EJERCICIOS Y PROBLEMAS
TEMA 1: LOS NÚMEROS COMPLEJO

1. Compruebe que para cualquier $z \in \mathbb{C}$ se verifica:

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Im}(iz)$$
$$\operatorname{Im} z = -\operatorname{Re}(iz).$$

2. Â¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas para dos números complejos cualesquiera z_1 y z_2?

   a) $\operatorname{Re}(\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda \operatorname{Re} z_1 + \mu \operatorname{Re} z_2$, donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   b) $\operatorname{Im}(\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda \operatorname{Im} z_1 + \mu \operatorname{Im} z_2$, donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

   c) $\operatorname{Im}(z_1 - z_2) = -\operatorname{Im}(z_2 - z_1)$.

   d) $Re(z_1 z_2) = \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} z_2$.

   e) $\operatorname{Im}[(z_1 - z_2)^2] = -\operatorname{Im}[(z_2 - z_1)^2]$.

3. Dado $z \in \mathbb{C}$, pruebe las siguientes afirmaciones:

   Si $\operatorname{Re} z > 0 \Longrightarrow \operatorname{Re}(1/z) > 0$.

   Si $\operatorname{Im} z > 0 \Longrightarrow \operatorname{Im}(1/z) < 0$.

4. Calcule en forma binómica:

   a) $i^3(1+i)^2$ *b*) $(3+3i)^2$ *c*) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^4$ *d*) $\frac{1}{i} + \frac{1}{1+i}$

   e) $\frac{1}{(3+2i)^2}$ *f*) $\frac{2+3i}{1+2i} - \frac{7+i}{3-i}$

   Solución: *a*) 2. *b*) $18i$. *c*) $-1/4$. *d*) $1/2 - i3/2$. *e*) $5/13^2 - 12i/13^2$. *f*) $-2/5 - 6i/5$.

5. Calcule i^2, i^3, i^4, i^{4k}, i^{4k+1}, i^{4k+2} e i^{4k+3}, con $k \in \mathbb{N}$. Deduzca de ello i^n para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

   Solución: $i^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 4k \\ i & \text{si } n = 4k+1 \\ -1 & \text{si } n = 4k+2 \\ -i & \text{si } n = 4k+3 \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$

6. Utilizando el ejercicio anterior calcule

   a) $3i^{11} + 6i^3 + \frac{8}{i^{20}} + i^{-1}$ *b*) i^{12735} *c*) i^{-103} *d*) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{3074}$

   (Sugerencia para el último ejercicio: utilice la forma exponencial o determine primeramente $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2$).

   Solución: *a*) $8 - 10i$. *b*) $-i$. *c*) i. *d*) i.

7. Pruebe que si $(\bar{z})^2 = z^2$, entonces z es un número real o es un número imaginario puro.

8. Pruebe que si $\lambda \in \mathbb{R}$ se verifica que $|z-\lambda| = |\bar{z}-\lambda|, \ \forall z \in \mathbb{C}$.

9. Demuestre que para cualesquiera $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se verifica

$$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2+|z_2|^2).$$

10. Calcule

$$a)\ \left|\frac{1+2i}{-2-i}\right| \qquad b)\ \left|(\overline{1+i})(2-6i)(4i-3)\right| \qquad c)\ \left|\frac{i(2+i)^3}{(1-i)^2}\right| \qquad d)\ \left|\frac{(\pi+i)^{100}}{(\pi-i)^{102}}\right|$$

Solución: *a)* 1. *b)* $20\sqrt{5}$. *c)* $5\sqrt{5}/2$. *d)* $1/(\pi^2+1)$.

11. Halle $\operatorname{Arg} z$, $\arg_{[\pi/4, 9\pi/4)} z$ y determine la forma exponencial de z en los siguientes casos:

$$a)\ z = \frac{3\pi}{2} \qquad b)\ z = -100 \qquad c)\ z = -8+8i \qquad d)\ z = -\sqrt{3}-i$$

Solución: a) $0,\ 2\pi,\quad z = \dfrac{3\pi}{2}$ ó $z = \dfrac{3\pi}{2}e^{2k\pi}$ siendo $k \in \mathbb{Z}$. b) $\pi,\ \pi,\ z = 100e^{i\pi}$.
c) $3\pi/4,\ 3\pi/4,\ z = 8\sqrt{2}\,e^{i3\pi/4}$. d) $-5\pi/6,\ 7\pi/6,\ z = 2e^{-i5\pi/6}$.

12. Calcule la forma binómica de:

$$a)\ \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{9}\right)\right]^6 \quad b)\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^{12} \quad c)\ \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}} + i\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^{20} \quad d)\ \frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^2}{-\sqrt{3}+i}$$

Solución: *a)* $-4-i4\sqrt{3}$. *b)* 64. *c)* -32. *d)* $1-i\sqrt{3}$.

13. Calcule las siguientes raíces complejas

$$a)\ (-1+i\sqrt{3})^{1/2} \qquad b)\ (-8i)^{1/3} \qquad c)\ (-1)^{1/4} \qquad d)\ 1^{1/8}$$

Solución: *a)* $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i\right)$. *b)* $2i, \pm\sqrt{3}-i$. *c)* $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$.
d) $\pm 1, \pm i, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

14. Resuelva las siguientes ecuaciones, donde $x,\ y \in \mathbb{R}$:

   a) $i(x+iy) = x+1+2yi$.

   b) $x^2-y^2+2xyi = -ix+y$.

   c) $\sqrt{x^2+y^2} = 1-2x+yi$.

Solución: *a)* $x = -2/3,\ y = -1/3$. *b)* $x = 0$ e $y = 0$ ó $y = -1$. *c)* $x = 1/3$ e $y = 0$.

15. Encuentre las soluciones de $z^3+8=0$ que están dentro del recinto del plano complejo definido por $|z-1| < 2$.

Solución: $1 \pm i\sqrt{3}$.

16. Dado el número complejo $z_0 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$, se pide:

a) Expresar z_0 en forma exponencial y binómica.

b) Probar que z_0 es una solución de $z^4 = z$.

c) Hallar las otras tres raíces cuartas de z_0.

d) Hallar todos los números complejos que son raíces cuartas de sí mismos.

Solución: a) $z_0 = e^{i2\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. *c)* $-z_0, \pm z_0 i$. *d)* $0, 1, z_0, \bar{z}_0$.

17. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $z^2(2 - z^2) = 2$.

b) $z^3 - |z|^2 = 0$.

c) $\sum_{k=0}^{4p} i^k = z^p, \ p \in \mathbb{N}$.

d) $\bar{z} = z^{n-1}, \ n \in \mathbb{N}$.

Solución: a) $\pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\right), \ \pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} - i \operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\right)$. *b)* $0, \ 1, \ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $e^{i2k\pi/p}$ con $k = 0, 1, \ldots, p-1$.
d) 1 si $n = 1$; todo $x \in \mathbb{R}$ si $n = 2$; y $0, e^{i2k\pi/n}$, con $k = 0, 1, \ldots, n-1$, si $n > 2$.

18. Describa y represente cada uno de los siguientes conjuntos hallando: interior, puntos aislados, adherencia, acumulación y frontera. Determine, en cada caso, si se trata de un conjunto abierto, cerrado, compacto, conexo o conexo por poligonales.

1. $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2 + i| \leq 1\}$
2. $\{z \in \mathbb{C} : |2z + 3| > 4\}$
3. $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| \leq |z - z_2|\}$ con $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
4. $\{z \in \mathbb{C} : |z - 4| \leq |z|\}$
5. $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < |z - i|\}$
6. $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z + 5) = 3 \operatorname{Re}(z)\}$
7. $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z + 3) = 0\}$
8. $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) = \alpha\}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$
9. $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 0\}$
10. $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| = \operatorname{Im} z + 1\}$
11. $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = |\bar{z} - 1|\}$
12. $\{z \in \mathbb{C} : 4 \leq |z - 1| + |z + 1| \leq 8\}$
13. $\{z \in \mathbb{C} : z = i^n, \ \text{con } n = 1, 2, \ldots\}$
14. $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : 0 \leq Arg(z) < \pi/2\}$
15. $\left\{z \in \mathbb{C} : z = (-1)^n(1 + i)\frac{n-1}{n}, \text{con } n = 1, 2 \ldots\right\}$

19. Pruebe que la ecuación de una recta en el plano complejo es de la forma

$$w_0 z + \overline{w_0 z} + a = 0,$$

siendo $w_0 \in \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{R}$.

20. Demuestre que todo disco en $\mathbb{C}$ es un conjunto convexo, y por tanto conexo por poligonales.