

ECUACIONES DIFERENCIALES

Hoja 1

1 Analizar si las siguientes funciones son lipschitcianas (local o globalmente) y, si existe, calcular su constante de Lipschitz en los intervalos $[0, b]$ y $[a, b]$ con $b > a > 0$:

1. $f(x) = |x|^r, r > 0,$

2. $f(x) = \operatorname{sen} x,$

3. $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2},$

4. $f(x) = x \cos \frac{1}{x},$

5. $f(x) = x \ln |x|.$

2 Calcular las constantes de Lipschitz (si existen) de las siguientes funciones en $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ con $b_i > a_i \geq 0$ para $i = 1, 2$:

1. $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2^2, -x_2),$

2. $f(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1 x_2|},$

3. $f(x_1, x_2) = (x_1 \sqrt{|x_2|}, x_1).$

3 Comprobar si las soluciones de las siguientes ecuaciones están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

1. $x' = \frac{x^3}{1+x^2};$

2. $x' = x \cos \frac{1}{x};$

3. $x' = \frac{e^t(x^3 + x + t)}{1+x^2};$

4. $x' = t^3 \operatorname{sen}(x + t^2).$

4 Transformar las siguientes ecuaciones diferenciales en sistemas de primer orden y determinar el dominio donde la correspondiente función cumple una condición de Lipschitz:

1. $\frac{d^3 x}{dt^3} = 1 - x^2,$

2. $\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{\sqrt{|x|}},$

3. $\frac{d^3 x}{dt^3} = \sqrt{1 + \left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)^2}.$

5 Demostrar que para cada $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la ecuación $x' = \frac{x^3}{1+x^2}$ tiene una única solución que satisface $x(t_0) = x_0$.

6 Consideremos la función $f(t, x) = \frac{4t^3x}{t^4 + x^2}$ para $(t, x) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$:

1. Demostrar la continuidad de f .

2. Estudiar la Lipschitzianidad de f

3. Comprobar que $x(t) = t^2$ y $x(t) = -t^2$ son soluciones de $x' = \frac{4t^3x}{t^4 + x^2}$.

4. Hallar un factor integrante para la ecuación $x' = \frac{4t^3x}{t^4 + x^2}$. Determinar todas las soluciones de esta ecuación que pasa por el punto $(t_0, x_0) = (0, 0)$.

5. ¿Cuántas soluciones pasan por el punto $(t_0, x_0) = (0, 1)$?