FLEXIÓN SIMPLE.

Actúa simultáneamente en una rebanada un momento flector y un cortante.
En la rebanada se producen tensiones normales y tangenciales como consecuencia del momento flector y del esfuerzo cortante.

En Resistencia de materiales: la comprobación de secciones se hace suponiendo que las secciones deben resistir por un lado el momento flector y por otra independiente del anterior el esfuerzo cortante.
El criterio que limita los valores de estos esfuerzos es que las máximas tensiones normales y tangenciales sean menores que las admisibles por el material.
Estas tensiones máximas admisibles se obtienen de forma experimental.

En teoría plástica: Se admite que la tensión normal y la tangencial actúan simultáneamente y que la plastificación de una fibra o de una sección se produce para determinadas relaciones entre la tensión normal y la tangencial.
Esta relación entre las tensiones varía en función del criterio considerado. (Tresca, Von Misses...)

Si consideramos la circunferencia de Mohr, su diámetro vale:

$$D = 2\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

y basándonos en la energía de deformación de un sólido:

$$\sigma^2 + 4\tau^2 \leq \sigma_p^2$$

que si lo generalizamos: $\boxed{\sigma^2 + K\tau^2 \leq \sigma_p^2}$ donde si $K=4$ — criterio de Tresca
$K=3$ — criterio de Von Misses

si $\tau = 0$. $\longrightarrow$ $\sigma^2 \leq \sigma_p^2$

si $\sigma = 0$. $\longrightarrow$ $\tau_f \leq \frac{\sigma_p}{\sqrt{K}}$

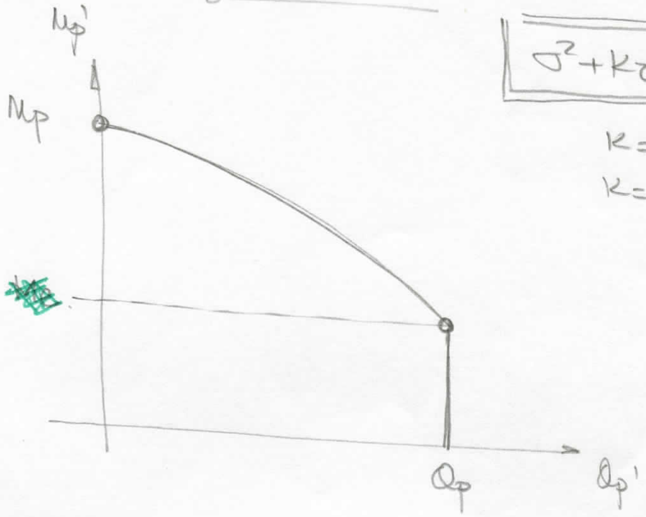
en cualquiera de los dos casos obtendríamos la tensión de plastificación de una fibra tal y como lo hemos obtenido anteriormente.

- En plasticidad las tensiones tangenciales se reparten de acuerdo con la resistencia de materiales pero sólo sobre la sección que permanece elástica después de aplicar el momento M.

- Las fibras plastificadas por flexión no sufren tensión tangencial alguna.

- Cuando apliquemos que $\tau = \dfrac{M_e \cdot Q}{b \cdot I}$ debemos usarla con los parámetros correspondientes sólo a la parte de sección que permanece elástica, como si la zona plastificada hubiese desaparecido.

DIAGRAMA $M_p' - Q_p'$



$$\boxed{\sigma^2 + K\tau^2 = \sigma_p^2}$$

$K = 3 \leftarrow$ TRESKA

$K = 4 \leftarrow$ RANKINE

3. La viga de la figura es de sección constante con las características, dimensiones y cargas que se indican en la figura adjunta. Debido a un fallo en la cimentación, se ha producido un descenso en el apoyo central que produce la rotura de la viga. El material posee las propiedades que se facilitan en la figura adjunta.

Se pide:

1) Determinar la deformación de rotura que ha de tener el material para que al producirse la rotura de la viga se encuentren parcialmente plastificadas todas las secciones en una longitud igual a la cuarta parte de la longitud total de la viga.

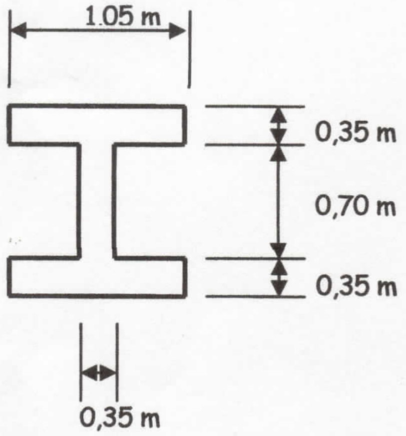
2) Dibujar las leyes de momentos flectores y de esfuerzos cortantes en la viga en el instante de rotura.

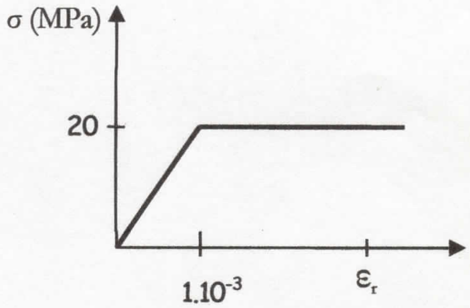
3) Calcular el descenso del apoyo B que produce la rotura. Para ello se admite linealizar la ley de curvaturas entre la curvatura elástica y la de rotura.

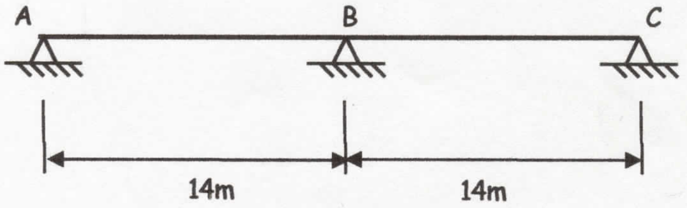
Nota: Para la resolución de los apartados anteriores se prescindirá de la influencia de los esfuerzos cortantes donde fuera preciso.

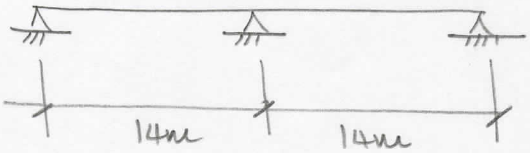
4) Determinar la máxima tensión tangencial que se producirá en la sección sobre el apoyo B, considerando el criterio de plastificación del material

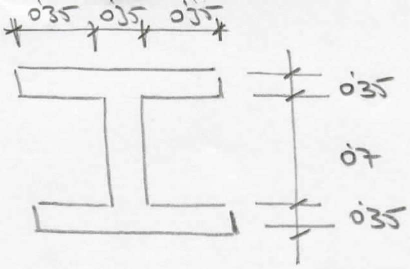
$$\sigma^2 + 3\tau^2 \leq 20^2 \text{ (MPa)}$$











$\sigma_p = 2\cdot 10^4 \ \frac{kN}{m^2}$

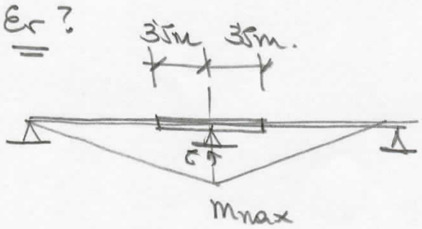
$\varepsilon_e = 10^{-3}$

$\Omega = 0'98 \, m^2$

$h_i = h_s = 0'7 \, m$

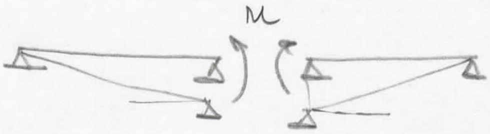
$I = 0'2201 \, m^4$

a) $\underline{\varepsilon_r}$?



$\frac{1}{4}\,28 = \underline{7m}.$

Ley de flectores de la viga:

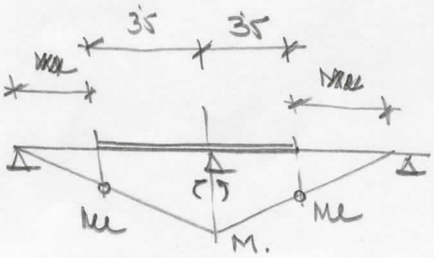


$$\theta_B^{+} = +\frac{M\cdot L}{3EI} - \frac{V_B}{L}$$

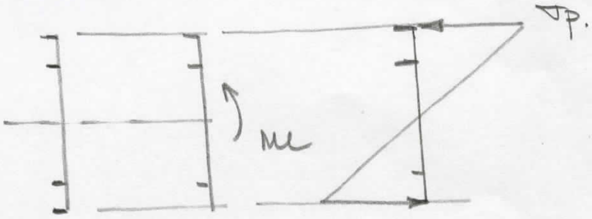
$$\theta_B^{-} = -\frac{M\cdot L}{3EI} + \frac{V_B}{L}$$

$$\frac{ML}{3EI} - \frac{V_B}{L} = \frac{-ML}{3EI} + \frac{V_B}{L}$$

$$\frac{2ML}{3EI} = \frac{2V_B}{L} \qquad M = \frac{3V_B\,EI}{L^2}$$



Momento elástico:

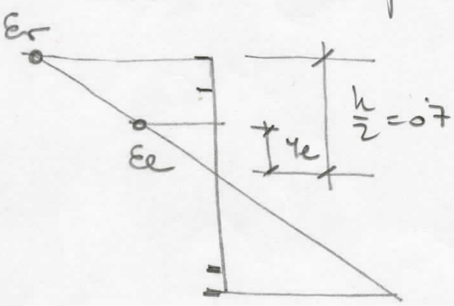


$$\sigma_p = \frac{M_e \cdot y}{I} \qquad 2\cdot 10^4 = \frac{M_e \cdot 0'7}{0'2201}$$

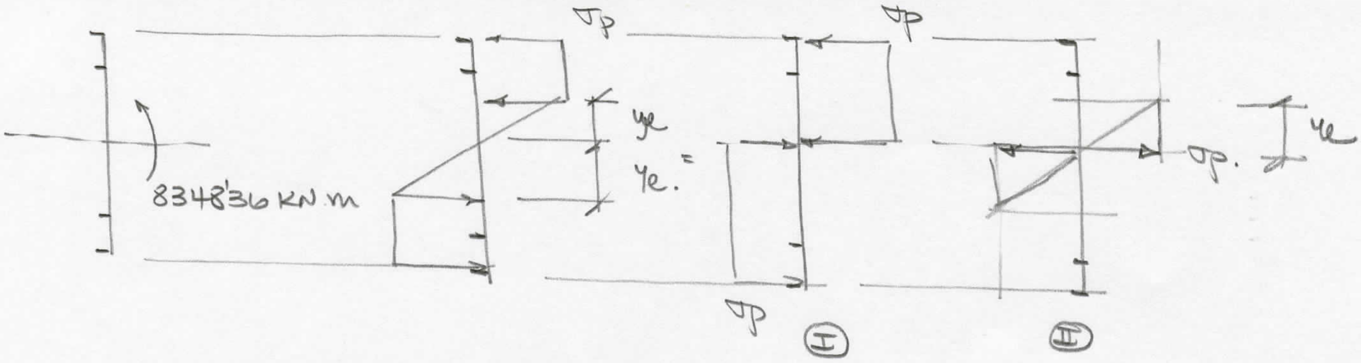
$$\boxed{M_e = 6288'27 \ kN.m}$$

$$\frac{14}{M} = \frac{(14-3'5)}{M_e} \qquad \boxed{M = 8384'36 \ kN.m}$$

Rotura ⟶ Diagrama de deformaciones.



$$\frac{\varepsilon_r}{0'7} = \frac{\varepsilon_e}{y_e} \longrightarrow \varepsilon_r = \frac{0'7\,\varepsilon_e}{y_e}.$$



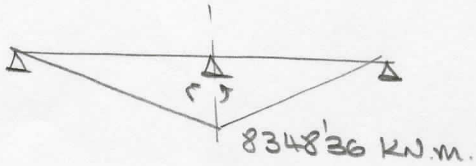
$M = 834'36 \ kN.m.$

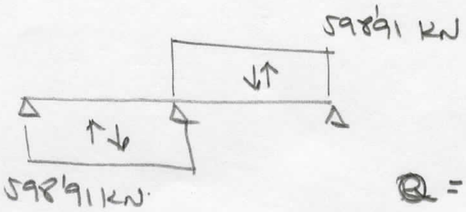
$M_1 = M_p = 2\sigma_p \left[1'05 \cdot 0'35 \cdot \left(0'35 + \frac{0'35}{2}\right) + 0'35 \cdot 0'35 \cdot \frac{0'35}{2} \right] = 857'5 \ kN.m.$

$M_2 = 2\sigma_p \left[\frac{1}{2} y_e \cdot 0'35 \cdot \frac{1}{3} 0'35 \right]$

$M = M_1 + M_2 \longrightarrow \boxed{y_e = 0'286 \ m.}$ $\quad \boxed{\varepsilon_r = 2'45 \cdot 10^{-3}}$

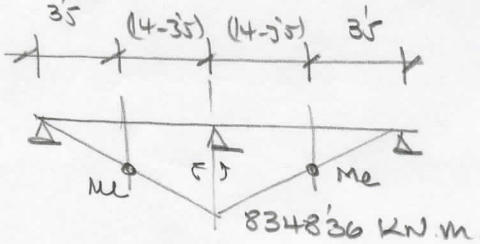
(2)





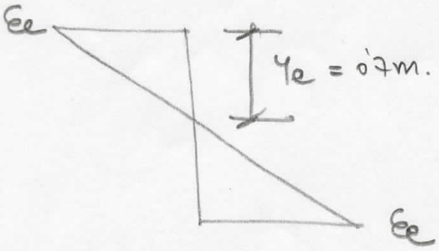
$Q = \frac{834'36}{14}$

(3) Descenso (v_B) de rotura:



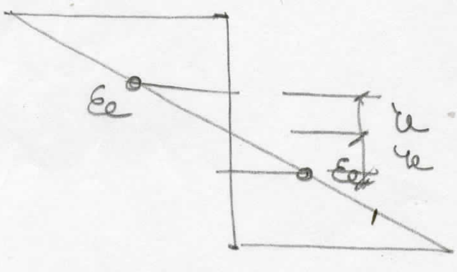
CURVATURAS:

$\boxed{Me.}$ $\quad Me = 628'27 \ kN.m.$

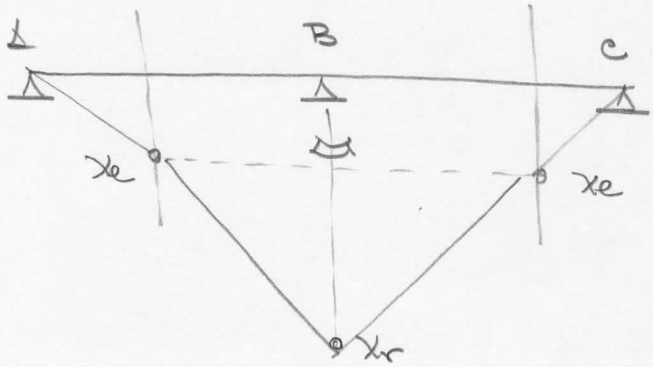


$\chi_e = \frac{\varepsilon_e}{0'7} = 1'428 \cdot 10^{-3} \ \frac{rd}{m}.$

$\boxed{M}$ $\quad M = 834'36 \ kN.m$



$\chi_r = \frac{\varepsilon_e}{y_e} = \frac{10^{-3}}{0'286} = 3'497 \cdot 10^{-3} \ \frac{rd}{m}$



$$Y_C = V_B + \theta_B \cdot d + \int \bar{\bar{X}} \cdot d(s)\, ds$$

$$0 = V_B + \cdots \qquad V_B = 0'16\,m.$$

(4) $\sigma_p^2 + 3\tau_p^2 \le 20^2$ MPa. — relación entre tensiones normales y tangenciales.

$$\sigma^2 + K\tau^2 = \sigma_p^2 \qquad K=3 \text{ TRESCA} \qquad K=4 \text{ RANKINE}.$$

En régimen plástico las tensiones tangenciales se reparten de acuerdo con la misma de materiales pero sólo donde la sección se mantiene elástica después de aplicar el M.

- Las fibras plastificadas por flexión no sufren tensión tangencial alguna.
- Cuando apliquemos $\tau = \frac{Q \cdot M_e}{b\, I}$ debemos usarla con los parámetros sólo de la parte de sección que permanece elástica como si la zona plastificada hubiese desaparecido.

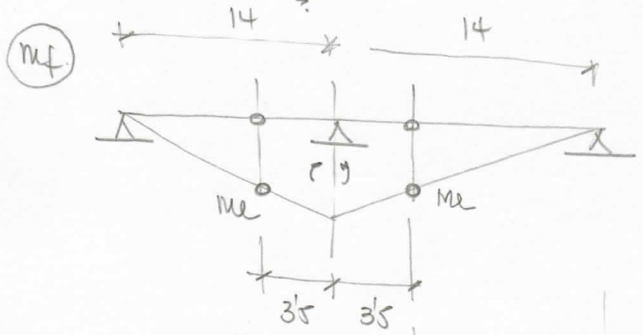
Fibras candidatas a plastificar por cortante:

- Fibra correspondiente al cdg. (τ_{max})
- Fibras extremas (σ_{max})
- Fibras de unión del ala con el alma. (normal y tangencial próximas a las máximas)

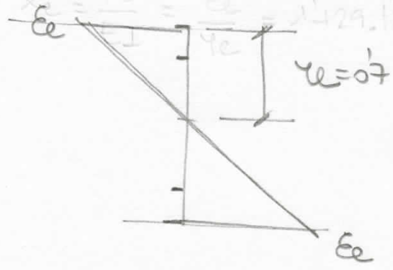
en B: $\boxed{M_B = 8384'36 \text{ KN}\cdot\text{m}}$ $\quad \boxed{Q_B = 589'91 \text{ KN}}$

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = 20^2 \longrightarrow$$

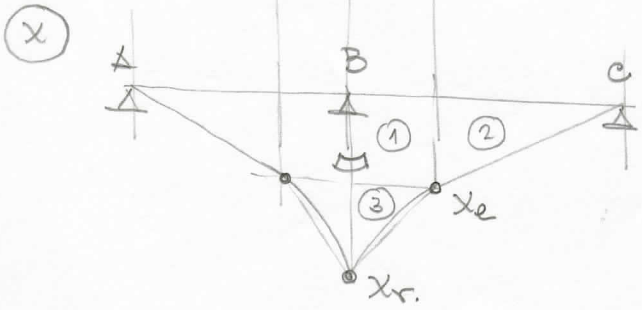
(c) v_B? ROTURA.

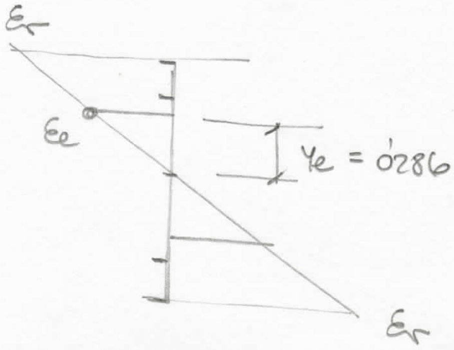


DEFORMACIONES.



$y_e = 0'7 \quad \chi_e = \dfrac{\varepsilon_e}{y_e} = 1'426 \cdot 10^{-3} \dfrac{rd}{m}$





$y_e = 0'286.$

$$\chi_r = \frac{\varepsilon_e}{y_e} = \frac{10^{-3}}{0'286} = 3'497 \cdot 10^{-3} \frac{rd}{m}$$

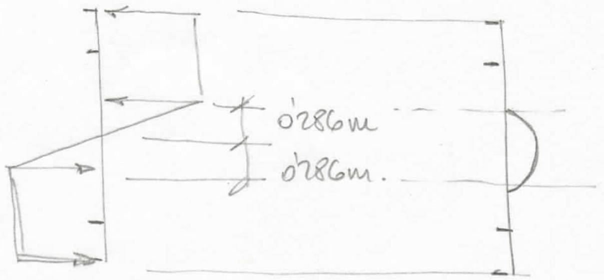
$$v_C = v_B + \cancel{\theta_B} \cdot d + \int \bar{\chi} \cdot d(s) \cdot ds.$$

$$0 = v_B - \left[\chi_e \cdot 3'5 \left(10'5 + \tfrac{1}{2} 3'5\right) + \tfrac{1}{2}\chi_e \cdot 10'5 \cdot \left(\tfrac{2}{3} 10'5\right) + \tfrac{1}{2}(\chi_r - \chi_e)\, 3'5 \cdot \left(10'5 + \tfrac{2}{3} 3'5\right)\right]$$

$$\boxed{v_B = 0'16\,m}$$

(d) $\sigma_p^2 + 3\tau_p^2 \leq 20^2$ (MPa)

en B $\longrightarrow$ $M_{max} = 8384'36$ kN.m. $Q_B = 598'91$ kN.



$$I = \frac{1}{12} a b^3 = \frac{1}{12}\, 0'35 \cdot [2 \times 0'286]^3$$

$$\tau_{max} = \frac{Q \cdot m_e}{b \cdot y} = \frac{[598'91]\,[0'35 \cdot y_e \tfrac{1}{2} y_e]}{0'35 \cdot I} =$$

$$= 4'94 \cdot 10^3\,\text{kN} = \boxed{4'94\,\text{MPa}}$$

$$\sigma_p^2 + 3\tau_p^2 \leq 20^2.$$

$$\sigma_p = 0. \longrightarrow \tau_p = \sqrt{\frac{20^2}{3}} = 11'54\,\text{MPa}$$

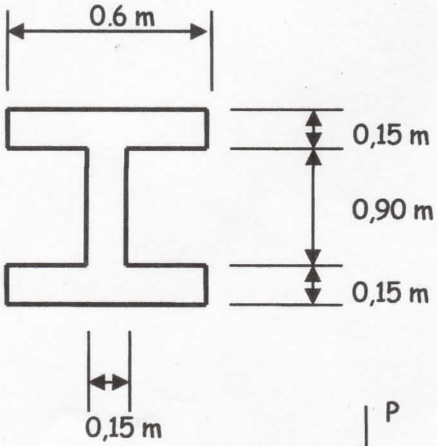
1. La viga de la figura es de sección constante a lo largo de toda ella en doble T y está constituida por un material cuyo criterio de plastificación es : $\sigma^2 + 3\tau^2 = (30.000)^2$ para tensiones tangenciales y normales expresadas en kN/m^2 . La viga está solicitada por las cargas que se muestran en la figura adjunta..

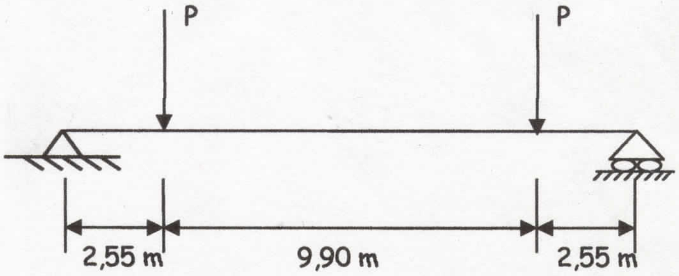
Se pide:

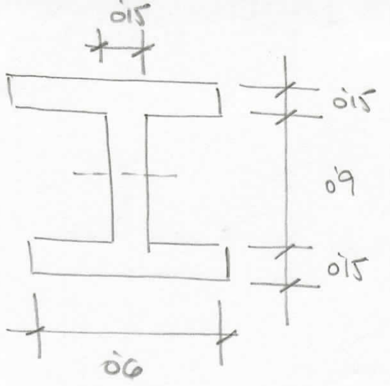
1) Determinar los cuatro puntos especificados del diagrama de interacción Momento-Cortante de la sección dada y dibujarlos sobre el propio diagrama con las dimensiones dadas en la figura.

- El cortante de plastificación con su momento concomitante.
- El momento elástico con su cortante concomitante.
- El momento plástico con su cortante concomitante.
- El momento que plastifica las alas con su cortante concomitante.

2) Determinar el valor de P de las cargas puntuales que producen el colapso de la viga, considerando que las secciones plastifican por la acción de los esfuerzos cortante y flector.







$$\boxed{\sigma_p^2 + 4\tau_p^2 = (30.000)^2}$$

$\sigma_p = 30.000\ kN/m^2 = 30\ MPa$

$\tau_p = \frac{30.000}{2} = 15.000\ kN/m^2 = 15\ MPa.$

CARACT. MECÁNICAS.

$\Omega = 0'315\ m^2$

$h_i = h_s = 0'6\ m$

$I = 5'906 \cdot 10^{-2}\ m^4$

(a) CORTANTE DE PLASTIFICACIÓN + MOMENTO CONCOMITANTE.

(a)
$\boxed{\begin{array}{l} Q = 2128'3\ kN \\ M = 2573'81\ kN\cdot m \end{array}}$

El cortante de plastificación es aquel que actuando solo plastifica la pieza/fibra.

$\tau_p = 15000\ kN/m^2$

$\tau = \frac{Q \cdot M_e}{b \cdot I} \longrightarrow$ ① τ_{max} en el cdg: $15 \cdot 10^3 = \frac{Q \cdot \left[0'15 \cdot 0'6 \cdot \left(0'45 + \frac{0'15}{2}\right) + 0'45 \cdot 0'15 \cdot \frac{0'45}{2}\right]}{0'15 \cdot 5'906 \cdot 10^{-2}}$

$\boxed{Q = 2128'3\ kN.}$ $\boxed{\sigma = 0.}$

② Tensión en la unión ala-alma. — Comprobamos con el cortante anterior.

$Q = 2128'3\ kN$

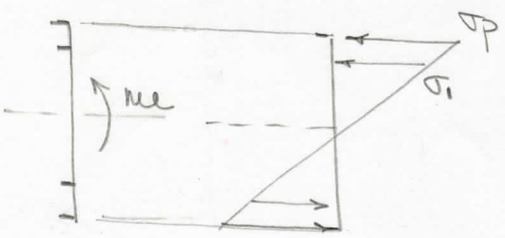
$\tau = \frac{(2128'3)\left(0'6 \cdot 0'15 \cdot \left[0'45 + \frac{0'15}{2}\right]\right)}{0'15 \cdot 5'906 \cdot 10^{-2}} = 11351'41\ kN/m^2 < 15 \cdot 10^3$

$\sigma^2 + 4\,(11351'41)^2 = (30.000)^2$

$\sigma = 19610'76\ kN/m^2 < \sigma_p.$ $\quad \sigma = \frac{M \cdot y}{I} = \frac{M \cdot 0'45}{5'906 \cdot 10^{-2}}$ $\quad M = 2573'81\ kN\cdot m$

$\wedge$
M_e

(b) MOMENTO ELÁSTICO + CORTANTE C.



$\sigma_p = \frac{M_e \cdot y}{I}$ $\quad 30 \cdot 10^3 = \frac{M_e \cdot 0'6}{5'906 \cdot 10^{-2}}$

$\boxed{M_e = 2953\ kN\cdot m}$

(b)
$\boxed{\begin{array}{l} M = 2953\ kN\cdot m \\ Q = 1860\ kN. \end{array}}$

en la unión ala-alma

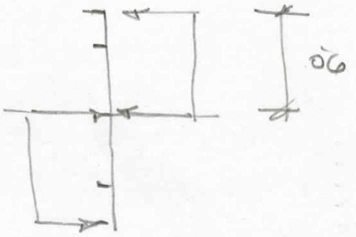
$\sigma_1 = \frac{M_e \cdot y}{I} = \frac{2953 \cdot 0'45}{5'906 \cdot 10^{-2}} = 22500\ kN/m^2$

$\sigma^2 + 4\tau^2 = [30 \cdot 10^3]^2$ $\quad (22500)^2 + 4 \cdot \tau^2 = (30 \cdot 10^3)^2$ $\quad \tau = 9921'56\ kN/m^2$

$\tau = \frac{Q \cdot M_e}{b \cdot I} \Rightarrow 9921'56 = \frac{Q \cdot \left[0'15 \cdot 0'6 \cdot \left(0'45 + \frac{0'15}{2}\right)\right]}{0'15 \cdot 5'906 \cdot 10^{-2}}$ $\quad Q = 1860\ kN < Q_p$

2

(c) MOMENTO PLÁSTICO + CORTANTE

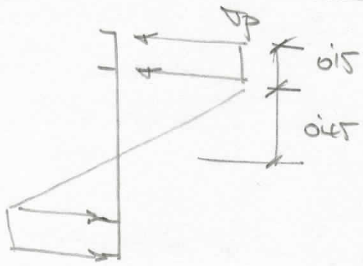


$$M_p = 20_p \cdot \left[0'6 \cdot 0'15 \cdot \left(0'45 + \frac{0'15}{2}\right) + 0'15 \cdot 0'45 \cdot \frac{0'45}{2} \right] =$$
$$= \boxed{374'625 \text{ KN.m}}$$

$\sigma = \sigma_p \longrightarrow \underline{\tau = 0}$: no puede actuar cortante.

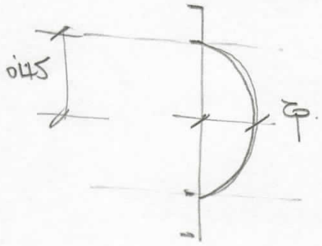
(c)
$M = 374'625$
$Q = 0$

(d) MOMENTO QUE PLASTIFICA ALAS + CORTANTE



$$M = 20_p \left[0'15 \cdot 0'6 \left(0'45 + \frac{0'15}{2}\right) + \frac{1}{2} \, 0'45 \cdot 0'15 \cdot \frac{2}{3} \, 0'45 \right] =$$
$$= \boxed{3442'5 \text{ KN.m.}}$$

el cortante concomitante deberá poder una ley de tangenciales en la zona no plastificada exclusivamente.



$\sigma^2 + 4\tau^2 = (30 \cdot 10^3)^2$ en el cdg $\sigma = 0$ $\tau = 15000 \text{ KN/m}^2$

$$15000 = \frac{Q \cdot (0'15 \cdot 0'45 \cdot 0'45/2)}{0'15 \cdot 9'11 \cdot 10^3}$$

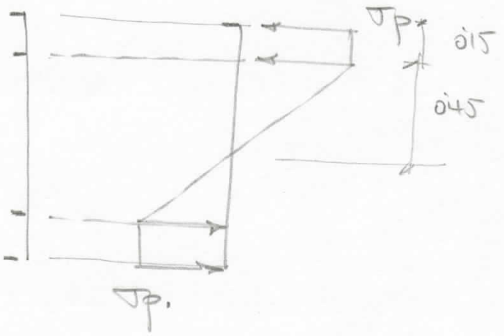
$$\boxed{Q = 1350 \text{ KN.}}$$

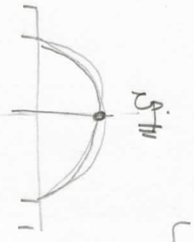
$J = \frac{1}{12} \, 0'15 \cdot 0'9^3 = 9'11 \cdot 10^3 \text{ m}^4$

(d)
$M = 3442'5 \text{ KN.m}$
$Q = 1350 \text{ KN.}$

d) Ma.: momento que plastifica las alas. —— como el momento ha plastificado las alas, no podemos admitir la tensión en esa zona que soporta.

El cortante concomitante deberá producir una ley de tensiones en la zona no plastificada exclusivamente.





$$M = 2.\sigma_p \left[0'15 \cdot 0'6 \cdot \left(0'45 + \frac{0'15}{2}\right) + \frac{1}{2}\, 0'45 \cdot 0'15 \cdot \frac{2}{3}\, 0'45 \right] =$$

$$= \boxed{3442'5 \text{ kN.m}}$$

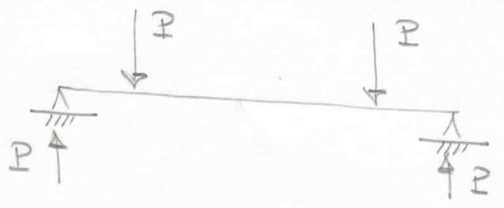
$$\left[\tau = \frac{Q.m}{b.I}\right]$$

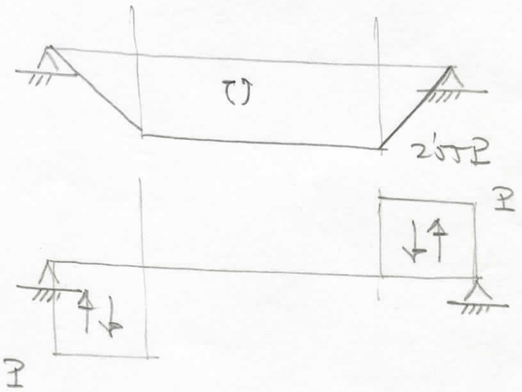
$\sigma^2 + 4\tau^2 = (30.000)^2$ —— en el cdg $\sigma = 0$; $\tau = 15000$ kN/m²

$I = 9'11.10^{-3}\ m^4$
$\left(\frac{1}{12}\, 0'15 . 0'9^3\right)$

$$15000 = \frac{Q.(0'15 . 0'45 . 0'45/2)}{0'15 .\ 9'11.10^{-3}} \qquad \boxed{Q = 1350 \text{ kN.}}$$

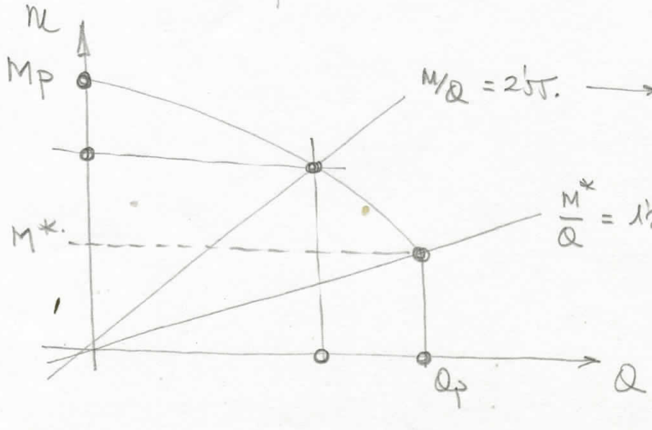
P? colapso de la viga.





Si no nos dicen nada suponemos ductilidad infinita.

$$M/Q = \frac{2'55P}{P} = 2'55.$$



$M/Q = 2'55.$ ⟶ $\boxed{y = 2'55x.}$

$2573. = M^*$

$\frac{M^*}{Q} = 1'209.$ $[M^* = 2573 \text{ kN.m}]$

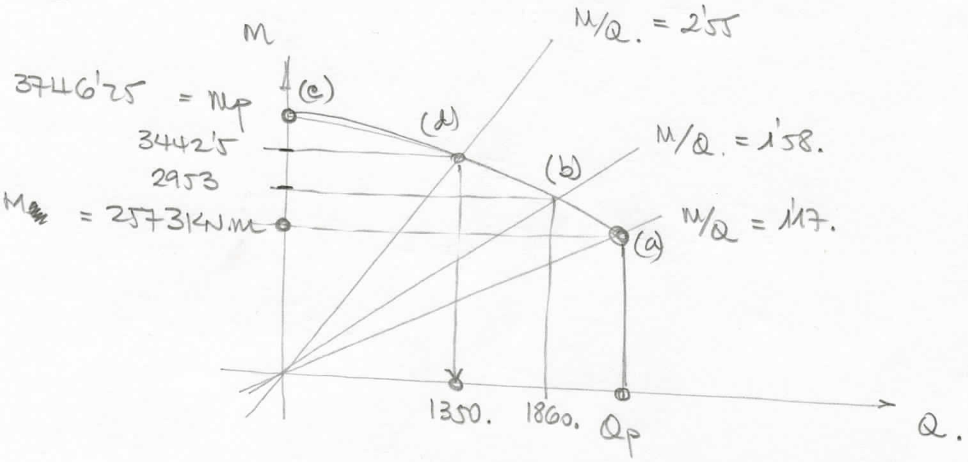
4

PUNTO (a) : $Q_p = 2182'3$ KN. $M = 2573$ KN.m.

PUNTO (b) : $M_e = 2953$ KN.m $Q = 1860$ KN.

PUNTO (c) : $M_p = 3746'25$ KN.m $Q = 0.$

PUNTO (d) : $M = 3442'5$ KN.m $Q = 1350$ KN.



$$\frac{M}{Q} = 2'55. \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} M = 3442'5 \text{ KN.m} \\ Q = 1350 \text{ KN.} \end{array}}$$

coincide con el punto (d)

$$\boxed{P = 1350 \text{ KN.}}$$

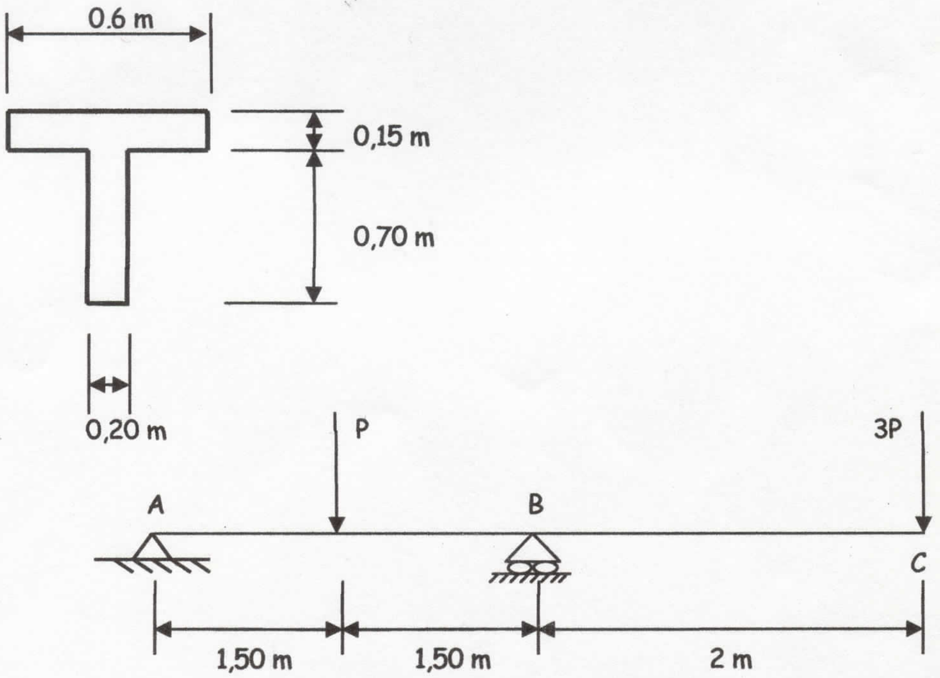
2. La viga de la figura es de sección constante con las características, dimensiones y cargas que se indican en la figura adjunta. Se considera que el comportamiento del material que la constituye es bilineal y su criterio de plastificación viene dado por la ecuación : $\sigma^2 + 3\tau^2 = 40$ (MPa)

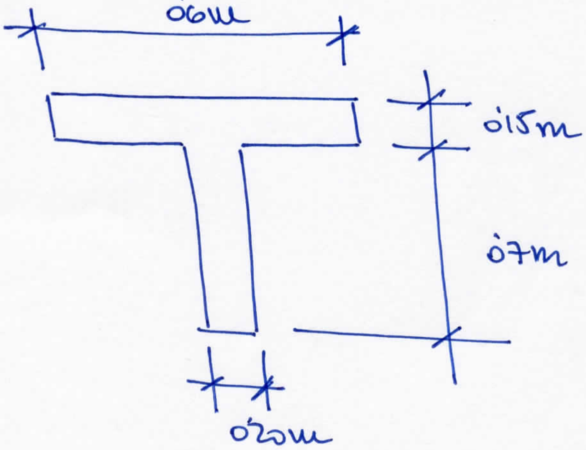
   1) Determinar el valor de P que produce la rotura de la viga, teniendo en cuenta la actuación exclusiva del momento flector.

   2) Determinar el valor de P que produce la rotura de la viga, teniendo en cuenta la actuación conjunta del momento flector y del cortante.

   Previamente se calcularán los siguientes puntos para la linealización del diagrama de interacción Momento-Cortante:

   - El cortante de plastificación con el momento que le acompaña.
   - El momento plástico.
   - El momento que plastifica el ala con su cortante concomitante.





CARACT. MECÁNICAS.

$\Omega = 0'23\ m^2$

$h_i = 0'516\ m$

$h_s = 0'85 - 0'516 = 0'334\ m.$

$I = 157 \cdot 10^{-4}\ m^4.$

$\sigma^2 + 3\tau^2 = 40\ (MPa)$

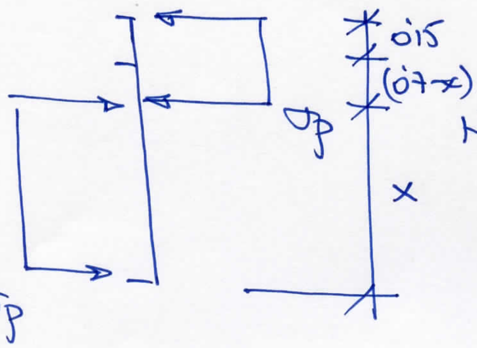
$\sigma_p = \sqrt{40} = 6'324\ MPa.$

$\tau_p = \sqrt{\frac{40}{3}} = 3'651\ MPa$

$\boxed{Me}$

$$\sigma_p = \frac{Me \cdot h_i}{I} \qquad Me = \frac{6'324 \cdot 10^3 \cdot 157 \cdot 10^{-4}}{0'516} = \boxed{192'44\ kN \cdot m.}$$

$\boxed{Mp.}$



Posición de la fibra neutra:

$N = 0.$ (Suponemos en el alma.)

$$0'6 \cdot 0'15 + (0'7-x) \cdot 0'2 = 0'2 \cdot x$$

$$x = 0'575\ m.$$

$$tb. - (0'2 \cdot x) = 0'23 - (0'2 \cdot x) \qquad x = 0'575\ m.$$

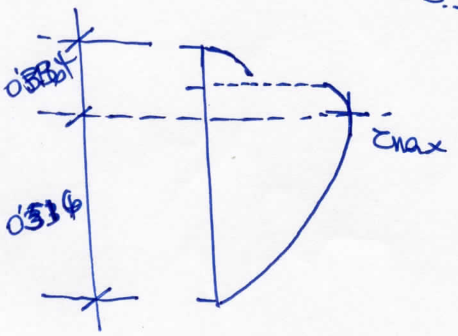
Mp. — como es flexión pura tomamos momentos desde uno de la fibra. (en la fibra neutra)

$$Mp = 0'15 \cdot 0'6 \cdot \left[(0'7-x) + \frac{0'15}{2}\right] + (0'7-x) \cdot 0'2 \cdot \frac{0'7-x}{2} + 0'2 \cdot x \cdot \frac{x}{2} =$$

$$= \boxed{332'74\ kN \cdot m}$$

$\boxed{Qp.}$

$\tau_p = \frac{Qp \cdot Me}{b \cdot I}$ — la tensión tangencial máxima se obtiene en el centro de gravedad de la sección.



$$(3'651 \cdot 10^3) = \frac{Qp \cdot 0'516 \cdot 0'2 \cdot \frac{0'516}{2}}{0'2 \cdot 157 \cdot 10^{-4}}$$

$$\boxed{Qp = 433'31\ kN.}$$

Tensión tangencial en la unión ala-alma:

$$\tau = \frac{Q \cdot M_s}{b \cdot I} = \frac{(433'31)\left(0'6 \cdot 0'15 \cdot \left(0'334 - \frac{0'15}{2}\right)\right)}{0'2 \cdot 0'0158} = \underline{316'35\ kN/m^2}.$$

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = 40 \longrightarrow \sigma^2 = 40 - 3\tau^2 = 40 - 3\cdot(3'1635)^2$$

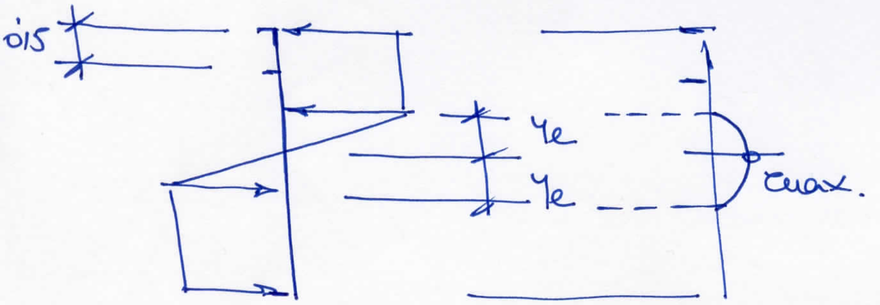
$$\sigma = 3'057\ MPa$$

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I} \longrightarrow M = \frac{\sigma \cdot I}{y} = \frac{(3'057)10^3 \cdot 158 \cdot 10^{-4}}{(0'334 - 0'15)}$$

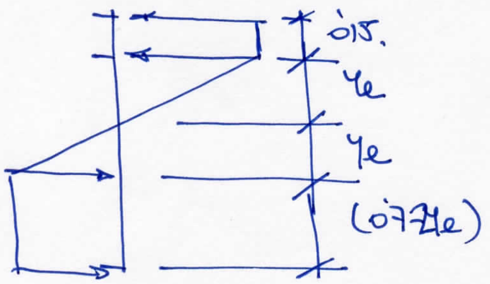
$$\boxed{M = 262'57\ kN \cdot m > M_e}$$

Al ser M mayor que el momento elástico, cuando actúa este momento plastifica una parte de la sección por lo que el cortante, en este caso, no actúa sobre todo el canto.

$\underline{M = 262'57\ kN \cdot m}$ — suponemos que la fibra neutra se encuentra en el alma.



Momento que plastifica el ala:



$$N = 0.$$

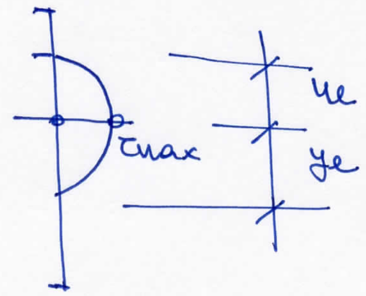
$$(0'15 \cdot 0'6) + \frac{1}{2} y_e \cdot 0'2 = \frac{1}{2} y_e \cdot 0'2 + (0'7 - 2y_e) \cdot 0'2$$

$$\boxed{y_e = 0'125\ m}$$

$$M = \sigma_p \cdot \left[0'15 \cdot 0'6 \cdot \left(y_e + \frac{0'15}{2}\right) + \left[\frac{1}{2} y_e \cdot 0'2 \frac{2}{3} y_e\right]^* + (0'7 - 2y_e) \cdot 0'2 \left(y_e + \frac{0'7 - 2y_e}{2}\right) \right]$$

$$\boxed{M^* = 326'19\ m\,kN}$$

cortante asociado:



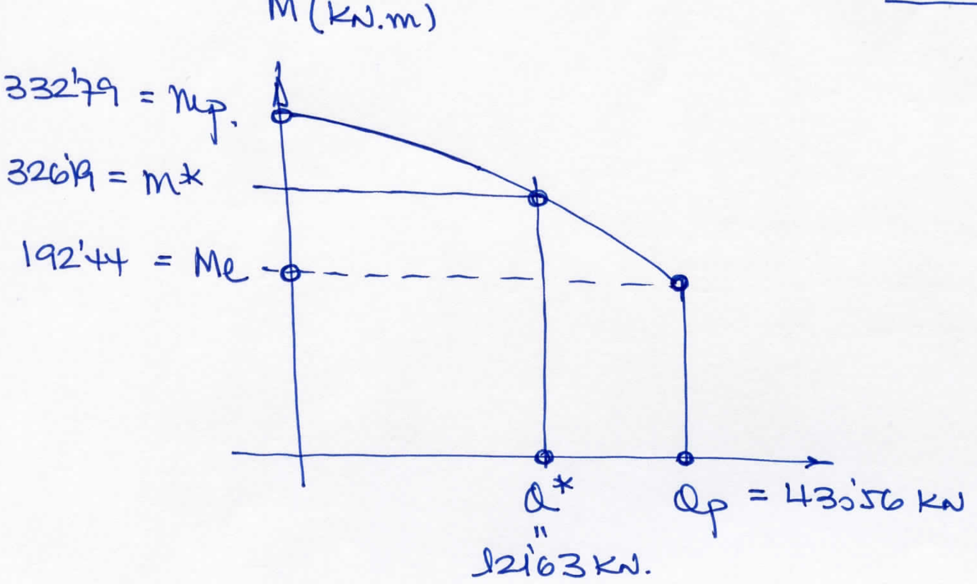
$I = \frac{1}{12}\, 0'2\, (2y_e)^3 =$

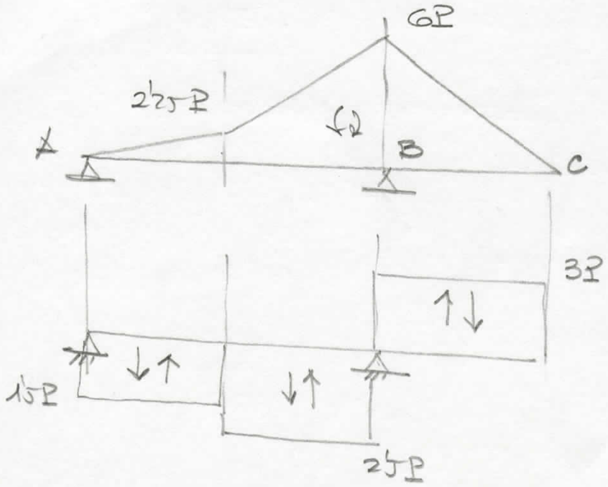
en la fibra de $\tau = \tau_{max}$ $\sigma = 0$.

$\tau = \tau_p = 3'651 \cdot 10^3\ kN/m^2$.

$$3'651 \cdot 10^3 = \frac{Q \cdot \left[y_e \cdot 0'2 \cdot \frac{y_e}{2} \right]}{I}$$

$$\boxed{Q^* = 121'63\ kN.}$$



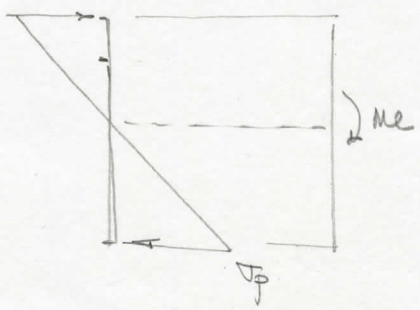


P ? ROTURA VIGA.

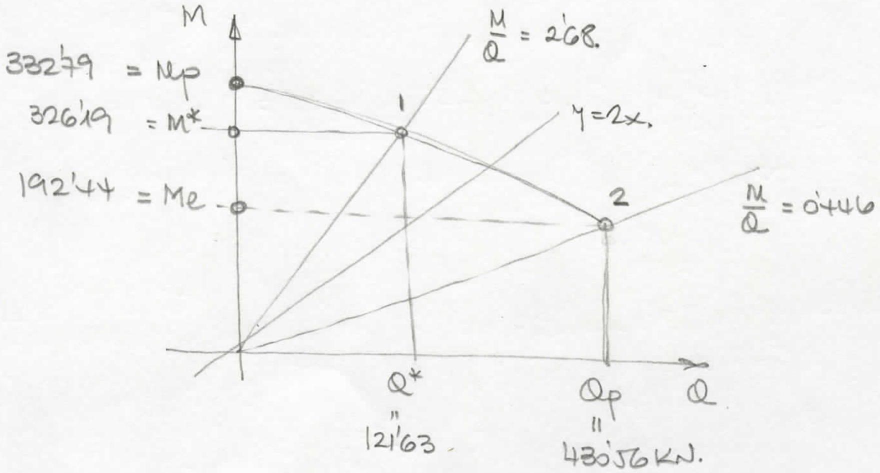
Punto más desfavorable:

$M = 6P$

$Q = 3P$



$$Me = \frac{6'324 \cdot 10^3 \cdot I}{0'516} = 192'44 \text{ kN·m}$$



1) ROTURA POR ACTUACIÓN SOLO DEL Mf.

$Mf = Mp = 332'79$ kN.m. $\qquad 6P = 332'79 \qquad \boxed{P = 55'46 \text{ kN.}}$

2) ROTURA M-Q.

$M = 6P$

$Q = 3P$ — $\frac{M}{Q} = \frac{6P}{3P} = 2. \qquad \boxed{y = 2x}$

RECTA 1,2. — $x = 121'63 \quad y = 326'19$

$x = 430'56 \quad y = 192'44 \qquad \boxed{y = -0'433x + 378'85}$

INTERSECCIÓN $x = 155'91$

$Q = 155'91 = 3P \qquad \boxed{P = 52 \text{ kN.}}$

UNIVERSIDAD ALFONSO X EL SABIO
INGENIERÍA DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

La viga de la figura está sustentada por un empotramiento en el punto A y por un apoyo móvil en C. Está articulada en B y es de sección constante cuyas dimensiones se reflejan en la figura adjunta.

Si la sometemos a una carga uniformemente repartida de P (kN/m) y consideramos que el material del que está hecha presenta un diagrama bilineal con un criterio de plastificación dado según la ecuación:

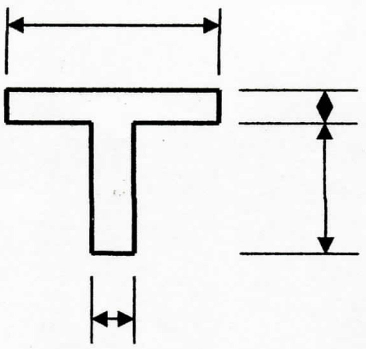
$$\sigma^2 + 3\tau^2 = 40 \text{ (MPa)}$$

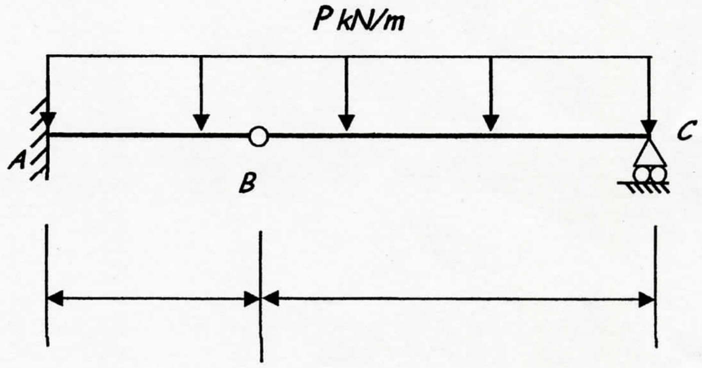
Se pide:

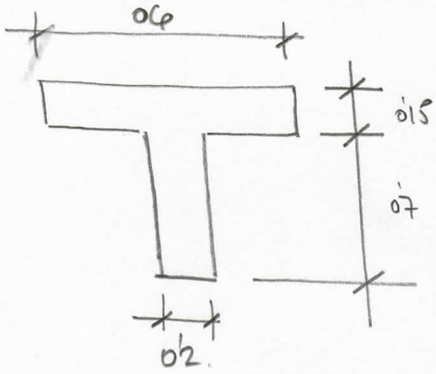
1.- Determinar el valor de P que produce la rotura de la viga, teniendo en cuenta la actuación exclusiva del momento flector. (3,5 puntos)

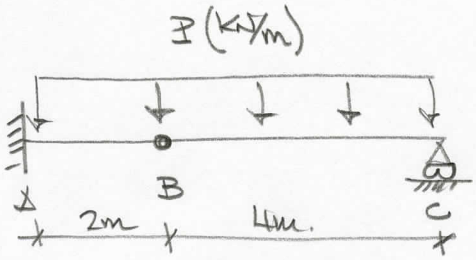
2.- Determinar el valor de P que produce la rotura de la viga, teniendo en cuenta la actuación conjunta del momento flector y del cortante. (6,5 puntos)

Nota: Para la resolución del problema se permite la linealización del diagrama de interacción entre el momento plástico y el momento que acompaña al cortante de plastificación.
El alumno calculará los puntos que considere oportunos del citado diagrama.









$$\sigma^2 + 3\tau^2 = 40 \text{ (MPa)}$$

$$\sigma_p = \sqrt{40} \text{ MPa} = 6'324 \text{ MPa}$$

$$\tau_p = \sqrt{\tfrac{40}{3}} \text{ MPa} = 3'651 \text{ MPa}$$

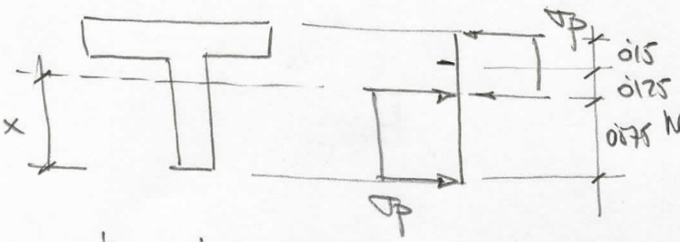
CARACT. MECÁNICAS.

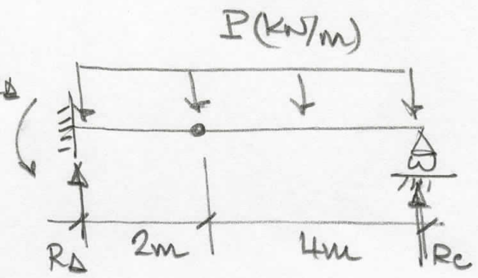
$\Omega = 0'23 m^2$

$h_i = 0'516 m$ $\quad h_s = 0'334$

$I = 157 \cdot 10^{-4} m^4$

a) Igualamos el Mp al máximo momento de la viga





$$0'2x = 0'23 - (0'2x)$$

$$x = 0'575 m. \qquad x_s = 0'275 m.$$

$$M_p = 6'324 \cdot 10^3 \left[0'15 \cdot 0'6 \cdot \left(0'125 + \frac{0'15}{2}\right) + 0'125 \cdot 0'2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0'125 + \frac{1}{2} 0'575^2 \cdot 0'2 \right]$$

$$\boxed{M_p = 332'79 \text{ kN·m}}$$

$\Sigma \overline{M}_{ROT}^{-} = \overline{0}$ $\quad 4R_C - P \cdot 4 \cdot 2 = 0$

$$\boxed{R_C = 2P.}$$

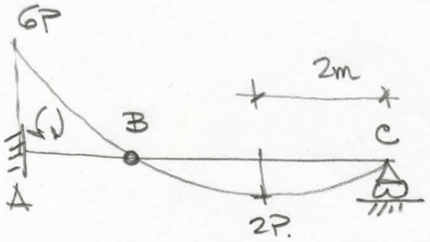
$\Sigma \overline{F_V} = \overline{0}$ $\quad R_A + R_C = 6P$

$$\boxed{R_A = 6P - 2P = 4P}$$

$\Sigma \overline{M}_{ROT}^{+} = \overline{0}$

$$M_A + 2P \cdot 1 - 2R_A = 0$$

$$\boxed{M_A = 2R_A - 2P = 6P.}$$



$$M(x) + Px \cdot \frac{x}{2} - 2Px = 0$$

$$M(x) = 2Px - \frac{Px^2}{2}$$

$$\frac{dM}{dx} = 2P - Px = 0 \quad \boxed{x = 2}$$

$$M(x=2) = 4P - 2P = \underline{2P}.$$

$M_p = 6P.$

$$332'79 = 6P \longrightarrow P = \frac{332'79}{6} = \boxed{55'465 \text{ kN.}}$$

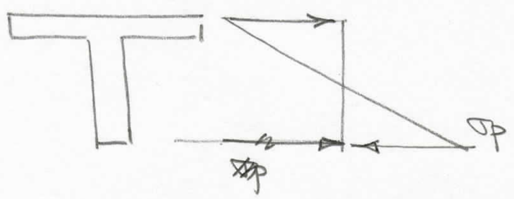
b) Dibujamos el diagrama M/Q.

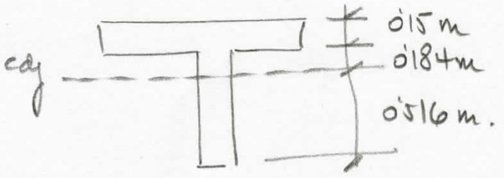
$$3'651\cdot10^3 = \frac{Q_p\cdot(0'516\cdot0'02\cdot\frac{1}{2}\,0'516)}{I\cdot0'02} \qquad \boxed{Q_p = 430'56\ kN.}$$

$$\tau_{P_{ALMA}} = \frac{Q_p\cdot[0'6\cdot0'15\,(0'184+\frac{1}{2}\,0'15)]}{I\cdot0'02} = 3'196\cdot10^3\ \frac{kN}{m^2} = \boxed{3'196\ MPa}$$

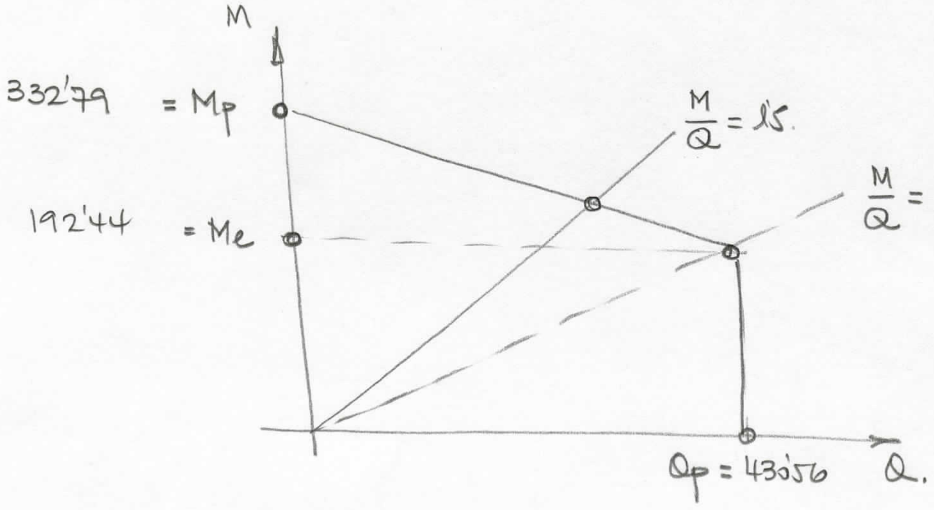
$$\sigma^2+3\tau^2=40. \longrightarrow \sigma_{P_{ALMA}} = 3'058\ MPa \Rightarrow \quad 3'0158 = \frac{M\cdot0'184}{I} \qquad \boxed{M^* = 260'92\ kN\cdot m.}$$

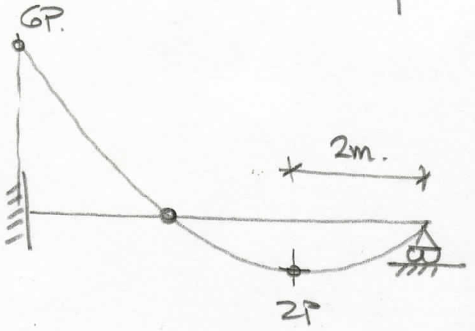
Momento elástico.



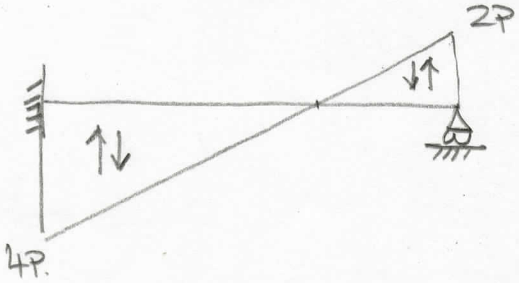


$$6'324\cdot10^3 = \frac{M_e\cdot0'516}{I} \qquad \boxed{M_e = 192'44\ kN\cdot m} < M^*$$





$$\frac{M}{Q} = \frac{6P}{4P} = \frac{3}{2} = \underline{1'5}$$



x = 0
y = 332'79

x = 430'56
y = 192'44

y = ax+b   b = 332'79

192'44 = 430'56·a + 332'79

a = − 0'326

$\boxed{y = -0'326x + 332'79}$

$\boxed{y = 1'5x}$

$(1'5x) = -0'326x + 332'79$

$x = 182'25. \Rightarrow \boxed{Q = 4P = 182'25}$ $\boxed{P = 45'56\ kN/m}$

$\boxed{M = 6P = 273'37\ kN.m}$