

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL
RESUMEN

1.- INTRODUCCIÓN.

1.1 Definición de Primitiva

F es función primitiva de f $\Leftrightarrow$ Para todo elemento del Dom(f) $\Rightarrow F'(x)=f(x)$

1.2 Representación de Primitivas

Si F es función primitiva de f en un intervalo I



G es función primitiva de f en un intervalo I $\Leftrightarrow G(x)=F(x) + C$ para C= constante y para todo x de I

1.3 Notación Integral para las primitivas

Integral indefinida de f(x) respecto de x $\Rightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$ para C=cte.



F es función primitiva de f

1.4 Reglas básicas de integración

<u>Derivación</u>	<u>Integración</u>
$\frac{d(C)}{dx} = 0$	$\int 0 dx = C$
$\frac{d(kx)}{dx} = k \quad k \neq 0$	$\int k dx = kx + C \quad k \neq 0$
$\frac{d kf(x)}{dx} = k f'(x)$	$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$
$\frac{d(f(x) \mp g(x))}{dx} = f'(x) \mp g'(x)$	$\int (f(x) \mp g(x)) dx = \int f(x) dx \mp \int g(x) dx$
$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$

2.- INTEGRAL DEFINIDA.

2.1 Partición de un intervalo. Norma de una partición.

- Una partición Δ del intervalo cerrado $[a,b]$ es un conjunto finito de puntos $\Delta = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ tal que $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b=x_n$
- La diferencia máxima entre dos puntos consecutivos de la partición se llama norma de la partición y se denota por $\|\Delta\|$, es decir:

$$\|\Delta\| = \max\{x_j - x_{j-1}\} \text{ para } j=1\dots n$$

- Si todos los intervalos de la partición son iguales, decimos que la partición es regular y, entonces:

$$\|\Delta\| = \frac{b-a}{n}$$

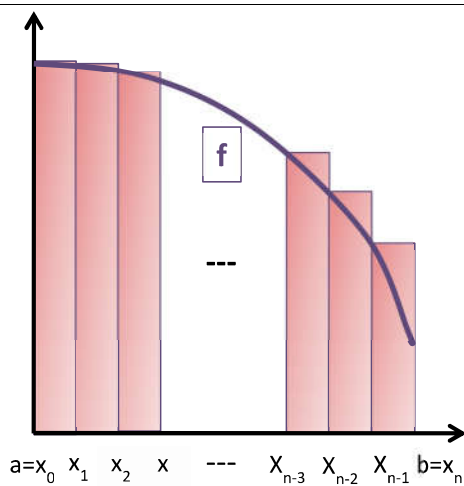
En general, para cualquier partición, la norma está relacionada con el número de subintervalos de $[a,b]$ como sigue:

$$\frac{b-a}{\|\Delta\|} \leq n$$

Luego, cuando $\|\Delta\| \rightarrow 0$ se verifica que $n \rightarrow \infty$

2.2 Sumas inferiores y superiores

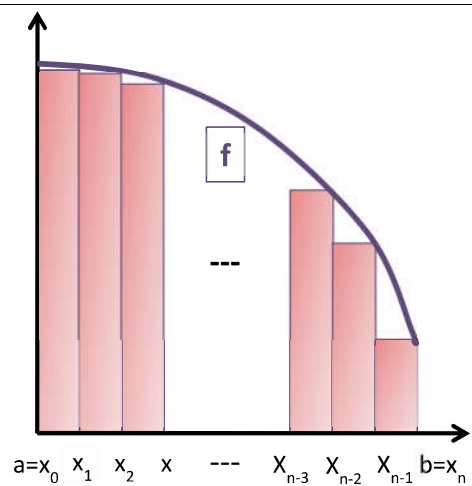
Sea f una función definida en $[a,b]$ acotada y $\Delta = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$



Suma superior de f respecto de Δ :

$$S(f, \Delta) = \sum_{j=1}^n s_j (x_j - x_{j-1}) \text{ para } s_j = \text{supremo de } [x_j, x_{j-1}]$$

La suma superior disminuye a medida que se refina la partición Δ .



Suma inferior de f respecto de Δ :

$$I(f, \Delta) = \sum_{j=1}^n i_j (x_j - x_{j-1}) \text{ para } i_j = \text{ínfimo de } [x_{j-1}, x_j]$$

La suma inferior aumenta a medida que se refina la partición Δ .

SUMA DE RIEMANN: $\sum_{j=1}^n f(c_j)(x_j - x_{j-1})$ para $x_{j-1} \leq c_j \leq x_j$

2.3 Integral de RIEMANN. Definición de Integral Definida.

- Integral Superior = $\inf \{S(f, \Delta) \text{ para } \Delta = \text{partición de } [a, b]\}$
- Integral Inferior = $\sup \{I(f, \Delta) \text{ para } \Delta = \text{partición de } [a, b]\}$
- Si Integral Superior = Integral Inferior se dice que la función f es RIEMANN integrable y la integral de RIEMANN de f sobre $[a, b]$ se denota por:

$$\int_a^b f(x)dx$$

siendo: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n f(c_j)\Delta_{x_j}$ **la INTEGRAL DEFINIDA de f entre a y b .**

2.4 La continuidad implica integrabilidad.

Si f es continua en $[a, b]$ $\Rightarrow$ f es integrable en $[a, b]$

2.5 Integral definida como área de una región.

f continua en $[a, b]$
^

f no negativa en $[a, b]$

$\Rightarrow$ El área de la región comprendida entre f , X , $x=a$ y $x=b$ viene dada por:

$$\text{área} = \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

2.6 Propiedades de las integrales definidas.

f definida en x=a: $\int_a^a f(x)dx = 0$	f integrable en $[a, b]$: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$	f integrable en $[a, b]$, $[a, c]$ y $[c, b]$: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
f y g integrables en $[a, b]$ y k=cte: ▪ $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ ▪ $\int_a^b (f(x) \mp g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \mp \int_a^b g(x)dx$		▪ f integrable: $\left \int_a^b f(x)dx \right \leq \int_a^b f(x) dx$ ▪ Si f y g es integrables Riemann en $[a, b]$ / $0 \leq g(x) \leq f(x)$ en $[a, b]$: $\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$

2.7 Teorema Fundamental del Cálculo.

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrable.

Definimos $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ / $F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \forall x \in [a, b]$

Entonces: 1º.- F es continua en $[a, b]$

^

2º.- Si f es continua en "c" para $c \in (a, b) \Rightarrow F$ es derivable en "c" y $F'(c) = f(c)$

(en particular, si f es continua en $[a, b] \Rightarrow F$ es derivable en $[a, b]$ y $F'(c) = f(c) \quad \forall x \in [a, b]$)

2.8 Evaluación de la integral: Regla de Barrow.

Relaciona el cálculo integral con el cálculo diferencial.

1º.- Si f es una función integrable Riemann definida en $[a, b]$

^

2º.- F es primitiva de f en $[a, b]$ ($F'(x)=f(x) \quad \forall x \in [a, b]$)

Entonces: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

2.9 Integral de Riemann para funciones no positivas.

Sea f una función real “no positiva” definida en el intervalo $[a, b]$. Descomponemos f en dos funciones $f^+(x)$ y $f^-(x)$ definidas como sigue:

$$f^+(x) = \max \{ f(x), 0 \} \quad \text{y} \quad f^-(x) = \max \{ -f(x), 0 \}$$

Ambas funciones son positivas y f se puede definir en base a ellas del siguiente modo:

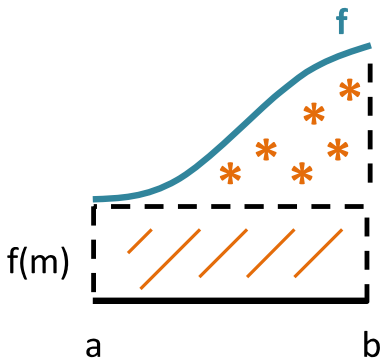
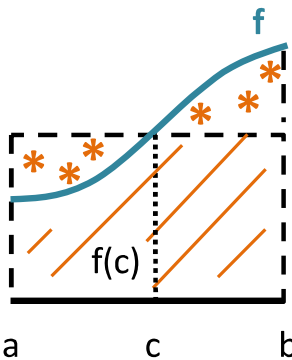
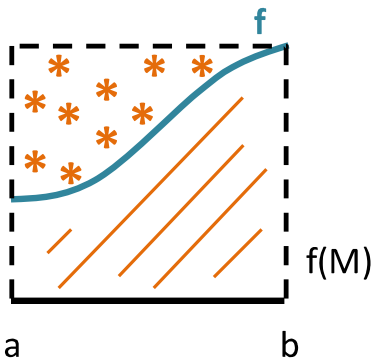
$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

Así que el problema se reduce a calcular la integral de dos funciones positivas. Tenemos, por tanto, que:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$$

2.10 Teorema del Valor Medio para Integrales.

$$f \text{ continua en } [a, b] \Rightarrow \exists c \in [a, b] / \int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$$

		
< Rectángulo inscrito > Área menor que la de la región.	< Rectángulo del valor medio > Área igual que la de la región.	< Rectángulo circunscrito > Área mayor que la de la región.
$\int_a^b f(m)dx = f(m)(b - a)$	$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$	$\int_a^b f(M)dx = f(M)(b - a)$

“no especifica cómo determinar c, sólo garantiza su existencia”

2.11 Definición del Valor Medio de una Función.

Si f es integrable en $[a,b]$: Valor medio de f en $[a,b]$ $= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$

2.12 Primitiva de una función compuesta.

Sean f , g y $g \circ f$ continuas en un intervalo I .

Si F es una primitiva de f en I : $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$