



Universidad de Granada
Departamento de Teoría de la Señal,
Telemática y Comunicaciones

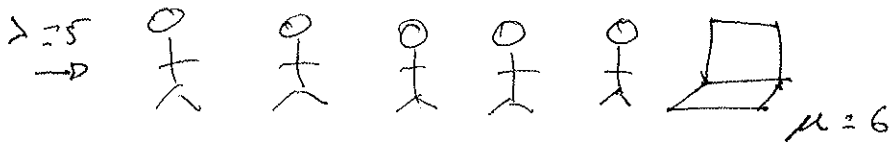


ETSIT
C/ Periodista Daniel Sancedo Aranda, s/n
18071 - Granada

SOLUCIÓN

PROBLEMA 1

Ordenador de la Escuela



$$\lambda = 5 \text{ alum/h}$$

$$\mu = 6 \text{ alumnos/h}$$

$$\rho = \frac{5}{6}$$

$$1. N = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{5/6}{1 - 5/6} = 5 \text{ alumnos}$$

$$N_q = N - \rho = 4.16 \text{ alumnos}$$

2. Terminal ocupado

$$Pr[\text{Terminal ocupado}] = 1 - p_0 = \rho = \frac{5}{6} \approx \text{83.3\%}$$

3. Terminal libre

$$Pr[\text{Terminal libre}] = p_0 \approx 16.7\%$$

$$4. T = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{6 - 5} = 1 \text{ hora}$$

$$W_q = T - \frac{1}{\mu} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \text{ hora} = 50 \text{ minutos}$$



Universidad de Granada
Departamento de Teoría de la Señal,
Telemática y Comunicaciones

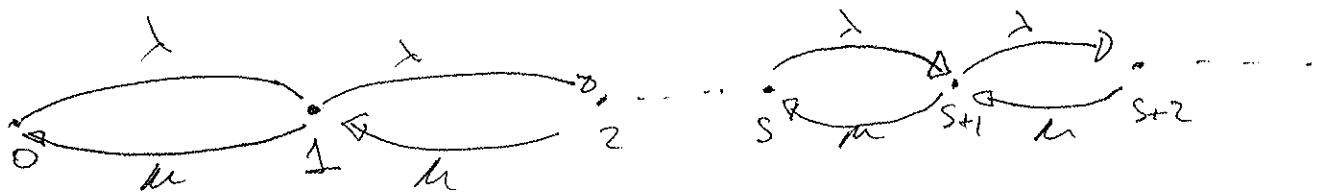
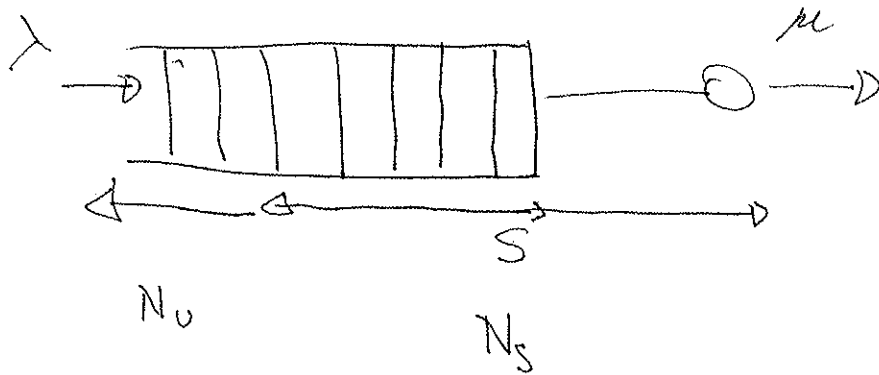


ETSIT
C/ Periodista Daniel Sancedo Aranda, s/n
18071 - Granada

SOLUCIÓN

PROBLEMA 2

Comedor



$$p_n = p_0 \rho^n \quad \text{donde} \quad p_0 = 1 - \rho \quad \parallel \quad N = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

$$N_v = \sum_{n=0}^{\infty} n p_{n+s} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_0 \cdot \rho^{n+s} = \rho^s \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n p_0 \rho^n$$

$$N_v = \rho^s \cdot \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\rho^{s+1}}{1 - \rho}$$

$$T_v = \frac{N_v}{\lambda} = \rho^s \cdot \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{\rho^s}{\mu - \lambda}$$

- $S = 10$

$$N = \frac{\rho}{1-\rho} = 19 \text{ bandejas}$$

$$N_0 = \rho^S \cdot \frac{\rho}{1-\rho} = 11.37 \text{ personas}$$

$$T_0 = \frac{N_0}{\lambda} = 5.98 \text{ min}$$

- si $S = 20$

$$N_0 = 6.8 \text{ personas}$$

$$T_0 = 3.58 \text{ min}$$

- si $S = 100$

$$N_0 = 0.11 \text{ } ~~24~~ \text{ personas}$$

$$T_0 = 0.06 \text{ minutos}$$



Universidad de Granada
Departamento de Teoría de la Señal,
Telemática y Comunicaciones

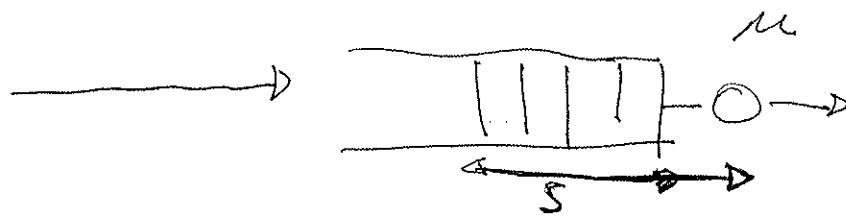


ETSIT
C/ Periodista Daniel Sancedo Aranda, s/n
18071 - Granada

SOLUCIÓN

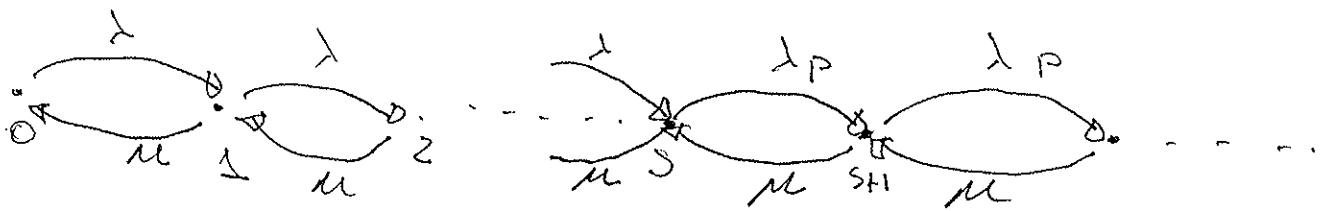
PROBLEMA 3

RED



• ~~New arrival~~

- Si el número de mensajes en el buffer es mayor o igual $S \Rightarrow$ cada nuevo paquete se descarta con probabilidad $(1-p)$



$\frac{\lambda p}{\mu} < 1 \Leftrightarrow$ est. estabilidad

$$\lambda p_0 = \mu p_1 \Rightarrow p_1 = p_0 \frac{\lambda}{\mu} = p_0 \rho$$

$$\lambda p_1 = \mu p_2 \Rightarrow p_2 = p_0 \rho^2$$

$$\boxed{p_s = p_0 \rho^s} \Rightarrow p_n = p_0 \cdot \rho^n \text{ para } n=0, 1, \dots, S$$

$$p \cdot \lambda \cdot p_s = \mu p_{s+1} \Rightarrow p_{s+1} = p_s p \frac{\lambda}{\mu} = p_0 \rho^{s+1}$$

$$p \cdot \lambda p_{s+1} = \mu p_{s+2} \Rightarrow p_{s+2} = p_{s+1} \cdot p \frac{\lambda}{\mu} = p_0 \rho^{s+2}$$

$$p_n = p_0 \cdot \rho^n \cdot \rho^{n-S} \Leftrightarrow \text{para } n=S, s+1, \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}} = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{S-1} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} + \sum_{n=S}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}$$

$$\frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{S-1} p^n + \sum_{n=S}^{\infty} p^n \cdot p^{n-S}}$$

$$\frac{1}{\frac{1-p^S}{1-p} + p^S \cdot \sum_{n=S}^{\infty} (pp)^{n-S}} = 1$$

$$\frac{1}{\frac{1-p^S}{1-p} + \frac{p^S}{1-pp}}$$

$$P_B = \sum_{n=S}^{\infty} (1-p) p_n = (1-p) \cdot \sum_{n=S}^{\infty} p_n \cdot \frac{p_0}{p_0} =$$

$$(1-p) p_0 \cdot \sum_{n=S}^{\infty} \frac{p_n}{p_0} = (1-p) p_0 \sum_{n=S}^{\infty} p^n \cdot p^{n-S} =$$

$$P_B = (1-p) \cdot p_0 \cdot \frac{p^S}{1-pp}$$



Universidad de Granada
Departamento de Teoría de la Señal,
Telemática y Comunicaciones



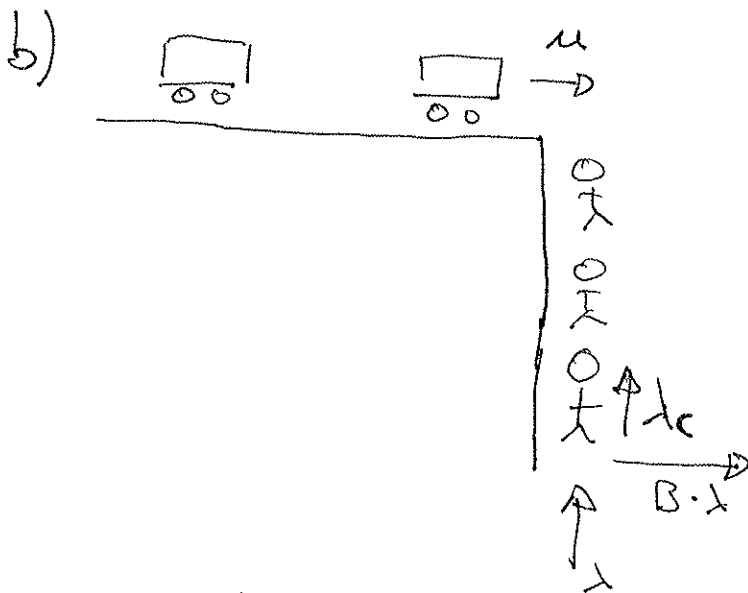
ETSIT
C/ Periodista Daniel Sancedo Aranda, s/n
18071 - Granada

SOLUCIÓN

PROBLEMA 4

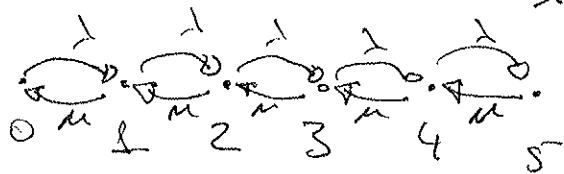
a) Los tiempos entre llegadas se distribuyen exponencialmente, y por tanto se trata de un proceso sin memoria.

Tiempo de espera = 1 min



$$\lambda = 2/3 \text{ perso/min}$$

$$\mu = 1 \text{ taxis/min}$$



Sistema M/M/1/5

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot p_0 \quad n \leq 5$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 = \sum_{n=0}^5 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot p_0 = p_0 \sum_{n=0}^5 \rho^n \Rightarrow p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^6}$$

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_n = \sum_{n=0}^5 n \cdot p_0 \cdot \rho^n \Rightarrow$$

$$N = \frac{1-\rho}{1-\rho^6} [1 \cdot \rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + 4\rho^4 + 5\rho^5] = 1.42$$

$$- T = \frac{N}{\lambda_c}$$

$$- \lambda_c = \lambda (1 - B) = \lambda (1 - p_s) = \lambda (1 - p_0 \cdot p^s) = 0.63$$

$$- T = \frac{N}{\lambda_c} = 2.24 \text{ min}$$

$$c) B = p_s = p_0 \cdot p^s = 0.048 = 4.8\%$$



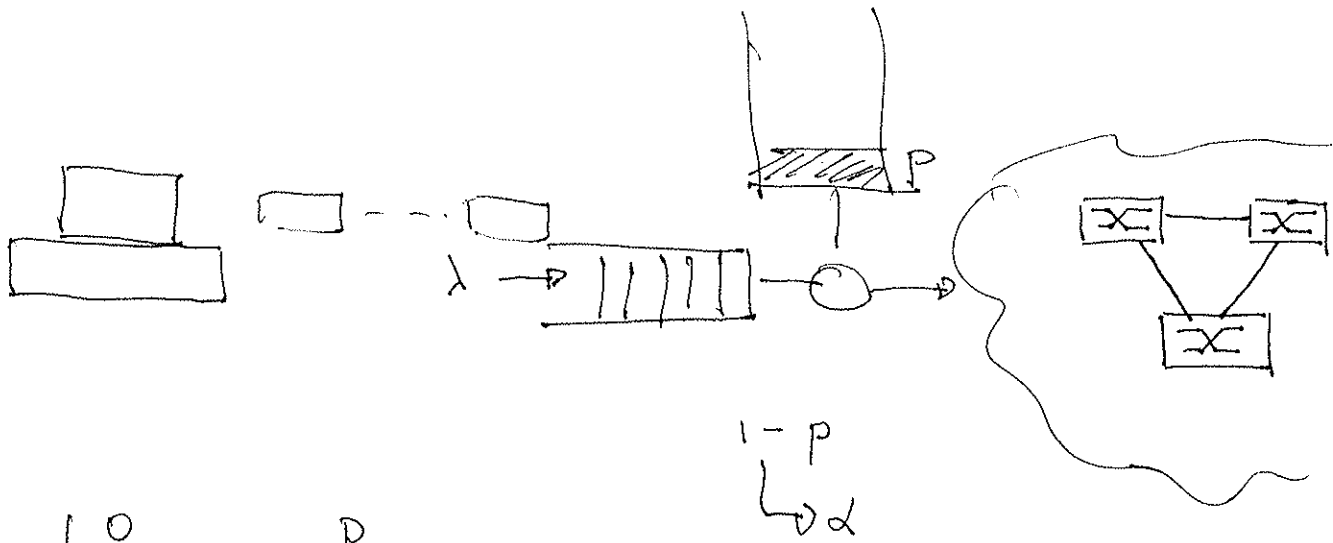
Universidad de Granada
Departamento de Teoría de la Señal,
Telemática y Comunicaciones



ETSIT
C/ Periodista Daniel Sancedo Aranda, s/n
18071 - Granada

SOLUCIÓN

PROBLEMA 5



$$T_s = \begin{cases} 0 & p \\ x \sim \exp(\text{media } \frac{1}{\alpha}) & 1-p \end{cases}$$

$$p d f_{T_s}(t) = p \delta(t) + (1-p) \alpha \cdot e^{-\alpha t} \quad t > 0$$

$$T = E[T_s] + \frac{\lambda E[T_s^2]}{2(1 - \lambda \cdot E[T_s])}$$

$$\begin{aligned} E[T_s] &= \int_{-\infty}^{\infty} t p d f_{T_s}(t) dt = \int_{0}^{\infty} t p \delta(t) dt + \int_{0}^{\infty} t (1-p) \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha t} dt = \\ &= (1-p) \int_{0}^{\infty} t \alpha \cdot e^{-\alpha t} dt = \frac{1-p}{\alpha} = E[T_s] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - E[T_s^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} t^2 p dF_{T_s}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot p \delta(t) dt + \int_0^{\infty} t^2 (1-p) \cdot \alpha e^{-\alpha t} dt \\
 &= (1-p) \cdot \int_0^{\infty} t^2 \cdot \alpha e^{-\alpha t} dt = (1-p) \cdot \frac{2}{\alpha^2}
 \end{aligned}$$

$$E[X^2] = \sigma_x^2 + E[X]^2 = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} = \frac{2}{\alpha^2}$$

$$- T = \frac{1-p}{\alpha} + \frac{\lambda \cdot (1-p) \cdot 2/\alpha^2}{2 \left(1 - \lambda \cdot \frac{(1-p)}{\alpha}\right)}$$

$$\frac{1-p}{\alpha} + \frac{\lambda (1-p)}{\alpha^2 \left(1 - \frac{\lambda (1-p)}{\alpha}\right)} =$$

$$\frac{1-p}{\alpha} + \frac{\lambda (1-p)}{\alpha^2 - \lambda (1-p) \cdot \alpha}$$

$$\begin{aligned}
 - p = \lambda \cdot E[T_s] < 1 &\Rightarrow \lambda \cdot \frac{(1-p)}{\alpha} < 1 \Rightarrow \\
 (1-p) < \frac{\alpha}{\lambda} &\Rightarrow \boxed{p > 1 - \frac{\alpha}{\lambda}}
 \end{aligned}$$



Universidad de Granada
Departamento de Teoría de la Señal,
Telemática y Comunicaciones



ETSIT
C/ Periodista Daniel Sancedo Aranda, s/n
18071 - Granada

SOLUCIÓN

PROBLEMA 7

$$\lambda = \frac{4}{5} \text{ men / s}$$

$$\bar{l} = 8 \times 8 \text{ Kbytes} = 64 \text{ Kbits}; C_{TX} = 64 \text{ Kbits / s}$$

$$\text{Tiempo medio de transmisión de un mensaje: } \frac{1}{\mu} = 1 \text{ s}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{5} = 0.8 \text{ puesto que nuestro sistema se puede modelar como un M/M/1.}$$

$$1. \text{ Tiempo medio de retardo} = \bar{T} = \frac{\frac{1}{\mu}}{1 - \rho} = 5 \text{ s}$$

$$\text{Pr[Esperar en cola]} = \text{Pr}[1 \text{ ó más en sistema}] = \text{PD} = 1 - P_0 = \rho = 80$$

Retardo medio experimentado por los que tienen que esperar:

$$E[W|W>0] = \bar{T}$$

$$E[T|W>0] = E[W|W>0] + \frac{1}{\mu} = 5 + 1 = 6 \text{ s}$$

$$\bar{Q} = \bar{N} \cdot \rho = 4 \cdot 0.8 = 3.2 \text{ mensajes}$$

$$P[W>10 \text{ s}] = 1 - P[W \leq 10 \text{ s}] = 1 - F_w(10) = \rho e^{-\mu(1-\rho)10} = 10.8$$

$$2. \text{ A. } \lambda_K = \lambda \quad \forall K$$

$$\mu_K = \mu \quad \text{para } K=1$$

$$\mu_K = 2\mu \quad \text{para } K=2,3,\dots$$

$$P_K = \frac{a^K}{2^{K-1}} P_0 \quad \text{con } a = \frac{\lambda}{\mu}$$

$\sum P_K = 1$ de donde se concluye que:

$$P_0 1 = \frac{1 \cdot \frac{a}{2}}{1 + \frac{a}{2}}$$

$$\bar{N}_1 = \sum_{K=1}^{\infty} K P_K = a P_{01} + a P_{01} \sum_{K=2}^{\infty} K b^{K-1} \quad \text{con } b = \frac{a}{2}$$

$$\bar{N}_1 = \frac{a P_{01}}{(1-b)^2}$$

$$\bar{T}_1 = \frac{\bar{N}_1}{\lambda} = \frac{P_{01}}{\mu(1-b)^2} = 1.16 \text{ s}$$

$$\text{B. } \lambda_K = \lambda \quad \forall K$$

$$\mu_K = \mu \quad \text{para } K=1,2$$

$$\mu_K = 2\mu \quad \text{para } K=3,4,\dots$$

$$P_K = \frac{a^K}{2^{K-2}} P_0$$

$\sum P_K = 1$ de donde se concluye que:

$$P_{02} = \frac{1 \cdot \frac{a}{2}}{1 + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{2}}$$

$$\overline{N}_2 = \sum_{K=1}^{\infty} K P_K = a P_{02} + 2 a^2 P_{02} + a^2 P_{02} \sum_{K=3}^{\infty} K b^{K-2}$$

$$\overline{N}_2 = \frac{a P_{02}}{(1-b)^2} [2a + 1 + b - b^2]$$

$$\overline{T}_2 = \frac{P_{02}}{\mu(1-b)^2} [2a + 1 + b - b^2] = 2.75 \text{ s}$$



Universidad de Granada
Departamento de Teoría de la Señal,
Telemática y Comunicaciones



ETSIT
C/ Periodista Daniel Sancedo Aranda, s/n
18071 - Granada

SOLUCIÓN

PROBLEMA 9

1. Se trata de un sistema M/M/3/5 y por tanto será un sistema de pérdidas.

Se pide $\bar{T} = \bar{N} / \bar{\lambda}_e$, donde $\bar{N} = \sum_{k=1}^5 k P_k$ y $\bar{\lambda}_e = \sum_{k=0}^4 \lambda_k \cdot P_k$. Por tanto hay que calcular las

$$P_k,$$

$$\lambda_k = \lambda, k=0,1,2,4,5$$

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu & 1 \leq k \leq 3 \\ 3\mu & k \geq 3 \end{cases}$$

Como $P_k = (\lambda_{k-1} / \mu_k) P_{k-1}$, siendo $\lambda = 3$ clientes/s y $\mu = 1$ clientes/s se obtienen los siguientes valores para las probabilidades de estado:

$$P_0 = 1/22 = 0.04545; P_1 = 3/22 = 0.1363; P_2 = 9/44 = 0.2045; P_3 = 9/44 = 0.2045;$$

$$P_4 = 9/44 = 0.2045; P_5 = 9/44 = 0.2045;$$

$$\bar{N} = \sum_{k=1}^5 k \cdot P_k = 132/44 = 3 \text{ clientes}$$

$$\bar{\lambda}_e = \sum_{k=0}^4 \lambda_k \cdot P_k = 105/44 = 2.386 \text{ clientes/s}$$

$$\bar{T} = \bar{N} / \bar{\lambda}_e = 44/35 = 1.257 \text{ s}$$

$$\bar{W} = \bar{T} - 1/\mu = 9/35 = 0.257 \text{ s}$$

$$E[W/W > 0] = \bar{W} / P[W > 0] = \bar{W} / (P_3 + P_4) = 22/35 = 0.628 \text{ s} =$$

$$2. \bar{N}_Q = \bar{\lambda}_e \cdot \bar{W} = 27/44 = 0.6136 \text{ clientes}$$

$$\bar{N}_S = \bar{\lambda}_e \cdot (1/\mu) = 105/44 = 2.386 \text{ clientes}$$

3.

$$PP = \frac{\bar{N}_P}{\bar{N}_O} = 1 - \frac{\bar{N}_C}{\bar{N}_O} = 1 - \frac{\bar{\lambda}_e}{\lambda} = P_5 = 9/44 = 20.45\%$$

$$PD = \frac{\bar{N}_D}{\bar{N}_O} = \frac{\sum_{k=3}^5 \lambda_k P_k}{\sum_{k=0}^5 \lambda_k P_k} = P_3 + P_4 = 18/44 = 40.9\%$$

4. Cuando el sistema de ahorro de energía NO está activado:

$$\rho_i = \bar{\lambda}_e / c\mu = 35/44 = 79.5\% \quad i = 1,2,3$$

Cuando el sistema de ahorro de energía SI está activado:

$$\rho_i = \frac{1}{2} P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 88.6\% \quad i = 1,2$$

$$\rho_i = P_3 + P_4 + P_5 = 27/44 = 61.36\% \quad i = 3$$



Universidad de Granada
Departamento de Teoría de la Señal,
Telemática y Comunicaciones

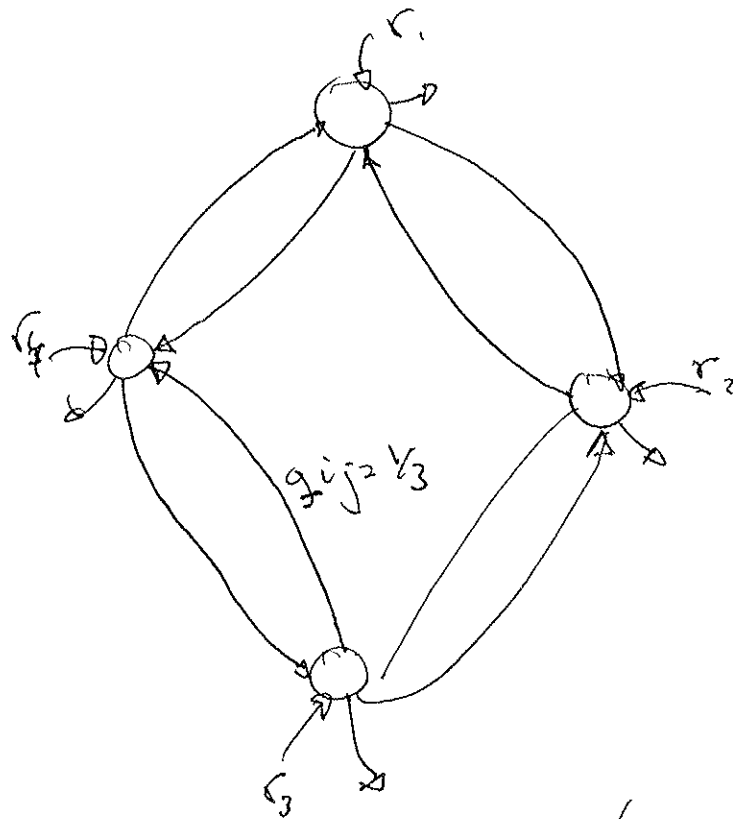


ETSIT
C/ Periodista Daniel Sancedo Aranda, s/n
18071 - Granada

SOLUCIÓN

PROBLEMA 10

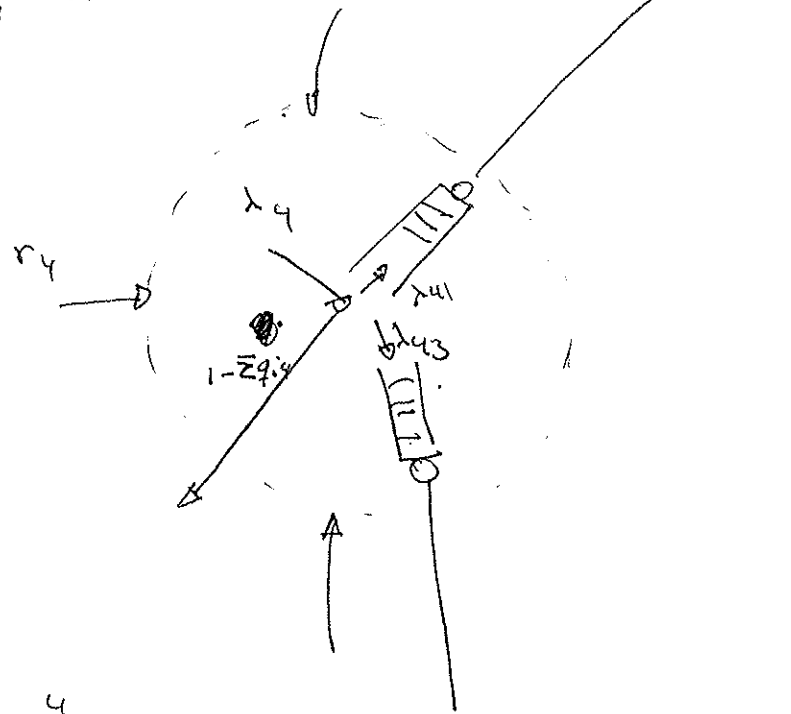
Problema 10



$$\mu_{ij} = 1 \text{ client/seg}$$

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4$$

$$r_i? / p_{ij} = 0.8$$



$$1 - \lambda_4 = r_4 + \sum_{i=1}^4 q_{i4} \lambda_i =$$

$$\lambda_4 = r_4 + \frac{1}{3} \cdot \lambda_1 + \frac{1}{3} \lambda_3$$

Dada la simetría de la red $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$

$$\lambda_4 = r_4 + \frac{2}{3} \lambda \Rightarrow \frac{\lambda}{3} = r_4 = r \Rightarrow \boxed{\lambda = 3r}$$

$$p_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\mu_{ij}} = \frac{q_{ij} \cdot \lambda_i}{\mu_{ij}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 3r}{1 \text{ client/seg}} = r = 0.8 \text{ client/seg}$$

$$N = \sum_{(i,j)} N_{i,j} = 8 \cdot N_{i,j} = 8 \cdot \frac{p_{ij}}{1-p_{ij}} = \frac{8 \cdot 0.8}{1-0.8} = 32 \text{ clientes}$$

↑
suponemos que no hay cola para los usuarios q salen de la re

$$\bullet \text{ N}^\circ \text{ saltos} = \text{N}^\circ \text{ nodos} = \frac{T}{T_{i,j}} \rightarrow D$$

$$T = \frac{\sum N_{i,j}}{\sum v_i} = \frac{32}{4 \cdot 0.8} = \frac{8}{0.8} = 10$$

$$T_{i,j} = \frac{1}{\mu_{ij} - \lambda_{ij}} = \frac{1}{1 - 0.8} = \frac{1}{0.2} = 5$$

$$\boxed{\text{N}^\circ \text{ saltos} = \frac{T}{T_{i,j}} = \frac{10}{5} = 2}$$