

Consultor: Francesc Tarrés
Fecha entrega: 18 de diciembre de 2018

Normas de entrega

- Entregar preferiblemente un documento en PDF y comprobar que todas las ecuaciones se visualizan correctamente. Es posible incluir páginas escaneadas de documentos elaborados manualmente. En este caso, procure tener una letra y organización del documento clara. Si se desea, se puede entregar el PDF y el formato Word Office conjuntamente. Se recomienda no entregar solo el formato Word ya que no siempre se mantienen las fórmulas en todas las versiones. No se aceptan entregas en OpenOffice.
 - Nombre del documento: Apellido_1_Apellido_2_Nombre_PEC3.pdf.
 - Se tienen que numerar todas las páginas del documento, especialmente cuando se entregan documentos manuscritos escaneados.
 - Todos los resultados de los problemas se tienen que demostrar o razonar. Si algunas de las demostraciones necesarias aparecen en el libro de texto sólo es necesario referenciar la fórmula del libro. El detalle con el que se espera la resolución de los ejercicios es el mismo que el de los ejercicios resueltos que se proporcionan en las guías de estudio de cada módulo.
 - Las soluciones finales de cada apartado deben identificarse de forma clara.
-

Problema 1. Códigos de longitud variable (30%)

Una fuente de mensajes tiene un total de 12 mensajes con las siguientes probabilidades:

m	prob	m	prob	m	prob	m	prob
M1	0,4	M4	0,09	M7	0,04	M10	0,03
M2	0,1	M5	0,06	M8	0,04	M11	0,03
M3	0,1	M6	0,05	M9	0,03	M12	0,03

Se consideran los siguientes códigos de longitud variable:

M	Código 1	Código 2	Código 3	Código 4
M1	000	1	0	00
M2	001	01	010	010
M3	010	001	011	011
M4	011	0001	0110	100
M5	1000	00001	0101	1010
M6	1001	000001	00010	1110
M7	1010	0000001	01001	1111
M8	1011	00000001	11011	1100
M9	1100	000000001	10111	10110
M10	1101	0000000001	01111	10111
M11	1110	00000000001	111110	10010
M12	1111	000000000001	111101	11011

Se pide:

- a) Determine la entropía de la fuente.
- b) Determine si alguno de los códigos propuestos es inconsistente, es decir, se trata de un código que cuando se concatenen mensajes, la decodificación no será única i tendrá ambigüedades.

- c) Calcule el número de bits medio de los códigos que haya considerado consistentes.
- d) Una forma de construir códigos óptimos es mediante el algoritmo de Huffman del cual podéis encontrar abundante información en internet. En este problema se propone que, buscando bibliografía adicional sobre el algoritmo de Huffman, se calcule un código de Huffman asociado a la fuente propuesta.
- e) Determina el número de bits medio del código de Huffman propuesto para la fuente de ese ejercicio.

Solución.

- a) La entropía de la fuente se calcula aplicando directamente la definición:

$$H = - \sum_k p_k \cdot \log_2 p_k = -0,4 \cdot \log_2 0,4 - 2 \cdot 0,1 \cdot \log_2 0,1 - 0,9 \cdot \log_2 0,9 - \\ - 0,6 \cdot \log_2 0,6 - 0,5 \cdot \log_2 0,5 - 2 \cdot 0,4 \cdot \log_2 0,4 - 4 \cdot 0,3 \cdot \log_2 0,3 = \\ = 2,9440 \text{ bits}$$

- b) El código 3 es inconsistente ya que, por ejemplo, si recibimos la secuencia de bits 0110010 no sabremos si hemos recibido la secuencia de mensajes M4M1 o la secuencia de mensajes M3M1. El código 4 también es inconsistente ya que la secuencia 1001001100 podría decodificarse como M4M4M8 o como M11M3M1
- c) Calculamos el valor medio de bits de cada uno de los códigos propuestos aplicando la suma de productos entre probabilidades y el número de bits de cada palabra código.

$$\bar{N}_1 = 3 \times 0,69 + 4 \times 0,31 = 3,31 \text{ bits}$$

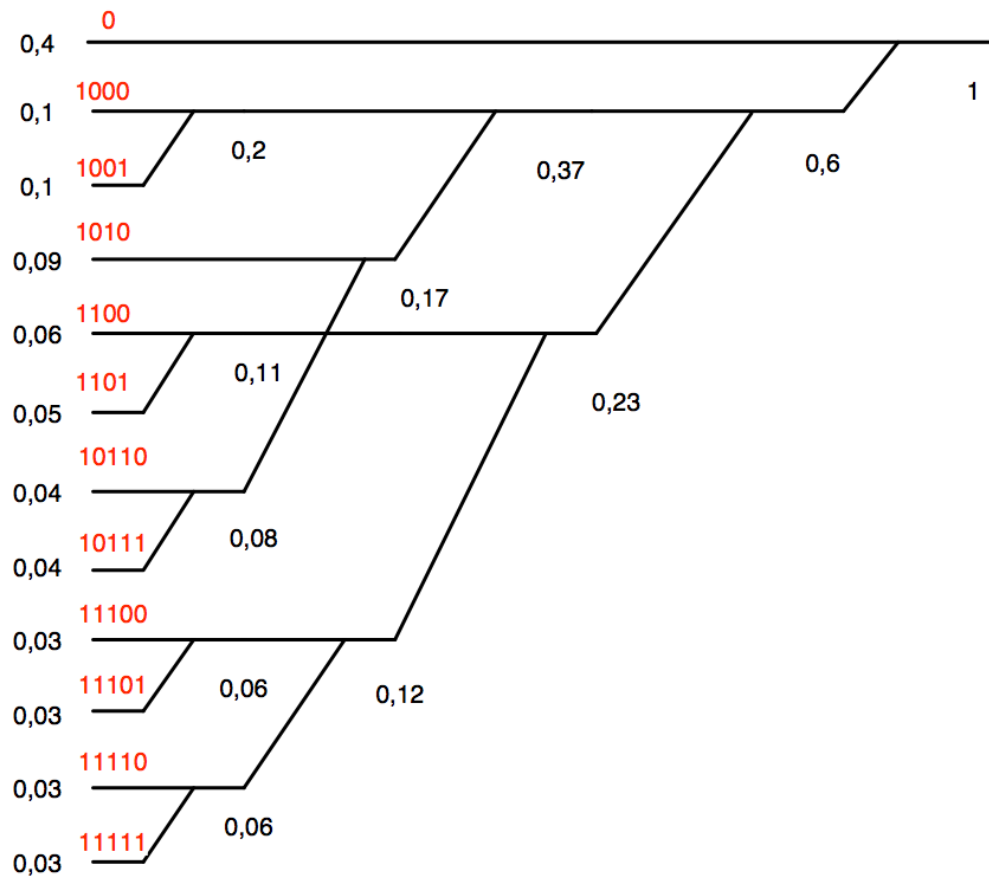
$$\bar{N}_2 = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,09 + \\ + 5 \cdot 0,06 + 6 \cdot 0,05 + (7 + 8) \cdot 0,04 + (9 + 10 + 11 + 12) \cdot 0,03 = \\ = 3,72 \text{ bits}$$

- d) El código de Huffman se calcula tal y como se indica en la figura adjunta donde siempre se combinan las dos ramas que tienen la menor probabilidad hasta llegar a un único nodo.

En este caso, el número medio de bits será:

$$\bar{N}_{Huffman} = 1 \times 0,4 + 4 \times 0,4 + 5 \times 0,2 = 3 \text{ bits}$$

Donde comprobamos que el número medio de bits de Huffman es menor que en el resto de códigos. La entropía, como es natural, está por debajo de Huffman.



Problema 2. Códigos de paridad cruzada en la corrección de errores (40 %).

Queremos estudiar dos códigos de corrección de error basados en paridad cruzada. Ambos códigos se aplican sobre una palabra original con una longitud de 30 bits. En el primer caso, la palabra se descompone en dos bloques de 15 bits que se disponen por filas y posteriormente se aplica un bit de paridad par en cada fila y cada columna. En el segundo caso, la secuencia de 30 bits se descompone en 6 filas de 5 bits cada una, añadiendo también un bit de redundancia par por cada fila y por cada columna, tal y como se indica en la figura adjunta.

Código corrector de paridad cruzada 1

B0	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12	B13	B14	R1
B15	B16	B17	B18	B19	B20	B21	B22	B23	B24	B25	B26	B27	B28	B29	R2
R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9	R10	R11	R12	R13	R14	R15	R16	R17	R18

Código corrector de paridad cruzada 2

B0	B1	B2	B3	B4	R1
B5	B6	B7	B8	B9	R2
B10	B11	B12	B13	B14	R3
B15	B16	B17	B18	B19	R4
B20	B21	B22	B23	B24	R5
B25	B26	B27	B28	B29	R6
R7	R8	R9	R10	R11	R12

Una vez calculados los bits de redundancia usando paridad par se transmiten por filas, empezando por el elemento superior izquierdo, como en los sistemas de escritura occidental.

- Determina en cada caso el número total de bits del código (n), el número de bits de redundancia (r) y la tasa del código ($\frac{m}{n} = \frac{n-r}{n}$)
- Calcula la secuencia de bits con la que se codificaría el siguiente mensaje en cada uno de los dos códigos propuestos.

11111 00000 11000 00111 10101 01010

- En los dos casos, cada bit se transmite usando una modulación NRZ con una duración de bit de $15 \mu s$, cuál es la tasa de transmisión de bits útiles en bits por segundo en cada uno de los dos sistemas de paridad.
- En el sistema de paridad cruzada 1, recibimos el siguiente mensaje:

11010 01111 11001 1
11101 01100 11101 1
00111 00101 00100 0

Determina si se ha producido un error y en caso afirmativo si es posible corregirlo. Si es posible corregirlo indica cuál es el mensaje útil que hemos transmitido.

Supongamos que la probabilidad de error por bits es de: $p = 10^{-4}$.

- Calcula la probabilidad de que se produzca uno o más errores en un mensaje de 30 bits.
- Calcula la probabilidad de que se produzcan dos o más errores en un mensaje de n_1 bits, siendo n_1 el número total de bits del código 1.
- Calcula la probabilidad de que se produzcan dos o más errores en un mensaje de n_2 bits, siendo n_2 el número total de bits del código 2.
- Teniendo en cuenta los resultados anteriores, ¿cuál de los dos códigos consideras más eficiente?

Solución:

- a) Para el código 1 tenemos: $n=48$, $m=16$ i $r=30/48$ mientras que para el código 3 tenemos: $n=42$, $m=12$ i $r=30/42$.
- b) En el caso del código 1 calcularíamos las redundancias tal y como se indica en la figura:

11111	00000	11000	1
00111	10101	01010	0
11000	10101	10010	1

Por lo tanto, enviaríamos:

11111 00000 11000 1 00111 10101 01010 0 11000 10101 10010 1

Para el segundo código tenemos

11111	1
00000	0
11000	0
00111	1
10101	1
01010	0
11111	1

Y por lo tanto, enviaríamos:

11111 1 00000 0 11000 0 00111 1 10101 1 01010 0 11111 1

- c) Para el caso del código 1 se transmiten 30 bits útiles en $48 \times 15 \mu s$. Por lo tanto, la tasa de transmisión útil será:

$$r_1 = \frac{30}{48 \times 15 \cdot 10^{-6}} = 41.666,7 \text{ bps}$$

Análogamente, para el segundo caso:

$$r_2 = \frac{30}{42 \times 15 \cdot 10^{-6}} = 47.619,00 \text{ bps}$$

- d) Si revisamos las paridades del mensaje observaremos que existen 2 filas y dos columnas en las que se detecta que las paridades no coinciden. Esto nos permite detectar la presencia de errores pero no es posible identificar cuales de los bits afectados resultan erróneos y cuáles no.

11010	01111	11001	1	Error paridad fila
11101	01100	11101	1	Error paridad fila
00111	00101	00100	0	
	Error Paridad Bis 3+4			

- e) La probabilidad de un error o más en 30 bits se puede calcular como 1 menos la probabilidad de que todos los bits sean correctos. Así pues, tenemos:

$$p_{1+bits} = 1 - (1 - 10^{-4})^{30} = 0,002996$$

e)

- f) En este caso tenemos un total de 48 bits para calcular la probabilidad de que 2 o más bits sean erróneos. Para hacerlo podemos expresarlo como 1 menos la probabilidad de que todos los bits sean correctos menos la probabilidad de que haya un bit erróneo.

$$p_{2+bits} = 1 - (1 - 10^{-4})^{48} - 48 \cdot 10^{-4}(1 - 10^{-4})^{47} = 1,1245 \cdot 10^{-5}$$

- g) De la misma manera que en el caso anterior, pero ahora con un total de 42 bits, tenemos:

$$p_{2+bits} = 1 - (1 - 10^{-4})^{42} - 42 \cdot 10^{-4}(1 - 10^{-4})^{41} = 8,5870 \cdot 10^{-6}$$

- h) Teniendo en cuenta estos resultados queda claro que el mejor código es el código 2 ya que tiene una tasa de transmisión de bits útiles más alta y una probabilidad de no poder corregir errores más baja.

Problema 3. Multiplexación de señales en el tiempo: Transport Stream. (30%)

Queremos transmitir un conjunto de canales de audio y vídeo de alta calidad mediante un multiplex temporal estadístico con una filosofía similar al sistema de Transport Stream que se utiliza para la multiplexación de señales de Televisión Digital y estandarizado por la ISO en el estándar MPEG Sistemas. Esencialmente, cada el stream binario de cada canal de vídeo o audio se descompone en paquetes de 180 bytes de información útil. Cada uno de estos 180 bytes se ponen en otro paquete de 192 bytes que incluye los 180 bytes como carga útil más 2 bytes que identifican el canal de audio o vídeo del cuál transportan la información, 6 bytes de información de sincronismo y 4 bytes de redundancia para la eventual corrección de errores.

La estrategia de multiplexación de los canales audiovisuales es enviar estos paquetes de 192 bytes de forma continuada, multiplexando en el tiempo diferentes informaciones. Cada paquete de 192 bytes corresponde únicamente a un canal de audio o vídeo. Así, en un paquete no se pueden mezclar bits asociados a fuentes de audio o vídeo diferentes. Los paquetes se envían al canal siguiendo una estrategia de multiplexación estadística. Así, los canales de audio y vídeo van llenando unos buffers asociados a cada fuente y a medida que los buffers tienen un mínimo de 180 bytes se construye un nuevo paquete que se envía al canal. No hay tiempo de guarda entre paquetes. La duración del paquete debe diseñarse para que el multiplex permita transmitir todos los datos que deseamos enviar sin que se desborden los buffers del transmisor ni del receptor. En el caso en que todos los buffers estén vacíos pueden continuar enviando paquetes de 192 bytes sin información útil, con bits de relleno. Si se desea, se pueden encontrar más detalles de la filosofía general de transmisión del sistema de transporte stream en diferentes fuentes, entre ellas la wikipedia.

Queremos enviar los siguientes canales:

- 2 canales de vídeo de alta definición, codificados a una tasa de 15 Mbps¹ cada canal.
- 5 canales de vídeo de definición convencional, codificados a una tasa de 3,5 Mbps cada canal
- 1 canal de vídeo 4K de alta calidad codificado a 200 Mbps.
- 16 canales de audio de alta calidad codificados en PCM a una tasa de 1,152 Mbps para cada canal
- 4 canales de audio de comentarista, codificados en PCM a una tasa de 128 kbps por cada canal.
- 10 canales de información auxiliar, cada uno de ellos con una tasa de 32 kbps.

Se pide:

- a) Determina la tasa de bits útil de todo el multiplex completo, sin tener en cuenta los bits de cabecera y de redundancia.
- b) Calcula cuál debería ser la duración máxima de un paquete (T_{paquet}) para poder enviar toda la información asociada al multiplex. Suponga que la modulación de la información es del tipo NRZ.
- c) Suponga que en la práctica tomamos una duración de paquete que es un 95% del que hemos calculado en el apartado anterior. ¿Cuál será la tasa de bits transmitidos, incluyendo las cabeceras y redundancias. (Nota: el paquete se hace algo más corto para garantizar que incluso cuando las tasas de codificación aumente ligeramente se podrán ubicar todos los paquetes en el multiplex).
- d) Calcula el número de paquetes por segundo que se transmiten correspondientes al canal de vídeo 4K de alta calidad.
- e) Calcula el número de paquetes por segundo que se transmiten asociados a todo el multiplex.

¹ Considera que 1 Mbit = 10^6 bits, 1kbit = 10^3 bits

Solución:

- a) Contamos el total de bits de todo el multiplex

Vídeo HD, 2 canales, 15 Mbps	30 Mbps
Vídeo SD, 5 canales, 3,5 Mbps	17,5 Mbps
Vídeo 4K, alta calidad	200 Mbps
16 canales audio, 1,152 Mbps	18,432 Mbps
4 canales comentarista, 128 kbps	512 kbps
10 canales auxiliares, 32 kbps	320 kbps
Total DATOS ÚTILES	266,764 Mbps

- b) En un paquete tenemos que insertar 180 bytes útiles, por lo tanto, la duración del paquete ha de permitir como mínimo transmitir todo el flujo de bits del multiplex

$$\frac{1}{266,764 \cdot 10^6} \times 180 \times 8 = 5,3980 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

- c) Calculamos la duración de un paquete como un 95 % de este tiempo.

$$\begin{aligned} T_0 &= 0,95 \times 5,3980 \cdot 10^{-6} = \\ &= 5,1281 \cdot 10^{-6} \text{ s} \end{aligned}$$

En este tiempo hemos de insertar 192 bytes, por lo tanto el tiempo de bit y la tasa de transmisión será:

$$T_{bit} = \frac{5,1281 \cdot 10^{-6}}{192 \times 8} = 3,3386 \cdot 10^{-9} \implies r = 2,995224 \cdot 10^8 \text{ bps} = 299,52 \text{ Mbps}$$

- d) El canal de vídeo de alta calidad tiene 200 Mbps que se transmiten en paquetes de 180 bytes útiles, por lo tanto:

$$\frac{200 \cdot 10^6}{180 \cdot 8} = 138.889 \text{ paquets/segon}$$

- e) Repitiendo los cálculos para todo el multiplex:

$$\frac{266,764 \cdot 10^6}{180 \cdot 8} = 185.253 \text{ paquets/segon}$$