Estática

9

Centro de Gravedad y Centroide

Objetivos

- Concepto de centro de gravedad, centro de masas y centroide
- Determinar la localización del centro de gravedad y del centroide para un sistema de partículas discretas y para un cuerpo de forma arbitraria
- Teoremas de Pappus y Guldinus
- Método para encontrar la resultante de una carga distribuida de manera general

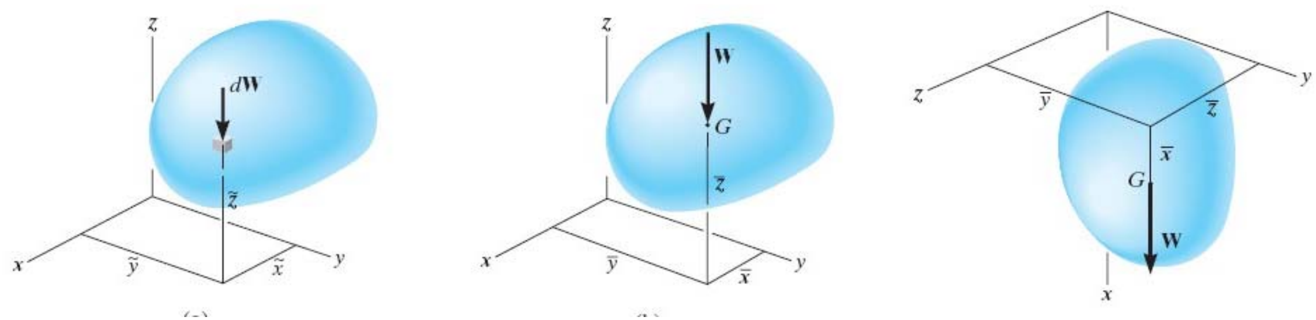
Índice

1. Centro de Gravedad y Centro de Masas par un Sistema de Partículas
2. Cuerpos compuestos
3. Teoremas de Pappus y Guldinus
4. Resultantes de cargas distribuidas
5. Presión de un fluido

9.1 Centro de Gravedad y Centro de Masas para un Sistema de Partículas

Centro de Gravedad

- Localiza el peso resultante de un sistema de partículas
- Consideramos un sistema de *n* partículas fijo dentro de una región del espacio
- Los pesos de las partículas pueden reempazarse por una única (equivalente) resultante con un punto de aplicación G bien definido



9.1 Centro de Gravedad y Centro de Masas para un Sistema de Partículas

Centro de Gracedad

- Peso resultante = peso total de las n partículas

  $$W_R = \sum W$$

- Suma de los momentos de los pesos de todas las partículas respecto a los ejes x, y, z axes = momento del peso resultante respecto a esos ejes
- Suma de momentos respecto al eje x,

  $$\bar{x} W_R = \tilde{x}_1 W_1 + \tilde{x}_2 W_2 + \ldots + \tilde{x}_n W_n$$

- Suma de momentos respecto al eje y,

  $$\bar{y} W_R = \tilde{y}_1 W_1 + \tilde{y}_2 W_2 + \ldots + \tilde{y}_n W_n$$

9.1 Centro de Gravedad y Centro de Masas para un Sistema de Partículas

Centro de Gravedad

- Aunque los pesos no producen momento sobre el eje z, podemos rotar el sistema de coordenadas 90° respecto al eje *x* (o *y*) con las partículas fijas y sumar los momentos respecto al eje *x* (o *y*),

$$\bar{z} W_R = \tilde{z}_1 W_1 + \tilde{z}_2 W_2 + \ldots + \tilde{z}_n W_n$$

- De manera general, si g es constante,

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x} m}{\sum m}; \bar{y} = \frac{\sum \tilde{y} m}{\sum m}, \bar{z} = \frac{\sum \tilde{z} m}{\sum m}$$

9.1 Centro de Gravedad y Centro de Masas para un Sistema de Partículas

Centro de Masas

- Ya que el peso es W = mg

$$\bar{x}=\frac{\sum \tilde{x}\,m}{\sum m}\,;\bar{y}=\frac{\sum \tilde{y}\,m}{\sum m}\,,\bar{z}=\frac{\sum \tilde{z}\,m}{\sum m}$$

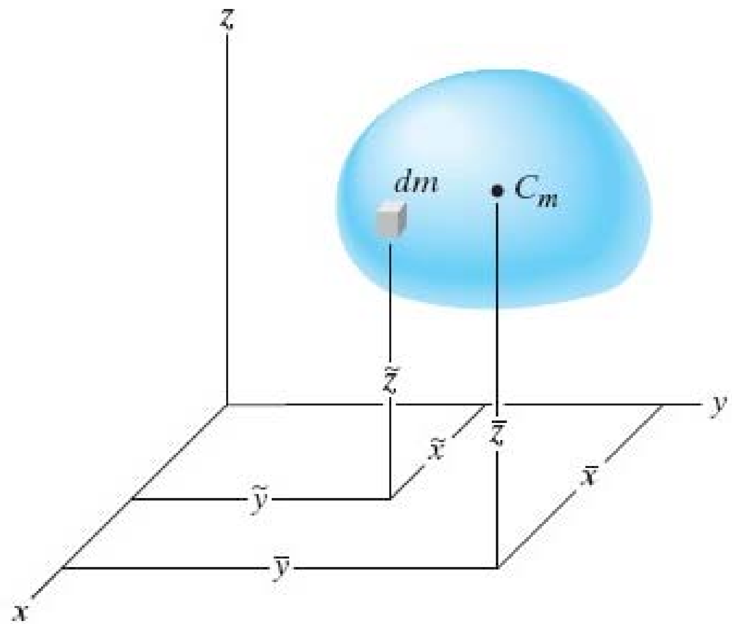
- Esto implica que el centro de gravedad coincide con el centro de masas
- Las partículas tienen peso solo bajo la influencia de una atracción gravitatoria, mientras que el centro de masas es independiente de la gravedad.

9.1 Centro de Gravedad y Centro de Masas para un Sistema de Partículas

Centro de Masas

- Un cuerpo rídigo está compuesto por un número infinito de partículas
- Si consideramos una partícula arbitraria de peso dW

$$\bar{x}=\frac{\int \tilde{x}\,dW}{\int dW};\ \bar{y}=\frac{\int \tilde{y}\,dW}{\int dW};\ \bar{z}=\frac{\int \tilde{z}\,dW}{\int dW}$$

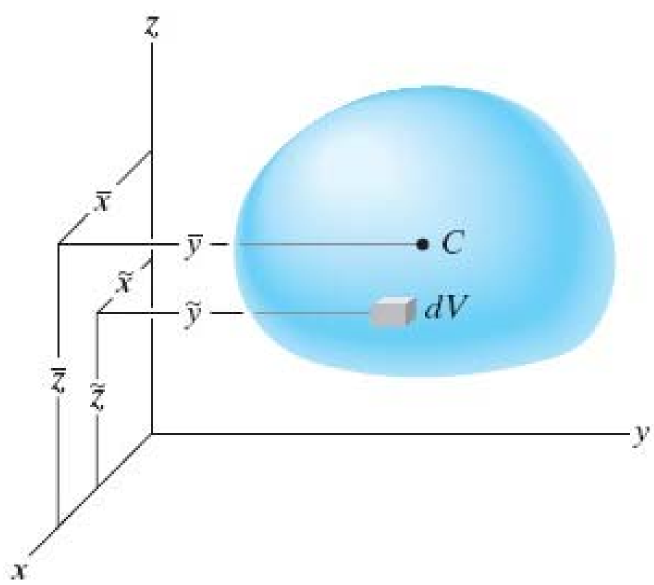


9.1 Centro de Gravedad y Centro de Masas para un Sistema de Partículas

Centroide de un Volumen

- Consideremos un objeto subdivididos en elementos de volumen dV. Para la localización del centroide,

$$\bar{x}=\frac{\int_V \tilde{x}\,dV}{\int_V dV};\ \bar{y}=\frac{\int_V \tilde{y}\,dV}{\int_V dV};\ \bar{z}=\frac{\int_V \tilde{z}\,dV}{\int_V dV}$$

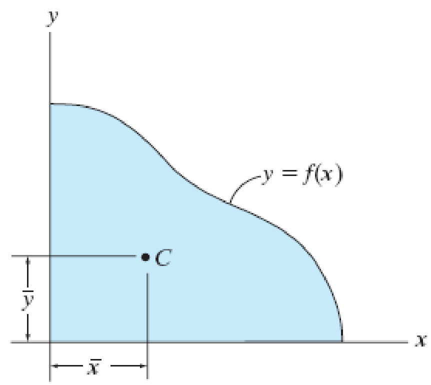


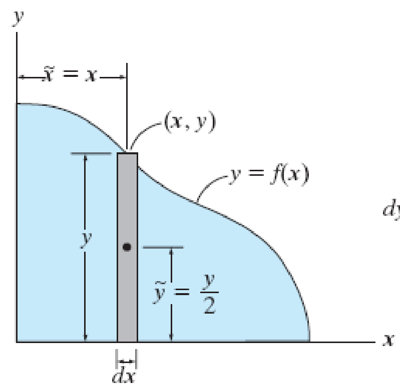
9.1 Centro de Gravedad y Centro de Masas para un Sistema de Partículas

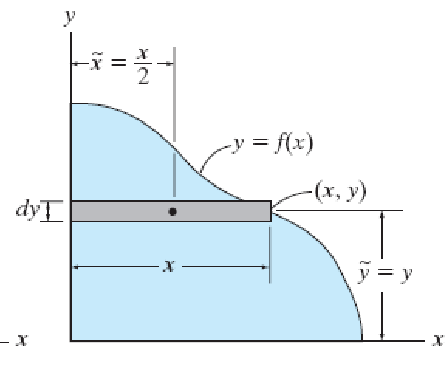
Centroide de un Área

- Para el centroide de la superficie de un objeto, tal como una placa o un disco, subdividimos el área en elementos diferenciales *dA*

$$\bar{x}=\frac{\int_A \tilde{x}\,dA}{\int_A dA};\ \bar{y}=\frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{\int_A dA};\ \bar{z}=\frac{\int_A \tilde{z}\,dA}{\int_A dA}$$





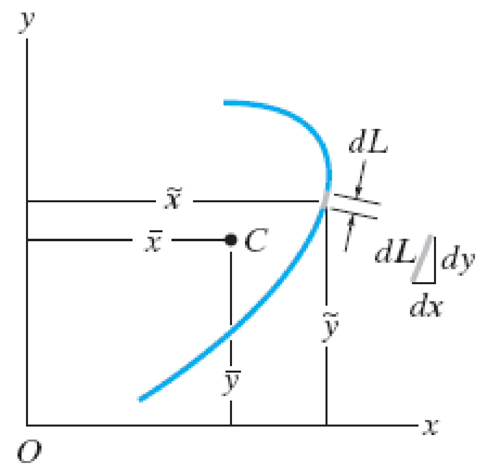


9.1 Centro de Gravedad y Centro de Masas para un Sistema de Partículas

Centroide de una Línea

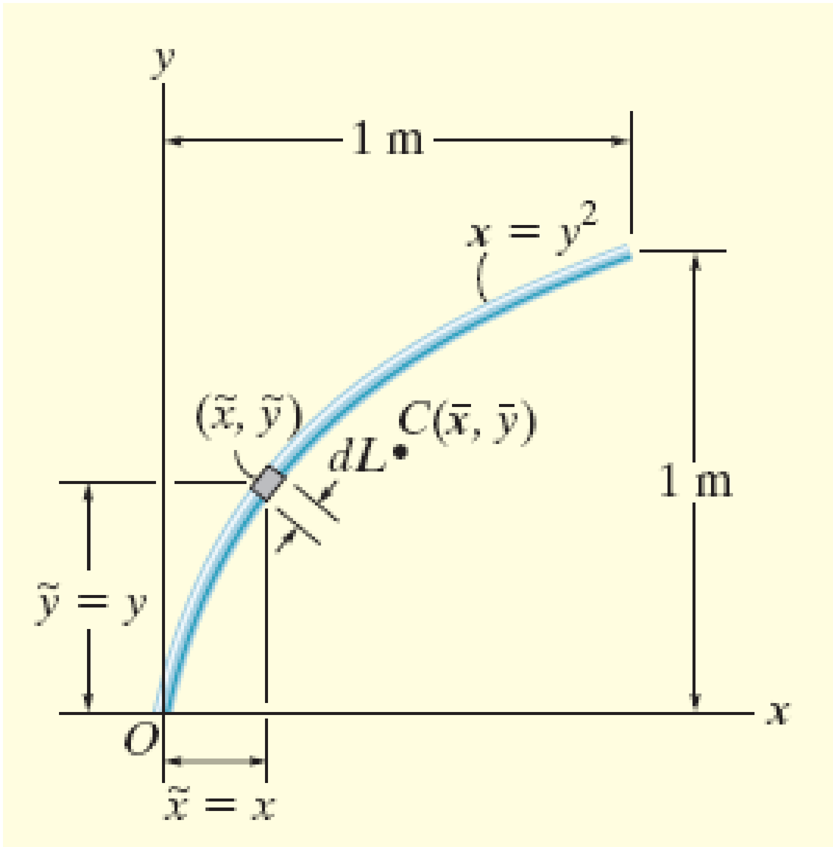
- Si la geometría de un objeto toma la forma de una linea, el balance de los momentos de cada elemento diferencial *dL* respecto a cada eje, resulta

$$\bar{x}=\frac{\int_L \tilde{x}\,dL}{\int_L dL};\quad \bar{y}=\frac{\int_L \tilde{y}\,dL}{\int_L dL};\quad \bar{z}=\frac{\int_L \tilde{z}\,dL}{\int_L dL}$$



Ejemplo

Localice el centroide de la barra doblada formando un arco parabólico



Solución

Elemento diferencial

Localizado sobre la curva en un punto arbitrario (x, y)

Área y Brazo de Momento o palanca

Para la longitud diferencial del elemento dL

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\ dy$$

$$dL = \sqrt{(2y)^2 + 1}\ dy$$

Ya que $x = y^2$, y resulta, $dx/dy = 2y$

$$\tilde{y} = y$$
$$\tilde{x} = x,$$

El centroide está localizado en

Solución

Integrando

$$\bar{x}=\frac{\int_L \tilde{x}\, dL}{\int_L dL}=\frac{\int x\sqrt{4y^2+1}\; dy}{\int \sqrt{4y^2+1}\; dy}=\frac{\int y^2\sqrt{4y^2+1}\; dy}{\int \sqrt{4y^2+1}\; dy}$$

$$\frac{0.6063}{1.479}=0.410\, m$$

$$\bar{y}=\frac{\int_L \tilde{y}\, dL}{\int_L dL}=\frac{\int y\sqrt{4y^2+1}\; dy}{\int \sqrt{4y^2+1}\; dy}$$

$$\frac{0.8484}{1.479}=0.574\, m$$

9.2 Cuerpos compuestos

- Consisten en una serie de cuerpos “más simples” (ej. rectangulares, triangulares o semicirculares) conectados entre sí
- Un cuerpo puede ser seccionado en sus partes componentes
- Para un número finito de pesos tenemos

$$\bar{x}=\frac{\sum \tilde{x}\,W}{\sum W} \quad \bar{y}=\frac{\sum \tilde{y}\,W}{\sum W} \quad \bar{z}=\frac{\sum \tilde{z}\,W}{\sum W}$$

9.2 Cuerpos compuestos

Procedimiento de Análisis

<u>Partes</u>

- Dividir el cuerpo en un número finito de partes que tengan una forma más simple
- Los huecos se tratan como una parte con peso o tamaño negativo

<u>Brazo del momento</u>

- Establecer los ejes de coordenadas y dereminar las coordenadas del centro de gravedad o centroide de cada parte

9.2 Cuerpos compuestos

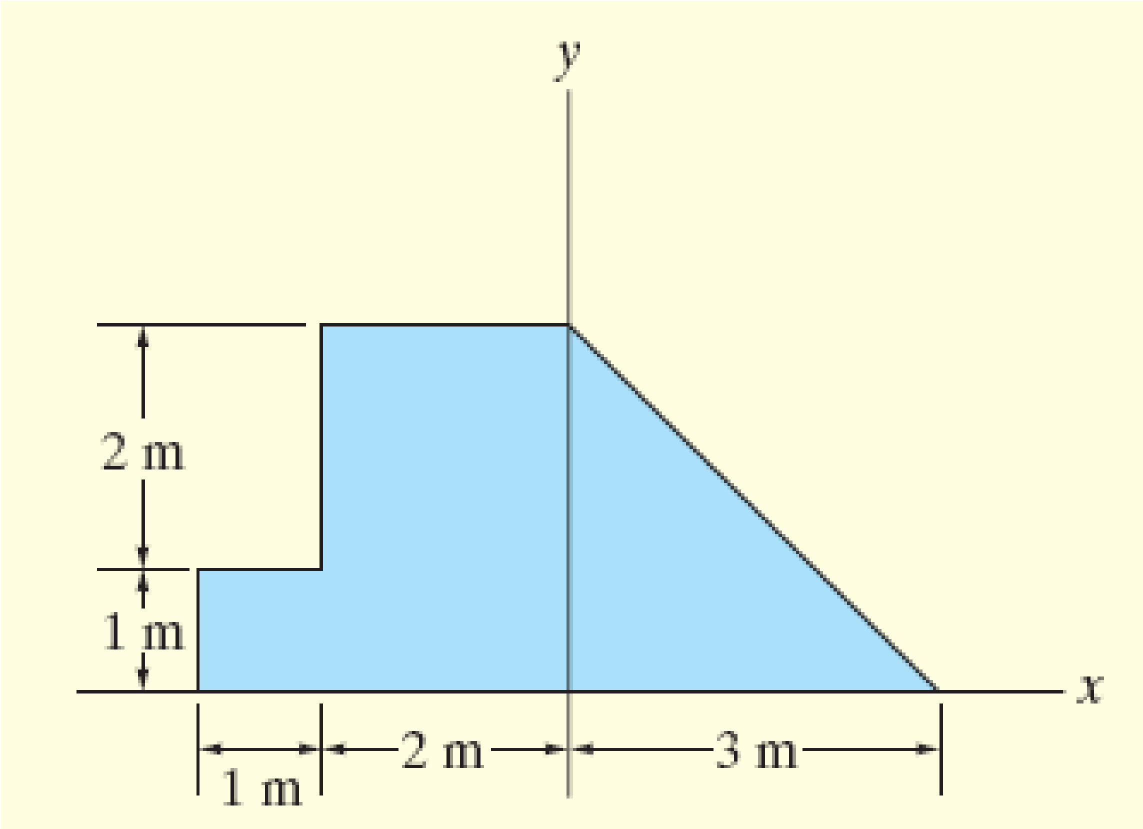
Procedimiento de Análisis

Sumas

- Determinar las coordinadas del centro de gravedad aplicando las ecuaciones del centro de gravedad
- Si un objeto es simétrico respecto a un eje. El centroide está localizado en ese eje

Ejemplo

Localizar el centroide de la placa.

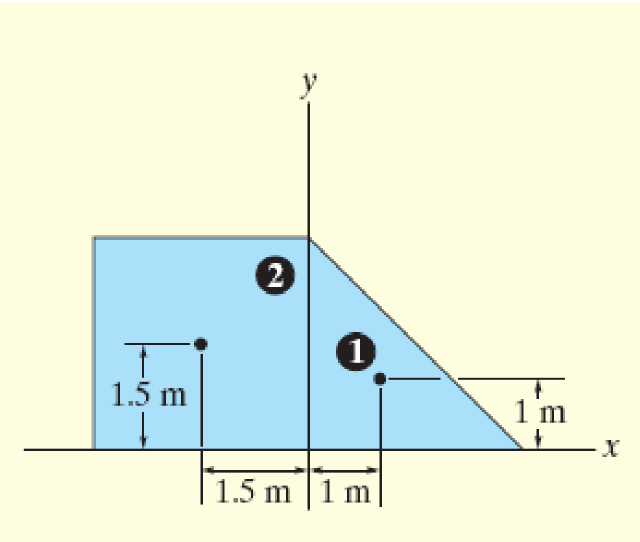


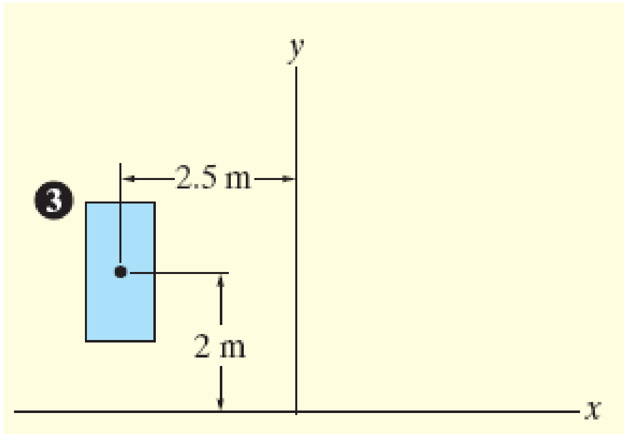
Solución

<u>Partes</u>

Dividimos la placa en 3 segmentos.

El área del rectágulo pequeño se puede considerar "negativa".





Solución

<u>Brazo del Momento</u>

Localización del centroide para cada pieza está determinado e indicado en el diagrama.

Segment	A (m^2)	$\tilde{x}$ (m)	$\tilde{y}$ (m)	$\tilde{x}A$ (m^3)	$\tilde{y}A$ (m^3)
1	$\frac{1}{2}(3)(3) = 4.5$	1	1	4.5	4.5
2	$(3)(3) = 9$	-1.5	1.5	-13.5	13.5
3	$-(2)(1) = -2$	-2.5	2	5	-4
	$\Sigma A = 11.5$			$\Sigma\tilde{x}A = -4$	$\Sigma\tilde{y}A = 14$

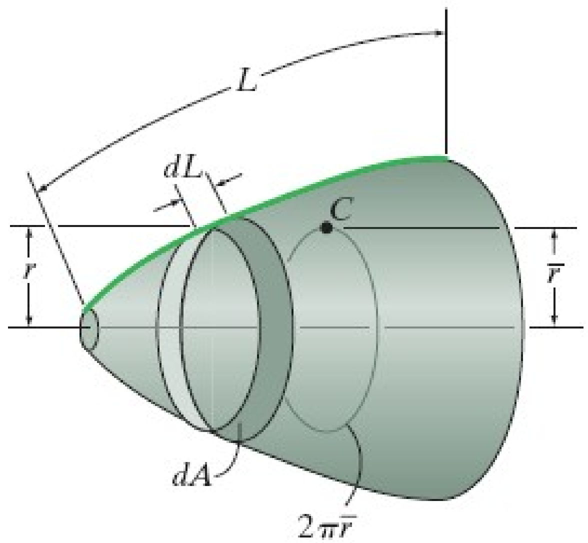
<u>Suma</u>

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x}A}{\sum A} = \frac{-4}{11.5} = -0.348\,mm$$

$$\bar{y} = \frac{\sum \tilde{y}A}{\sum A} = \frac{14}{11.5} = 1.22\,mm$$

9.3 Teoremas de Pappus y Guldinus

- Una superficie de revolución se genera rotando una curva plana alrededor de un eje fijo en el plano de la curva
- Un volumen de revolución se genera rotando un área plana alrededor de un eje fijo en el plano del área



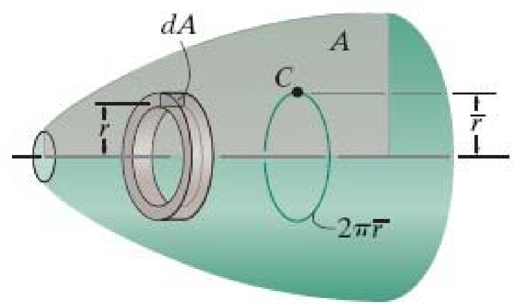
9.3 Teoremas de Pappus y Guldinus

- Se usan los teoremas de Pappus y Guldinus para encontrar las superficies y los volumenes de cualquier objeto de revolución siempre que las curvas y áreas generadoras no crucen el eje respecto al cual son rotadas

Área de una Superficie

- El área de una superficie de revolución = producto de la longitud de la curva por la distancia que recorre el centroide al generar la superficie

$$A = \theta \, \bar{r} \, L$$

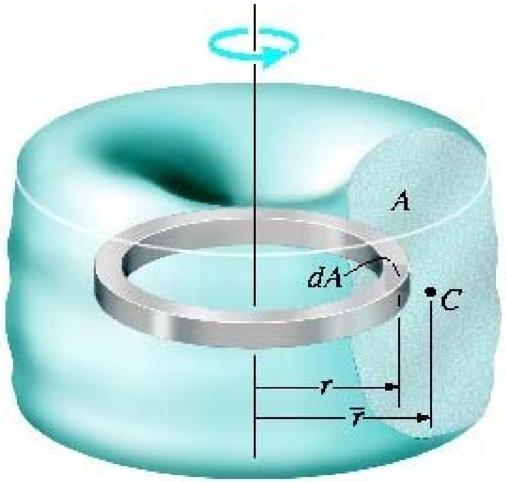


9.3 Teoremas de Pappus y Guldinus

Volumen

- Volumen de un cuerpo de revolución = producto del área generadora por la distancia viajada por el centroide al generar el volumen

$$V = \theta \bar{r} A$$



Ejemplo

Demuestre que el área de la superficie de una esfera es $A = 4\pi R^2$ y su volumen $V = 4/3\ \pi R^3$.

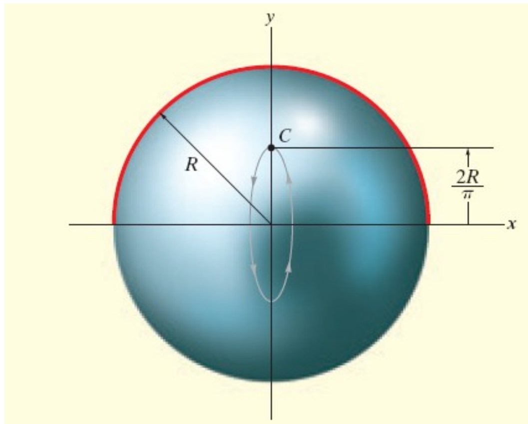
Solución

Área de la superficie

Generada por el semicírculo rotando alrededor del eje x

Para el centroide,

$$\bar{r} = 2R/\pi$$



Para la superficie área,

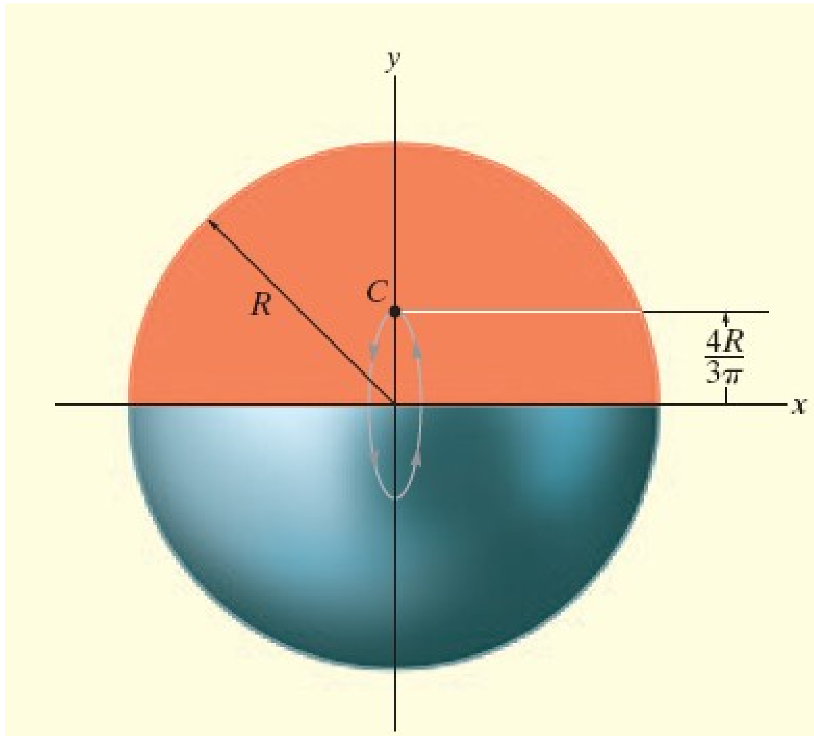
$$A = \theta\ \tilde{r}\ L;$$

$$A = 2\pi\left(\frac{2R}{\pi}\right)\pi R = 4\pi R^2$$

Solución

Volumen

Generado por la rotación de un área semicircular alrededor del eje x



Para el centroide,

$\bar{r} = 4R/3\pi$

Para el volumen,

$V = \theta\ \tilde{r}\ A;$

$$V = 2\pi \left(\frac{4R}{3\pi}\right)\left(\frac{1}{2}\pi R^2\right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

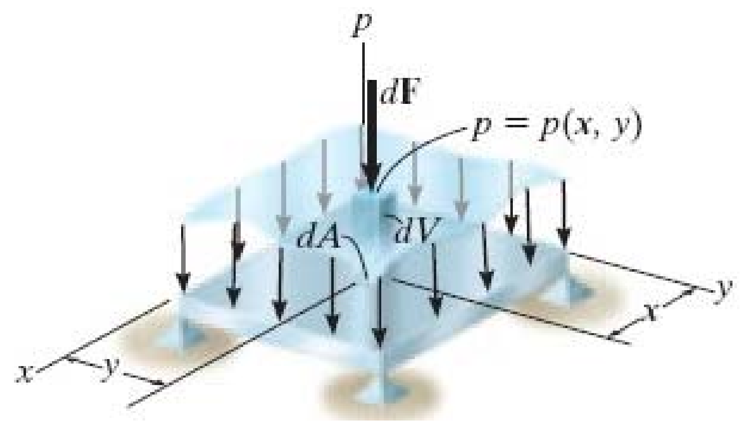
9.4 Resultante de una carga distribuida

Distribución de la presión sobre una superficie

- Consideramos una superficie plana sometida a una carga por unidad de superficie p = p(x, y) Pa
- Determinamos la fuerza dF que actúa sobre el elemento de área dA m^2 de la placa, localizado en el punto (x, y)

  dF = [p(x, y) N/m^2](dA m^2)

  = [p(x, y) dA] N



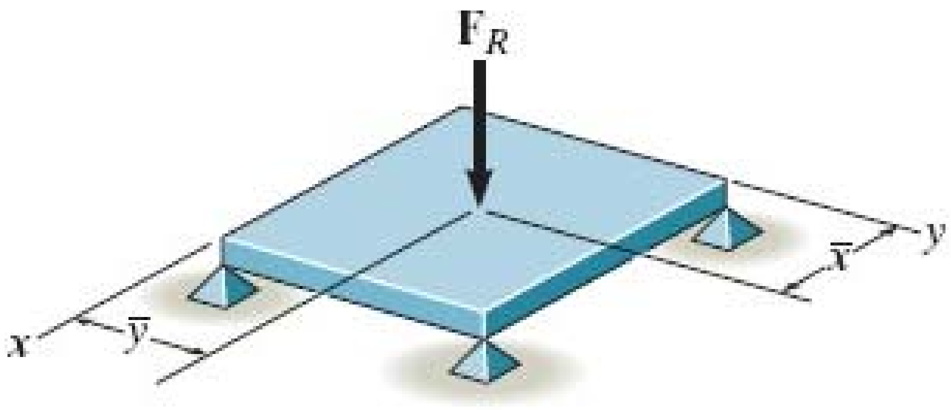
- La carga entera se representa

como un infinito número de fuerzas paralelas actuando sobre cada diferencial de área

9.4 Resultante de una carga distribuida

Distribución de la presión sobre una superficie.

- El sistema se puede simplificar a una fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ actuando sobre un punto único de la placa



9.4 Resultante de una carga distribuida

Magnitud de la fuerza resultante

- Para determinar la magnitud de $\mathbf{F}_R$, sumamos las fuerzas diferenciales d**F** actuando sobre cada elemento de área
- Magnitud de la fuerza resultante = volumen total el diagrama distribuido de cargas
- La localización de la fuerza resultante es

$$\bar{x} = \frac{\int x\rho(x,y)\,dA}{\int \rho(x,y)\,dA} = \frac{\int x\,dV}{\int dV}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y\rho(x,y)\,dA}{\int \rho(x,y)\,dA} = \frac{\int y\,dV}{\int dV}$$

9.5 Presión en fluidos

- De acuerdo a la ley de Pascal, un fluido en reposo crea una presión p en un punto siendo la misma en todas las direcciones.
- La magnitud de p depende del peso específico γ o de la densidad másica ρ del fluido, y de la profundidad z desde la superficie a la que se encuentra el punto considerado

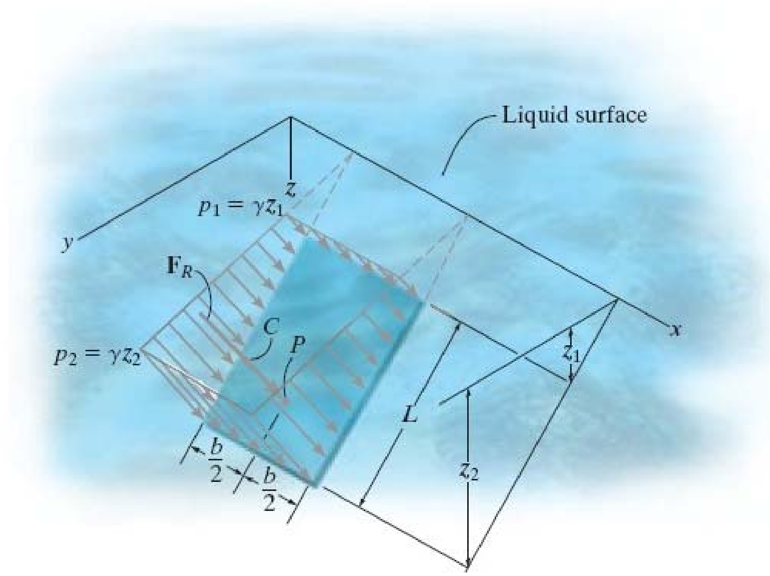
$$p = \gamma z = \rho g z$$

- Esto solo es válido para fluidos incompresibles
- Un gas es un fluido compresible y la anterior ecuación no puede usarse

9.5 Presión en fluidos

Placa plana de anchura constante

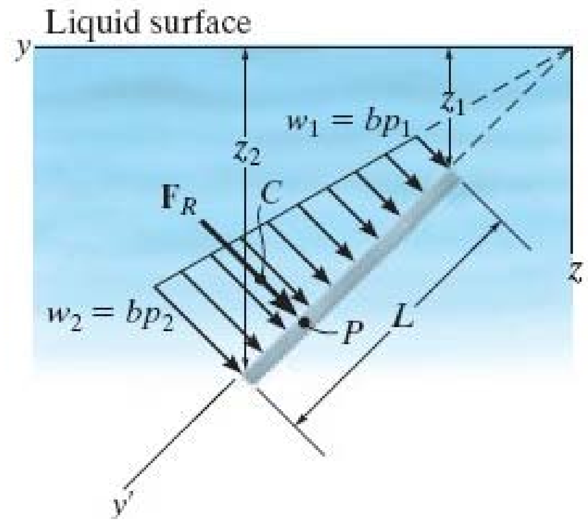
- Considere una placa rectangular de espesor constante sumergida en un líquido de peso específico γ
- El plano de la placa forma un ángulo con la horizontal según se muestra



9.5 Presión en fluidos

Placa plana de anchura constante

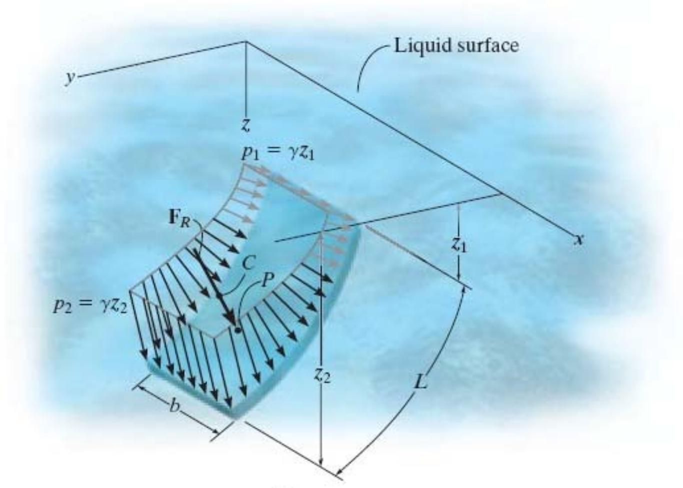
- Como la presión varía linealmente con la profundidad, la presión sobre la placa se representa por un volumen trapezoidal, teniendo una intensidad de $p_1 = \gamma z_1$ en z_1, y $p_2 = \gamma z_2$ en z_2
- Magnitud de la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ = volumen del diagrama de cargas



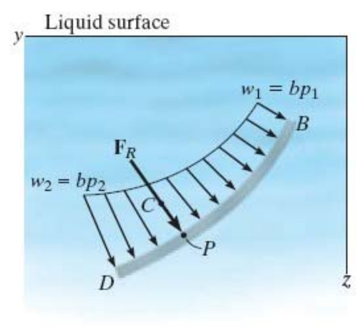
9.5 Presión en fluidos

Placa plana curvada de anchura constante

- Cuando la placa sumergida está curvada, la presión que actúa normal a la placa cambia continuamente de dirección
- Se puede determinar F_R, la localización del centroide C, y del centro de presiones P, por integración



(a)



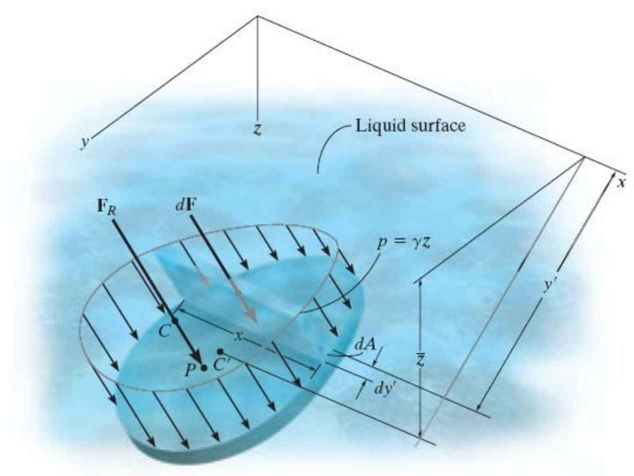
(b)

9.5 Presión en fluidos

Placa plana de anchura variable

- Consideramos la distribución de carga que actúa sobre la superficie de una placa sumergida de espesor variable
- La presión uniforme $p = \gamma z$ (fuerza/área) actuá sobre dA, la magnitud del elemento de fuerza d**F**

$$dF = dV = p\,dA = \gamma z(x\,dy')$$



9.5 Presión en fluidos

Placa plana de espesor variable

- El centroide C' define el punto en el que $\mathbf{F}_R$ actúa

$$F_R = \int \rho dA = \int dV = V$$

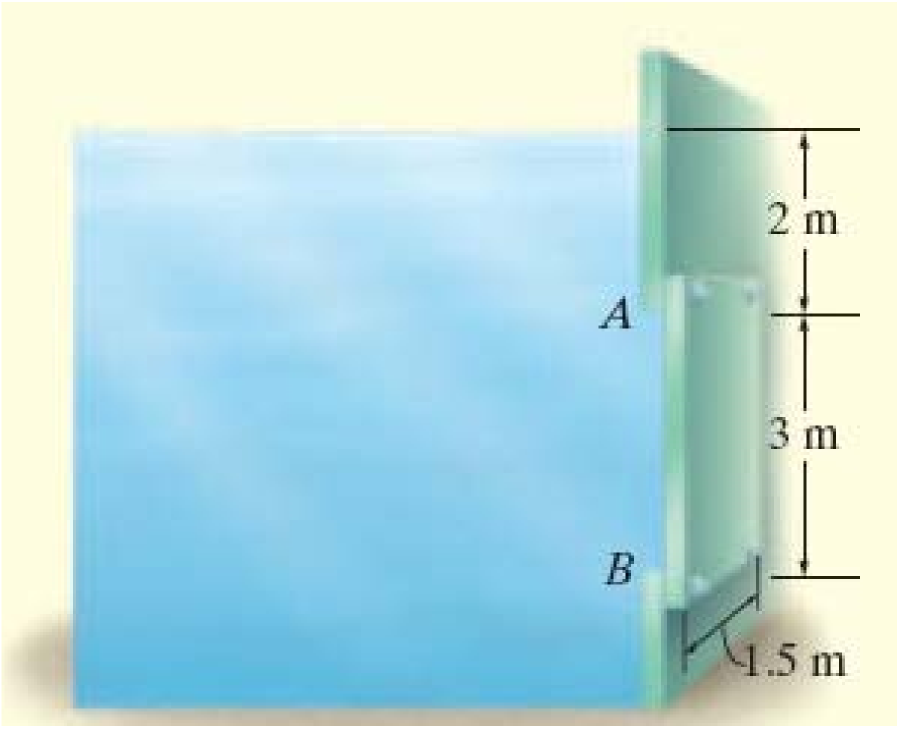
- El centro de presión P que se encuentra en la superficie de la placa justo debajo del centroide del volumen del diagrama de presiones de C viene dado por

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\, dV}{\int dV} \quad \bar{y}' = \frac{\int \tilde{y}' dV}{\int dV}$$

- Este punto no coincide con el centroide de la superficie de la placa

Ejemplo

Determine la magnitud y localización de la fuerza hidrostática resultante sobre la placa sumergida AB. La placa tiene un anchura de 1.5m; $\rho_w = 1000 kg/m^3$.



Solución

La presión del agua a las profundidades A y B son

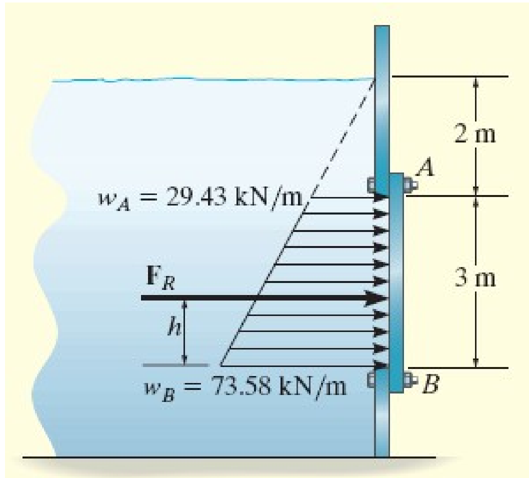
$$\rho_A = \rho_w g z_A = (1000\, kg/m^3)(9.81\, m/s^2)(2\text{m}) = 19.62\, kPa$$

$$\rho_B = \rho_w g z_B = (1000\, kg/m^3)(9.81\, m/s^2)(5\text{m}) = 49.05\, kPa$$

Para las intensidades de las cargas en A y B,

$$w_A = b\rho_A = (1.5\text{m})(19.62\, kPa) = 29.43\, kN/m$$

$$w_B = b\rho_B = (1.5\text{m})(49.05\, kPa) = 73.58\, kN/m$$



Solución

Para la magnitud de la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ creada por la carga distribuida.

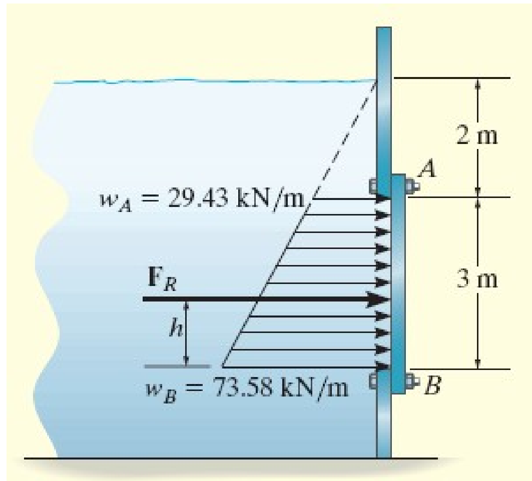
$$F_R = area\ of\ trapezoid$$

$$\frac{1}{2}(3)(29.4+73.6)=154.5\text{N}$$

Esta fuerza actúa This force actúa sobre el centroide del área, a una altura

$$h=\frac{1}{3}\left(\frac{2(29.43)+73.58}{29.43+73.58}\right)(3)=1.29m$$

medida desde B



Solution

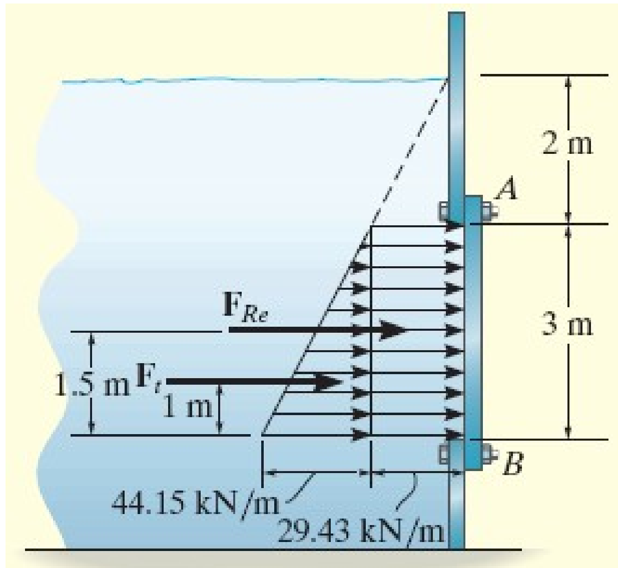
El mismo resultado se puede optener considernado dos componentes de $\mathbf{F}_R$ definidas por el triangulo y rectángle.

Cada fuerza actúa a través de su centroide asociado y tiene una magnitud de

$$F_{Re} = (29.43\, kN/m)(3\text{m}) = 88.3\, kN$$
$$F_t = (44.15\, kN/m)(3\text{m}) = 66.2\, kN$$

Y resulta

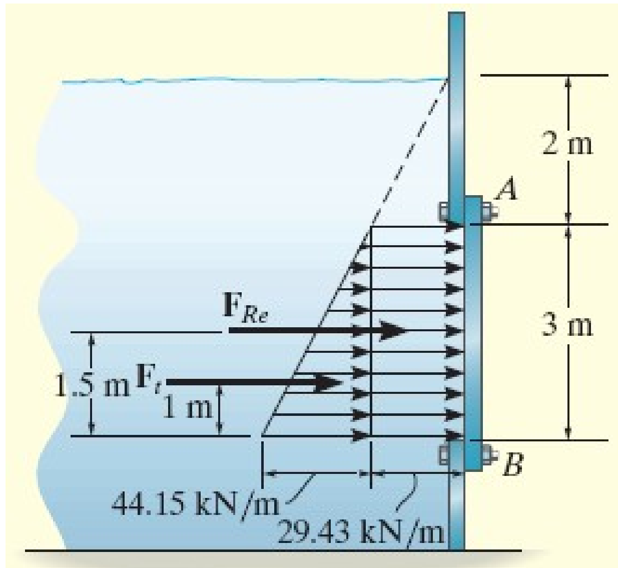
$$F_R = F_{Re} + F_R = 88.3\, kN + 66.2\, kN = 154.5\, kN$$



Solución

La localización de $\mathbf{F}_R$ se determina sumando los momentos respecto a B

$$\sum (M_R)_B = \sum M_B;$$
$$(154.5)h = 88.3(1.5) + 66.2(1)$$
$$h = 1.29\,m$$



QUIZ

1.El __________ es el punto que define el centro geométrico de un objeto.

A)Centro de gravedad   B) Centro de masa

B)Centroide   D) Niguna respuesta es correcta

2. Para estudiar problemas del movimiento de la materia bajo influencias de fuerzas, i.e. de dinámica, es necesario localizar un punto llamado _________.

A) Centro de gravedad   B) Centro de masa

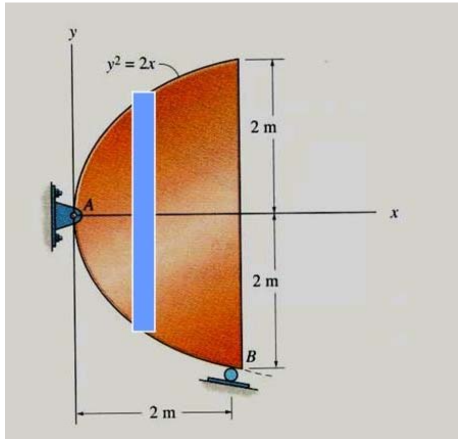
C) Centroide   D) Ninguna respuesta es correcta

QUIZ

3. Si una banda vertical se elige como el elemento diferencial, entonces, todas las variables, incluido los límites de integración deben de estar en función de ___ .

A) x   B) y

C) z   D) Ninguna es correcta



4. Para la banda elegida, cuáles son los valores de: $\tilde{x}$, $\tilde{y}$

A) (x , y)   B) (x / 2 , y / 2)

C) (x , 0)   D) (x , y / 2)

QUIZ

5. Un cuerpo compuesto se refiere en este tema a un cuerpo hecho de ____.

A) Fibra de carbón y resina

B) Acero y cemento

C) Una colección de partes “simples” y huecos

D) Una colección de partes “complejas” y huecos

6. El método para determinar la localización del centro de gravedad conocidas los de las partes, requiere de _______.

A) Integración

B) Diferenciación

C) Simple aritmética

D) Todo lo anterior.

QUIZ

7. Unsando la información del centroide, ¿cuál es el mínimo número de piezas que hay que considerar para determinar el área que se muestra a la derecha?

A)1 B) 2 C) 3 D) 4

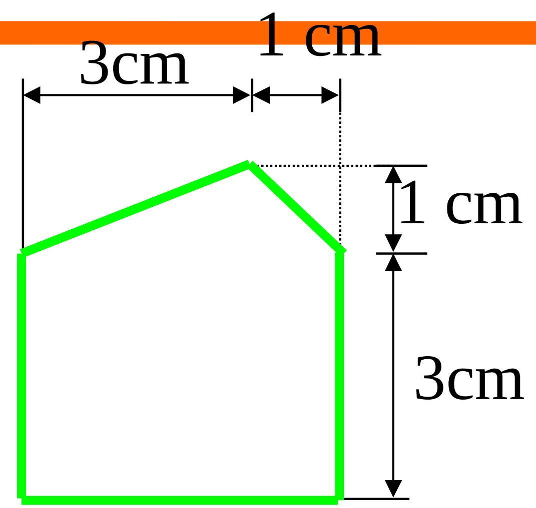
8. A storage box is tilted up to clean the rug underneath the box. It is tilted up by pulling the handle C, with edge A remaining on the ground. What is the maximum angle of tilt (measured between bottom AB and the ground) possible before the box tips over?

A) 30° B) 45 ° C) 60 ° D) 90 °

QUIZ

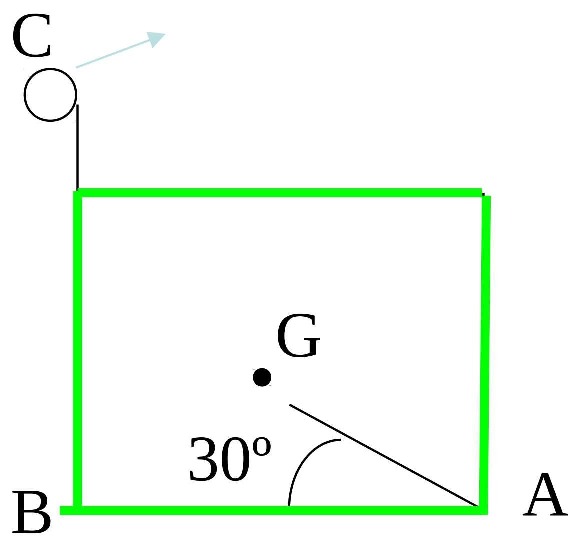
7. ¿Cuál es el mín numero de piezas que Hay que considerar para determinar el centroide de la superficie?

A)1   B) 2   C) 3   D) 4



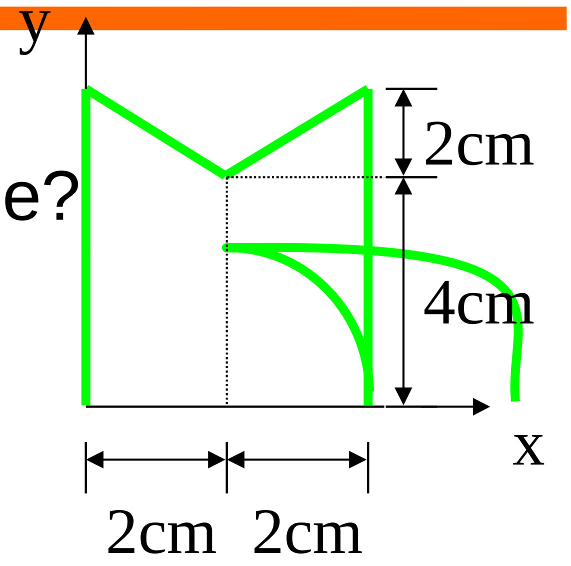
8. Una caja is tilted up by pulling C, with edge A remaining on the ground. What is the max angle of tilt possible before the box tips over?

A) 30°   B) 45 °   C) 60 °   D) 90 °



QUIZ

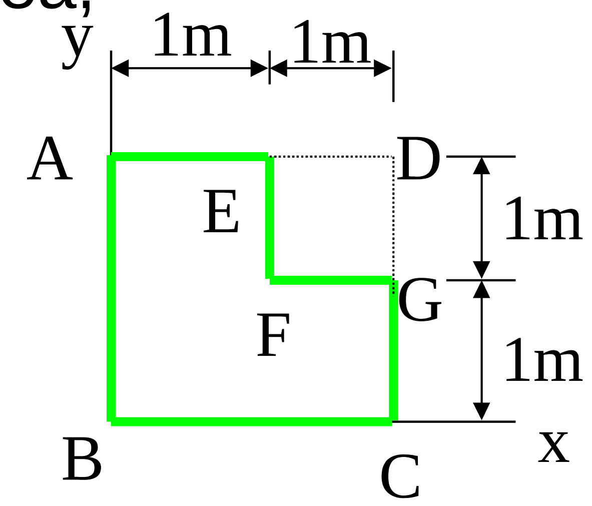
9. For determining the centroid, what is the min number of pieces you can use?



A) Two B) Three

C) Four D) Five

10. For determining the centroid of the area, what are the coordinates (x, y) of the centroid of square DEFG?



A) (1, 1) m B) (1.25, 1.25) m

C) (0.5, 0.5) m D) (1.5, 1.5) m