Volatilidad

Alfonso Novales
Departamento de Economía Cuantitativa
Universidad Complutense

Octubre 2013
Versión preliminar
No citar sin permiso del autor

Contents

1 Midiendo la volatilidad **2**
1.1 La medición del riesgo inherente a un activo 2
1.2 Midiendo el riesgo mediante varianzas y correlaciones 4
1.3 Estadísticos descriptivos en la estimación de la volatilidad 7
1.4 La varianza como indicador de volatilidad: Limitaciones 10
1.5 El coeficiente de correlación lineal como medida de asociación entre variables 13
1.6 Matrices de covarianzas 14

2 Utilización de información intradía en la medición de la volatilidad de un activo financiero **15**
2.1 Estacionalidad intra-día en volatilidad 16
2.2 Medidas de Parkinson y Garman-Klass 17
2.3 Volatilidad implícita versus volatilidad histórica 20

3 Algunas cuestiones estadísticas previas **22**
3.1 Tendencias deterministas 22
3.2 Rentabilidad continua equivalente. Agregación temporal de volatilidades 23
3.3 El supuesto de rendimientos lognormales 27
3.4 Contrastes de Normalidad 28
3.5 Intervalo de confianza para la varianza 28
3.6 Desviación típica de los estimadores de varianza y desviación típica 29
3.7 Rentabilidad en mercados cotizados en tipos de interés 31
3.8 Rango esperado de precios bajo el supuesto de Normalidad . . . 31

4 El uso de ventanas móviles en el cálculo de la varianza 34
4.1 Volatilidad ponderando más el pasado reciente 36
4.2 Bandas de confianza para rentabilidades 37

5 Modelización y predicción de la volatilidad 38
5.1 Conos de volatilidad 40
5.2 El modelo de alisado exponencial (EWMA) 42
5.3 El modelo GARCH(1,1) 45
5.4 Predicción de volatilidad 47
5.4.1 Estimación del modelo de volatilidad por máxima verosimilitud 48
5.5 Validación del modelo de volatilidad 51
5.6 Estructura temporal de volatilidad 52
5.7 Otros modelos GARCH 52

6 Modelos de correlación condicional 54
6.1 Estimación de covarianzas condicionales 54
6.2 Modelo de correlación condicional constante 57
6.3 Modelo de suavizado exponencial (*Exponential smoother*) 57
6.4 Correlaciones dinámicas GARCH (Integrated *DCC GARCH*) . . 58
6.5 Estimación por cuasi-máxima verosimilitud 59

1 Midiendo la volatilidad

1.1 La medición del riesgo inherente a un activo

La medición del riesgo incorporado en un determinado activo es, sin duda, uno de los problemas más importantes de la economía financiera. El nivel de riesgo es una de las características de un activo que, junto con su rentabilidad esperada, su liquidez, etc..determinan las decisiones óptimas de inversión de los agentes. Es habitual identificar la medición del riesgo con la varianza que ofrece la serie temporal de rentabilidad del activo. En el caso de un mercado financiero, el riesgo suele medirse mediante la varianza de las variaciones en el índice correspondiente (rentabilidades) observadas con una determinada frecuencia (hora, día, semana, mes). A veces, utilizamos la varianza con datos de alta frecuencia, como son los datos intradía (dentro del día de negociación); por ejemplo, utilizando las ctoizaciones cada hora, cada 5 minutos, o incluso los precios de todas las operaciones cruzadas.

Sin embargo, pocas veces reflexionamos suficientemente acerca de lo que estamos midiendo. Conviene pensar acerca de qué queremos medir, y si la varianza es una medida adecuada de riesgo.

Además del riesgo-precio o riesgo de reinversión, tenemos el riesgo de mercado, debido a la evolución del mercado en que cotiza nuestro activo durante el plazo de la inversión, el riesgo de liquidez, debido a las potenciales dificultades de deshacernos del activo si así lo deseamos, el riesgo de crédito o de contrapartida, etc.; a nivel institucional tenemos también el riesgo operacional o riesgo operativo, que se deriva de sucesos exogenos: un fallo informático, un incendio, un fraude financiero, etc.. En mercados de renta variable, el *riesgo-beta* que definimos más abajo, es útil para muchos fines. En otras ocasiones, todo lo que queremos es un umbral máximo de pérdidas en la forma de un Valor en Riesgo, es decir, un determinado percentil de la distribución de probabilidad de la rentabilidad esperada de una cartera en un horizonte estipulado previamente. Por tanto, es importante saber qué tipo de riesgo queremos medir en cada caso. Frecuentemente incurriremos en riesgo de modelo, al tener que escoger entre distintas opciones, una representación paramétrica para la evolución temporal de la rentabilidad de un activo o del vector de rentabilidades de varios activos.

El riesgo de precio en renta fija, se debe al desconocimiento de los tipos de interés futuros a que podremos invertir los cupones recibidos sobre un bono. Hablamos entonces de riesgo precio, o riesgo de reinversión. A igualdad de condiciones, un bono cupón cero tiene un menor componente de riesgo, debido a la ausencia de reinversiones, si bien está sujeto en cualquier caso a riesgo-precio, por cuanto que desconocemos las posibles fluctuaciones que pueda experimentar su precio. En general, el riesgo de precio o de reinversión se produce cuando compramos un activo cuyo vencimiento no coincide con el horizonte de nuestra inversión (tanto si es inferior somo si es un plazo más largo). El riesgo de precio en renta variable puede deberse a la incertidumbre acerca del valor de la empresa percepción debido a acciones recientes, las inversiones que ha asumido, la gestión de sus directivos, etc.. En el caso de una divisa, puede deberse a que un fuerte deterioro de su balanza por cuenta corriente, o de sus cuentas públicas, su situación política, etc., pueden sugerir una posible devaluación, lo que reduciría significativamente la rentabilidad de un inversor extranjero. Una liquidez reducida es otro componente del riesgo específico de un activo, si bien en ocasiones es todo un mercado el que está sujeto a una reducida liquidez. Por ej., la mayor parte de una emisión de deuda privada puede estar en manos de un gran fondo, que no la saca al mercado, por lo que los inversores privados que poseen el resto de la emisión se enfrentan a un riesgo de liquidez.

Por supuesto que un activo de renta variable está sujeto a estas consideraciones, además de las propias de su emisor, por lo que tiene riesgo de mercado o riesgo-precio, riesgo de emisor, etc..

La primera cuestión es que existen distintos tipos de riesgo, que requieren medidas diferentes: *riesgo sistemático o no diversificable* dentro del mercado, *riesgo especifico del activo o riesgo diversificable en el mercado.* Cuando analizamos un mercado concreto, el *Riesgo total* de un activo que cotiza en dicho mercado puede descomponerse en un componente de *Riesgo sistemático o de mercado*, y un componente de *Riesgo específico.* Por ej., las acciones del mercado continuo de Madrid, tienen un componente de riesgo explicado por el propio mercado, representado por el índice. Tienen también un segundo componente de riesgo que no puede explicarse por el riesgo del mercado. Algo similar ocurre con cada una de las referencias que cotiza en el mercado secundario de deuda pública español. También en este caso podríamos hablar de un componente de riesgo global o "de mercado", así como de un componente de riesgo específico de cada índice.

Distinguir entre estos tipos de riesgo y disponer de procedimientos para la estimación de cada uno de ellos es un aspecto importante de la gestión de carteras.El componente de riesgo de mercado es un *riesgo sistemático*, que no puede eliminarse mediante la inversión en activos distintos del mismo mercado. Por eso decimos que dicho riesgo no es diversificable. Este componente no diversificable del riesgo del activo está determinado por la covariación de su rentabilidad con la rentabilidad del índice del mercado al que pertenece.Viene generalmente caracterizado por la beta del activo, que suele estimarse mediante procedimientos de regresión entre las rentabilidades del activo y del mercado, ambas descontadas de la rentabilidad ofrecida por el activo libre de riesgo. En el caso de la renta variable, este es el modelo CAPM y hablamos del riesgo beta, cuya cuantía viene medida por: a) la beta del activo y, b) la volatilidad del mercado. Por el contrario, el componente de *riesgo específico* mide un riesgo no vinculado al mercado al que pertenece el activo. Este es un riesgo que puede eliminarse por diversificación, si existe una variedad de activos suficientemente rica en el mercado. Este componente del riesgo puede deberse, en unos casos, a las características del emisor, y en otras, a las características técnicas del activo.

1.2 Midiendo el riesgo mediante varianzas y correlaciones

Disponer de medidas numéricas del nivel de riesgo asociado a la inversión en un determinado activo financiero durante un determinado período de tiempo es una herramienta clave en muchos aspectos de la gestión de carteras. Algunos ejemplos notables son,

Gestión de carteras mediante el análisis rentabilidad/riesgo: Markowitz.

Este enfoque, supone que los inversores tienen preferencias dependientes de dos argumentos: riesgo y rentabilidad esperada. La teoría de carteras muestra que, cuando un inversor se enfrenta a la posibilidad de invertir en dos activos alternativos, no se trata de seleccionar aquel que ofrezca mejores posibilidades. Por el contrario, es importante la complementariedad que pueda existir entre ellos.

Dada la estructura de preferencias mencionada, podria pensarse que si un activo ofrece mayor rentabilidad (esperada) que otro, y menor varianza, debería ser un activo preferido, con lo que un inversor compraría solo este activo, y nada del otro. Sin embargo, la teoría de carteras óptimas nos enseña que ésta puede no ser la estrategia óptima, dependiendo del signo y magnitud de la correlación que exista entre ambos activos, supuesto que en el momento de llevar a cabo la inversión estemos en un contexto de incertidumbre acerca de sus rentabilidades.

Pero ¿qué combinación de los dos activos sería óptima? Un inversor puede estar dispuestos a asumir un mayor nivel de riesgo, si recibe también una mayor rentabilidad, aunque no cualquier combinación es preferible: el inversor tendrá un mapa de curvas de utilidad constante en el plano (riesgo, rentabilidad esperada). Cada una de estas curvas, convexa hacia el origen y posiblemente crecientes, es el lugar geométrico de los pares de valores (riesgo, rentabilidad esperada) que ofrecen un mismo nivel de utilidad. Curvas más elevadas en dicho plano corresponden a niveles de utilidad superiores, y curvas por debajo de una dada corresponden a niveles de utilidad inferiores.

Por otra parte, la frontera eficiente es el lugar geométrico de pares de valores (riesgo, rentabilidad esperada) con la siguiente propiedad: Consideremos todas las carteras con un determinado nivel de riesgo/varianza; todas ellas ofrecen una rentabilidad (esperada) inferior a la dada por la frontera eficiente para ese nivel de riesgo/varianza. La frontera eficiente tiene la forma de media elipse creciente, desde un vértice, que corresponde a la cartera de mínima varianza. La cartera óptima para un inversor está determinada gráficamente en el punto de tangencia entre las curvas de indiferencia de utilidad, y la frontera eficiente. Otro inversor tendrá unas preferencias diferentes, y la tangencia se producirá en un punto distinto de la frontera eficiente, por lo que la cartera óptima para este inversor será distinta de la del primero. Esta es la base del análisis de carteras propuesto por Markowitz. Para el cálculo de la frontera eficiente, es imprescindible contar con una estimación de la matriz de varianzas y covarianzas, o de las varianzas y correlaciones entre los activos disponibles al inversor. Cuando un inversor puede distribuir su riqueza entre varios mercados, puede simlpificarse el problema (perdiendo algo de precisión), resolviendo le problema de aset allocation primero entre los distintos mercados, conotruyendo la cartera óptima entre el conjunto de índices de estos mercados, para luego, en una segunda etapa, construir para cada mercado la cartera óptima en la que invertir la cuantía previamente seleccionada para dicho mercado.

Pero antes de poder escoger una inversión (activo o cartera), hemos de hacer frente a dos dificultades: 1) por un lado, lo que interesa al inversor es la rentabilidad *esperada*, para cada activo, a lo largo del período en que se va a llevar a cabo la inversión, 2) por otro, *el riesgo no es observable*, por lo que hemos de utilizar alguna medida del mismo, para lo que generalmente se identifica riesgo con volatilidad, y ésta con varianza. Es muy importante observar que, desde el punto de vista de la teoría financiera, ambas deberían ser medidas hacia el futuro y, sin embargo, suelen ser inadecuadamente sustituidas por medidas históricas.

Valoración de opciones:

El precio de una opción depende de: *a*) el precio de ejercicio de la opción, *b*) el tiempo que resta hasta su vencimiento, *c*) el tipo de interés del activo sin riesgo, *d*) los dividendos ofrecidos por el activo subyacente, si los hay, *e*) el precio del activo subyacente, *f*) su *volatilidad, que no es observable*.

Para evaluar si el *precio de mercado* de una opción es correcto ha de disponerse de una estimación de la volatilidad del activo subyacente. Para ello, se necesita la volatilidad estimada del precio del subyacente durante el período residual hasta el vencimiento de la opción. Por tanto, necesitamos una *predicción* de la volatilidad. Con dicha medida, podríamos utilizar alguno de los modelos disponibles que, condicionado en la validez de las hipótesis en él incorporadas, nos proporcionaría el *precio teórico* de la opción. La comparación con su precio de mercado nos permitiría evaluar el interés que pueda tener tomar posiciones cortas o largas en la misma.

Cobertura de riesgos en inversiones a largo plazo:

El diseño de estrategias de cobertura de carteras depende crucialmente de la estimación del riesgo de los activos que configuran la cartera. Además, en este caso, tan importante como las medidas de volatilidad de los mercados del activo subyacente y del activo que se utiliza en la cobertura, es la medida de *covariación* entre ambos. De hecho, es ya habitual hablar de un *riesgo de correlación* entre activos.

La utilización de medidas de volatilidad y de covariación alternativas puede conducir a estrategias de cobertura bastante diferentes, lo que implicará *a*) costes bastante distintos para las mismas y *b*) resultados asimismo diferentes, que pueden depender del tipo de evolución temporal seguido por la cotización del activo subyacente.

Varianza y covarianzas/correlaciones

En una población estadística, la varianza es el promedio ponderado de la desviación cuadrática entre un punto extraído al azar del soporte de la distribución y la esperanza matemática. La ponderación que recibe cada punto del soporte de la distribución es igual a la masa de probabilidad en cada punto. En una muestra, la varianza es el promedio equiponderado de las desviaciones cuadráticas de los datos muestrales respecto a la media muestral. Las ponderaciones son las frecuencias relativas de observación de los datos. Alternativamente, puede pensarse que no prestamos atención a los datos que puedan aparecer repetidos, y que cada uno de ellos recibe en el cálculo de la varianza una ponderación igual al inverso del tamaño muestral $1/N$, el mismo que recibiría en el cálculo de la media muestral.

La *desviación típica*, definida como raíz cuadrada de la varianza, puede interpretarse aproximadamente como el tamaño medio de las desviaciones de una variable alrededor de un valor de referencia, ya sea su esperanza matemática (en el caso de la población), o su media muestral (en el caso de la muestra). *En el caso de una variable aleatoria para la que se disponen de observaciones a través del tiempo, la desviación típica puede interpretarse como el tamaño medio de sus fluctuaciones* alrededor de nu nivel de referencia, definido por la media muestral. Por consiguiente, cuando se trabaja con variables aleatorias de esperanza (o media muestral) igual a cero, la desviación típica es un buen indicador del *tamaño* de dicha variable.

Las matrices de covarianzas entre activos son necesarias en la mayoria de las aplicaciones financieras, como:

- estimación y predicción de la volatilidad de una cartera,
- estimación del Value at Risk (VAR) en carteras con flujos de caja lineales,
- determinación de la asignación de recursos entre un conjunto de activos para configurar una cartera óptima,
- simular rentabilidades de un conjunto de activos con determinada estructura de correlaciones,
- estimación del VaR de carteras con pagos no lineales,
- estimación de precios en carteras de opciones sobre multiples activos,
- cobertura del riesgo de una cartera.

1.3 Estadísticos descriptivos en la estimación de la volatilidad

El archivo INIDICEWS_WORK presenta datos históricos de un conjunto de indices de renta variable. Supongamos que queremos comparar la volatilidad de cada uno de los mercados correspondientes. Vamos a describir en esta sección el tipo de análisis estadistico que podria realizarse para comparar en terminos de volatilidad estos mercados, haciendo un estudio no solo para la muestra completa, sino tambien por submuestras. El lector debe estar atento al hecho de que tal análisis, que en ocasiones se efectúa, está sujeto a un problema fundamental, cual es el carácter no estacionario de los indices de bolsa. Ello hace que sus momentos muestrales no estén bien definidos, negando validez al análisis que se presenta, que debería realizarse en términos de las rentabilidades diarias, por ejemplo, de los mercados. Dejamos esto como ejercicio práctico para el lector, que puede realizarlo utilizando este mismo archivo Excel.

La pestaña *Datos* presenta las observaciones muestrales para los índices de Bolsa, así como para sus rentabilidades logarítmicas (a la derecha). Abajo, tenemos la asimetria y exceso de curtosis de cada índice, así como el cálculo del estadístico Bera_Jarque para contrastar la Normalidad de la distribución de probabilidad seguida por cada índice. Por último, se calcula la desviación típica de cada indice sobre submuestras de amplitud creciente. De hecho, se presenta la volatilidad anualizada. Como se aprecia, la estimación de la desviación típica aumenta con la amplitud de la muestra. Esto no debe suceder. No estamos estimando nada que sea proporciona a la amplitud del intervalo sobre el que se calcula. Si estimamos la desviación típica con 1 o con 2 años tendremos distintos resultados numéricos, pero comparables. En este ejercicio, la desviación tipica es creciente porque en procesos no estacionarios, como estos, la varianza es creciente con la longitud de de la muestra utilizada, tendiendo a infinito con ésta. De hecho, este es un procedimiento para contrastar la ausencia de estacionariedad de una serie temporal.

Como se aprecia, esto no sucede al trabajar con rentabilidades (a la derecha). Mas a la derecha se estima la volatilidad anual como el promedio de las rentabilidades al cuadrado. Como se ve, las diferencias respecto del cálculo con desviaciones típicas, son minimas.

Pasamos ahora a la pestaña *Agosto* 99, que contiene datos para dicho mes. Podemos comparar media muestral y mediana para cada índice; vemos [Cuadro 1] que son muy próximas, siendo ligeramente mayor la mediana, como ocurriría en distribuciones asimétricas hacia la izquierda, significando que los valores menores (las cotizaciones bajas) se alejan de la media más que los valores altos. Esto es lo que ocurre en Nikkei, DAX, MCI-Swiss, CAC40 y FTSE100. Este hecho es relevante respecto al cálculo de probabilidades en las colas, para el que habría que tener en cuenta la asimetría de estas distribuciones. Sin embargo, hay que tener presente que estamos tratando aún con cotizaciones, no con rentabilidades. Vemos asimismo que todos los índices tiene un exceso de curtosis negativo, es decir, menos curtosis que una distribución Normal.

Al trabajar con indices, las cotizaciones máxima o mínima, por sí solas, no son nada informativas respecto de establecer comparaciones entre índices. Ni siquiera el rango muestral lo es, a pesar de que ya establece un intervalo de valores cubierto por la variable. Parece evidente que el posible interés de estos estadísticos descansa en expresarlos como porcentaje de una medida de posición central. En esta comparación, ya aparecen CAC, Merval y Bovespa como los índices de mayor aparente variabilidad, seguidos de cerca por DAX.

Hay que observar, sin embargo, que un rango amplio no implica volatilidad si los valores separados de la media no aparecen apenas en la muestra; por tanto, una limitación del rango es que sólo utiliza como información los valores máximo y mínimo. No estamos considerando todavía la frecuencia con que aparece en la muestra cada valor numérico del rango de variación de cada índice.

Una medida similar es la relación entre rango centrado del 80% y media: de acuerdo con ella, CAC y Merval continúan reflejando una mayor variabilidad en Agosto 1999. Milán, DAX y Bovespa también reflejan una apreciable, aunque menor, variabilidad [Ver Cuadro 2]. Ahora hemos descartado los valores muy separados de la media, tanto por encima como por debajo, y estamos analizando la amplitud del rango en el que recaen el 80% de los valores muestrales. Bovespa tomó valores muy alejados de la cotización media, pero, sin embargo, como indica su rango intercuartílico que luego analizaremos, el 50% de sus valores quedaba bastante agrupado en torno a la media.

Establecemos así una diferencia entre *valores normales* y *valores extremos*. Si los valores extremos del rango de variación aparecen con relativa frecuencia, entonces un rango como el del 80% tenderá a ser más amplio que si los valores separados de la media aparecen infrecuentemente. Por tanto, si un índice que tiene un rango total amplio pasa a tener un rango del 80% relativamente más estrecho (como es el caso de Bovespa) ello se debe a que los valores extremos ocurren con poca frecuencia. Si la amplitud del rango del 80% es relativamente mayor que la del rango total, en relación con otros índices, se deberá a que si bien los valores separados de la media *no son demasiado extremos*, ocurren con una relativa frecuencia. Este es el caso del índice de Milán.

Nuevamente, la desviación típica ni la varianza por sí solas nos proporcionan información relevante. Si examinamos las desviaciones tipicas muestrales, ya apreciamos que no pueden utilizarse para obtener una estimacion de la volatilidad anual, pues habriamos de multiplicar por el numero de dias de mercado en un año, unos 250, obteniendo valores de volatilidad disparatados. Más útil podría ser el coeficiente de variación, que incide en presentar Merval y CAC como los índices más volátiles, a la vez que al Chile general como el menos volátil en ese mes. Estos estadísticos ya utilizan toda la información disponible, pues se usan en su cálculo las frecuencia con que aparece cada uno de los valores numéricos de rentabilidad en la muestra. *Pero la volatilidad es un concepto relativo*: Supongamos que la varianza del IGBM a lo largo de un cierto período ha sido de 1.261, mientras que la varianza del índice NIKKEI, en el mismo período, ha sido de 4.225. ¿Puede decirse que el NIKKEI ha sido más volátil? No, porque no tiene sentido comparar las varianzas por sí solas. Supongamos que el IGBM ha tenido una cotización media en dicho período de 7.255, mientras que el índice NIKKEI se situó en 15.256 en media. ¿Cuál ha sido más volátil? Podemos comparar las desviaciones típicas, siempre como proporción del nivel medio respecto al cual se han calculado. El uso de desviaciones típicas como porcentaje de la media permite la comparación entre mercados o activos, o también comparar la volatilidad en un mismo mercado en distintos instantes de tiempo. Este es el *coeficiente de variación:*

$$\upsilon = 100\frac{s_x}{\bar{x}}$$

Como vemos en el Cuadro, el coeficiente de variación nos proporciona un ranking de índices, de acuerdo con su volatilidad, no muy diferente del proporcionado por el rango del 80%.

Avanzando en esta línea de poner los estadísticos en términos relativos, cuando se pretende comparar variables medidas en diferentes unidades, es útil *tipificar* o *estandarizar* las variables, restando de cada observación la media muestral, y dividiendo por la desviación típica. Mediante esta transformación, eliminamos las unidades de cada variable, por lo que pueden ser comparables entre sí, en términos de volatilidad. De hecho, bajo el supuesto de que la serie temporal relativa a cada una de las variables está compuesta de observaciones independientes, extraídas de una determinada distribución, con esperanza μ y varianza σ^2 constantes, las variables tipificadas tienen esperanza cero y varianza igual a uno. El carácter de la distribución no juega ningún papel en este resultado.

Cuando se pretende inspeccionar en un gráfico la posible correlación entre variables, es asimismo útil utilizar esta transformación. Esto corrige, además el efecto que produciría el que los distintos índices toman magnitudes diferentes, lo que haría que, en un gráfico de sus niveles, se observasen las fluctuaciones de tan sólo uno o dos de ellos, apareciendo los demás como líneas suaves.

Estos últimos cálculos que hemos hecho, al presentar estadísticos como porcentajes de la media, resuleven en parte un problema, que es el de que las distintas series temporales que consideramos tienen muy diferente promedio. Pero no son solución la problema de la no estacionariedad de dichas series temporales.

Después de este pormenorizado análisis, no podríamos dudar en calificar de índices más volátiles durante agosto de 1999 a Merval y CAC, seguidos de cerca por DAX y Bovespa. Los índices más estables habrían sido el Nikkei y Mexico IPC y, muy especialmente (quizá sorprendentemente) el Chile General.

Por supuesto que el análisis de volatilidad de un mes puede estar condicionado por acontecimientos específicos de dicho mes, y no ser extrapolable en el tiempo. En efecto, en una perspectiva temporal más amplia, nuestros resultados son distintos: Los índices lationamericanos, Bovespa, Mexico IPC, Chile general y Merval están, año tras año, entre los más volátiles, mientras que, por el lado estable, tan sólo el S&P500 ofrece sistemáticamente una baja volatilidad [ver pestaña *Anuales*].

Cmo hemos advertido, los cálculos anteriores adolecen de distintas dificultades, debido a la naturaleza no estacionaria de los índices de bolsa. Cuando esto sucede, los momentos de la distribución de probabilidadd no están bien definidos, pues cambian en el tiempo. Es necesario entonces trabajar con una *transformación que sea estacionaria. La rentabildiad logarítmica generalmente lo es. En el resto de la pestaña Agosto 99, igual que en la pestaña Anuales, se recogen momentos muestrales calculados con las rentabilidades logaritmicas. La volatilidad se estima de dos modos, ya sea mediante la varianza o desviacion tipica de la serie, o mediante el promedio de sus valores al cuadrado. Este último cálculo es válida bajo el supuesto de a que la rentabilidad media del periodo es cero lo que con datos de alta frecuencia, es un supuesto razonable.*

1.4 La varianza como indicador de volatilidad: Limitaciones

La varianza y la desviación típica (poblacional o muestral) sólo tienen sentido frente a una medida de posición central de la distribución de probabilidad, que sirve de referencia. Sin embargo, no siempre las medidas de posición son estables en el tiempo. Cuando no lo son, el uso de la varianza como indicador de volatilidad queda en entredicho, como iremos viendo sucesivamente.

Hay distintas situaciones en que estos problemas ocurren:

- *Sesgos al estimar la desviación típica:* La cuasi-varianza muestral $\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T} r_t^2$, calculada a partir de una muestra aleatoria simple, es decir, una muestra cuyos elementos son independientes entre sí, es un estimador insesgado de la varianza poblacional. Por tanto, $E\left(\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T} r_t^2\right) = \sigma_r^2$. Esto es válido para cualquier población con esperanza y varianza constantes. Sin embargo, la estimación que deducimos para la desviación típica tomando la raíz cuadrada de la estimación de la varianza no es insesgada, debido a que la esperanza matemática de una función no lineal no es igual al valor de la función en dicha esperanza matemática. De hecho, la desigualdad de Jensen nos dice que: $E\left[g(X)\right] \leq g\left(EX\right)$ si la función g es cóncava, y lo contrario ocurre si la función g es convexa. Por tanto, la esperanza matemática de la raiz cuadrada de una función es menor o igual que la raiz cuadrada de la esperanza matemática de la función: $E\sqrt{g(X)} \leq \sqrt{E(g(X))}$.Si calculamos la desviación típica muestral como la raíz cuadrada (función cóncava) de la varianza muestral: $DT(r) = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T} r_t^2}$, tendremos un valor numérico que, en promedio (aunque no para una única muestra, como habitualmente tenemos) será mayor que la desviación típica poblacional, ya que por la desigualdad de Jensen: $E\left(DT(r)\right) = E\left(\sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T} r_t^2}\right) \leq \sqrt{E\left(\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T} r_t^2\right)} \to \sigma_r^2$. El sesgo de sobre-estimación así cometido al estimar la desviación típica puede evaluarse en el caso de una población Normal. Bajo determinadas condiciones, el sesgo desaparece al aumentar el tamaño muestral siendo la raiz cuadrada de la varianza muestral un estimador consistente de la desviación tipica poblacional.

- en presencia de una tendencia determinista, el nivel seleccionado como referencia para el comportamiento de la variable, que habitualmente es la media o la mediana muestrales, no será representativo de la evolución de la variable: si la tendencia es creciente, la primera parte de la muestra estará sistemáticamente por debajo de la media, mientras que la segunda parte estará sistemáticamente por encima. El estadístico de posición central no representa ni la primera ni la segunda parte de la muestra. Si calculamos la varianza muestral como indicador de volatilidad en este caso, imputaremos como tal lo que no es sino tendencia, y podríamos llegar a afirmar, erróneamente, que una variable es muy volátil, cuando lo que presenta es una fuerte tendencia determinista. De hecho, la varianza de una variable tendencial puede ser elevada incluso si ésta apenas experimenta fluctuaciones. En presencia de una tendencia lineal, la varianza está midiendo la tasa de crecimiento; lo sorprendente es que este aspecto, que es positivo si estamos hablando del precio o cotización de un activo, será considerado negativo, al ser imputado como volatilidad y, por tanto, como riesgo asociado a la inversión en el mismo.

- algo similar ocurre en presencia de tendencias estocásticas (es decir, de raíces unitarias), un caso típico de no estacionariedad de variables financieras. En tales procesos la varianza crece con el número de observaciones utilizado en su cálculo, por lo que no tiene sentido hablar de la varianza, pues este momento no está bien definido. Su análogo muestral tiende a infinito si utilizamos en su cálculo un número de observaciones arbitrariamente grande, por lo que no proporciona información acerca del riesgo inherente a la toma de posición en un activo cuyo precio presenta tal comportamiento tendencial. En tal caso, deberíamos trabajar con la primera diferencia de la variable. Si se trata de un precio, su logaritmo presentará las mismas carcterísticas tendenciasles, aunque quizá algo más amortiguadas. Su primera diferencia es la rentabilidad del activo, por lo que es muy intuitivo trabajar con esta transformación de la variable original. Este es el caso del comportamiento de los precios en muchos mercados.

- cuando, aun no existiendo tendencia, se ha producido un cambio de nivel en la media. En este caso, la media calculada con toda la muestra no representará ni la primera parte de ella, ni la segunda. Lo que ocurre es que la media ha sido distinta en la primera y segunda submuestras, y deberíamos recoger este hecho. De lo contrario, estaremos imputando como volatilidad lo que no es sino una ruptura en la media de la variable en estudio. Ni la media muestral es representativa de la rentabilidad ofrecida por el activo, ni la varianza muestral es una medida de incertidumbre.

- la rentabilidad que interesa al inversor es la rentabilidad que espera obtener durante el horizonte de su inversión, por lo que, en realidad, debería utilizar una *predicción de la rentabilidad* durante dicho período. Generalmente, los modelos teóricos (selección de cartera de Markovitz, valoración de opciones de Black-Scholes) se basan en una medida de riesgo esperado durante el horizonte de la inversión, que es substituida generalmente por una medida histórica de riesgo, y ésta es calculada como la varianza muestral, sin llevar a cabo el tipo de predicción requerido por el modelo teórico. Para ello, el análisis de series temporales es imprescindible: especificando y estimando un modelo estadístico para la serie temporal de rentabilidades, podríamos obtener tal previsión. El modelo en cuestión debería incorporar todas aquellas variables que se considera que pueden influir sobre la rentabilidad del activo, si bien entonces necesitaremos prever asimismo el comportamiento de tales factores durante el horizonte de inversión. Una posibilidad consiste en utilizar un modelo univariante de series temporales (por ej., según el enfoque Box-Jenkins), confiando en que dicho modelo capture suficientemente bien la dinámica de la evolución temporal de la rentabilidad a lo largo del horizonte de inversión; otra posibilidad consistiría en utilizar modelos vectoriales autoregresivos (VAR), que incorporasen variables adicionales que puedan influir sobre el precio del activo en cuestión.

- *tampoco el nivel de riesgo del activo es observable,* pero se *identifica riesgo con volatilidad.* Ha sido asimismo tradicional asociar la volatilidad a un momento de segundo orden de la distribución de probabilidad o de frecuencias de una determinada rentabilidad. Así, la identificación entre volatilidad y varianza o, más precisamente, entre volatilidad y desviación típica, es habitual. Por tanto, *la volatilidad se define con respecto a un nivel de referencia,* generalmente la esperanza matemática de la rentabilidad analizada, que es una medida de posición central. Pero hay otras medidas de posición que pueden ser útiles bajo condiciones de asimetría: mediana, moda, percentiles, etc. De hecho, veremos más adelante que la identificación entre volatilidad y desviación típica no conduce a una medida adecuada del riesgo asumido en la inversión en un determinado activo.

- el último comentario está basado en el hecho de que la varianza mide *toda la fluctuación* que experimenta una variable (sea precio o rentabilidad), y seguramente querremos pensar que el riesgo es sólo una parte (quizá la parte no predecible) de dicha fluctuación (esto será analizado en detalle en la Sección 4.i). Como caso extremo, una función trigonométrica como $y_t = A.sen\left(2\pi\frac{t}{T}\right), t = 1, 2, ..., T$, para una constante A dada, experimenta fluctuaciones de un tamaño arbitrario, determinado por el valor de $A,$ pero son de naturaleza puramente determinista. Ello significa que el valor de y_{t+s} en cualquier período futuro es perfectamente predecible en el instante t. Perfectamente predecible significa que el error de predicción es cero; además, la información muestral disponible en el instante t sería irrelevante, pues no necesitaríamos utilizarla para obtener dicha predicción. Las fluctuaciones en este proceso podrían ser arbitrariamente grandes, pues bastaría para ello con alterar el valor de las constantes. A pesar de que un activo cuyo precios siguiese tal comportamiento, no implicaría riesgo alguno para el inversor, la varianza de dicho proceso podría resultar arbitrariamente grande.

- en la *práctica habitual* se entiende que *el riesgo es una característica relativamente estable* de un activo (en el caso del riesgo específico, no diversificable) o de un mercado (en el caso del riesgo sistemático, diversificable) que puede, por tanto, estimarse a partir de datos históricos, utilizando la desviación típica de la rentabilidad de un activo. Sin embargo, debemos hacernos varias preguntas: ¿es el nivel de riesgo o de volatilidad estable en el tiempo? ¿deberíamos medir volatilidad sobre períodos relativamente breves de tiempo, obteniendo así una medición numérica que evoluciona de manera más o menos suave?

- el uso que habitualmente se hace de la desviación típica como indicador de volatilidad/riesgo, se fundamenta en el supuesto de Normalidad de la variable cuya volatilidad hemos calculado. Por ejemplo, la varianza estimada en un instante determinado puede utilizarse para construir un intervalo de confianza para los valores que puede tomar la rentabilidad que está siendo objeto de análisis. Sin embargo, la gran mayoría de las rentabilidades de activos financieros no siguen una distribución Normal, con clara evidencia de asimetría y exceso de curtosis.

- si llevamos a cabo una inversión con un determinado horizonte, es habitual considerar que el riesgo asumido viene medido por la varianza de la suma de las variaciones diarias en precio (rentabilidades continuas diarias). Asimismo, es habitual aproximar dicha varianza multiplicadndo la varianza diaria, supuesta constante, por el número de días contenidos en el horizonte de inversión. Sin embargo, este procedimiento no es correcto si el proceso con el que trabajamos (precios o rentabilidades) presenta autocorrelación, en cuyo caso la varianza no es aditiva temporalmente. Esta práctica conduce a sobre-estimacion (bajo autocorrelación negativa) o sub-estimación (bajo autocorrelación positiva) de la volatilidad de la rentabilidad en estudio.En tal situación, conviene utilizar una estructura temporal de volatilidades (volatilidad como función del horizonte), más que trabajar con una volatilidad constante para todos los plazos de inversión. Esta cuestión será analizada en más detalle más adelante.

[Case Study II:3] Volatilidades a lo largo de una estructura temporal.

1.5 El coeficiente de correlación lineal como medida de asociación entre variables

El coeficiente de correlación lineal de Pearson, habitualmente utilizado, está basado en supuestos que pueden limitar su utilización con carácter general.

- El coeficiente de correlación entre variables no estacionarias puede ser muy próximo a 1 (en general lo será), sin que necesariamente implique que el componente puramente aleatorio de ambas variables (sus innovaciones) están relacionadas, o se mueven en sintonía. Es lo que conocemos como *correlación espúrea*.

- El coeficiente de correlación no es invariante bajo transformaciones no lineales (por ejemplo, logarítmicas),

- Los valores factibles del coeficiente de correlación dependen de las distribuciones marginales de las dos variables. Por ejemplo, si $\ln(X)$ es $N(0,1)$ y $ln(Y)$ es $N(0,4)$, entonces el coeficiente de correlación no puede valer más de $2/3$ ni menos de -0,09

- La dependencia perfecta y positiva no implica un coeficiente de correlación lineal igual a 1, ni la correlación perfecta negativa implica un coeficiente de correlación lineal igual a -1, como muestra el ejemplo anterior.

- Un coeficiente de correlación lineal igual a cero no implica independencia. Solo en el caso en que las variables sigan una distribución conjunta Normal bivariante, ausencia de correlación (coeficiente de correlación lineal igual a cero) implicaría independencia. Una dependencia perfecta en que las dos variables toman valores alineados a lo largo de un círculo implicará un coeficiente de correlación lienal muy reducido. Un coeficiente de correlación lineal nulo entre dos variables con distribución t de Student no implica independencia, pues ambas variables pueden estar relacionadas a través de sus momentos de orden superior.

1.6 Matrices de covarianzas

Las matrices de covarianzas miden la dependencia entre las rentabilidades de un conjunto de activos. Estas matrices tienen en su diagonal las varianzas de las rentabilidades de los distintos activos, y fuera de la diagonal, las covarianzas entre cada par de rentabilidades. Los valores numéricos de las covarianzas no son interpretables, no sabemos cuando son grandes o pequeños. Para ello hemos de ponerlos en relación con sus varianzas, construyendo el coeficiente de correlación lineal. La matriz de correlaciones tiene una estructura similar a la matriz de covarianzas, con unos en la diagonal principal, y los coeficientes de correlación lineal entre cada par de rentabiklidades fuera de dicha diagonal.

Una matriz de covarianzas V puede representarse en la forma:

$$V = D\Gamma D$$

siendo D una matriz diagonal nxn con las desviaciones típicas en su diagonal principal, y Γ la matriz nxn de coeficientes de correlación. Esta descomposición es útil para calcular matrices de covarianzas a partir de datos de varaizans y correlaciones lineales sin tener que calcular cada una de las covarianzas previamente.

Por otra parte, si w representa el n-vector columna de ponderaciones de una cartera en los distintos activos que la componen, la varianza de la rentabilidad de la cartera es:

$$Var(r) = w'Vw = (w'D)\,\Gamma\,(Dw) = q'\Gamma q$$

con $q = Dw$, siendo V la matriz nxn de covarianzas de las rentabilidades de los activos que entran en la cartera. El producto $q = Dw$ es un n-vector que tiene por coordenadas los cocientes w_i/σ_i. Lógicamente, w y V deben estar ordenados correspondientemente.

2 Utilización de información intradía en la medición de la volatilidad de un activo financiero

Si observamos los precios negociados de un activo a intervalos regulares de tiempo, podemos definir,

$$R_{t+j/m} = \ln(S_{t+j/m}) - \ln(S_{t+(j-1)/m})$$

donde suponemos m observaciones diarias, para estimar la varianza diaria,

$$\sigma^2_{m,t+1} = \sum_{j=1}^{m} R^2_{t+j/m}$$

que podría utilizarse, nuevamente, en la validación de modelos de previsión de volatilidad, en sustitución del cuadrado de la rentabilidad diaria, o utilizarse directamente en la predicción de volatilidad. Según aumenta el número de observaciones intradia m, la medida de varianza realizada anterior converge a la verdadera varianza diaria.

El uso de rentabilidades intradia se ve condicionado en el caso de activos poco líquidos por la imposibilidad de observar el precio con mucha frecuencia. Lo que obtenemos entonces no es el precio fundamental del activo, que no es observable, sino una secuencia de precios bid y ask [ver simulación en Figure 2.7 en Christoffersen]. Los precios diarios intradía pueden contener mucha volatilidad espúrea, que no existe en el precio fundamental del activo, por los rebotes observados en las transacciones entre precios bid y ask. Como consecuencia, las medidas de varianza realizada basadas en rentabilidades intradía pueden tener también este problema, especialmente en mercados poco líquidos. En un contexto de limitada liquidez, el máximo puede calcularse como el máximo realmente observado menos la mitad del spread bid-ask, mientras el mínimo es calculado como el mínimo realmente observado más la mitad del spread bid-ask. En ausencia de fricciones se estima que las medidas de varianza basadas en el rango de precios contienen información equivalente únicamente a la contenida en 4 rendimientos horarios intradía. Lamentablemente, es difícil extender la idea a la estimación de covarianzas y correlaciones, a diferencia de lo que sucede con las medidas de varianza realizada como veremos más adelante.

La hipótesis de Normalidad del logaritmo de $\sigma^2_{m,t+1}$ suele no rechazarse en datos intradía, por lo que podemos utilizar un modelo de predicción basado en la volatilidad realizada,

$$\ln \sigma^2_{m,t+1} = \alpha + \rho \ln \sigma^2_{m,t} + u_{t+1},\ con\ u_{t+1} \sim N(0, \sigma^2_u)$$

Cuando se utiliza un modelo de previsión en logaritmos, conviene recordar que,

$$u_{t+1} \sim N(0, \sigma_u^2) \Rightarrow E\left(e^{u_{t+1}}\right) = e^{\sigma_u^2/2}$$

por lo que en un modelo autoregresivo como el anterior,

$$E_t\sigma_{t+1}^2 = E_t e^{\alpha+\rho \ln \sigma_{m,t}^2 + u_{t+1}} = e^{\alpha+\rho \ln \sigma_{m,t}^2}.E_t e^{u_{t+1}} = \left(\sigma_{m,t}^2\right)^\rho e^{\alpha+\sigma_u^2/2}$$

2.1 Estacionalidad intra-día en volatilidad

Tratar de caracterizar pautas de estacionalidad, tanto en rentabilidad como en volatilidad, puede producir información de enorme interés para un inversor. Ha sido muy popular durante mucho tiempo buscar efectos estacionales en las rentabilidades ofrecidas por los mercados de valores. Así, existe el denominado *efecto Enero*, mes en el que las Bolsas tienden a ofrecer una rentabilidad superior a la de otros meses, debido a la recomposición de carteras de muchos inversores, que liquidaron parte de las mismas antes de final de año por razones fiscales. Asimismo, se ha debatido durante mucho tiempo la existencia de efectos estacionales entre semana o *efectos días de la semana*, afirmando algunos autores que existe *efecto lunes* en algunos mercados.

Menos estudiada ha sido la posible existencia de pautas estacionales en volatilidad. Evidentemente, la posible existencia de tales pautas sería asimismo un fenómeno muy a tener en cuenta por todos los que gestionan riesgo de uno u otro modo.

Parece, sin embargo, bastante probada la existencia de pautas "estacionales" de volatilidad intradía, que se reflejan en una mayor volatilidad en el período siguiente a la apertura del mercado, un descenso en las horas centrales del día, y un incremento posterior, según se acerca la hora de cierre.

A este perfil en forma de U de la volatilidad a lo largo del día de negociación suele venir unido un perfil similar de los volúmenes negociados. Por tanto, las pautas de negociación tienen mucho que ver con esta posible regularidad horaria en la volatilidad de algunos mercados. Una de las figuras adjuntas, acompañada de una tabla, tomadas de Daigler (19xx), muestra el perfil medio de la volatilidad intra-día, cuando se agrupan los precios en intervalos de 15 minutos. Se utiliza como medidas de volatilidad: la desviación típica de las rentabilidades, la medida de Garman-Klass (que veremos más adelante), y el número de ticks observados en cada intervalo de tiempo. En todos los casos se tiene un perfil en forma de U, si bien el máximo local de volatilidad no se produce en el instante de cierre del propio mercado de futuros, sino algo antes, coincidiendo con el cierre del mercado de contado. La tabla que se acompaña es de este mismo trabajo. Dos gráficos tomados de Lafuente (1999) presentan la volatilidad del IBEX 35, así como del futuro sobre este índice, en dos tramos horarios: 11 a 12 de la mañana, y 12 a 13 horas, apreciándose claramente la mayor volatilidad al comienzo del día. En las tablas que se acompañan, se presenta nuevamente evidencia a favor de un perfil de volatilidad en forma de

U a lo largo del día. Chan, Chan y Karolyi (19xx), presentan una evidencia de estacionalidad intra-día similar a la mencionada.

2.2 Medidas de Parkinson y Garman-Klass

Generalmente, entendemos por volatilidad de un activo financiero el valor anualizado de un indicador de variabilidad de su tasa de rendimiento. Tradicionalmente, se ha tomado como como indicador de variabilidad la desviación típica aunque, posteriormente, se han ido introduciendo otras medidas alternativas de volatilidad que se consideran superiores en términos de eficiencia informativa, algunas de las cuales discutimos en esta sección, dejando las restantes para capítulos sucesivos. Se entiende que la volatilidad es una medida del riesgo del activo, aunque ya hemos adelantado algunas razones para tomar con precaución dicha inte$R\&P$retación.

Enlazando con los estadísticos hasta ahora considerados, extendamos el cálculo de la volatilidad histórica de una variable, que puede hacerse, disponiendo de la información relativa a un día de negociación, a través de:
1) Con precios de cierre (u otro dato representativo del día)
2) Con precios de apertura y cierre
3) Con los precios máximo y mínimo
4) Con el máximo, mínimo, apertura y cierre
5) Con precios bid y ask (en otro sentido)

Si disponemos de precios cotizados continuamente, como ocurre cuando hemos almacenado todas las transacciones realizadas a lo largo de un día de mercado:

$$Volatilidad: \ V = \sqrt{252}\sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(r_t - \bar{r})^2}$$

donde $\bar{r}$ denota la rentabilidad media del día. La segunda raíz calcula la desviación típica de la rentabilidad a lo largo de dicho día de mercado, mientras que el producto por la raíz de 252 anualiza dicha volatilidad.

La rentabilidad media sobre un período reducido de tiempo, como el transcurrido entre dos transacciones, será muy pequeña, en cuyo caso, podemos calcular la volatilidad, muy aproximadamente, como:

$$Volatilidad: \ V = \sqrt{252}\sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}r_t^2}$$

En el caso de que dispongamos de *precios de cierre* (o cualquier otro *dato único* por día) observados con regularidad inferior a la diaria:

$$Volatilidad: \ V = \sqrt{\frac{N}{T}}\sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(r_t - \bar{r})^2}$$

donde $\bar{r}$ denota la rentabilidad media durante los T días considerados en el cálculo. Si, por ejemplo, son datos de cierre observados el último dia de negociación de cada mes, tendremos $N = 252, T = 21$.

Con el *máximo* y *mínimo* de la sesión [Parkinson (1980)], el *rango* se define como la diferencia entre los logaritmos de los precios máximo H_t y mínimo L_t diarios,

$$D_t = \ln(H_t) - \ln(L_t)$$

y mide, aproximadamente, el porcentaje en el que el precio máximo excede del mínimo. Puede probarse que,

$$ED_t^2 = 4\ln(2)\sigma^2$$

por lo que un estimador natural de la volatilidad, basado en el rango observado es,

$$\sigma^2 = \frac{1}{4\ln(2)}\left(\frac{1}{T}\sum_{1}^{T} D_t^2\right)$$

es decir,

$$Volatilidad: \; V = \sqrt{252}\sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T}\left[\ln\left(H_t/L_t\right)^2\right]}{T4\ln 2}}$$

Con apertura, cierre, máximo y mínimo [Garman-Klass]:

$$Volatilidad: \; V = \sqrt{252}\sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{2}\left[\ln\left(H_t/L_t\right)^2\right] - 0,386\sum_{t=1}^{T}\left[\ln\left(C_t/A_t\right)^2\right]}{T}}$$

Nota: 2 ln(2)-1 = 0,386.

Los valores de trading overnight no se registran, por lo que los valores realmente observados como máximo y mínimo no coinciden necesariamente con el máximo y mínimo realmente producidos a lo largo de las 24 horas. Esto produce un sesgo a la baja en el estimador del máximo, y un sesgo al alza en la estimación del mínimo. El rango de precios queda subestimado, siendo un subintervalo del verdadero rango de precios. Este sesgo que se produce por generar un proceso discreto a partir de un proceso que es realmente continuo, es algo significativo en la medida de Parkinson, y queda bastante atenuada en la medida de Garman-Klass. La dirección del sesgo no es evidente cuando se utilizan exclusivamente datos de cierre. El sesgo puede ser importante si se utiliza la volatilidad estimada para valoración de opciones. Ejercicios de simulación sugieren que la mayor liquidez del mercado tiende a reducir el sesgo, lo que presta en tal situación mayor justificación al uso de las medidas de Parkinson, y Garman-Klass [ver Wiggins, J. (1992)]

Para tratar de tener en cuenta que las medidas de apertura/cierre y máximo/mínimo se obtienen en un intervalo inferior a 24 horas, suele ajustarse la volatilidad resultante por $\sqrt{24/8,5}$.

Por el contrario, las medidas basadas en el rango observado son relativamente inmunes a este problema. En todo caso, dado que la existencia de ticks impide que los precios fluctúen de modo continuo, haciendo que se tienda a sobreestimar la volatilidad [ver Ball, C.A., (1988)], este sesgo se suele corregir en la medida de Parkinson por medio del ratio $c = d/vP$, siendo d el tamaño del tick, v la volatilidad diaria estimada, y P el precio del activo. Si $c \geq$1,77, se utiliza k=0,50$\sqrt{\frac{\pi}{c}}$, mientras que si c<1,77, se utiliza k=$\sqrt{1-c^2/6}$.

Las medidas de volatilidad de Parkinson y Garman-Klass producen importantes ganancias de eficiencia: con un número de datos 5 ó 7 veces menor, generan estimaciones de la varianza poblacional con una precisión estadística similar a la estimación que se obtiene utilizando únicamente datos diarios de cierre.

Para un día cualquiera, puede utilizarse como proxy de la volatilidad:

$$\sigma_{r,t}^2 = \frac{1}{4\ln(2)} D_t^2 \simeq .361 D_t^2$$

Este estimador es, generalmente, menos errático que la estimación de la varianza basada en la rentabilidad diaria al cuadrado, y tiene más persistencia que las rentabilidades diarias. Ello sugiere la posibilidad de utilizar el estimador basado en el rango para validar un modelo de predicción de varianza que haya generado estimaciones $\hat{\sigma}_t^2$,

$$\sigma_{r,t+1}^2 = \alpha + \beta \hat{\sigma}_{t+1}^2 + u_{t+1}$$

Si estamos interesados en la predicción de la volatilidad un período hacia adelante, podríamos utilizar el rango en el modelo de predicción de volatilidades:

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha R_t^2 + \beta \sigma_t^2 + \gamma D_t^2$$

Example 1 *El Cuadro 9 presenta la comparación entre estas medidas de volatilidad y la volatilidad más estándar, calculadas para las cotizaciones de BBV, TELEFONICA, ENDESA y REPSOL, desde 9/10/97 a 10/11/99.*

De este modo, las medidas Parkinson y Garman-Klass de volatilidad de BBV aumentan a 3,80% y 3,75%, respectivamente.

Algunas observaciones:

a) Nótese en todas estas definiciones la diferencia entre días hábiles y días naturales.

b) El trading de activos es un proceso que, en muchos casos, tiene lugar de modo continuo a lo largo del día. Sin embargo, se observa en momentos discretos de tiempo.

2.3 Volatilidad implícita versus volatilidad histórica

La *volatilidad implícita* es la estimación de volatilidad que se obtiene al imponer el precio observado en el mercado en una expresión teórica de valoración que hace depender el precio de dicho activo de una sola componente no observada, su volatilidad (además de depender de otras componentes observables). En general, nos interesa calcular *volatilidades implícitas*, porque para este tipo de derivados disponemos de modelos de valoración del tipo descrito.

Al efectuar este ejercicio, se está suponiendo que el modelo teórico de valoración del activo es correcto, y que el mercado forma expectativas de volatilidad utilizando eficientemente la información de que dispone. Ello hace que el precio de mercado resuma de manera adecuada toda la información disponible acerca del activo.

Estamos interesados en obtener volatilidades implícitas por dos razones:

- Una vez determinada la *volatilidad cotizada* en el mercado para un determinado subyacente, podremos poder evaluar si una determinada opción está subvalorada, correctamente valorada o sobrevalorada por el mercado, lo que podría sugerir diversas estrategias de inversión, y
- Generalmente, nos interesa utilizar la volatilidad implícita en un sentido temporal, pues si podemos obtener buenas previsiones de la volatilidad implícita futura de un determinado activo, dispondremos de previsiones de precios futuros de las opciones sobre dicho subyacente. En esta línea, pueden establecerse diversos ejercicios:

a) para tener un indicador de la *percepción del mercado* acerca de la volatilidad de un activo y poder analizar el modo en que dicha percepción cambia en el tiempo,

b) utilizar la *serie temporal* de la volatilidad implícita para especificar un modelo univariante predictivo de la *volatilidad implícita futura*, para lo que necesitaremos haber calculado la volatilidad implícita durante todos los días a través de un largo período de tiempo,

c) para ponerla en relación con alguna de las medidas de *volatilidad histórica*: estas son las medidas que se basan exclusivamente en precios de mercado históricos del subyacente, sin utilizar modelo de valoración alguno, como ocurre con una desviación típica estimada a través de ventanas muestrales, o la medida de Gorman-Klass, por ej..

Puesto que las fórmulas teóricas de valoración de un producto derivado son funciones altamente no lineales de sus argumentos y, en particular, de la volatilidad, la resolución de la ecuación que iguala el precio teórico (es decir, el que se obtiene de la fórmula) con el precio observado en el mercado para obtener la volatilidad no puede llevarse a cabo analíticamente, siendo preciso recurrir a algoritmos numéricos, del tipo de los que analizaremos en módulos posteriores.

La volatilidad implícita no hace sino reflejar la visión del mercado acerca del grado de incertidumbre que entraña la evolución temporal de la rentabilidad que ofrece un activo. Cambios en la información disponible (resultados de una empresa, intervenciones de política económica, publicación de algún dato clave sorprendente) pueden incidir sobre tal percepción.

Existe una importante distinción entre ambos tipos de volatilidad: por un lado, tenemos l*a volatilidad histórica, que mira hacia el pasado*, y se basa exclusivamente en información histórica del precio o de la rentabilidad cuya volatilidad se pretende calcular. Por otra parte, *la volatilidad implícita* afecta a la valoración de un producto derivado y, en consecuencia, *mira hacia el futuro*, tratando de estimar una característica no observable, por cuanto que aún no se ha realizado, como es la volatilidad futura del subyacente.

Sólo si pensáramos que la volatilidad futura es igual a la pasada estaríamos estimando el mismo concepto, aunque por método distintos, que nos proporcionarán valores numéricos diferentes. Por otra parte, la volatilidad histórica, calculada en forma de serie temporal a través de ventanas móviles, como describimos anteriormente, también podría utilizarse para *predecir* la volatilidad futura. Por tanto, ambos conceptos pueden ponerse en relación. La mayor diferencia estriba en la forma de calcular las volatilidades. Por un lado, en la forma de desviación típica; por otro, resolviendo en una formula como la de Black-Scholes de modo que el precio teórico resultante coincida con el observado en el mercado.

Una hipótesis interesante estriba en si la volatilidad implícita responde a variaciones en la volatilidad histórica. La intuición es que si se produce una variación en la rentabilidad de un activo que modifica su volatilidad histórica, el mercado puede percibir un mayor riesgo futuro, lo que debería elevar el precio de las opciones sobre el mismo, conduciendo a una mayor volatilidad implícita. Sin embargo, la respuesta no es evidente. Algunos estudios realizados [Análisis Financiero no.50, febrero]

$$Volatilidadimplícita_{t+1} - Volatilidadimplícita_t =$$

$$= \beta(Volatilidadhistórica_t - Volatilidadhistórica_{t-1})$$

Trabajando con datos para el bono nocional, en dicho trabajo se encuentran coeficientes de determinación en torno a 0,77, y pendientes estimadas próximas a 0,80.

Hay que tener en cuenta que la existencia de una relación estadística estable entre volatilidad histórica e implícita no precisa que los niveles de volatilidad estimados por cada uno de los dos procedimientos coincidan. De hecho, esperamos más bien lo contrario; en todo caso, no importa que ambos niveles de volatilidad sean los mismos, sino que variaciones en el nivel de volatilidad histórica anticipen cambios en el nivel de volatilidad implícita, que puedan utilizarse para la gestión de carteras.

3 Algunas cuestiones estadísticas previas

3.1 Tendencias deterministas

Hay varias razones estadísticas que justifican el uso de rentabilidades, en vez de precios o cotizaciones, al analizar los mercados financieros. Una, importante, es la general ausencia de estacionariedad en los precios de los activos financieros, así como en los índices de los principales mercados, que puede reflejarse de diversas formas: presencia de tendencias estocásticas, presencia de *tendencias deterministas* en los precios de mercado, volatilidad cambiante en el tiempo, etc.. Una *tendencia determinista* es una función exacta del tiempo, generalmente lineal o cuadrática. Una *tendencia estocástica* es un componente estocástico cuya varianza tiende a infinito con el paso del tiempo.

Si una variable presenta una *tendencia determinista*, su valor esperado tenderá a aumentar o disminuir continuamente, con lo que será imposible mantener el supuesto de que la esperanza matemática de la sucesión de variables aleatorias que configura el proceso estocástico correspondiente a dicha variable, es constante. En consecuencia, tampoco podrá mantenerse que la distribución de probabilidad de dichas variables es la misma a través del tiempo. Sin embargo, si efectuamos una correcta especificación de la estructura de dicha tendencia, podrá estimarse y extraerse del precio, para obtener una variable estacionaria, que no presentaría las dificultades antes mencionadas. Un ejemplo claro es la aparente tendencia cuadrática en el índice S&P500, que puede estimarse mediante un polinomio de grado 2 del tiempo, con coeficiente positivo en la segunda potencia,

$$SP500_t = a + bt + ct^2 + u_t$$

Las diferencias entre los valores del índice y los que toma dicha función determinista del tiempo podrían servirnos como la versión sin tendencia del índice S&P500 y, como se ve en los gráficos/ de la pestaña *SP500 trend* en el archivo *Indices_work.xls*, ambas versiones de la variable son de naturaleza muy diferente. Ene ste caso, el grafico ilustra que la eliminación de la tendencia cuadrática determinista deja un comportamiento un tanto extraño, que podemos admitir de carácter estocástico, que habría que modelizar. La volatilidad de la serie S&P500 haci el final de la muestra,. que es enorme en términos históricos, queda claramente reflejada al eliminar la tendencia determinista.

Mayor dificultad entraña el caso en que una variable precio incluye una tendencia estocástica pues, en tal caso, su esperanza y varianza no están definidas. La presencia de una tendencia estocástica requiere transformar la variable, generalmente en primeras diferencias temporales, o tomando las diferencias entre las observaciones correspondientes a una misma estación cronológica, en el caso de una variable estacional. La transformación mediante diferencias resulta bastante natural en el análisis de datos financieros, por cuanto que la primera diferencia del logaritmo de un precio, es la *rentabilidad* del activo. Por esto es que también la transformación logarítmica es utilizada habitualmente cuando se trabaja con precios o índices de mercado. En el caso del S&P500, el gráfico de la rentabilidad, obtenida como priemra diferencia logarítmica muestra períodos de mayor y de menor volatilidad, como sucede con todo activo financiero.

Como prácticamente ningún precio o índice financiero es estacionario, el uso indiscriminado de un estadístico como la varianza o la desviación típica como indicador de riesgo conduce a medidas sesgadas al alza.

3.2 Rentabilidad continua equivalente. Agregación temporal de volatilidades

Distinguimos entre rentabilidades porcentuales y rentabilidades logarítmicas. Estas últimas se conocen asimismo como *rentabilidades continuas.*

Rentabilidad porcentual:

$$R_t = 100\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

Rentabilidad logarítmica:

$$r_t = 100(\ln P_t - P_{t-1})$$

donde vemos la diferencia en la transformación logarítmica a que antes nos referíamos.

Ambas rentabilidades son aproximadamente iguales si R_t es pequeña, puesto que:

$$\frac{r_t}{100} = \ln P_t - \ln P_{t-1} = \ln\frac{P_t}{P_{t-1}} = \ln(1+\frac{R_t}{100}) \sim \frac{R_t}{100}$$

mientars que la relación exacta entre ambas, siempre válida, está dada por:

$$\ln(1+\frac{R_t}{100}) = \frac{r_t}{100}$$

y r_t se dice que es la rentabilidad continua equivalente a R_t.

La transformación logarítmica hace que podamos obtener rentabilidades continuas compuestas mediante sumas. Supongamos que queremos calcular la rentabilidad sobre dos períodos. Observando que:

$$\begin{aligned}\frac{r_t^1}{100} + \frac{r_{t-1}^1}{100} &= \ln\frac{P_t}{P_{t-1}} + \ln\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} = \ln P_t - \ln P_{t-1} + \ln P_{t-1} - \ln P_{t-2} = \\ &= \ln P_t - \ln P_{t-2} = \ln\frac{P_t}{P_{t-2}} = r_t^2\end{aligned}$$

vemos que la rentabilidad continua a 2 períodos es, simplemente, la suma de las rentabilidades continuas a 1 período obtenidas durante los dos últimos períodos. Algo similar ocurre para inversiones llevadas a cabo durante n y m períodos de tiempo, respectivamente, siendo n un múltiplo de m ($n = km$), pero siempre que las rentabilidades sean continuas. En ese caso, la suma de las rentabilidades continuas obtenidas durante los últimos k intervalos de tiempo, cada uno de ellos de duración n períodos, es igual a la rentabilidad continua obtenida durante los últimos m períodos.

Por el contrario, la suma de rentabilidades porcentuales sobre k períodos de tiempo de longitud m no proporciona exactamente la rentabilidad porcentual sobre un intervalo de longitud n, y el error de aproximación va aumentando con k.

Es importante observar que, para realizar la agregación temporal de las rentabilidades de tipo continuo no es preciso suponer independencia temporal de las mismas.

No ocurre lo mismo si queremos hacer la misma extrapolación temporal para las volatilidades:

$$Var\left(\frac{r_t^2}{100}\right) = Var\left(\frac{r_t^1}{100} + \frac{r_{t-1}^1}{100}\right) = Var\left(\frac{r_t^1}{100}\right) + Var\left(\frac{r_{t-1}^1}{100}\right) + 2Cov\left(\frac{r_t^1}{100}, \frac{r_{t-1}^1}{100}\right)$$

por lo que la varianza de la rentabilidad durante un período amplio no es igual a la suma de las varianzas de las rentabilidades durante los períodos más cortos comprendidos en el intervalo amplio. La diferencia entre ambos cálculos estriba en que el segundo ignora las covarianzas entre cada par de rentabilidades sobre períodos cortos.

Por tanto, si dichas rentabilidades fuesen independientes, sus covarianzas serían nulas, y tendríamos que la varianza sobre el horizonte largo sería igual a la varianza de las rentabilidades sobre los períodos cortos.

Recordemos, además, que la suma de variables aleatorias Normales, independientes o no, sigue asimismo una distribución de probabilidad Normal. Por tanto, si suponemos que las rentabilidades continuas durante un período son independientes y obedecen a la misma distribución

Normal, tendremos, a lo largo de T períodos:

$$\frac{r_t + r_{t-1} + r_{t-2} + ... + r_{t-T+1}}{100} \sim N(T\mu, T\sigma^2)$$

de modo que la rentabilidad porcentual (o simple) a lo largo del intervalo de tiempo $(t-T, t)$ tiene por esperanza y varianza:

$$E\left(\frac{R_t}{100}\right) = e^{T\mu + \frac{1}{2}T\sigma^2} - 1;\ Var\left(\frac{R_t}{100}\right) = e^{2T\mu + T\sigma^2}\left(e^{T\sigma^2} - 1\right)$$

Extrapolación temporal de la varianza

En Finanzas, suele agregarse a lo largo de un determinado período de referencia, generalmente anual, la estimación de la volatilidad obtenida a lo largo de un período de tiempo más breve. La anualización de la volatilidad permite comparar el riesgo de varios activos, independientemente del intervalo de tiempo considerado en su análisis.

La anualización puede conseguirse a partir de la volatilidad calculada para cada período de una determinada frecuencia, sin más que multiplicar por la raíz cuadrada del número de datos de dicha frecuencia que hay en un año.

Así, si se utilizan datos diarios, y σ^2 denota una estimación de la variabilidad diaria (varianza u otra medida), entonces se toma $252\sigma^2$ como estimación de la variabilidad (varianza) anual (252 es el número aproximado de días de mercado dentro de un año), y $\sqrt{252}\sigma$ como estimación de la volatilidad anual. Con datos semanales, la volatilidad anual se obtiene a partir de la desviación típica de los datos semanales mediante: $\sqrt{52}\sigma$, mientras que si se dispone de datos mensuales, la volatilidad típica anual se obtiene a partir de la desviación típica de los datos mensuales mediante: $\sqrt{12}\sigma$. Se procede de igual modo si se trabaja con indicadores de volatilidad alternativos a la desviación típica. Una vez obtenido un indicador de volatilidad, se extrapolaría a una medida anual del modo que acabamos de describir.

En general, dada una desviación típica calculada con datos de una determinada frecuencia, si queremos obtener la estimación de la desviación típica sobre un intervalo de tiempo que comprende N observaciones de las utilizadas en el cálculo de dicha desviación típica, multiplicamos por $\sqrt{N}$. Esto es lo que hicimos en el párrafo anterior.

Así, si hemos estimado σ^2 con datos diarios, entonces:
la Volatilidad semanal se estima por: $\sqrt{5}\sigma$
la Volatilidad mensual se estima por: $\sqrt{21}\sigma$
la Volatilidad anual se estima por: $\sqrt{252}\sigma$

Ejemplo: Si la varianza de las rentabilidades diarias de un activo es 0,001, y considerando 250 dias de riesgo (mercado) a lo largo del año, la volatilidad del activo sería 50%. Si la volatilidad anual del activo es 36%, la desviación típica de sus rentabilidades semanales es 0,05.

Como ya discutimos en la Sección 3.d, esta práctica habitual de extrapolar una estimación de la volatilidad a un intervalo amplio de tiempo es aplicable en rigor sólo al cálculo de la *volatilidad de rentabilidades continuas*, y se basa en la hipótesis de que los datos básicos utilizados, ya sean rentabilidades mensuales, diarias, horarias, etc. son *independientes.* También supone que la varianza es constante en el tiempo.

Si se está calculando la varianza de las rentabilidades, deben ser independientes éstas, no necesariamente los precios o cotizaciones que las generaron. Esto se corresponde con la extendida idea de que el *logaritmo del precio* de un activo financiero tiene una estructura estocástica de camino aleatorio. En tal caso, la *rentabilidad* de dicho activo, definida como la primera diferencia del logaritmo del precio, es un *ruido blanco.* Es decir, la serie temporal de rentabilidades obedece a un proceso formado por variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, posiblemente con distribución Normal, etc., y el método de extrapolación de la varianza es correcto.

Agregación temporal de varianza con rentabilidades autocorrelacionadas

Si las rentabilidades no fuesen independientes a lo largo del tiempo, su suma tendría una distribución Normal, pero su varianza no sería tan sencilla como $T\sigma^2$. Como antes, un análisis similar aplica a intervalos de tiempo n y m, con

$n = km$. Cuando las rentabilidades están autocorrelacionadas, la acumulación temporal de varianzas del modo que hemos descrito es un estimador sesgado del riesgo. En el caso de tipos de interés, existe generalmente elevada autocorrelación positiva, mientras que en rentabilidades bursátiles diarias de valores individuales se detecta, en ocasiones, autocorrelación negativa. Como la varianza de una suma de variables es igual a la suma de varianzas más el doble de su covarianza, tenderemos a subestimar la varianza de la rentabilidad sobre el horizonte temporal amplio en el caso de autocorrelación positiva (creeremos que, sobre el período amplio, la rentabilidad es menos volátil de lo que realmente es), y a sobre-estimarla en el caso de autocorrelación negativa (creeremos que es más volátil de lo que realmente es).

Si la rentabilidad de un activo tiene una estructura de autocorrelación representada por un proceso autoregresivo de primer orden (AR(1), la varianza de la rentabilidad continua sobre h periodos: $r_{ht} = \sum_{i=0}^{h-1} r_{t+i}$ es:

$$Var(r_{ht}) = \sum_{i=0}^{h-1} Var(r_{t+i}) + 2\sum_{i \neq j}^{h-1} Cov(r_{t+i}, r_{t+j}) = \sigma^2 \,(h+2) \sum_{i=0}^{h-1} (h-i)\rho^i$$

y utilizando la identidad:

$$\sum_{i=1}^{n} (n-i+1)x^i = \frac{x}{(1-x)^2}[n(1-x) - x(1-x^n)], \; |x| < 1.$$

Si hacemos $x = \rho$ y $n = h-1$, tenemos:

$$Var(r_{ht}) = \sigma^2 \left(h + 2\frac{\rho}{(1-\rho)^2}[(h-1)(1-\rho) - \rho(1-\rho^{h-1})] \right)^{1/2}$$

Ejemplo: Suponga que las rentabilidades mensuales de un hedge fund sobre los tres últimos años tienen una desviación típica de 5% ¿cual sería su estimacion de la volatilidad del fondo bajo el supuesto de rentabilidades independientes? ¿y bajo el supuesto de que tengan una autocorrelación de 0,25? R=17,32%; 21,86%.

Esta consideración sugiere, por tanto, que un modo de contrastar la independencia de rentabilidades consiste en analizar si la varianza muestral aumenta linealmente con la amplitud de la ventana muestral. En variables con covariación positiva, al agregar temporalmente tendremos un crecimiento más que lineal de la varianza, y lo contrario ocurrirá bajo covariación negativa. En definitiva, la agregación de volatilidades descansa en la independencia temporal de las rentabilidades del activo en cuestión, lo que equivale a que el precio de dicho activo obedezca a una estructura de camino aleatorio. Existen distintos enfoques estadísticos para el contraste de dicha hipótesis, que pueden verse en la sección **??**

La existencia de autocorrelación en rentabilidades no es necesariamente un resultado negativo, pues ofrece la posibilidad de predecir rentabilidades. Por esta razón, sería contraria a la noción de mercados eficientes, según la cual, el precio actual resume toda la información relevante acerca del precio futuro, lo que equivale a decir que el precio sigue un comportamiento de camino aleatorio.

3.3 El supuesto de rendimientos lognormales

Se dice que una variable aleatoria X, definida sobre el subespacio de números reales positivos, sigue una distribución de probabilidad Lognormal cuando la variable aleatoria que se obtiene como su logaritmo neperiano, $Y = ln(X)$, sigue una distribución Normal(μ,σ^2). En tal caso, la función de densidad de Y es:

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \ -\infty < y < \infty$$

y la función de densidad de X,

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \ x > 0$$

La esperanza y varianza de X son:

$$E(X) = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}; \ Var(X) = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

Es habitual suponer que el proceso seguido por el precio o cotización de un activo es tal que el rendimiento porcentual bruto correspondiente a un período sigue una distribución lognormal, es decir, que su logaritmo, el tipo continuo, tiene una distribución Normal:

$$\frac{r_t}{100} = \ln(1 + \frac{R_t}{100}) \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$$

Una ventaja de suponer una distribución lognormal para el rendimiento porcentual es que asegura que $1+R_t/100$ sea no negativo, lo que no ocurriría si supusiéramos Normalidad de R_t.

Pero conviene recordar que la distribución lognormal no es simétrica de modo que bajo este supuesto, el tamaño medio de las rentabilidades por encima de la media es superior al promedio de las rentabilidades por debajo de la media.

Bajo este supuesto, la esperanza y varianza de la rentabilidad simple R_t son:

$$E(R_t/100) = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2} - 1; \ Var(R_t/100) = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

estas fórmulas son muy útiles para obtener predicciones a partir de modelos estimados para los logaritmos de los rendimientos, pues si μ es la predicción para el logaritmo del rendimiento y σ^2 es la varianza condicional estimada para dicho logaritmo del rendimiento (es decir, la varianza de la innovación del proceso para el logaritmo del rendimiento), entonces la predicción para el propio rendimiento y la varianza asociada, que nos servirá para construir intervalos de confianza para dicha predicción, se obtienen a partir de las expresiones anteriores.

En el otro sentido, si m_1 y m_2 son la esperanza y varianza del proceso de rentabilidades, los momentos análogos para el logaritmo de la rentabilidad son,

$$E(r_t) = \ln\left(\frac{m_1+1}{\sqrt{1+\frac{m_2}{[1+m_1]^2}}}\right);\ Var(r_t) = \ln\left(1+\frac{m_2}{[1+m_1]^2}\right)$$

3.4 Contrastes de Normalidad

Bera y Jarque propusieron el contraste de Normalidad que lleva su nombre, que utiliza los coeficientes de asimetría AS y de curtosis K:

$$BJ = T\left(\frac{AS^2}{6}+\frac{(K-3)^2}{24}\right)$$

que se distribuye como una chi-cuadrado con 2 grados de libertad.

Este es un contraste paramétrico de la hipótesis de Normalidad, existiendo asimismo varios contrastes no paramétricos, quizá más aconsejables:

- el contraste de Kolmogorov-Smirnov, que se basa en el supremo de los valores absolutos de las diferencias entre la función de distribución empírica y la función de distribución teórica de una variable Normal de esperanza y varianza iguales a las muestrales. Para ello se divide el rango observado en intervalos pequeños, y se comparan los valores de ambas funciones en uno de los extremos de cada intervalo.

- el contraste chi-cuadrado o de Pearson, basado en la comparación de las frecuencias teórica y empírica en cada uno de los subintervalos en que se ha dividido previamente el rango de valores observados.

Al igual que muchos contrastes cuyo estadístico hace intervenir al tamaño muestral de modo multiplicativo, el contraste de Bera-Jarque tiene una peculiaridad, y es que para tamaños muestrales elevados, el estadístico del contraste toma un valor alto, que puede conducir al rechazo de la hipótesis nula en "demasiadas ocasiones". Dicho de otro modo, para muestras grandes, el contraste tiene un tamaño muy superior al teórico.

3.5 Intervalo de confianza para la varianza

Si la población de la que se extrae una muestra aleatoria simple es Normal, con esperanza μ y varianza σ^2, ambas constantes, y s_x^2 denota la cuasi-varianza muestral, el cociente $\frac{(n-1)s_x^2}{\sigma^2}$ sigue una distribución χ^2_{n-1}. Por tanto, si observamos una muestra de 25 observaciones sucesivas de una rentabilidad que estamos dispuestos a suponer que evoluciona independientemente en el tiempo, y calculamos una cuasi-varianza muestral de 12,5, tendremos que $\frac{(24)(12,5)}{\sigma^2}$ se distribuye como una χ^2_{24}.

Por tanto, tendremos:

$$0,95 = P\left[12,4 \leq \frac{(24)(12,5)}{\sigma^2} \leq 39,4\right] = P\left(7,61 \leq \sigma^2 \leq 24,19\right)$$

un intervalo no muy preciso, que tendríamos que tener en cuenta al establecer nuestras conclusiones acerca de la volatilidad de un mercado. Por supuesto, que el número de datos utilizados es muy importante para la precisión de la estimación y, como consecuencia, para la amplitud del intervalo de confianza. Si la cuasi-varianza de 12,5 hubiese sido obtenida a partir de 10 datos, entonces $\frac{125}{\sigma^2}$se distribuiría como una χ^2_{10}, y tendríamos:

$$0,95 = P\left[3,25 \leq \frac{125}{\sigma^2} \leq 20,5\right] = P\left(6,10 \leq \sigma^2 \leq 38,46\right)$$

Ejemplo: Suponga que las rentabilidades diarias del FTSE100 siguen una distribución Normal

3.6 Desviación típica de los estimadores de varianza y desviación típica

De la definición de varianza, suponiendo que el periodo de tiempo es suficientemente pequeño como para considerar que la rentabilidad media es cero, y que las rentabilidades son independientes en el tiempo e igualmente distribuidas tenemos, tomando varianzas:

$$\hat{\sigma}^2 = T^{-1}\sum_{i=1}^{T}(r_{t-1} - \bar{r})^2 \Rightarrow Var(\hat{\sigma}^2) = T^{-1}\sum_{i=1}^{T} Var(r^2_{t-1})$$

Como $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$,tenemos: $Var(r^2_t) = E(r^4_t) - \left[E(r^2_t)\right]^2$ .Pero: $E(r^2_t) = \sigma^2$. Por otra parte, si las rentabilidades siguen una distribución normal, entonces: $E(r^4_t) = 3\sigma^4$. Por tanto,

$$Var(\hat{\sigma}^2) = T^{-1}\sum_{i=1}^{T}\left[3\sigma^4 - (\sigma^2)^2\right] = 2T^{-1}\sigma^4$$

por lo que la desviación típica de la varianza muestral, como estimador de la varianza poblacional es:

$$DT(\hat{\sigma}^2) = \sqrt{\frac{2}{T}}\sigma^2$$

o, en términos porcentuales:

$$\frac{DT(\hat{\sigma}^2)}{\hat{\sigma}^2} = \sqrt{\frac{2}{T}}$$

Veamos ahora como calcular la desviación típica del estimador de la desviación típica. Esto no es un juego de palabras: necesitamos estimar la desviación típica para estimar la volatilidad de una determinada rentabilidad. Y la desviación típica dl estimador es la medida de la precisión con que hemos estimado la volatilidad, cuestión sin duda de toda importancia para el analista de riesgos como para el gestor de carteras. Podriamos pensar que basta con tomar la raiz cuadrada de $DT(\hat{\sigma}^2)$ que acabamos de calcular, para obtenr la desviación típica de $\hat{\sigma}$. Pero no es tan sencillo.

Como probamos más abajo, la desviación típica de la desviación típica muestral es, aproximadamente:

$$DT(\hat{\sigma}) \approx \sqrt{\frac{1}{2T}}\sigma$$

por lo que, como porcentaje de la volatilidad:

$$\frac{DT(\hat{\sigma})}{\hat{\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{2T}}$$

mientras que para el coeficiente de correlación tenemos que, si las rentabilidades de dos activos son, cada una de ellas, independientes en el tiempo e identicamente distribuidas, con distribución Normal y media cero, entonces el coeficiente de correlación, dividido por su desviación típica tiene una distribución t-Student con T grados de libertad, y varianza:

$$Var(\hat{\rho}) = (T-2)^{-1}(1-\rho^2)$$

de modo que:

$$\frac{\hat{\rho}\sqrt{T-2}}{\sqrt{1-\hat{\rho}^2}} \sim t_T$$

Ejemplo: Una correlación lineal de 0,20, calculada con 36 rentabilidades de dos activos ¿es significativamente distinta de cero? R: No.

Para probar dicho sobre la desviación típica, recordemos que si y es una función monótona y diferenciable de la variable aleatoria x, la función de densidad de y viene dada por: $g(y) = |dx/dy|\, h(x)$. Si $y = x^{1/2}$, entonces $|dx/dy| = 2y$, por lo que $g(y) = 2yh(x)$.

Por otra parte, aproximando $f(x)$ alrededor de $E(x) = \mu$, tenemos:

$$f(x) \approx f(\mu) + f'(\mu)(x-\mu) + \frac{1}{2}f''(\mu)(x-\mu)^2$$

por lo que:

$$\begin{aligned} E(f(x)) &= f(\mu) + \frac{1}{2}f''(\mu)Var(x) \\ E(f(x)^2) &= f(\mu)^2 + \left[f'(\mu)^2 + f(\mu)f'(\mu)\right] Var(x) + \frac{1}{4}\left[f''(\mu)\right]^2 (Var(x))^2 \end{aligned}$$

y:

$$Var(f(x)) \approx E(f(x)^2) - [E(f(x))]^2 = (f'(\mu))^2 \, Var(x) = [f'(E(x))]^2 \, Var(x)$$

En particular, cuando $y = f(x) = \sqrt{x^2}$, tenemos:

$$Var(y) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x^2}} \right)^2 Var(x)$$

Por tanto:

$$Var(\hat{\sigma}) \approx \frac{1}{4\hat{\sigma}^2} Var(\hat{\sigma}^2) = \frac{\sigma^2}{2T}$$

3.7 Rentabilidad en mercados cotizados en tipos de interés

Si se trabaja con datos de un mercado que cotiza en TIRes o en tipos de interés, como sucede con un mercado interbancario, calculamos la rentabilidad de dicho mercado considerando la variación en el precio de una cartera invertida en el mismo. La rentabilidad en dicho mercado no es el tipo de interés cotizado, excepto si se mantiene el activo a vencimiento. Si queremos generar la rentabilidad sobre un periodo de tiempo, actuamos del siguiente modo: generamos un índice de precios sobre 100, mediante la expresión: $P_r = 100/(1 + r_t)$, y calculamos la variación porcentual o logarítmica en dichos precios. Por ejemplo, si una rentabilidad cotizada se ha reducido de 5,32% a 4,25%, la cartera habrá incrementado su valoración en el mercado. El descenso de tipos se puede evaluar por medio de:

$$\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{\frac{100}{1+r_t} - \frac{100}{1+r_{t-1}}}{\frac{100}{1+r_{t-1}}} = \frac{\frac{100}{1{,}00425} - \frac{100}{1{,}0532}}{\frac{100}{1{,}0532}} = \frac{95,9233 - 94,9487}{94,9487} = \frac{0,9476}{94,9486} = 0,010264$$

y la revalorización habrá sido del 1,02%.

Un procedimiento más simple, aunque quizá más dificil de recordar, consiste en sumar 1 a las rentabilidades porcentuales cotizadas y calcular su tasa de variación:

$$\frac{R_t}{100} = \left(\frac{1 + r_t}{1 + r_{t-1}} \right)^{-1} - 1 = \frac{P_t^{-1}}{P_{t-1}^{-1}} = \left(\frac{1,0425}{1,0532} \right)^{-1} - 1 = 1,010264 - 1 = 0,010264$$

obteniéndose en ambos casos la misma rentabilidad, de 1,0264%.

3.8 Rango esperado de precios bajo el supuesto de Normalidad

Si la rentabilidad de un activo obedece a una distribución Normal, la probabilidad de que dicha rentabilidad se sitúe entre su esperanza matemática y un rango alrededor de ella de más o menos una desviación típica, es del 68,26%. Pasa a ser del 95,46% cuando el intervalo tiene dos desviaciones típicas de amplitud, y es del 99,87% para tres desviaciones típicas. El intervalo de confianza del 95% está delimitado por la esperanza matemática más y menos 1,96 veces la desviación típica, mientras que el intervalo de confianza del 99% está delimitado por la esperanza matemática más y menos 2,33 veces la desviación típica.

Si creemos que el proceso de cotizaciones no es estacionario, entonces este ejercicio es bastante cuestionable, puesto que se basa en la hipótesis de que la distribución de probabilidad del proceso de cotizaciones que se analiza es relativamente estable. En general, la ausencia de estacionariedad va a aparecer en la forma de esperanza y varianza cambiantes en el tiempo, por lo que intervalos centrados alrededor de una cotización media histórica pueden ser muy poco representativos de la evolución futura del mercado.

Por tanto, si la variable que nos interesa no es estacionaria, hemos de transformarla en una variable estacionaria (por ejemplo, tomando primeras diferencias, o primeras diferencis de su logaritmo) y construir los intervalos de confianza para dicha transformación estacionarias para despues transformarlos en intervalos de confianza para la variable que nos interesa. Esta transformación de intervalos de confianza puede hacerse porque los percentiles se transforman adecuadamente al aplicar transformaciones monótonas.

Existe un modo razonable de construir *intervalos de valores esperados* bajo los supuestos que hemos hecho acerca de la distribución de probabilidad de las *rentabilidades continuas*. Retomemos la hipótesis de que $\ln(1+R_t)$ o, lo que es lo mismo, $\ln(P_t/P_{t-1})$, se distribuye como una Normal(μ,σ^2) y, por estabilidad temporal, lo mismo ocurre con $\ln(P_{t+1}/P_t)$. Ello significa que, una vez que $\ln(P_t)$ es conocido, entonces podemos considerar que $\ln(P_{t+1})$ se distribuye como una Normal($\mu+\ln(P_t)$, σ^2).

La cotización media del IBEX35 durante diciembre de 1997 fue de 7.152,52. A lo largo del mismo mes, la volatilidad diaria *de las cotizaciones*, medida por su desviación típica, fue de 91,93. Bajo el supuesto de que la cotización del índice sigue una distribución Normal con *esperanza y varianza constantes*, los fundamentos estadísticos que acabamos de recordar nos permitirían construir intervalos de confianza para las cotizaciones de días futuros, llevando a izquierda y derecha de la cotización mensual media, tomada como predicción de la cotización en días sucesivos, un determinado número de veces su desviación típica. Esto nos produciría intervalos de confianza que cambiarían a través del tiempo según fuesen variando la predicción puntual de la cotización futura, y la desviación típica muestral.

Para ello, es importante observar que la desviación típica de las rentabilidades fue, a lo largo de diciembre de 1997, de 0,0135363. Como primera aproximación, vamos a ignorar la rentabilidad diaria media durante diciembre de 1997, que fue de 0,198%, y en cuya repetición quizá el inversor no quiera confiar. Este es el parámetro μ de la expresión anterior, que supondremos igual a cero, por lo que centraremos nuestro intervalo exclusivamente alrededor de $\ln(P_t)$.

En tales condiciones, el rango de cotizaciones del 68,26% para el día siguiente de mercado (primer día de mercado de enero) es de:

$$\ln(7152,52) - \sqrt{1}(0,0135363) < \ln P_{t+1} < \ln(7152,52) + \sqrt{1}(0,0135363)$$

es decir,

$$8,8616387 < \ln P_{t+1} < 8,888756 \Rightarrow 7.056,4 < P_{t+1} < 7.250,0$$

siendo el último un cálculo aproximado.

El rango de cotizaciones del 95,46% para el día siguiente de mercado es de:

$$\ln(7152,52) - 1,96\sqrt{1}(0,0135363) < \ln P_{t+1} < \ln(7152,52) + 1,96\sqrt{1}(0,0135363)$$

es decir:

$$8,848147 < \ln P_{t+1} < 8,902293 \Rightarrow 6.961,5 < P_{t+1} < 7.348,8$$

mientras que el rango del 99% está determinado por:

$$\ln(7152,52) - 2,33\sqrt{1}(0,0135363) < \ln P_{t+1} < \ln(7152,52) + 2,33\sqrt{1}(0,0135363)$$

es decir:

$$8,843680 < \ln P_{t+1} < 8,906760 \Rightarrow 6.930,5 < P_{t+1} < 7.381,7$$

lógicamente, más amplio que el anterior.

Por último, el rango del 99% para cinco días de negociación (una semana) después, es:

$$\ln(7152,52) - 2,33\sqrt{5}(0,0135363) < \ln P_{t+1} < \ln(7152,52) + 2,33\sqrt{5}(0,0135363)$$

es decir:

$$8,804695 < \ln P_{t+1} < 8,945745 \Rightarrow 6.666,5 < P_{t+1} < 7.675,2$$

Puede observarse que:

- los intervalos construidos no son centrados en torno a la cotización del día, 7.152,52, como consecuencia del supuesto de lognormalidad, que hace más probables aumentos importantes que descensos importantes (es decir, el incremento medio esperado es mayor que el descenso medio esperado),
- la amplitud de los intervalos aumenta con el grado de confianza que queremos tener en que el intervalo construido contenga a la cotización que se pretende anticipar,
- la amplitud de los intervalos aumenta con el horizonte temporal para el cual establecemos la predicción.

Con este procedimiento podemos aprovecharnos de la aditividad de las rentabilidades continuas. Recordemos que esta propiedad garantiza que la rentabilidad continua sobre un determinado período de tiempo puede obtenerse agregando las rentabilidades continuas sobre subperíodos del mismo. Además, si las rentabilidades continuas son independientes, y cada una de ellas sigue una distribución Normal, todas ellas con igual esperanza y varianza, entonces su suma obedece asimismo una distribución Normal, con esperanza y varianza igual a la esperanza y varianza de cada una de las rentabilidades sobre un subperíodo, multiplicadas por el número de rentabilidades incluido en el período amplio.

Por tanto, si quisiésemos tomar en consideración el incremento diario medio en rentabilidad, estimado en un 0,198%, cuando calculamos un rango admisible para dentro de una semana, lo que haríamos sería añadir 5 veces 0,00198 al logaritmo de la cotización actual, 7.152,52, antes de tomar 2,33 veces a su izquierda y a su derecha, la desviación típica, de 0,0135363.

Así,

$$[ln(7152,52)+5\,(0,00198)]-2,33\sqrt{5}(0,0135363) < lnS << [\ln(7152,52)+50\,(,00198)]+2,33\sqrt{5}(0,0135363)$$

es decir,

$$6.731,8 < S < 7.751,5$$

4 El uso de ventanas móviles en el cálculo de la varianza

Una generalización importante en el análisis de datos financieros, consiste en considerar los estadísticos muestrales no como constantes, sino siendo a su vez funciones del tiempo, en cuyo caso estaremos interesados en disponer de *series temporales* de los mismos. Si identificamos volatilidad con desviación típica, sólo generando series temporales de la varianza de su rentabilidad podremos hablar de variaciones en la volatilidad de dicho activo.

Sin embargo, la varianza es un momento poblacional o muestral y, como tal es constante. ¿Cómo podemos generar una serie temporal para la varianza? Utilizando las denominadas *ventanas muestrales*, que son submuestras cortas, cada una de las cuales se obtiene a partir de la previa, añadiendo un último dato, y prescindiendo del primero. La amplitud de la ventana ha de ser suficiente como para creer que, con cada una de ellas podemos estimar el parámetro en cuestión (por ej., la varianza) con suficiente aproximación. De este modo, estaremos generando un valor numérico de la varianza en cada instante para el cual tenemos un dato. Sólo perderemos un número de observaciones iniciales, igual al número de ellas incluidas en cada ventana. Si, por ej., cada ventana consta de 20 datos, entonces podremos generar datos de varianza a partir de la observación 21.

Hay que mantener un equilibrio, no siempre fácil, al decidir la amplitud de la ventana que se utiliza en el cálculo de la varianza: por un lado, una ventana más corta tendrá más posibilidad de utilizar una media estable, y representará mejor la situación actual, pero la varianza resultante será bastante volátil, entre otras cosas, porque no la estimaremos con suficiente precisión. Por otro, una ventana amplia proporcionará una medida de volatilidad suave, pero calculada respecto a una medida de referencia posiblemente no constante. En la valoración de opciones, se recomienda generalmente utilizar una ventana de longitud igual al período que resta hasta el vencimiento de la opción.

Example 2 *El Gráfico Vol_m_Nikkei presenta la volatilidad del NIKKEI, medida a través del promedio de las rentabilidades diarias, al cuadrado, calculadas con datos de 1 mes de mercado. Por tanto, se han utilizado ventanas móviles de 22 datos (por simplicidad, se han utilizado el mismo número de datos, incluso en presencia de festivos). Las desviaciones típicas son anualizadas. La elevada volatilidad de algunos meses de agosto y octubre en años recientes aparece claramente en el gráfico. Este es un mercado con un nivel de volatilidad relativamente alto. Pero lo más significativo son las fluctuaciones que experimenta su nivel de volatilidad (por ej., mensual). En este mercado, la volatilidad es muy errática. Por comparación, en el Gráfico Vol_m_t_Nikkei se muestra asimismo la serie temporal de volatilidades, calculadas sobre una ventana móvil de 3 meses (66 sesiones). Puede apreciarse que la serie temporal de volatilidad calculada con una ventana muestral más amplia es más suave que la calculada con una ventana muestral más corta. Esto siempre ocurre así, por construcción. Este gráfico continúa mostrando notables variaciones en el nivel de volatilidad.*

Los gráficos V_m_Nikkei_Milan y V_M_Swiss superponen las series temporales de volatilidades, con ventanas trimestrales, para el índice de Bolsa de Milan, por un lado, y el DAX 30 y el indice MCI-Swiss por otro, en ambos casos, para un período largo: enero 1990 a septiembre 1999. Los gráficos sugieren que existe cierta asociación entre las fluctuaciones que experimenta la volatilidad en estos mercados, aunque la relación es menos que perfecta. Tanto el DAX como el MCI-Swiss han sido algo menos volátiles que el índice de Milán, pudiendo apreciarse una mayor diferencia en el caso del índice suizo, que alcanza niveles de volatilidad claramente inferiores. El Gráfico V_t_SP500_Nikkei presenta la volatilidad trimestral comparada del Nikkei y del índice S&P 500, pudiendo apreciarse la mucha mayor fluctuación experimentada por el nivel de volatilidad del mercado japonés. Además, los momentos álgidos de volatilidad en el Nikkei no parecen venir acompañados de una situación similar en el índice estadounidense.

Sin embargo, si nos interesa el grado de asociación existente entre los niveles de volatilidad en dos mercados, es difícil apreciarlo en un gráfico temporal. Es mucho más útil considerar *nubes de puntos* de volatilidades para los mismos pares de índices, que aparecen en los cuatro gráficos de nubes de puntos entre volatilidades, construidos desde enero de 1996, que se contienen en el archivo Excel. Se aprecia en ellos que existe una apreciable asociación entre los niveles de volatilidad de los índices europeos, si bien no tanto entra la volatilidad experimentada por el Nikkei y la del S&P 500, como ya sugería el gráfico temporal. Si bien es fácil imaginar una relación aproximadamente unitaria entre los niveles de volatilidad de los índices MCI-Swiss, Milán y DAX, la situación es menos clara en la comparación entre las bolsas de Tokio y Nueva York.

Sería interesante estimar modelos estadísticos de relación (regresión) entre estos pares de volatilidades: por un lado, un modelo que relacionase sus niveles en cada día de la muestra podría conducir a una pendiente próxima a la unidad en el caso de las comparaciones entre mercados europeos. Ello sería, además, consistente con la idea de que existe quizá un factor de volatilidad que explica una buena parte de los niveles de volatilidad en estos mercados. En la comparación Nikkei vs. S&P 500, la relación parece estar bastante condicionada por los episodios de alta volatilidad que han sido comunes a ambos mercados. Por último, puede verse que la asociación entre los niveles de volatilidad trimestral es bastante mayor que la existente entre los niveles de volatilidad mensual, como quizá cabría esperar.

El mayor interés que presenta el cálculo de la varianza en la forma de una serie temporal es que, con ella, podemos plantearnos la *predicción de la volatilidad futura*, que discutiremos en detalle más adelante. Un segundo aspecto de importancia reside en la capacidad que nos prestan las series temporales de cuantificar el grado de asociación de la volatilidad en distintos mercados, así como las características dinámicas de su relación. Si detectamos que una mayor volatilidad en un índice de mercado, como Dow Jones, *anticipa* un aumento de volatilidad en otro índice, como el DAX, quizá podamos utilizar dicha información para mejorar nuestras predicciones de la volatilidad en este último mercado.

Ahora bien, ¿sobre qué intervalo de tiempo debe estimarse la volatilidad? Ya hemos dicho que la elección de una longitud para la ventana muestral dista de ser trivial. En algunos casos, como cuando se quiere extrapolar hacia el futuro (predecir) volatilidad, es habitual utilizar una misma longitud en su cálculo que la del período sobre el que se quiere predecir. Esto es más evidente en algunos casos, como los conos de volatilidad que veremos más adelante, que en otros. Que no haya unanimidad sobre cuestiones de este tipo ayuda a generar mercado, pues distintos agentes valorarán la volatilidad de distinta manera, entre otras cosas, porque estén interesados en distintos horizonte de inversión.

4.1 Volatilidad ponderando más el pasado reciente

Pero, incluso fijado un intervalo temporal ¿debemos de dar a todas las observaciones pasadas la misma relevancia en el cálculo de la volatilidad? Puede parecer razonable ponderar más las observaciones más recientes. Utilizando las potencias de un factor λ, $0<\lambda<1$, conseguimos que las observaciones vayan perdiendo importancia cuanto más se alejan en el tiempo.

La medida de volatilidad es entonces:

$$\sigma^2 = \sqrt{\frac{1}{\Lambda}\sum_{i=1}^{n}\lambda^i x_{t-i}^2}$$

donde n es el número de datos utilizado en el cálculo de la volatilidad, y: $\Lambda = \sum_{i=1}^{n}\lambda^i = \lambda\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$, que se reduce a: $\Lambda = \frac{1}{1-\lambda}$ cuando no ponemos un límite al número de datos utilizado. En tal caso, el uso del factor λ substituye a la necesidad de fijar de antemano un número de observaciones para el cálculo de la volatilidad. Reducir el valor de λ equivale a acortar el intervalo temporal utilizado en la estimación.

Un análisis similar podría aplicarse al cálculo de la correlación entre dos rentabilidades:

$$\rho = \frac{1}{\Lambda}\sum_{i=1}^{n}\lambda^i x_{t-i}y_{t-i}$$

con el objeto de aminorar el efecto de acontecimientos relativamente alejados.

Example 3 *La pestaña Volat_pond muestra este cálculo, aplicado a la volatilidad del DAX 30 y el índice MEXICO IPC durante 1999 (hasta 16/8), utilizando como pesos las potencias de 0,97 y 0,66, alternativamente. Puede apreciarse que los niveles de volatilidad disminuyen, en este caso, al aplicar las ponderaciones relativas y tanto más cuanto menor es la ponderación, es decir, cuanto más se descuentan los valores más alejados en el tiempo. Esto se debe a que durante el período considerado, los niveles de volatilidad fueron superiores al comienzo que al final de la muestra.*

4.2 Bandas de confianza para rentabilidades

Exercise 4 *Este tipo de análisis proporciona una primera evaluación acerca de si un dato de mercado de un día concreto, puede considerarse como anómalo. Los Gráficos Bandas y Bandas_corto muestran, la rentabilidad del índice S&P 500 (variación en cotización), junto con las bandas de confianza del 99%. El primer gráfico cubre desde enero 1990 a septiembre 1999, mientras que el segundo comienza en enero 1997.*

En segundo lugar, este tipo de evaluaciones es claramente importante al diseñar estrategias de cobertura, pues establecemos afirmaciones acerca del rango esperado de fluctuación de la rentabilidad de un determinado activo. Es asimismo importante al calcular el Valor en riesgo de un determinado activo o mercado.

En este sentido, debe notarse que, aunque nos hemos limitado a calcular intervalos de confianza, en realidad disponemos de una distribución de probabilidad centrada alrededor de la última cotización o precio observados. Por consiguiente, no sólo podemos construir el rango de fluctuación esperado a un determinado nivel de confianza, sino que también podemos asociar probabilidades a cada uno de los posibles eventos, dentro o fuera de dicho rango.

Este análisis se ha basado en dos supuestos:

- Independencia de las rentabilidades sobre subperíodos no solapados. Este supuesto facilita enormemente el cálculo. Cuando no se cumple, debe establecerse una modelización de la correlación temporal, construir el intervalo de confianza para la innovación y deducir de dicho intervalo el correspondiente para la rentabilidad. Por ejemplo, si creemos que la estrcutura de autocorrelación es:

$$r_t = a + \beta r_{t-1} + \varepsilon_t$$

con $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, estimaremos dicho modelo por mínimos cuadrados, y tendremos: $0,95 = P(-1,96\hat{\sigma}_\varepsilon \leq \varepsilon_t \leq 1,96\hat{\sigma}_\varepsilon)$, con $\hat{\sigma}_\varepsilon = \frac{1}{T-1}\sum_{t=2}^{T}(r_t - (\hat{a} + \hat{\beta}r_{t-1}))^2$, por lo que:

$$0,95 = P\left(\hat{a} + \hat{\beta}r_{t-1} - 1,96\hat{\sigma}_\varepsilon \leq r_t \leq \hat{a} + \hat{\beta}r_{t-1} + 1,96\hat{\sigma}_\varepsilon\right)$$

obteniendo así el intervalo de confianza para r_t.

- Normalidad de las rentabilidades continuas. En muchas ocasiones, tal supuesto no resulta admisible para variables de rentabilidad financiera, como hemos visto ya en algunos ejemplos. En ocasiones, las distribuciones de frecuencias presentan cierto grado de asimetría. Más frecuentemente, en el caso de variables financieras, la distribución muestral o de frecuencias de las rentabilidades observadas presenta desviaciones respecto de su valor central que son mayores de lo que la Normalidad podría explicar. Dicho de otro modo, las colas de la distribución son muy gruesas o los valores extremos demasiado frecuentes, en relación con la distribución Normal.

- De hecho, este ejercicio puede utilizarse como back-testing para contrastar el supuesto mantenido de Normalidad, con varianza constante, a lo largo de toda la muestra histórica. Con un tamaño muestral grande, T, el número de excepciones, es decir, el número días en los que la rentabilidad cae fuera del intervalo de confianza de $\alpha\%$ debe ser aproximadamente igual al producto $T\alpha\%$. Un número de excepciones mayor podría indicar la existencia de colas gruesas (leptocurtosis) en la distribución de rentabilidades. Además, las excepcioens deberían repartirse equilibradamente entre rentabilidades excepcionalmente positivas y negativas, es decir, debería haber tantas excepciones por la izquierda d elos intervalos de confianza diarios, como por la derecha de los mismos.

5 Modelización y predicción de la volatilidad

Generalmente, consideramos que trabajamos con series temporales de rentabilidades de activos financieros observadas frecuentemente, pues es entonces cuando resulta habitual observar volatilidades cambiantes en el tiempo. En el caso más sencillo, consideramos que la rentabilidad obedece al proceso estocástico,

$$R_{t+1} = \sigma_{t+1} z_{t+1}, \text{ con } z_{t+1} \sim i., i.d., N(0, 1)$$

Una característica de los mercados financieros es que suelen observarse intervalos concretos de tiempo en los que sistemáticamente se produce cada día una alta volatilidad, seguidos de períodos de reducida volatilidad. Esto se manifiesta en que el cuadrado de las rentabilidades diarias tenga generalmente una alta autocorrelación.

En muchas ocasiones, la distribución de probabilidad de las rentabilidades es dependiente en el tiempo a través de los segundo momentos, aunque las propias rentabilidades no presenten autocorrelación. Cunado esto sucede, podria aparecer autocorrelación en las rentabilidades al cuadrado a través de la dependencia en la evolución temporal de σ_t^2. Por tanto, al corregir las rentabilidades del posible efecto persistente de la volatilidad, la autocorrelación en las rentabilidades al cuadrado debería desaparecer. El objetivo fundamental de la modelización de la evolución temporal de la volatilidad consiste precisamente en lograr que las rentabilidades estandarizadas al cuadrado R_t^2/σ_t^2 muestren ausencia de correlación temporal.

Si, además, las propias rentabilidades tienen autocorrelación (lo que es poco habitual en datos frecuentes), realizaremos este ejercicio de modelización con el cuadrado de las innovaciones del modelo que explica la evolución temporal de R_t. Es decir, modelizaremos la evolución temporal de las rentabiliades, por ejemplo:

$$R_{t+1} = \alpha + \beta R_t + \varepsilon_t$$

con $Var(\varepsilon_t) = \sigma_t^2$, la varianza de dichas innovaciones, y pretenderemos que los valores normalizados de ε_t carezcan de autocorrelación. En este caso, es ε_t quien tiene la representación que antes propusimos:

$$\varepsilon_{t+1} = \sigma_{t+1} z_{t+1}, \text{ con } z_{t+1} \sim i., i.d., N(0, 1)$$

En definitiva, la función de autocorrelación de las rentabilidades estandarizadas al cuadrado o de sus innovaciones al cuadrado es un estadístico fundamental en este análisis de modelización de la varianza. Una condición necesaria para pensar que la modelización de la varianza ha sido adecuada es que no exista este tipo de autocorrelacion.

Cuando se trabaja con varianzas cambiantes en el tiempo, una primera intuición para su estimación consiste en utilizar la expresión habitual de la varianza, pero sobre submuestras que vamos moviendo a lo largo de toda la muestra. Por ejemplo, calculamos la varianzaza entre los datos 1 y 250 y la tomamos como varianza en el dia 250 de la muestra; luego, tomamos la varianza entre los dias 2 y 251 como varainza el dia 251, y asi sucesivamente.

Nótese que con datos de frecuencia relativamente alta, la rentabilidad media de un activo es practicamente cero, por lo que el cuadrado de la rentabilidad es una aproximación a la varianza. En consecuencia, si queremos estimar el nivel de volatilidad el próximo día de mercado, una sencilla posibilidad es utilizar la volatilidad media observada en los últimos m días de mercado,

$$\sigma_{t+1}^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} R_{t-i}^2$$

En esta expresión se ha incorporado ya el supuesto habitual de que, trabajando con rentabilidades en frecuencias altas, la rentabilidad media es prácticamente cero. Además, su estimación numérica podría introducir mayor distorsión que la incorporación directa de una valor medio nulo. Una ventaja de esta expresión es que nos permite generar una estimación del nivel de volatilidad al cierre del mercado en el período t, sin necesidad de efectuar ningún cálculo adicional. Tiene varias desventajas:

- no es claro cómo debe elegirse el número de días m . Este número suele denominarse *amplitud de la ventana de datos.* Un número reducido tenderá a generar una serie temporal de volatilidad muy errática, mientras que un número elevado de días generará una serie de volatilidad que puede considerarse excesivamente suave. La elección de la amplitud de ventana debe depender de la utilización que quiera hacerse de la previsión de volatilidad resultante.

- la serie de volatilidades reacciona al alza sólo después de que se haya observado en el mercado una rentabilidad diaria elevada. En este sentido, su naturaleza no es tanto la de anticipar el comportamiento futuro de la volatilidad, como el de reflejar el comportamiento reciente de la misma.

- precisamente por esta razón, es un indicador que va reaccionando a incrementos de volatilidad con cierto retraso, pues se trata de un promedio de los niveles de volatilidad en los últimos m días de mercado.

- pondera por igual cada uno de los m días utilizados en su calculo. Ello hace que la presencia de un día de alta volatilidad elevará la previsión de volatilidad la primera ocasión en que dicha rentabilidad se utilice en el cálculo, y tenderá a mantener la volatilidad elevada durante m días, reduciéndose nuevamente de manera drástica. La función de autocorrelación de las rentabilidades al cuadrado sugiere bastante persistencia, siendo por tanto contraria a estas variaciones bruscas al inicio y al final del período de m dias.

5.1 Conos de volatilidad

Una vez que se dispone de la serie temporal de rentabilidades de un activo, puede calcularse su volatilidad muestral sobre intervalos de distinta amplitud temporal. Queremos representar el modo en que la volatilidad varía con la amplitud de dichos intervalos temporales. Ya sabemos que, bajo supuestos de independencia temporal de las rentabilidades, la varianza sería una función lineal de la amplitud del intervalo. Sin embargo, esta es una hipótesis que no siempre se cumple.

Para ello, seleccionamos distintas amplitudes para ventanas muestrales: semana, quincena, mes, trimestre, semestre, o año, y calculamos en cada período la volatilidad de la rentabilidad ofrecida por dicho activo desde el comienzo de cada una de dichas ventanas. De este modo, construimos una serie temporal de volatilidades para cada una de las ventanas seleccionadas.

Asi, fijada una determinada amplitud temporal, por ej., un mes, vemos cómo ha ido cambiando la volatilidad a través del tiempo: si estamos a 15 de noviembre de 2001, y disponemos de datos desde comienzos de enero de 1996, empezaríamos calculando la volatilidad muestral para todo el mes de enero de 1996, por ejemplo (el comienzo es relativamente arbitrario), e iríamos añadiendo un día al final de la muestra, y quitando un día al comienzo de la misma, para volver a calcular la volatilidad registrada a lo largo de un mes de mercado. El procedimiento puede seguir hasta el último dato disponible. De este modo habremos generado una serie temporal de volatilidad, a lo largo de un mes, desde el 1 de enero de 1996, hasta el 15 de octubre de 2001.

En esta ocasión, sin embargo, no nos detenemos en analizar la variación temporal de la volatilidad, sino en estudiar algunos de sus estadísticos descriptivos, pues queremos analizar cómo cambian las propiedades de la volatilidad al cambiar la amplitud del intervalo de tiempo considerado. De hecho, vamos a considerar los valores que configuran la serie temporal de volatilidades de una determinada ventana como valores extraídos al azar de la distribución de probabilidad de la varianza correspondiente a dicha ventana. Inicialmente, tomamos los valores máximo y mínimo de las volatilidades así calculadas, y los representamos en la vertical sobre el eje de abscisas, en el punto correspondiente a 1 mes. El mismo procedimiento puede llevarse a cabo para cada una de las ventanas escogidas: para intervalos de 1 semana, comenzaríamos nuevamente al inicio de enero de 1996, obteniendo un máximo y un mínimo de las volatilidades calculadas sobre un rango temporal de una semana.

De este modo tendríamos una serie temporal para cada una de las volatilidades calculadas sobre intervalos de: una semana, dos semanas, un mes, trimestre, semestre, o año, y podríamos calcular su máximo y su mínimo. Cuando se representan dichos máximos y mínimos, se observa generalmente, que la volatilidad máxima es mayor en los intervalos menores (una semana) que en los intervalos amplios de tiempo. Por otra parte, la volatilidad mínima es menor asimismo cuando se calcula sobre intervalos breves de tiempo que cuando se calcula sobre intervalos amplios. Algo similar ocurre cuando tomamos percentiles simétricos para cada una de las series temporales de volatilidad, por ejemplo, percentiles 5% y 95%: el primero será menor para ventanas de una semana que para las de un mes, mientras que el percentil 95% será generalmente superior en las ventanas más cortas.

Esto se debe a que la volatilidad toma valores más extremos cuanto menor es el intervalo de tiempo sobre el que se ha calculado. Es como si las distribuciones de frecuencias de las distintas volatilidades tuviesen más curtosis cuanto menor fuese la amplitud de la ventana correspondiente. Dicho de otro modo, el rango de valores de volatilidad calculados sobre una semana, tiende a incluir al rango de volatilidades calculado sobre un mes, éste al rango calculado sobre tres meses, y así sucesivamente. De este modo, habremos obtenido un *cono de volatilidad.*

Los conos de volatilidad desempeñan un papel importante cuando se quiere apreciar si una opción está relativamente cara o barata en el mercado. Para ello, se trata de comparar la volatilidad implícita en el precio de mercado de la opción, con el rango de volatilidades que históricamente se ha estimado sobre un período de tiempo igual al que queda hasta la expiración de la opción.

Si, por ejemplo, la volatilidad implícita cuando queda un mes para la expiración de la opción está por debajo del percentil 10 de la distribución de frecuencias de las volatilidades que hemos calculado sobre intervalos de un mes, diremos que el mercado está infravalorando dicha opción, puesto que está dando un precio que se corresponde con una volatilidad que es poco creíble que se produzca, por lo reducido de su cuantía.

Esto significa que, en base a la experiencia histórica, la volatilidad que cabría esperar es superior a la que el mercado espera. Si no hay razones para que así resulte, habría que pensar que la opción está barata. Lo contrario ocurriría si la volatilidad implícita fuese superior al percentil 90, por ej.. Salvo que hubiese razones para esperar una volatilidad excesivamente alta para los registros históricos, habría que pensar que el mercado está sobrevalorando dicha opción. Al construir un cono de volatilidad cabría introducir un ajuste si realmente existe una discrepancia permanente entre los niveles de volatilidad histórica e implícita.

Los percentiles escogidos determinan el número de señales que puedan obtenerse acerca de posibles situaciones de *mispricing* (error en precio). Percentiles menos extremos producirán más señales de precio incorrecto, pero también mayor nivel de riesgo, porque las señales tenderán a ser incorrectas más frecuentemente. Seleccionar unos determinados percentiles es similar a seleccionar un determinado nivel de riesgo para el cálculo del VaR.

Las pestañas *Cono* 1 y *Cono* 2 presentan los cono de volatilidad para el SP500 y el DAX, calculados con datos de enero 1997 a agosto 1997, con percentiles 10 y 90.

5.2 El modelo de alisado exponencial (EWMA)

Al igual que cualquier otro momento de una distribución, la varianza otorga a todas las observaciones disponibles la misma ponderación. Por tanto, las desviaciones respecto del nivel de referencia tienen la misma importancia tanto si se produjeron recientemente como si se produjeron hace ya algún tiempo. Esto puede no ser totalmente deseable en el análisis de mercados financieros. En ocasiones, es conveniente abandonar este supuesto, dando pie a esquemas con ponderaciones del tipo,

$$\sigma_{t+1}^2 = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i R_{t-i}^2$$

donde $R_s = \ln(P_s/P_{s-1})$, es la rentabilidad de un determinado activo financiero, $\alpha_i > 0$, $\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i = 1$, y $1 < i < j < m-1 \Rightarrow \alpha_i > \alpha_j$. Esta expresión calcula la varianza como media ponderada de las rentabilidades al cuadrado. No utiliza las desviaciones respecto de la rentabilidad media, porque se supone que en datos de alta frecuencia, ésta es despreciable.

Si los pesos no suman uno, hay que dividir en la expresión anterior por su suma. En ocasiones se utilizan como pesos las potencias de una constante λ comprendida entre 0 y 1, $\alpha_i = \lambda^i$, lo que conduce a,

$$\sigma_{t+1}^2 = (1-\lambda) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i R_{t-i}^2 \tag{1}$$

La constante que aparece fuera del sumatorio, $1-\lambda$, hace que las ponderaciones sumen 1, ya que $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i = \frac{1}{1-\lambda}$.

Un esquema similar puede utilizarse para la covarianza entre las rentabilidades de dos activos:

$$\sigma_{12,t+1} = (1-\lambda) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i R_{1,t-i} R_{2,t-i}$$

En la práctica es preciso truncar estas expresiones:

$$\sigma_{t+1}^2 = (1-\lambda) \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i R_{t-i}^2 + \lambda^m \sigma_0^2$$

donde el último término, que es función de la volatilidad en un período inicial, σ_0^2, pierde relevancia con el paso del tiempo. La suma de los pesos en el primer término a la derecha de la igualdad es,

$$(1-\lambda) \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i = (1-\lambda) \frac{1-\lambda^m}{1-\lambda} = 1 - \lambda^m$$

por lo que la suma total de los pesos en el miembro derecho de la expresión anterior es igual a 1, como debería suceder.

Cuando se utiliza este modelo para generar una serie temporal de volatilidad histórica, es necesario comenzar a partir de una volatilidad inicial σ_0^2 , lo que puede hacerse de dos modos: 1) mediante la varianza de las rentabilidades previas a dicha fecha, que pasaría a ser tomada como origen de tiempo; es decir, utilizamos una primera submuestra (por ejemplo, 200 observaciones) para calcular dicha varianza y comenzamos a extrapolar la varianza en el tiempo partir de la observación 201; 2) alternativamente, suele partirse de un valor inicial igual a la varianza muestral de la serie temporal, es decir, se substituye σ_0^2

en la expresión anterior por la varianza muestral, $\frac{1}{T}\sum_{s=1}^{T} R_s^2$, que se interpreta como el nivel de volatilidad de largo plazo, obteniendo:

$$\sigma_{t+1}^2 = (1-\lambda)\sum_{i=0}^{m-1}\lambda^i R_{t-i}^2 + \lambda^m\left(\frac{1}{T}\sum_{s=1}^{T} R_s^2\right)$$

Un simple cálculo en (1) muestra la relación,

$$\sigma_{t+1}^2 = \lambda\sigma_t^2 + (1-\lambda) R_t^2$$

y, para covarianzas, como veremos más adelante:

$$\sigma_{12,t+1} = \lambda\sigma_{12,t} + (1-\lambda) R_{1t}R_{2t}$$

que suele denominarse como modelo de *alisado exponencial.* Tambien nos referiremos a él como un esquema EWMA (exponentially weighted moving average).

El parámetro λ es la *persistencia* en volatilidad o en covarianza. Mide la inercia en estos estadísticos: cuanto más presistentes sean, mayor será el tipo de rentabilidad extrema que deba observarse para que la estimación de la varianza o de la covarianza se altere significativamente. Por el contrario, $1-\lambda$ mide la *capacidad de reacción* de estos momentos, varianza y covarianza, a rentabilidades extremas, positivas o negativas.

Ejemplo: De acuerdo con este modelo, si el nivel de volatilidad estimado un determinado día es del 1%, y la variación porcentual en precio dicho día es del 2%, utilizando un parámetro $\lambda = 0.90$, estimaríamos una volatilidad para el día siguiente de 1,14%.

Este es el modelo utilizado por *RiskMetrics* que calcula la volatilidad del próximo dia, mediante un promedio ponderado del nivel de volatilidad que calculamos previamente para hoy, y el cuadrado de la rentabilidad del mercado hoy. RiskMetrics utiliza sistemáticamente un valor numérico $\lambda = 0.94$, por considerar que las estimaciones no difieren mucho entre diferentes activos.

Este modelo tiene alguna ventaja adicional, como es el hecho de que no necesita una gran cantidad de datos, pues las potencias de λ serán prácticamente cero al cabo de 100 períodos. Además, una vez calculada la volatilidad para un determinado día, la fórmula de actualización anterior no precisa utilizar nuevamente los datos históricos. El modelo considera esencialmente un horizonte infinito, no estando sujeto a los problemas de elección del número de días m que se utilizan en la estimación de volatilidad mediante ventanas móviles. Por último, es un modelo simple, que sólo tiene un parámetro para estimar, λ.

[EII.3.12]

El esquema EWMA nos puede permitir estimar determinados estadísticos importantes en el análisis de riesgos utilizando momentos muestrales calculados mediante EWMA. Así, tenemos betas:

$$\beta_{t\lambda} = \frac{Cov_\lambda(X_t, Y_t)}{Var_\lambda(X_t)}$$

y coeficientes de correlación:

$$\rho_{t\lambda} = \frac{Cov_\lambda(r_{1t}, r_{2t})}{Var_\lambda(r_{1t})Var_\lambda(r_{2t})}$$

utilizando el mismo valor numérico de λ en el cálculo de las covarianzas y varianzas. Para convertir una varianza EWMA en volatilidad, se procede como con la varianza habitual.

Tomando varianzas en (1) tenemos:

$$Var\left(\hat{\sigma}_\lambda^2\right) = \frac{(1-\lambda)^2}{1-\lambda^2} Var(r_t^2) = 2\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\sigma^4$$

o en términos porcentuales,

$$\frac{DT(\hat{\sigma}_\lambda^2)}{\hat{\sigma}_\lambda^2} = \sqrt{2\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}$$

Como vimos anteriormente, también tenemos la aproximación:

$$Var(\hat{\sigma}) = \frac{1}{4\hat{\sigma}^2} Var(\hat{\sigma}^2)$$

por lo que tenemos una desviación típica:

$$DT(\hat{\sigma}_\lambda) = \frac{1}{2\hat{\sigma}_\lambda} DT(\hat{\sigma}_\lambda^2) = \frac{1}{2\hat{\sigma}_\lambda}\sqrt{2\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}\hat{\sigma}_\lambda^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}\hat{\sigma}_\lambda \Rightarrow \frac{DT(\hat{\sigma}_\lambda)}{\hat{\sigma}_\lambda} = \sqrt{\frac{1-\lambda}{2(1+\lambda)}}$$

5.3 El modelo GARCH(1,1)

Un inconveniente del modelo previo es que no incluye una constante, por lo que el modelo no proporciona un nivel de referencia para la volatilidad a largo plazo. El modelo mejora si se incorpora un nivel de volatilidad de largo plazo, σ^2, que recibe una cierta ponderación γ en la expresión de la varianza,

$$\sigma_{t+1}^2 = \gamma\sigma^2 + \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i R_{t-i}^2$$

donde ahora, la suma de los pesos α_i debería ser igual a $1-\gamma$. Este es un modelo $ARCH(m)$. Si denotamos $\omega = \gamma\sigma^2$, tenemos,

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i R_{t-i}^2$$

El modelo GARCH(1,1) combina las dos ideas anteriores en la expresión,

$$\sigma_{t+1}^2 = \gamma\sigma^2 + \alpha R_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

que requiere que $\alpha + \beta < 1$ para que la varianza sea estable. En caso contrario, el peso aplicado a la varianza de largo plazo sería negativo. El alisado exponencial de la sección anterior, utilizado en RiskMetrics, es un caso particular del modelo $GARCH(1,1)$, cuando $\alpha + \beta = 1$ y $\gamma = 0$.

El modelo GARCH(1,1) puede escribirse también,

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha R_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

que nos permitiría prever la volatilidad del próximo día a partir de la volatilidad prevista para hoy y de la rentabilidad observada al cierre del mercado:

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha R_t^2 + \beta \sigma_t^2$$

Por ejemplo, si hemos estimado el modelo,

$$\sigma_t^2 = 0,000002 + 0,13 R_{t-1}^2 + 0,86 \sigma_{t-1}^2$$

tendríamos,

$$\gamma = 1 - \alpha - \beta = 0,01; \ \sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} = 0,0002,$$

Al considerar las fluctuaciones en volatilidad, si la volatilidad estimada para un determinado día es de $\sigma_t = 1,6\%$, y ese día el precio del activo financiero varía un 1% al alza o a la baja, estimaríamos para el día siguiente una volatilidad,

$$\sigma_t^2 = 0,000002 + 0,13\,(0,0001) + 0,86\,(0,000256) = 0,00023516$$

que equivale a una volatilidad diaria del 1,53%.

Mediante sustituciones reiteradas, el modelo puede escribirse en la forma,

$$\sigma_t^2 = \omega + \omega\beta + \omega\beta^2 + \alpha R_{t-1}^2 + \alpha\beta R_{t-2}^2 + \alpha\beta^2 R_{t-3}^2 + \beta^3 \sigma_{t-3}^2$$

que es similar al alisado exponencial, excepto en que asigna una ponderación también a la varianza de largo plazo. En el límite, tenemos,

$$\sigma_t^2 = \frac{\omega}{1 - \beta} + \alpha \sum_{s=1}^{\infty} \beta^{s-1} R_{t-s}^2$$

que hace depender la volatilidad σ_t^2 de una constante y de las rentabilidades históricas al cuadrado, con ponderaciones decrecientes, según nos alejamos hacia el pasado. El parámetro β es la tasa a la cual el tamaño de las rentabilidades pasadas (o su volatilidad, si se quiere, pues están al cuadrado) inciden sobre la volatilidad actual del activo. Esta expresión puede truncarse al cabo de unos cuantos períodos, sin incurrir en un grave error de aproximación.

De acuerdo con este modelo,

$$\sigma^2 \equiv E\left(\sigma_{t+1}^2\right) = \omega + \alpha E\left(R_t^2\right) + \beta E\left(\sigma_t^2\right) = \omega + \alpha\sigma^2 + \beta\sigma^2$$

por lo que, la *volatilidad incondicional*, o *volatilidad de largo plazo* es,

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$$

El modelo anteriormente estimado implica un nivel de volatilidad de largo plazo σ^2, de $\sqrt{0,0002} = 1,41\%$. Esta expresión muestra que el nivel de volatilidad a largo plazo no está bien definido en el modelo de RiskMetrics, que impone $\alpha + \beta = 1$. Ello afectará más a las previsiones de volatilidad a largo plazo que a corto plazo. Que esto sea o no importante depende de que creamos que existe un nivel de volatilidad media relativamente estable, a la cual revierte el mercado cada vez que se separa del mismo al alza o a la baja. Por el contrario, el modelo GARCH puede escribirse,

$$\sigma_{t+1}^2 = (1 - \alpha - \beta)\,\sigma^2 + \alpha R_t^2 + \beta\sigma_t^2 = \sigma^2 + \alpha(R_t^2 - \sigma^2) + \beta(\sigma_t^2 - \sigma^2)$$

que expresa que la previsión de la varianza el próximo día se obtiene corrigiendo el nivel de volatilidad de largo plazo, en función de que la rentabilidad al cuadrado y el nivel de volatilidad en t hayan estado por encima o por debajo del nivel de largo plazo.

5.4 Predicción de volatilidad

El modelo $GARCH(1,1)$ puede escribirse,

$$\sigma_t^2 - \sigma^2 = \alpha\left(R_{t-1}^2 - \sigma^2\right) + \beta\left(\sigma_{t-1}^2 - \sigma^2\right)$$

es decir,

$$\sigma_{t+k}^2 - \sigma^2 = \alpha\left(R_{t+k-1}^2 - \sigma^2\right) + \beta\left(\sigma_{t+k-1}^2 - \sigma^2\right)$$

que conduce a,

$$E\left(\sigma_{t+k}^2 - \sigma^2\right) = (\alpha + \beta)\left(\sigma_{t+k-1}^2 - \sigma^2\right)$$

puesto que, $ER_{t+k-1}^2 = \sigma_{t+k-1}^2$.La previsión de volatilidad k días hacia el futuro es,

$$E_t\left(\sigma_{t+k}^2\right) - \sigma^2 = (\alpha + \beta)^{k-1}\left(\sigma_{t+1}^2 - \sigma^2\right)$$

donde σ_{t+1}^2es nuestra estimación de volatilidad para el próximo día, que puede calcularse con la información de que disponemos en el período t.

La suma $\alpha + \beta$ se denomina *persistencia* en volatilidad. Si la volatilidad actual es más alta que el nivel de largo plazo σ^2, la previsión será a la baja, y lo contrario ocurrirá si el nivel actual es de reducida volatilidad. Cuando $\alpha + \beta < 1$, el último término va perdiendo importancia, y la predicción converge a la varianza de largo plazo, al aumentar el horizonte de la predicción. La velocidad de convergencia está inversamente relacionada con la proximidad de

$\alpha+\beta$a 1. Se dice que este modelo tiene *reversión al nivel medio de volatilidad,* σ^2, a una tasa $1-\alpha-\beta$.

Por el contrario, en el modelo de *alisado exponencial* utilizado por RiskMetrics $\alpha+\beta=1$, y la predicción a cualquier horizonte coincide con la varianza actual:

$$E_t\left(\sigma_{t+k}^2\right)=\sigma_{t+1}^2 \forall k$$

por lo que este modelo tiene persistencia igual a 1. Se espera que todo shock en volatilidad persista para siempre, y cualquier incremento observado en volatilidad elevará la previsión de volatilidad de todos los períodos futuros en la cuantía del shock. El modelo de RiskMetrics extrapola la situación de volatilidad actual a todos los períodos en el futuro, mientras que el modelo GARCH genera una reversión al nivel medio de volatilidad a largo plazo.

Algo más delicada es la *predicción de la volatilidad de la rentabilidad acumulada* a lo largo de k días de mercado. Nótese la diferencia con el ejercicio anterior, en el que se preveía la rentabilidad diaria k-períodos hacia adelante. En términos de rentabilidades continuas, sabemos que dicha rentabilidad acumulada será, por construcción, la suma de las rentabilidades continuas obtenidas para cada uno de los días del período. Bajo el supuesto de que las rentabilidades son temporalmente independientes, tendremos,

$$E_t\left(\sum_{i=1}^k R_{t+i}\right)^2=\sum_{i=1}^k E_t\sigma_{t+i}^2$$

de manera que con RiskMetrics tenemos,

$$E_t\left(\sum_{i=1}^k R_{t+i}\right)^2=k\sigma_{t+1}^2$$

mientras que con el modelo GARCH tenemos,

$$E_t\left(\sum_{i=1}^k R_{t+i}\right)^2=k\sigma^2+\sum_{i=1}^k(\alpha+\beta)^{i-1}\left(\sigma_{t+1}^2-\sigma^2\right)$$

que es distinta de la expresión anterior. Si partimos de un mismo nivel de σ_{t+1}^2,la predicción del model GARCH será superior a la de RiskMetrics si y sólo si el nivel de σ_{t+1}^2 es inferior al nivel de largo plazo, σ^2.

5.4.1 Estimación del modelo de volatilidad por máxima verosimilitud

Bajo el supuesto de Normalidad para las rentabilidades logarítmicas, $R_t=\sigma_t z_t$, con $z_t\sim i.,i.d.N(0,1)$, tenemos la función de verosimilitud,

$$L=\prod_{t=1}^T\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}}\exp\left(\frac{-R_t^2}{2\sigma_t^2}\right)\right]$$

y su logaritmo neperiano,

$$\ln L = \frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(\ln \sigma_t^2 + \frac{R_t^2}{\sigma_t^2}\right)$$

que se puede maximizar bien mediante algoritmos numéricos, o bien mediante procedimientos de búsqueda. Evidentemente, el vector de valores paramétricos que maximiza ln$L$ es el mismo que el que maximiza la función de verosimilitud, L.

El supuesto de Normalidad no es facilmente sostenible cuando se trabaja con rentabilidades de activos financieros. El método de quasi-máxima verosimilitud consiste en maximizar el logaritmo de la función de verosimilitud bajo el supuesto de Normalidad, pues el estimador resultante es consistente incluso cuando la verdadera distribución condidional de R_t no es Normal, siempre que las ecuaciones de la media y la varianza condicionales de R_t estén bien especificadas. Unicamente hay que prestar atención al cálculo de la matriz de covarianzas de los estimadores resultantes.

En todo caso, lo primero que hemos de hacer es substitutir en la expresión anterior la volatilidad σ_t^2 por un determinado modelo dependiente de un vector de parámetros θ. En las próximas secciones veremos cómo se lleva a cabo este proceso. Como en cualquier otro problema de estimación, hemos de tener en cuenta que estamos maximizando la verosimilitud bajo el supeusto de estabilidad paramétrica, lo que puede condicionar el número de observaciones utilizado en dicho proceso de estimación.

Primer caso: rentabilidades incorrelacionadas con media cero Supongamos que las rentabilidades obtenidas en la unidad temporal de observación carecen de autocorrelación, lo que puede contrastarse a partir de un examen de sus funciones de autocorrelación simple y parcial, así como llevando a cabo contrastes formales del tipo Ljung-Box o Box-Pierce.

Para estimar los parámetros del modelo en una hoja de cálculo, se estima inicialmente $\sigma_{t_0}^2$ por alguno de los dos procedimientos que mencionamos antes, y comienza la recursión a partir de dicho instante temporal, después de haber fijado valores iniciales para los parámetros α, β, ω. Una vez evaluada la función de verosimilitud para los valores parámetricos inicialmente escogidos (*condiciones iniciales*), se trata de buscar en el espacio paramétrico con el objeto de obtener los valores que maximizan la función de verosimilitud,

$$\ln L(\omega,\alpha,\beta) = -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(\ln \sigma_t^2(\omega,\alpha,\beta) + \frac{R_t^2}{\sigma_t^2(\omega,\alpha,\beta)}\right)$$

Finalmente, la varianza de largo plazo, σ^2, se estima a partir de las expresiones anteriores y las estimaciones obtenidas para α, β, ω: $\sigma^2 = \omega/(1-\alpha-\beta)$.

La alternativa denominada *variance targeting* consiste en fijar un nivel de volatilidad de largo plazo σ^2, por ejemplo igual a la varianza muestral, y utilizando la expresión analítica de la varianza a largo plazo para fijar $\omega = \sigma^2(1-\alpha-\beta)$, estimando así sólo 2 parámetros, α y β.

Si queremos estimar un modelo de alisado exponencial como el utilizado en RiskMetrics, se fija $\omega = 0, \alpha = 1-\lambda, \beta = \lambda$, y se efectúa una búsqueda sobre el valor numérico de $\lambda, \lambda \in (0,1)$,en la función

$$\ln L(\lambda) = -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(\ln\sigma_t^2(\lambda) + \frac{R_t^2}{\sigma_t^2(\lambda)}\right)$$

Segundo caso: rentabilidades posiblemente correlacionadas, con media no nula Como alternativa, consideremos la posibilidad de que las rentabilidades obedezcan al modelo

$$R_t = \rho_0 + \rho_1 R_{t-1} + \varepsilon_t$$

que recoge la presencia de autocorrelación, es decir, de dependencia temporal en las rentabilidades. Tendría sentido entonces hacer el supuesto de estructura GARCH de volatilidad, pero ahora sobre la innovación ε_t del proceso estocástico de rentabilidades, por lo que σ_t^2 sería ahora: $\sigma_t^2 = Var(\varepsilon_t)$, con función de verosimilitud,

$$L = \prod_{t=1}^{T}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}}\exp\left(\frac{-\varepsilon_t^2}{2\sigma_t^2}\right)\right]$$

con,

$$\ln L = -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(\ln\sigma_t^2 + \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2}\right) = cons\tan te - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(\ln\sigma_t^2 + \frac{\left(R_t - \rho_0 - \rho_1 R_{t-1}\right)^2}{\sigma_t^2}\right)$$

y la estimación del modelo se lleva a cabo buscando en los parámetros $\alpha, \beta, \omega, \rho_0, \rho_1$.

En este caso habría que tener en cuenta que el procedimiento nos daría la evolución temporal de la volatilidad de la innovación ε_t, el componente no predecible de la rentabilidad, que es la volatilidad de R_t condicional en su pasado, pero no su volatilidad incondicional. En todo caso, la volatilidad incondicional (un número) es la media de la volatilidad condicional (una variable). Bajo el supeusto de estructura AR(1) para R_t, la relación entre las volatilidades incondicionales de la Rentabilidad y su innovación es:

$$Var(R_t) = \frac{Var(\varepsilon_t)}{1-\rho_1^2}$$

5.5 Validación del modelo de volatilidad

Un *contraste* del modelo consiste en un test de ausencia de autocorrelación en las rentabilidades al cuadrado, R_t^2. Puesto que hemos pretendido recoger los cambios en volatilidad a lo largo del tiempo, no deberia existir tal autocorrelación. Para ello hemos de utilizar las *rentabilidades normalizadas o estandarizadas* al cuadrado, $\frac{R_t^2}{\sigma_t^2}$. Para un contraste riguroso, puede utilizarse el conjunto de estadísticos del tipo Ljung-Box,

$$T\sum_{i=1}^{k}\frac{T-2}{T-i}\gamma_i^2$$

que se distribuye como una χ_k^2.

Contrastes relevantes son asimismo los pertenecientes a la familia de *tests de razón de verosimilitudes*, que permiten contrastar un modelo restringido frente a una alternativa más general, del cual el primero se obtiene imponiendo determinadas restricciones. El estadístico del contraste es,

$$LRT = -2\left[\ln L_R - \ln L_{NR}\right]$$

y tiene una distribución asintótica igual a una chi-cuadrado con grados de libertad igual al número de restricciones que transforman el modelo más general en el modelo restringido.

Otro contraste habitual consiste en analizar si la serie temporal de varianza, σ_t^2, es un *predictor insesgado* de la rentabilidad al cuadrado futura,

$$R_{t+1}^2 = \alpha + \beta\sigma_{t+1}^2 + u_{t+1}$$

Se dice que σ_{t+1}^2 es un predictor insesgado de R_{t+1}^2 si $\alpha = 0$ y $\beta = 1$. Sin embargo, conviene notar que,

$$\begin{aligned} Var_t R_{t+1}^2 &= E_t\left[(R_{t+1}^2-\sigma_{t+1}^2)^2\right] = E_t\left[\left(\sigma_{t+1}^2\left(z_{t+1}^2-1\right)\right)^2\right] = \\ &= \sigma_{t+1}^4 E_t\left[\left(z_{t+1}^2-1\right)^2\right] = \sigma_{t+1}^4\left(\kappa-1\right) \end{aligned}$$

siendo κ la curtosis de la innovación del proceso GARCH, z_t,que sería igual a 3 si suponemos Normalidad condicional: $z_t \sim i., i.d., N(0,1)$. La segunda igualdad utiliza la representación $R_t = \sigma_t z_t$, que suponemos válida. La tercera desigualdad utiliza el hecho de que en los modelos de volatilidad que estamos considerando, RiskMetrics y GARCH, σ_{t+1}^2 es función de σ_t^2 y R_t^2 y por tanto, conocida en t. La última igualdad utiliza: $E_t\left[\left(z_{t+1}^2-1\right)^2\right] = E_t\left(z_{t+1}^4 - 2z_{t+1}^2 + 1\right) = \kappa - 2E_t z_{t+1}^2 + 1 = \kappa - 2 + 1 = \kappa - 1$.

El valor numérico de la expresión anterior puede ser elevado, por lo que el cuadrado de la rentabilidad de un período R_{t+1}^2 es, generalmente, una proxy muy contaminada de la varianza condicional σ_{t+1}^2. Por ello, puede ser preferible utilizar medidas intradía en la estimación de la volatilidad.

5.6 Estructura temporal de volatilidad

Consideremos una opción que vence en $t+N$. Podemos utilizar la expresión anterior para predecir el nivel medio de volatilidad del activo subyacente durante dicho período, mediante,

$$Volatilidad\ a\ horizonte\ N\ per\acute{\imath}odos = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} E\sigma_{t+i}^2}$$

Cuando este ejercicio se lleva a cabo para opciones sobre el mismo activo subyacente, con distinta fecha de vencimiento, se tiene una Estructura Temporal de Volatilidades. Esta es la relación entre las volatilidades implícitas de las opciones y su vencimiento residual.

Cuando se utiliza el modelo *GARCH*, se obtiene un perfil creciente o decreciente, precisamente por su propiedad de *reversión al nivel medio* de volatilidad. Por tanto, este modelo predice una curva de volatilidades bien creciente o decreciente respecto del vencimiento de las opciones.

Puede calcularse asimismo cual sería el efecto sobre cada una de dichas previsiones, de una variación por ejemplo, de un 1% en la volatilidad actual del activo subyacente. Esta variación en volatilidad no será la misma para todos los vencimientos, y tendrá un perfil análogo al de la Estructura Temporal de Volatilidades, lo que debería tenerse en cuenta al computar la exposición de una cartera de opciones a variaciones en volatilidad del activo subyacente. Al hacer una simulación de este tipo y calcular una *vega*, no debería suponerse una variación análoga en volatilidad a lo largo de todos los vencimientos.

5.7 Otros modelos GARCH

- Modelo GARCH(p,q):

$$\sigma_{t+1}^2 = \gamma\sigma^2 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i R_{t+1-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t+1-j}^2$$

  Modelo GARCH(1,1):

$$\sigma_{t+1}^2 = \gamma\sigma^2 + \alpha R_t^2 + \beta\sigma_t^2$$

- Modelo GARCH de componentes, que permite variación temporal en el nivel de varianza de largo plazo, υ_{t+1} :

$$\begin{aligned} \sigma_{t+1}^2 &= \upsilon_{t+1} + \alpha(R_t^2 - \upsilon_t) + \beta(\sigma_t^2 - \upsilon_t) \\ \upsilon_{t+1} &= \omega + \alpha_\upsilon(R_t^2 - \sigma_t^2) + \beta_\upsilon \upsilon_t \end{aligned}$$

- Efecto apalancamiento (*leverage*): El argumento básico es que una rentabilidad negativa de una ación implica una caida en el valor de mercado de la empresa, lo que aumenta su apalancamiento financiero, aumentando su nivel de riesgo (a igual nivel de deuda). Podemos modificar el modelo GARCH(1,1) para recoger este efecto de varias maneras:

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha R_t^2 + \alpha\theta \left(I_t^- R_t^2\right) + \beta\sigma_t^2$$

donde I_t^- es una variable ficticia que toma el valor 1 cuando la rentabilidad es negativa, siendo igual a cero en caso contrario. Definida de este modo, una rentabilidad R tiene una contribución al nivel de volatilidad el período siguiente de αR_t^2, si dicha rentabilidad fue positiva, y de $\alpha\left(1+\theta\right)R_t^2$ si fue negativa Este modelo se conoce como GJR-GARCH.

Bajo el supuesto mantenido de que la rentabilidad sigue un proceso: $R_t = \sigma_t z_t$, con $z_t \sim i.,i.d.N(0,1)$, otra posibilidad es el modelo NGARCH,

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha(R_t - \theta\sigma_t)^2 + \beta\sigma_t^2 = \omega + \alpha\sigma_t^2(z_t-\theta)^2 + \beta\sigma_t^2$$

de modo que, si $\theta > 0$, noticias positivas tienen menos impacto sobre la varianza que noticias negativas. La persistencia de la varianza en este modelo es $\alpha\left(1+\theta^2\right)+\beta$, mientras que el nivel de varianza de largo plazo es: $\sigma^2 = \frac{\omega}{1-\alpha(1+\theta^2)-\beta}$.

Una última posibilidad es el modelo GARCH exponencial, o EGARCH:

$$\ln\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha(\phi R_t + \gamma\left[\mid R_t\mid - \sqrt{2/\pi}\right] + \beta\ln\sigma_t^2$$

que presenta efecto apalancamiento si $\alpha\phi < 0$. Por otra parte, la especificación logarítmica garantiza que la varianza resultante será positiva en todos los períodos. En la expresión anterior, $\sqrt{2/\pi}$ aparece por ser la esperanza matemática del valor absoluto de la rentabilidad: $\sqrt{2/\pi} = E(\mid R_t\mid)$.

- Inclusión de variables explicativas, como el efecto fin de semana, mediante una variable ficticia que tome el valor 1 los lunes, así como tras días festivos, anuncios macroeconómicos, reuniones de la Fed, etc. También podría considerarse la inclusión de un índice de volatilidad tipo VIX cuando queremos prever la volatilidad del subyacente de las opciones con las que se ha calculado dicho índice.

- Algunos modelos univariantes

La ecuación de la varianza en el modelo $EGARCH(1,1)$ es:

$$\begin{aligned} y_t &= \varepsilon_t h_t \\ \ln h_t^2 &= \omega + \beta\ln h_{t-1}^2 + \delta\varepsilon_{t-1} + \theta\left(\mid\varepsilon_{t-1}\mid - \sqrt{2/\pi}\right) \end{aligned}$$

Modelo *GJR:*

$$h_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \left[\alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \alpha_i^- I\left(\varepsilon_{t-i} \leq 0\right) \varepsilon_{t-i}^2 \right] + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j}^2$$

que en un caso sencillo, sería:

$$h_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha^- I\left(\varepsilon_{t-1} \leq 0\right) \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}^2$$

6 Modelos de correlación condicional

6.1 Estimación de covarianzas condicionales

Supongamos que tenemos N activos, con los cuales podemos configurar una cartera. O alternativamente, N factores de riesgo cuyas matrices de covarianzas y de correlaciones queremos caracterizar. La representación más sencilla de una covarianza cambiante en el tiempo podría obtenerse a partir de una ventana móvil de m datos, utilizando una expresión similar a la que propusimos para la estimación de la varianza:

$$\sigma_{ij,t+1} = \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{m-1} R_{i,t+1-s} R_{j,t+1-s}$$

con las limitaciones que ya conocemos por la presencia de la amplitud de ventana m. En esta expresión estamos incorporando el supuesto de que las rentabilidades tienen media cero, lo que será muy aceptable en datos de alta frecuencia.

Este tipo de modelización puede generar excesiva variabilidad en la serie de covarianzas. Por tanto, puede resultar conveniente introducir persistencia mediante un suavizado exponencial en covarianzas,

$$\sigma_{ij,t+1} = (1 - \lambda) R_{i,t} R_{j,t} + \lambda \sigma_{ij,t} \tag{2}$$

que tiene la limitación que ya vimos en el caso de estimación de la varianza, en el sentido de que no existe un nivel de referencia que puediera interpretarse como la covarianza a largo plazo. Por tanto, al igual que en aquél caso, este modelo implica que no existe reversión a la media en las covarianzas. Si la covarianza es alta y positiva (por ejemplo) un dia, el modelo predice que continuará siendo elevada y positiva. En todo caso, este es el modelo utilizado por RiskMetrics, con $\lambda = 0,94$.

Una vez que disponemos de expresiones correspondientes a una determinada metodología, como en este caso las utilizadas por Riskmetrics, la estimación de suna serie temporal de volatilidades puede efectuarse mediante:

$$\rho_{uv,t} = \frac{\sigma_{uv,t}}{\sigma_{u,t} \sigma_{v,t}}$$

Ejemplo: Supongamos que las volatilidades diarias estimadas para dos activos son $\sigma_{u,t}$ =1% y $\sigma_{v,t}$ =2%. Con un parámetro de alisado exponencial:

$\lambda = 0,95$, Si se producen variaciones diarias en precios de $R_{u,t}$ =0,5% y $R_{v,t}$ =2,5%, respectivamente, las nuevas varianzas serían,

$$
\begin{aligned}
\sigma^2_{u,t+1} &= (0.95)(0.01)^2 + (0.05)(0.005)^2 = 0,00009625 \Rightarrow \sigma_{u,t+1} = 0,00981 = 0,981\% \\
\sigma^2_{v,t+1} &= (0.95)(0.02)^2 + (0.05)(0.025)^2 = 0,00041125 \Rightarrow \sigma_{v,t+1} = 0,02028 = 2,028\%
\end{aligned}
$$

Si la correlación actual es $\rho_{uv,t}$ =0,60, la covarianza estimada entre ambas rentabilidades sería:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{uv,t} &= \rho_{uv,t}\sigma_{u,t}\sigma_{v,t} = (0,60)(0,01)(0,02) = 0,00012 \\
\sigma_{uv,t+1} &= (0.95)\sigma_{uv,t} + (0,05)u_t v_t = (0.95)(0.00012) + (0.05)(0.005)(0.025) = 0,00012025
\end{aligned}
$$

$$\sigma_{uv,t+1} = \rho_{uv,t}.\sigma_{u,t}\sigma_{v,t} = (0.60)(0.00981)(0.02028) = 0,00012$$

El nuevo coeficiente de correlación sería:

$$\rho_{uv,t+1} = \frac{\sigma_{uv,t+1}}{\sigma_{u,t+1}\sigma_{v,t+1}} = \frac{0.00012025}{(0.00981)(0.02028)} = 0,60443$$

Una segunda alternativa consistiría en utilizar el esquema GARCH(1,1) de covarianza, que presenta reversión a la media,

$$\sigma_{ij,t+1} = \omega_{ij} + \alpha R_{i,t}R_{j,t} + \beta\sigma_{ij,t}$$

según el cual la covarianza revertirá a su nivel de largo plazo,

$$\sigma_{ij} = \frac{\omega_{ij}}{1-\alpha-\beta}$$

Imponer los mismos parámetros de persistencia, α y β en la estimación de las varianzas y covarianzas de los distintos activos considerados garantiza que obtengamos una matriz de covarianzas definida positiva, lo que entendemos como matriz de covarianzas *internamente consistente*.[1] Lo mismo sucede si en el esquema de alisado exponencial que vimos inicialmente, utilizamos el mismo valor del parámetro λ para todos los activos.

Sin embargo, la homogeneidad de valores numéricos de los parámetros de persistencia puede ser una restricción poco razonable, por lo que consideramos a continuación modelos que no la imponen.[2]

[1] Hay *consistencia interna* cuando $\omega'\Sigma_{t+1}\omega \geq 0$ para toda cartera definida por le vector de ponderaciones ω.

[2] Nótese que las expresiones anteriores pueden utilizarse asimismo para estimar covarianzas y correlaciones entre los residuos u_t, v_t de dos modelos estimados, mediante:

$$
\begin{aligned}
cov_t &= \lambda cov_{t-1} + (1-\lambda)\, u_{t-1}v_{t-1} \text{ (alisado exponencial)}, \\
cov_t &= \omega + \beta cov_{t-1} + \alpha u_{t-1}v_{t-1} \quad \text{(GARCH(1,1))}
\end{aligned}
$$

para estimar posteriormenta la correlación mediante: $\rho_{uv,t} = \frac{\sigma_{uv,t}}{\sigma_{u,t}\sigma_{v,t}}$.

También está sujeto a algunas limitaciones el cálculo de la correlación condicional como cociente entre la covarianza condicional y la raiz cuadrada del producto de varianzas condicionales, utilizando en el numerador y denominador de dicho cociente las expresiones de Riskmetrics o un esquema GARCH(1,1).

Es preferible trabajar directamente con las correlaciones, que son mas facilmente interpretables, y obtener las covarianzas como consecuencia del comportamiento de correlaciones, por un lado, y de varianzas, por otro. Por ejemplo, las covarianzas puden variar en el tiempo incluso si las correlacioens son constante, simplemente porque las variaznas sean cambiantes en el tiempo (como veremos en el modelo dinámico de correlación constante, DCC):

Como:

$$\sigma_{ij,t+1} = \sigma_{i,t+1}\sigma_{j,t+1}\rho_{ij,t+1}$$

tenemos, en notación matricial,

$$\Sigma_{t+1} = D_{t+1}\Gamma_{t+1}D_{t+1}$$

donde D_{t+1} es una matriz con desviaciones típicas condicionales en la diagonal y ceros fuera de la diagonal, y Γ_{t+1}es una matriz con unos en la diagonal, y con las correlaciones condicionales fuera de dicha diagonal principal. Para dos activos:

$$\Sigma_{t+1} = \begin{pmatrix} \sigma_{1,t+1}^2 & \sigma_{12,t+1} \\ \sigma_{12,t+1} & \sigma_{2,t+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{1,t+1} & 0 \\ 0 & \sigma_{2,t+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12,t+1} \\ \rho_{12,t+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{1,t+1} & 0 \\ 0 & \sigma_{2,t+1} \end{pmatrix}.$$

Suponemos que las volatilidades de cada activo ya han sido estimadas previamente. Por tanto, estandarizamos las rentabilidades,

$$z_{i,t+1} = \frac{R_{i,t+1}}{\sigma_{i,t+1}},\ \forall i,t$$

por lo que las variables $z_{i,t+1}$ tienen desviación típica condicional igual a 1. Por tanto, la covarianza condicional entre dos cualesquiera de ellas coincide con la correlación condicional de las rentabilidades originales:

$$E_t(z_{i,t+1}z_{j,t+1}) = E_t\left(\frac{R_{i,t+1}}{\sigma_{i,t+1}}\frac{R_{j,t+1}}{\sigma_{j,t+1}}\right) = \frac{E_t(R_{i,t+1}R_{j,t+1})}{\sigma_{i,t+1}\sigma_{j,t+1}} = \frac{\sigma_{ij,t+1}}{\sigma_{i,t+1}\sigma_{j,t+1}} = \rho_{ij,t+1}$$

Por tanto, modelizar la corelacion condicional de las rentabilidades originales equivale a modelizar la correlación condicional de las rentabilidades estandarizadas. Vamos a considerar 3 modelos: el primero que estima una correlación condicional constante, con un sólo valor numérico, y dos modelos adicionales para aproximar el modo en que la correlación entre dos activos evoluciona en el tiempo:

6.2 Modelo de correlación condicional constante

Este modelo consiste en calcular el coeficiente de correlacion lineal estándar (coeficiente de correlación de Pearson) para cada par de rentabilidades estandarizadas. Para ello comenzamos estimando un modelo de volatilidad condicional (de ahi la denominación "condicional" del modelo de correlación), y estandarizamos cada rentabilidad dividiendo el dato de cada día por la desviación típica estimada (no la varianzaa) de ese día. De este modo obtendremos un unico valor de correlación para cada par de activos, válido para toda la muestra. Debe interpretarse como un promedio de cualquier serie temporal de correlacion condicional cambiante en el tiempo que pudiesemos estiamr para dicho par de activos en la muestra utilizada. [Chapter3Results.xls in Christoffersen, pestañas Question 6, Question 7 y Question 8]

6.3 Modelo de suavizado exponencial (*Exponential smoother*)

Suponemos que la evolución dinámica de la correlación está guiada por las variables auxiliares $q_{ij,t+1}$, que juegan el papel de covarianzas condicionales, y que se actualizan a partir de valores iniciales mediante:

$$q_{ij,t+1} = (1-\lambda)\, z_{i,t} z_{j,t} + \lambda q_{ij,t} \forall i, j$$

Al ser una covarianza entre rentabilidades estandarizadas, la serie temporal q_{it} ya nos proporciona una estimación de la correlación condicional entre dos rentabilidades. Pero para garantizar que dicha correlación esté siempre en el intervalo $(-1,1)$, utilizamos la normalización:

$$\rho_{ij,t+1} = \frac{q_{ij,t+1}}{\sqrt{q_{ii,t+1}}\sqrt{q_{jj,t+1}}}.$$

El algoritmo recursivo anterior puede inicializarse tomando como valor inicial $q_{ij,1}$ el promedio de los productos $z_{i,t} z_{j,t}$ a lo largo de toda la muestra. Esto es útil en el caso en que queremos estimar a posterior cómo ha variado dicha correlación condicional. En alguna otra situación podemos no querer imponer como condición inicial la media de toda la muestra, y preferimos utilizar el promedio de un número inicial de observaciones, 50 por ejemplo, y actualizar $q_{ij,t}$ a partir de la observación siguiente, desechando los primeros 50 datos.

La condición inicial para las varianzas condicionales $q_{ii,1}$debe ser su esperanza matemática, que es 1, en el caso de que queramos utilizar en el cálculo de las correlaciones condicionales toda la información muestral. Alternativamente, también podemos utilizar una submuestra inicial para obtener una condición de partida, del modo que acabamos de describir.

Si tenemos un conjunto de k activos, en notación matricial tendremos,

$$Q_{t+1} = (1-\lambda)\, z_t z_t' + \lambda Q_t$$

donde Q_t es una matriz kxk. Este modelo requiere la estimación de un único parámetro, λ, con independencia del número de activos considerados.

6.4 Correlaciones dinámicas GARCH (Integrated *DCC GARCH*)

Para permitir reversión a la media en las correlaciones condicionales, podemos utilizar una especificación del tipo GARCH(1,1):

$$q_{ij,t+1} = \rho_{ij} + \alpha \left(z_{i,t} z_{j,t} - \rho_{ij} \right) + \beta \left(q_{ij,t} - \rho_{ij} \right)$$

y nuevamente utilizamos la normalización,

$$\rho_{ij,t+1} = \frac{q_{ij,t+1}}{\sqrt{q_{ii,t+1}}\sqrt{q_{jj,t+1}}}$$

para obtener la estimación final de los coeficientes de correlación condicional. Las condiciones iniciales para las variables $q_{ij,t+1}$ pueden escogerse como en el modelo anterior.

En este modelo estamos restringiendo a que los parámetros de persistencia de las correlaciones, α y β sean los mismos para cualquier par de activos. Lógicamente, eso no significa que sean iguales los niveles de dichos coeficientes de correlación. Los parámetros de persistencia de la volatilidad, por el contrario, no necesitan ser los mismos para todos los activos considerados. De hecho, tales volatilidades condicionales procederán de modelos previamente estimados, posiblemente un modelo univariante para cada rentabilidad.

Aunque el parámetro ρ_{ij}, que es específico a cada par de activos, puede tratarse como un parámetro más a estimar, junto con α y β, puede tener sentido imponer en el modelo reversion a un nivel de correlación de largo plazo, $E(z_{i,t} z_{j,t})$, que podemos denotar por $\bar{\rho}_{ij}$,

$$\bar{\rho}_{ij} = E(z_{it}.z_{jt})$$

teniendo entonces el modelo:

$$q_{ij,t+1} = \bar{\rho}_{ij} + \alpha \left(z_{i,t} z_{j,t} - \bar{\rho}_{ij} \right) + \beta \left(q_{ij,t} - \bar{\rho}_{ij} \right)$$

que para el caso particular de dos activos, teniendo en cuenta que: $E(z_{it}.z_{jt}) = E\left[\begin{pmatrix} z_{1,t}^2 & z_{1,t}z_{2,t} \\ z_{1,t}z_{2,t} & z_{2,t}^2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{12} & 1 \end{pmatrix}$ resulta,

$$\begin{pmatrix} q_{11,t+1} & q_{12,t+1} \\ q_{12,t+1} & q_{22,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{12} & 1 \end{pmatrix} (1-\alpha-\beta) + \alpha \begin{pmatrix} z_{1,t}^2 & z_{1,t}z_{2,t} \\ z_{1,t}z_{2,t} & z_{2,t}^2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} q_{11,t} & q_{12,t} \\ q_{12,t} & q_{22,t} \end{pmatrix}$$

o, en notacion *vech* :

$$\begin{pmatrix} q_{11,t+1} \\ q_{12,t+1} \\ q_{22,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \rho_{12} \\ 1 \end{pmatrix} (1-\alpha-\beta) + \alpha \begin{pmatrix} z_{1,t}^2 \\ z_{1,t}z_{2,t} \\ z_{2,t}^2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} q_{11,t} \\ q_{12,t} \\ q_{22,t} \end{pmatrix}$$

En notación matricial, si estamos calculando las correlaciones condicionales entre varios activos, este modelo es:

$$Q_{t+1} = E(z_t z_t')(1 - \alpha - \beta) + \alpha\,(z_t z_t') + \beta Q_t$$

En ambos casos, la matriz Q_{t+1} es definida positiva por construcción, por lo que también lo serán las matrices de covarianzas Σ_{t+1} y de correlaciones Γ_{t+1}.

Una ventaja de este modelo es que sus parámetros pueden estimarse en varias etapas: Primero estimamos los parámetros de los modelos de volatilidad condicional univariantes por los procedimientos vistos en secciones previas. A continuación, estandarizamos las rentabilidades y estimamos la matriz de correlaciones incondicionales que, en el caso sencillo de dos activos consta de un sólo parámetro $\bar{\rho}_{ij} = \frac{1}{T}\sum z_{1,t}z_{2,t}$. Finalmente, estimamos los parámetros α y β, que determinan la persistencia en los coeficientes de correlación. Lo importante es que en cada etapa, se estima simultaneamente un número reducido de parámetros.

Nótese que el número de parámetros aumenta linealmente con el número de pares de activos si estimamos las correlaciones de largo plazo, ρ_{ij}. Si fijamos estos parámetros en las correlaciones muestrales, entonces el número de parámetros es 2, α y β, con independencia del número de activos considerados.

6.5 Estimación por cuasi-máxima verosimilitud

Apelando al procedimiento de cuasi-máxima verosimilitud, tiene sentido trabajar bajo el supuesto de Normalidad. El logaritmo de la función de verosimilitud es entonces,

$$\ln L = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\ln(1-\rho_{12,t}^2) + \frac{z_{1,t}^2 + z_{2,t}^2 - 2\rho_{12,t}z_{1,t}z_{2,t}}{1-\rho_{12,t}^2}\right]$$

en la que la correlación condicional $\rho_{12,t}$ se obtiene a partir del modelo particular de correlación que se utilice y la regla de normalización escogida, que serán distintos en el modelo de alisado exponencial y en el modelo DCC. Como ya dijimos antes, el algoritmo numérico puede inicializarse con $q_{11,0} = q_{22,0} = 1, q_{12,0} = T^{-1}\sum_{t=1}^{T} z_{1,t}z_{2,t}$. Nótese que estamos utilizando en todo momento las rentabilidades estandarizadas, para lo que necesitaremos utilizar varianzas condicionales procedentes de modelos que hayamos estimado previamente. Se trata, por tanto, de una estimación secuencial, que resulta bastante sencilla, aunque a riesgo de perder eficiencia estadística. Pero la estimación simultánea de los parámetros de las varianzas y las correlaciones se puede hacer imposible si disponemos de un número incluso reducido de activos.

En el caso de un vector de n activos, la función a maximizar sería,

$$\ln L = -\frac{1}{2}\sum_{t}\left(\ln\mid\Gamma_t\mid + z_t'\Gamma_t^{-1}z_t\right)$$

siendo Γ_t la matriz de correlaciones condicionales, de la cual la anterior es un caso particular.