Problemas – Leyes de conservación en forma diferencial

1.- Considere el siguiente campo de velocidades:

$$\vec{V} = \frac{-Ky}{x^2+y^2}\hat{\imath} + \frac{Kx}{x^2+y^2}\hat{\jmath}$$

con $K=10^5\ m^2/s$, para distancias al origen de coordenadas superiores a 1 km.

a) Encuentre la ecuación para las líneas de corriente en cualquier instante.
b) Calcule la aceleración experimentada por una partícula fluida en función de su posición.
c) Si el fluido es newtoniano, con $\mu=2\cdot10^{-5}$ kg/ms, y posee densidad constante, $\rho=1\ kg/m^3$, compruebe que se verifica la ecuación de continuidad, y obtenga las componentes del tensor de esfuerzos, así como la fuerza viscosa por unidad de masa.

2.- Sea el campo de velocidades dado por

$$\vec{V} = \omega A \cos\omega t\,\hat{\imath} + \omega A\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\hat{\jmath}$$

a) Obtenga las ecuaciones de la trayectoria, de la línea de corriente y de la línea de traza que pasan por el origen de coordenadas en el instante $t=t_1$.
b) Calcule la aceleración de una partícula fluida en función de la posición y el tiempo.

3.- Para el campo de velocidades dado por:

$$\vec{V} = \frac{A}{x}\hat{\imath} + \frac{B}{y}\hat{\jmath} + \frac{C}{z}\hat{\boldsymbol{k}}$$

Donde A, B, y C son constantes, determine un campo de densidad que verifique la ecuación de continuidad.

4.- Un modelo simple del flujo en una tobera bidimensional puede escribirse como:

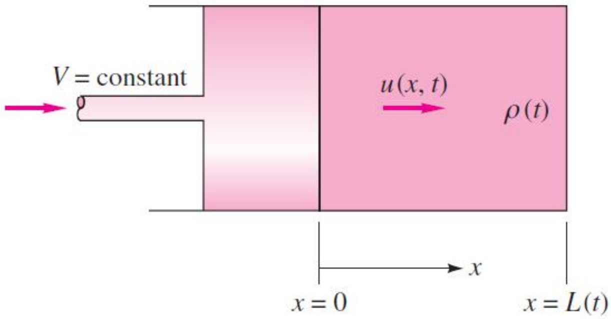
$$\vec{V} = U_0\left(1+\frac{x}{L}\right)\hat{\imath} - U_0\frac{y}{L}\hat{\jmath}$$

a) Represente de modo aproximado las líneas de corriente en la región $0<x<L$, $-L<y<L$.
b) Obtenga la aceleración del fluido y determine su máximo valor.
c) Compruebe que el flujo es no divergente y que por ello existe una función $\psi(x,y)$ tal que:

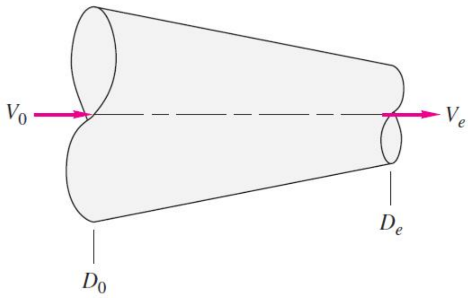
$$\vec{V} = \vec{\nabla}\psi\times\hat{k}$$

Calcule ψ y examine su relación con las líneas de corriente.

5.- Un pistón que se mueve a velocidad constante V comprime el gas en un émbolo cilíndrico. Si la densidad del gas, ρ, solamente depende del tiempo y la velocidad dentro del émbolo varía linealmente desde el valor V en la pared móvil hasta cero en la pared fija opuesta, determine ρ(t) si en el instante t=0 su valor era ρ_0, para una longitud inicial entre el pistón y la pared fija del émbolo L_0.



6.- Por la tobera cónica de la figura circula un flujo de aire aproximadamente unidimensional. Si la velocidad del sonido es 340 m/s, obtenga el valor mínimo del cociente entre los diámetros D_e/D_0 que permite despreciar los efectos de compresibilidad si a) V_0=10 m/s, y b) V_0=30 m/s.



7.- En el siguiente campo de velocidades:

$$\vec{V} = 4xy^2\hat{\imath} + f(y)\hat{\jmath} - zy^2\hat{\boldsymbol{k}}$$

a) Halle la función *f(y)* si el flujo es incompresible.
b) Calcule la vorticidad en función de la posición y obtenga la ecuación de las líneas de vórtice en el plano y=2.

8.- Considere el flujo plano dado por la siguiente expresión en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{V} = \frac{D}{r}\hat{r} + \frac{C}{r}\hat{\varphi}$$

a) Compruebe que el flujo es irrotacional y no divergente en todo punto a excepción del origen de coordenadas
b) Obtenga la función de corriente ψ (tal que $\vec{V} = \vec{\nabla}\psi\times\hat{k}$) y la función potencial ϕ (tal que $\vec{V} = \vec{\nabla}\phi$) y represente las líneas de corriente.
c) ¿Cuál es el significado de las constantes D y C?

9.- Considere la superposición de los siguientes campos de velocidades:

$$\vec{V}_1 = U_0\hat{\imath} \quad y \quad \vec{V}_2 = \frac{D}{r}\hat{r}$$

a) Encuentre los puntos de estancamiento y la ecuación de la línea de corriente que pasa por cada uno de ellos.
b) Si el fluido es ideal y el movimiento tiene lugar en el plano horizontal, obtenga la presión a lo largo de las líneas de corriente anteriores.

10.- Un fluido newtoniano exhibe un movimiento bidimensional dado por:

$$\vec{V} = -2xy\hat{\imath} + (y^2 - x^2)\hat{\jmath}$$

a) Determine si el flujo es compresible o incompresible, rotacional o irrotacional.
b) Determine el campo de presiones *p(x,y)*, si la presión vale P_0 en el origen de coordenadas.

11.- Se tiene el flujo descrito por el siguiente campo de velocidades:

$$\vec{V} = Kx\hat{\imath} + Ky\hat{\jmath} - 2Kz\hat{k}$$

a) Calcule la divergencia y la vorticidad del flujo.
b) Determine el campo de presiones *p(x,y)*, si la presión vale P_0 en el origen de coordenadas y el fluido está sometido a la aceleración de la gravedad, que actúa en el sentido negativo del eje Z.

12.- En una determinada región y en un instante dado, la velocidad horizontal en el seno de un cierto fluido está dada por:

$$\vec{V} = -0.01(x+y)\hat{\imath} + 0.01(x-y)\hat{\jmath} \quad (\text{m/s, con } x \text{ e } y \text{ en m})$$

a) Asumiendo que la velocidad vertical es nula, obtenga la divergencia y la vorticidad del fluido en cada punto.
b) Asumiendo de nuevo una velocidad vertical nula, y que la divergencia anterior permanece constante, determine cómo varía la densidad en función del tiempo si en el momento dado toma un valor uniforme ρ_0.
c) Suponga ahora que el fluido es incompresible: determine la velocidad vertical en el instante dado, si en z=0 tiene un valor nulo.
d) Si además de incompresible, el fluido es ideal, y si la distribución de velocidades verticales del apartado anterior se mantiene, determine cómo cambia la vorticidad con el tiempo a partir del instante dado.