FUNCIÓN ÍNDICE DE UTILIDAD, EQUILIBRIO Y EXCEDENTE DEL CONSUMIDOR.

14.- Los gustos de unos consumidores vienen determinados por las siguientes funciones de utilidad:

$i_1 = x^{\alpha}. y^{\beta}$ $\quad$ $i_2 = 4x^{\alpha}. y^{\beta}$ $\quad$ $i_3 = x^{2\alpha}. y^{2\beta}$ $\quad$ $i_4 = x^{\alpha/2}. y^{\beta/2}$

siendo α y β dos constantes positivas. Comprobar que el cociente de los índices de las utilidades marginales es invariante respecto a la función arbitraria.

SOLUCIÓN:

La utilidad marginal es la derivada de la función con respecto a una de las variables. Para poder ver si son invariantes entre si lo que hacemos es realizar los cocientes de las utilidades marginales respecto a cada variable:

$$\frac{\frac{\partial i_1}{\partial x}}{\frac{\partial i_1}{\partial y}} = \frac{\alpha x^{\alpha-1}.y^{\beta}}{\beta x^{\alpha}.y^{\beta-1}} = \frac{\alpha y}{\beta x} \qquad \frac{\frac{\partial i_2}{\partial x}}{\frac{\partial i_2}{\partial y}} = \frac{4\alpha x^{\alpha-1}.y^{\beta}}{4\beta x^{\alpha}.y^{\beta-1}} = \frac{\alpha y}{\beta x}$$

$$\frac{\frac{\partial i_3}{\partial x}}{\frac{\partial i_3}{\partial y}} = \frac{2\alpha x^{2\alpha-1}.y^{2\beta}}{2\beta x^{2\alpha}.y^{2\beta-1}} = \frac{\alpha y}{\beta x} \qquad \frac{\frac{\partial i_4}{\partial x}}{\frac{\partial i_4}{\partial y}} = \frac{\frac{\alpha}{2}x^{\frac{\alpha}{2}-1}.y^{\frac{\beta}{2}}}{\frac{\beta}{2}x^{\frac{\alpha}{2}}.y^{\frac{\beta}{2}-1}} = \frac{\alpha y}{\beta x}$$

Como todos los cocientes son iguales, todos los consumidores tienen los mismos gustos, con lo que se cumple la condición de invariancia.

15.- Los gustos de unos consumidores vienen determinados por las siguientes funciones de utilidad:

$i_1 = x^{1/2}. y^{1/3}$ $\quad$ $i_2 = x. y^{2/3}$ $\quad$ $i_3 = x^{3}. y^{2}$

siendo α y β dos constantes positivas. Comprobar que el cociente de los índices de las utilidades marginales es invariante respecto a la función arbitraria.

(para hacer en casa)

$$\frac{\frac{\partial i_1}{\partial x}}{\frac{\partial i_1}{\partial y}} = \frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}y^{1/3}}{x^{1/2}\frac{1}{3}y^{-2/3}} = \frac{3y}{2x} = \frac{\frac{\partial i_2}{\partial x}}{\frac{\partial i_2}{\partial y}} = \ldots$$

16.- Los gustos de unos consumidores vienen determinados por las siguientes funciones de utilidad:

$i_1 = (x+1)^{1/3}.\ (y+2)^{1/2}$ $\qquad$ $i_2 = (x+1)^{2/3}.\ (y+2)$ $\qquad$ $i_3 = (x+1)^{2}.\ (y+2)^{3}$

siendo α y β dos constantes positivas. Comprobar que el cociente de los índices de las utilidades marginales es invariante respecto a la función arbitraria.

(para evaluación)

$$\frac{\partial i_1}{\partial x} = \frac{1}{3}(x+1)(y+2)^{1/2} \qquad \frac{2}{3}(x+1)^{2/3}(y+2)^{-1/2}$$

$$\frac{\partial i_1}{\partial y} = \frac{1}{2}(y+2)(x+1)^{1/3}$$

$$\frac{\partial i_2}{\partial x} = \frac{2}{3}(x+1)^{-1/3}(y+2) \qquad \frac{2}{3}\ \frac{y+2}{x+1}$$

$$\frac{\partial i_2}{\partial y} = (x+1)^{2/3}$$

$$\frac{\partial i_3}{\partial x} = 2(x+1)(y+2)^{3} \qquad \frac{2}{3}\ \frac{y+2}{x+1}$$

$$\frac{\partial i_3}{\partial y} = (x+1)^{2}\, 3(y+2)^{2}$$

17.- Un consumidor, cuyos gustos vienen representados por la función índice de utilidad

$$i = 20\, x^{1/2} \,.\, y^{1/3}$$

dispone inicialmente de las siguientes cantidades: 15 de x, y 4 de y. Con ellas acude al mercado en el que los precios son: p_x= 12 y p_y= 5, precios que son independientes a su actuación.

Determinar de entre todas las combinaciones posibles de bienes, que puede adquirir, aquella que le proporcione la satisfacción máxima.

SOLUCIÓN:

El equilibrio del consumidor implica que el valor de lo entregado sea igual al de lo recibido. Esto se representa por la ecuación de balance:

$$x.\ p_x + y.\ p_y = 15.p_x + 4.p_y$$

Como los precios en ese mercado son 12 y 5, respectivamente, la utilidad máxima con la que acuden al mercado es:

$$15.p_x + 4.p_y = 15.12 + 4.5 = 200$$

Por otro lado, el máximo de la función índice de utilidad, condicionado por la ecuación de balance, exige el cumplimiento de la ley de la igualdad de los índices de las utilidades marginales ponderadas, que tiene la expresión:

$$\frac{1}{p_x}.\frac{\partial i}{\partial x} = \frac{1}{p_y}.\frac{\partial i}{\partial y} = \frac{1}{12}.20.\frac{1}{2}.x^{\frac{-1}{2}}.y^{1/3} = \frac{1}{5}.20.\frac{1}{3}.x^{\frac{1}{2}}.y^{-2/3}$$

Reduciendo la expresión queda 8x=5y, que es el equilibrio entre las cantidades. Si ahora juntamos las expresiones de la ecuación de balance y ésta última, quedará:

12x + 5y = 200 y 8x=5y, lo que da un resultado de x=10 e y= 16, cantidades con las que el consumidor obtendrá la satisfacción máxima.

18.- Un consumidor tiene la siguiente función de utilidad

$$i = 40\,x^{2/3} \cdot (y+4)^{1/2} \cdot (z+1)^{1/3}$$

y obtiene la máxima satisfacción de su renta monetaria para r=73 um. cuando adquiere 20 unidades del bien x, 6 del bien y, y 3 del z.

Hallar los precios que rigen en el mercado.

(para hacer en casa)

balance consumidor

$$20 \cdot p_x + 6p_y + 3p_z = 73$$

ley igualdad utilidad marginal ponderada

$$\frac{1}{p_x} \cdot \frac{\partial i}{\partial x} = \frac{1}{p_y}\frac{\partial i}{\partial y} = \frac{\partial i}{\partial z}\frac{1}{p_z}$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = 40\,\frac{2}{3}\,x^{-1/3}(y+4)^{1/2}(z+1)^{1/3}$$

$$\frac{\partial i}{\partial y} = 40\,x^{2/3}\,\frac{1}{2}(y+4)^{-1/2}(z+1)^{1/3}$$

$$\frac{\partial i}{\partial z} = 40\,x^{2/3}(y+4)^{1/2}\,\frac{1}{3}(z+1)^{-2/3}$$

$$\frac{1}{p_x}\cancel{40}\,\frac{2}{3}x^{-1/3}(y+4)^{1/2}\cancel{(z+1)^{1/3}} = \frac{1}{p_y}\cancel{40}\,\frac{1}{2}(y+4)^{-1/2}\cancel{(z+1)^{1/3}}\,x^{2/3}$$

$$\frac{1}{p_x}\,\frac{2}{3}(y+4) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{p_y}\,x \rightarrow \frac{1}{p_x}\,\frac{2}{3}(10) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{p_y}\,20$$

$$3p_x = 2p_y$$

$$\frac{1}{p_x}\cancel{40}\,\frac{2}{3}x^{-1/3}\cancel{(y+4)^{1/2}}(z+1)^{1/3} = \frac{1}{p_z}\cancel{40}\,x^{2/3}\cancel{(y+4)^{1/2}}\,\frac{1}{3}(z+1)^{-2/3}$$

$$\frac{1}{p_x}\,\frac{2}{3}(z+1) = \frac{1}{p_z}\,\frac{1}{3}\,x \quad \rightarrow \quad 12p_z = 20p_y$$

$p_x = 2$
$p_y = 3$
$p_z = 5$

19.- La función índice de utilidad de unos consumidores viene definida por $i = \sqrt{(x+2).(y+2)}$. La renta de cualquiera de los consumidores es 30 um. y el precio de y es 1 um. Determinar para que intervalos del precio de x la demanda es anormal, normal, rígida y elástica.

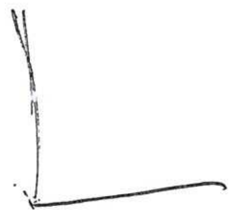
(para evaluación)

$i = ((x+2)(y+2))^{1/2}$ $r=30$ $p_y=1$

$\frac{1}{p_x} \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{(\ )}^{-1/2}(y+2) = \frac{1}{1}\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{(\ )}^{-1/2}(x+2)$

$\frac{y+2}{p_x} = x+2$, $r = 30 = x \cdot p_x + y \cdot 1$

$\rightarrow y = 30 - x p_x$



$\frac{30 - x p_x + 2}{p_x} = x+2$

$30 - x p_x + 2 = p_x x + 2p_x$

$2 x p_x = 32 - 2 p_x$ $p = \frac{16}{x+1}$

$x = \frac{32-2p}{2p} = \frac{16-p}{p}$ $px + p = 16$ $p(x+1)$

$\varepsilon_x = -\frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = -\frac{p}{\frac{16-p}{p}} \cdot \frac{-p - (16-p)}{p^2} = \frac{-\cancel{p^2}}{16-p} \cdot \frac{-16}{\cancel{p^2}} = \frac{16}{16-p}$

$\varepsilon_x = \frac{16}{16 - \frac{16}{x+1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{\frac{x+1-1}{x+1}} = \frac{x+1}{x}$

$\varepsilon_{normal} > 0$ $0 < p < 16$

$\varepsilon_{anormal} < 0$ $p > 16$

elástica > 1

rígida $0 < p < 1$ $0 < p < 16$

$p=0$ $\varepsilon = 1$ $\frac{16}{15}$ $p \geq 1$ $p \leq 15$

$\varepsilon > 0$ elástica

$p > 16$ $\varepsilon < 0$

$-\frac{p}{\frac{16-p}{p}} \cdot \frac{-p-(16-p)}{p^2} = -\frac{\cancel{p^2}}{16-p} \cdot \frac{-\cancel{p} - 16 + \cancel{p}}{\cancel{p^2}} = \frac{16}{16-p}$ no se hace 0 nunca

20.- Calcular el excedente del consumidor para un precio de 36 um, suponiendo que la función de demanda en equilibrio parcial es

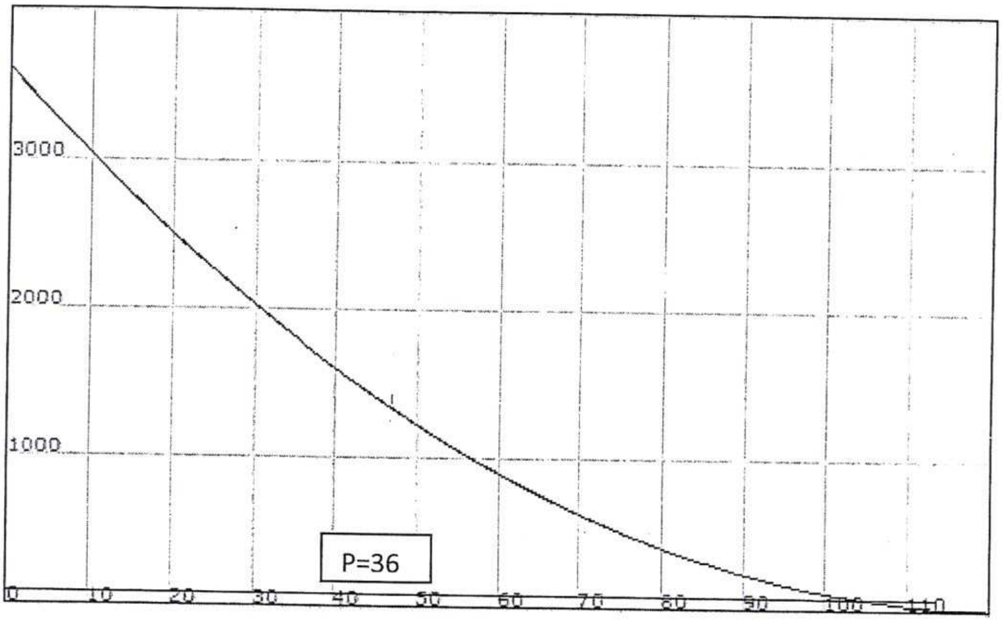
$$p= (60-x/2)^2 \quad \text{para } 0< x < 120)$$

SOLUCIÓN:

La cantidad que se demanda, a ese precio, se puede obtener sustituyendo el precio en la ecuación:

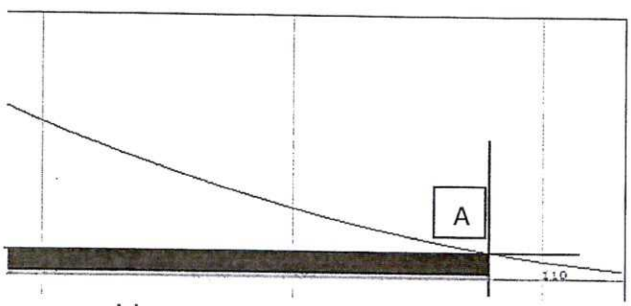
$36= (60-x/2)^2$ obteniéndose una cantidad de 108 unidades.

Es conveniente dibujar la curva para ver mejor la zona del excedente:



Vemos que el precio está muy abajo de la curva de demanda. Tenemos que calcular el punto de corte con x=0, que tiene un valor de 3600 um.

El excedente del consumidor viene dado por la diferencia entre la utilidad y el gasto totales, correspondientes a la cantidad del bien. La utilidad total es la suma de todas las utilidades marginales, o también la integral de la función de demanda. El gasto total es el producto del precio por la cantidad demandada.



Veamos con mas detalle la figura. El rectángulo formado por el precio y la cantidad será el gasto total. Y la integral desde 0 hasta A será la utilidad total. La diferencia entre ambos áreas será el excedente del consumidor.

De forma analítica se calcula así:

$$E(x) = \int_0^{108}\left(60-\frac{x}{2}\right)^2.dx - x.p = \int_0^{108}(3600-60x+\frac{x^2}{4}).dx - 3888 =$$

$$\left|3600x - \frac{60x^2}{2} + \frac{x^3}{12}\right| entre\ 108\ y\ 0 - 3888 = 143856 - 3888 = 139968$$

Luego mediante la adquisición de 108 unidades de bien el consumidor ha experimentado un aumento de satisfacción equivalente a la que producen 139968 um.

21.- Determinar el aumento de satisfacción experimentada por un consumidor, cuando la cantidad demandada varía de 20 a 25 unidades si su función de demanda es:

$$2^{p^{\frac{1}{2}}} = 32^{\frac{20}{x}}$$

$$\begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{array} \qquad 2^5$$

(para hacer en casa)

$$p^{1/2}\cancel{\ln 2} = \frac{20}{x}\ln 32 = \frac{20}{x}5\cancel{\ln 2}$$

$$p^{1/2} = \frac{100}{x}$$

$x=20 \qquad p^{1/2}=5 \qquad p=25$

$x=25 \qquad p^{1/2}=4 \qquad p=16$

$$\int_{16}^{25} x\,dp = \int_{16}^{25} 100\,p^{-1/2} = 100 \cdot 2\,p^{1/2}\Big|_{16}^{25} = 200(5-4) = 200$$

NO