriba en la superficie de la tierra llega al suelo al cabo de $10\ s$¿Cuánto tardará en caer al suelo si se dispara en Marte con la misma velocidad inicial? El valor de la constante de la gravedad en Marte es $g_{marte} = 3.72 m/s^2$.

5. El azucar se disuelve en el agua con velocidad proporcional a la cantidad que queda sin disolver. Si inicialmente hay 50 kilos de azucar y tras cinco horas sólo quedan 20 kilos¿Cuánto tiempo deberá transcurrir hasta que se disuelva el 90% del azucar?

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Departamento de Matemáticas Fundamentales
Facultad de Ciencias
Senda del Rey, s/n. 28040 MADRID (España)
Teléf. (91) 398 72 40 Fax (91) 398 71 07

Soluciones PEC AI - 2018-19

1) - Por ser f impar se tiene que para todo $x \in (-a, a)$ es $f(-x) = -f(x)$. Si en la expresión anterior se sustituye $x = 0$, se tiene $f(-0) = -f(0)$, $2f(0) = 0$, $\boxed{f(0) = 0}$

2) - $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x+a} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 + ax + b = 1 + a + b$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x+a} = \frac{1}{1+a}$$

Puesto que existe el límite de $\lim_{x \to 1} f(x)$, se tiene entonces, $1 + a + b = \dfrac{1}{1+a}$

Puesto que $f(1) = \sqrt{2}$, $\dfrac{1}{1+a} = \sqrt{2}$, $1 + a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\boxed{a = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1}$

Luego $1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1 + b = \dfrac{1}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1} \Rightarrow \boxed{b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

UNIVERSIDAD NACIONAL
DE EDUCACIÓN
A DISTANCIA

Departamento de Matemáticas Fundamentales
Facultad de Ciencias
Senda del Rey, s/n. 28040 MADRID (España)
Teléf. (91) 398 72 40 Fax (91) 398 71 07

3) – $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ $\alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a) + f(h) - f(a)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h f(1)}{h} = f(1)$$

$f(4) = 2 + f(2)$; $4 f(1) = 2 + 2 f(1)$; $f(1) = 1$

Por tanto, la derivada de la función de f en a es $f'(a) = f(1) = 1$

---

4) – Sea $y_T(t)$ la altura del proyectil t-segundos después que se lanza hacia arriba con velocidad v_0. Entonces

$$y''(t) = -9'8, \quad y'(0) = v_0, \quad y(0) = 0$$

Es decir, $y = -4.9 t^2 + v_0 t = t(v_0 - 4.9 t)$

Sabemos que $y_T(10) = 0$, así $v_0 = 49$ m/s.

En Marte $g_M = 3.72$ m/s^2, luego

$$y_M = -1.86 t^2 + v_0 t = t(49 - 1.86 t)$$

Si $y_M = 0 \Rightarrow t_M = 49/1.86 \simeq \boxed{26.3 \text{ Seg.}}$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Departamento de Matemáticas Fundamentales
Facultad de Ciencias
Senda del Rey, s/n. 28040 MADRID (España)
Teléf. (91) 398 72 40 Fax (91) 398 71 07

5)- Sea $y(t)$ el número de kg no disueltos después de t-horas, entonces puesto que

$$\begin{array}{l|l} y(0)=50 & \\ y(5)=20 & y'(t)=k\,y(t), \end{array}$$

se tiene $y(t)=y(0)e^{kt}=50e^{kt}$. Luego

$$20=y(5)=50e^{5k} \Rightarrow k=\frac{1}{5}\ln\frac{2}{5}$$

Si se ha disuelto el 90% en el tiempo T, entonces $5=y(T)=50e^{kT} \Rightarrow$

$$\Rightarrow T=\frac{1}{k}\ln\frac{1}{10}=\frac{5\ln(0.1)}{\ln(0.4)}\simeq 12.56$$
