Probabilidad

Grado en Matemáticas

Curso 2018-2019

Hoja de Problemas 1

Fecha de Entrega: **Martes, 5 de Febrero** 8

1. Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{A}^*$ dos σ-álgebras sobre un mismo espacio muestral Ω.

   ¿Es **necesariamente** $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}^*$ una σ-álgebra sobre Ω ?

   Razonar la respuesta.

   (**Examen de Mayo de 2018**)

   Solución:

   NO, esta afirmación no es cierta.

   Como contraejemplo podemos considerar el espacio muestral,

$$\Omega = \{a, b, c, \} \, ,$$

   y las σ-álgebras

$$\mathscr{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \Omega\} \, ,$$

   y

$$\mathscr{A}^* = \{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, \Omega\} \, .$$

   La unión de estas dos σ- álgebras es

$$\mathscr{A} \cup \mathscr{A}^* = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\} \, .$$

   $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}^*$ **no es una σ-álgebra**, ya que, por ejemplo,

$$\{a\} \in \mathscr{A} \cup \mathscr{A}^*,$$

   y

$$\{b\} \in \mathscr{A} \cup \mathscr{A}^*,$$

   pero

$$\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \mathscr{A} \cup \mathscr{A}^*,$$

   lo que contradice el que este conjunto sea cerrado para uniones numerables.

c.q.d.

2. Dado el espacio muestral $\Omega = \mathbb{R}$, definimos la sucesión de intervalos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, como

$$A_n = \left[-\frac{1}{n},\ 1-\frac{1}{n}\right].$$

Determinar los suguientes conjuntos:

(a) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

(b) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

(c) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

Solución: Nótese que

$$\begin{aligned} A_1 &= [-1,\ 0]\,, \\ A_2 &= \left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right], \\ A_3 &= \left[-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right], \\ A_4 &= \left[-\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right], \\ &\vdots \end{aligned}$$

Por tanto:

(a)

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [-1, 1)$$

(b)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$$

(c) Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \left(-\frac{1}{n},\ 1\right),$$

luego

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\ 1\right) = [0,\ 1)$$

3. Sea Ω un conjunto infinito y sea $B \subset \Omega$.

Si definimos

$$\mathscr{A} = \{A \in \Omega \text{ tales que o bien } A \subset B \text{ o bien } B \subset A\},$$

¿tiene necesariamente $\mathscr{A}$ estructura de σ-álgebra?

(**Examen de Junio de 2017**)

Solución: Esta afirmación **no es cierta**.

Recordemos que para que $\mathscr{A}$ sea una σ-álgebra sobre el espacio muestral Ω debe verificar las siguientes propiedades:

i) $\Omega \in \mathscr{A}$

ii) Si $A \in \mathscr{A} \quad \Rightarrow \quad A^c \in \mathscr{A}$

iii) Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$

Como contraejemplo para probar que la afirmación es falsa podemos considerar, por ejemplo, como espacio muestra Ω el conjunto de los números naturales positivos,

$$\Omega = \mathbb{N}^+$$

y como conjunto $B \subset \Omega$,

$$B = \{1, 2\}.$$

En este caso sí se verifica la propiedad (i), ya que $B \subset \Omega$, lo que asegura que $\Omega \in \mathscr{A}$.

Pero la segunda propiedad no se verifica, ya que, por ejemplo, si tomamos el suceso

$$A = \{1\},$$

se tiene que

$$A \in \mathscr{A},$$

ya que

$$A \subset B.$$

Sin embargo

$$A^c \notin \mathscr{A},$$

ya que

$$A^c = \{2, 3, 4, 5, 6, ...\} = \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

por lo que

$$A^c \not\subset B,$$

y además

$$B \not\subset A^c.$$

4. Dado el espacio muestral $\Omega = \mathbb{R}$, y dos números reales a y b tales que $a < b$, definimos la sucesión de sucesos $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, como

$$D_n = \left(a - \frac{1}{n},\ b + \frac{1}{n}\right].$$

Probar que para esta sucesión se verifica

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} D_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} D_k$$

(**Examen de Mayo de 2018**)

Solución: Tenemos que

$$\begin{array}{rcl} D_1 & = & (a-1,\ b+1]\,, \\ D_2 & = & (a-0.5,\ b+0.5]\,, \\ D_3 & = & (a-0.33,\ b+0.33]\,, \\ D_4 & = & (a-0.25,\ b+0.25]\,, \\ \vdots & & \end{array}$$

Observemos en primer lugar que

$$\begin{array}{rcl} \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n & = & [a,b], \\ \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n & = & (a-1,\ b+1]\,. \end{array}$$

Además, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl} \bigcap_{k=n}^{\infty} D_k & = & [a,b], \\ \bigcup_{k=n}^{\infty} D_k & = & \left(a-\frac{1}{n},\ b+\frac{1}{n}\right] = D_n. \end{array}$$

Por tanto,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} D_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a-\frac{1}{n},\ b+\frac{1}{n}\right] = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = [a,b]$$

y

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} D_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a,b] = [a,b].$$

Luego, efectivamente, en este caso se verifica

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} D_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} D_k = [a,b]$$

c.q.d.

5. Dado el espacio muestral,

$$\Omega = \{a,b,c,d\}\,,$$

proponer una σ-álgebra sobre Ω, diferente de $\mathcal{P}(\Omega)$, y que tenga más de cuatro elementos.

Solución: Existen muchas sigma-álgebras que cumplen estos dos requerimientos, por ejemplo,

$$\mathscr{A}_1 = \{\emptyset,\ \{a\},\ \{a,b\},\ \{b,c,d\},\ \{c,d\},\ \{b\},\ \{a,c,d\},\ \{a,b,c,d\}\}\,,$$

o,

$$\mathscr{A}_2 = \{\emptyset,\ \{a,b\},\ \{c\},\ \{a,b,c\},\ \{d\},\ \{c,d\},\ \{a,c,d\},\ \{a,b,c,d\}\}\,,$$

entre otras diferentes posibilidades.