Dados dos números $a \leq b$, sabemos que $\forall r > 0$ si a b le quitamos r se tiene que $b - r < a$. De aquí hay que deducir que $a = b$

Sabemos $\begin{cases} ① \quad a \;\; b \quad \text{si} \\ ② \quad b-r \;\; a \quad \text{si} \end{cases}$ ¿ $\Rightarrow a = b$?

(Cualquier $r > 0$)

DEM: Si $a \leq b \Rightarrow \begin{cases} \text{o bien } a < b \\ \text{ó} \\ a = b \end{cases}$ Veamos que $a < b$ no es posible. Por reducción al absurdo. Supongamos que $a < b$

a b

Sea $r = \dfrac{b-a}{2}$ mitad de la distancia de a a b.

Si $b - \dfrac{b-a}{2} = \dfrac{a+b}{2} > a$!! Contradicción con 2º.

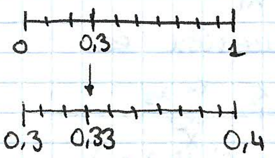
16-10-14

SUCESIONES:

$\mathbb{R}$

$\frac{1}{3} = 0,3333\ldots$

$\sqrt{2}$



$n = 1 \to 0,3 = x_1$

$n = 2 \to 0,33 = x_2$

$n = 3 \to 0,333 = x_3$

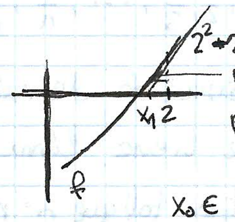
$\vdots$

$n \quad \underbrace{0,333\cdots3}_{n \text{ veces}} = x_n$

$x_n \simeq \frac{1}{3}$ cuando n es grande

$\sqrt{2}$ $\quad f(x) = x^2 - 2$

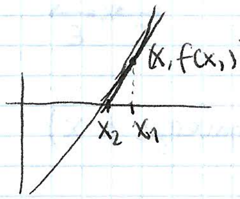
$f(x) = 0 = x^2 - 2 \to x = \sqrt{2} < 2$



recta tangente por el punto $(2, f(2))$

$x_0 \in \mathbb{R}$.

recta tangente por $(x_0, f(x_0))$



$\begin{cases} y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) \\ y = 0 \end{cases}$

$0 = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$

despejando $\dfrac{-f(x_0)}{f'(x_1)} + x_0 = x$

Si $f(x) = x^2 - 2$; $x = x_0 - \dfrac{x_0^2 - 2}{2x_0} = \dfrac{x_0^2 + 2}{2x_0}$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{x_0^2 + 2}{2x_0} \\ x_2 &= \frac{x_1^2 + 2}{2x_1} \\ x_3 &= \frac{x_2^2 + 2}{2x_2} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{x_{n-1}^2 + 2}{2x_{n-1}} \end{aligned}\right\} \text{se acercan a } \sqrt{2}$$

DEF: Una sucesión de números reales no es más que una aplicación ~~inyectiva~~ de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$.

Es decir

$$f\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longrightarrow f(n) = x_n$$

Ejemplo: $f\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$0 \longrightarrow 2 = x_0$

$1 \longrightarrow \dfrac{x_0^2+2}{2x_0} = x_1$

$\vdots$

$n \longrightarrow \dfrac{x_{n-1}^2+2}{2x_{n-1}} = x_n$

Ejemplo: $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$n \longrightarrow 0{,}\underbrace{33\ldots3}_{n \text{ veces}}$$

Notación: Habitualmente una sucesión de reales se denota por las imágenes

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1} \ldots\} \subseteq \mathbb{R}$$

$\mathbb{N}$ nos da un orden $1 \quad 2 \quad 3 \ldots$ una sucesión es una forma de ordenar una cantidad de números reales (numerables) con cierto orden.

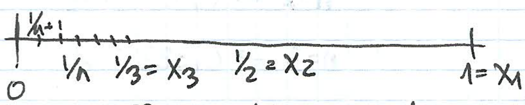
$(x_1)_{n=1}^{\infty}$ $\quad x_1 \in \mathbb{R}$ $\quad 1^{er}$ elemento de la sucesión

$x_2 \in \mathbb{R}$ $\quad 2^{o}$ " "

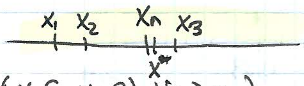
$x_3 \in \mathbb{R}$ $\quad 3^{er}$ " "

$x_n \in \mathbb{R}$ $\quad n$-ésimo elemento

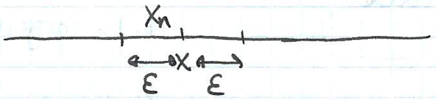
Ej: $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} \ldots\right\}$

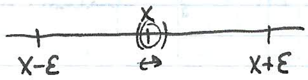


DEF: Dada una sucesión de números reales $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ se dice que la sucesión es convergente o que tiene límite si existe $x \in \mathbb{R}$ de modo que



$\forall \varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $|x_n - x| < \varepsilon \iff (x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\ \forall n \geq n_0)$





Notación:

$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ (x_n converge a x)

$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ (El límite de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es x —)

Ej: $(x_n)_{n=1}^{\infty} = ((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ $\qquad \nexists \lim_{n\to\infty} (-1)^n$

teorema: Si existe el límite de una sucesión es único

DEM: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ $\qquad y \neq x$ ¿$\lim_{n\to\infty} x_n = y$?

Propiedades de las sucesiones convergentes:

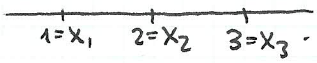
DEF: Dada una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de números reales.

A) Decimos que una sucesión es creciente si $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

B) Decimos que la sucesión es decreciente si $x_{n+1} < x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Ej: $((-1)^n)_n$ no es creciente ni decreciente.

- $(n)_{n=1}^{\infty}$ creciente, no converge.



- $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$

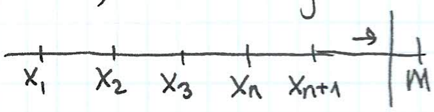
decreciente $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

teorema: sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión:

a) si es creciente y acotada superiormente, es convergente y $\lim_{n\to\infty} x_n = \operatorname{Sup}_n \{x_n\}$

b) Si es decreciente y acotada inferiormente; es convergente y $\lim_{n\to\infty} x_n = \operatorname{Inf}_n \{x_n\}$

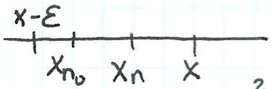
DEM: a) (x_n) creciente y acotada superiormente $\exists M \in \mathbb{R} \quad x_n \leq M \quad$ M cota superior.



¿ $\lim_{n\to\infty} x_n = \operatorname{Sup} |x_n|$? Como $|x_n| \subseteq \mathbb{R}$ no es vacío y está acotado superiormente

$\exists \operatorname{Sup} |x_n| = x$. ¿ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : n \geq n_0 \ |x_n - x| < \varepsilon$?

Sea $\varepsilon > 0$, $x - \varepsilon = \operatorname{Sup} |x_n| - \varepsilon$ ¿ $x-\varepsilon$ es cota superior de $|x_n|$? NO, existe x_{n_0} tal que $x - \varepsilon \leq x_{n_0} \leq \operatorname{Sup} |x_n| = x$. Como la sucesión es creciente $\forall n \geq n_0 \quad x_n \geq x_{n_0}$ y así



$$x - \varepsilon \leq x_{n_0} \leq x_n \leq x \Rightarrow |x_n - x| \leq \varepsilon$$

Ej: ~~$(x_n)_{n=}^{\infty}$~~ $x_n = \dfrac{x_{n-1}^2 + 2}{2x_{n-1}}$; $x_0 = 2$. Sucesión recurrente.

Veamos que es convergente:

- esta acotada $2 \geq x_n \geq \sqrt{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Por inducción:

$x_0 = 2 \qquad 2 \geq 2 \geq \sqrt{2}$. Supongamos ahora $2 \geq x_n \geq \sqrt{2}$ ¿ $2 \geq x_{n+1} \geq \sqrt{2}$?

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \leq \frac{2}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \leq 1 + 1 = 2$$

$$x_{n+1} = \left(\frac{x_n^2 + 2}{2x_n} \geq \sqrt{2} \right) \Leftrightarrow x_n^2 + 2 \geq 2\sqrt{2}\, x_n \Leftrightarrow x_n^2 - 2\sqrt{2}\, x_n + 2 = (x_n - 2)^2 \geq 0$$

Operaciones de las sucesiones:

DEF: Dadas dos sucesiones $(x_n)_1$, $(y_n)_n$ se llama:

a) Suma de las sucesiones $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$

b) Producto " $(x_n)(y_n) = (x_n y_n)_{n=1}^{\infty}$

c) División $\dfrac{(x_n)}{(y_n)} = \left(\dfrac{x_n}{y_n} \right)$

Ej: $\cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(1+\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = (1)_{n=1}^{\infty} + \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ $\qquad \frac{(n+1)n}{(n)n}$

$\cdot\ (n)_{n=1}^{\infty}$ y $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty} \Rightarrow (n)_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

teorema:

a) $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty} \longrightarrow x+y$ $\quad (\lim_{n\to\infty} (x_n+y_n) = \lim_{x\to\infty} x_n + \lim_{x\to\infty} y_n$.

b) $(x_n y_n)_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} xy$ $\quad (\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x \lim_{n\to\infty} y$

c) Si $y \neq 0$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$

Ej: $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1+0 = 1$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$

$= 2 + 3\times 0 + 0 = 2$

$\to \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = 1 \cdot 2 = 2$

20 - 10 - 14

PROPIEDADES:

a) $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$

b) $\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$

En particular si $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \lim_{n\to\infty} (\lambda x_n) = \lambda \cdot \lim x_n$

c) Si $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}$

DEM:

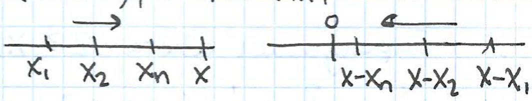
a) $\lim_{n\to\infty} x_n = x \underset{DEF}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0$ existe $n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow |x - x_n| < \varepsilon$

$\lim_{n\to\infty} y_n = y \overset{DEF}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0$ " $n_1 : n \geq n_0 \Rightarrow |y - y_n| < \varepsilon$

¿$\lim_{n\to\infty} (x_n+y_n) = x+y$? $\varepsilon > 0$ sea $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ y así si $n \geq n_2$

$|(x+y) - (x_n+y_n)| = |(x-x_n) + (y-y_n)| \leq |x-x_n| + |y-y_n| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

OBS: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \Leftrightarrow x_n - x \to 0$



Propiedades:

a) Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|$

b) Si $(x_n), (y_n)$ con $x_n \leq y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\exists \lim_{n\to\infty} x_n$ y $\exists \lim_{n\to\infty} y_n \Rightarrow x \leq y$

c) Si $(x_n)(y_n)$ y (z_n) son tres sucesiones con $x_n \leq y_n \leq z_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\exists \lim_{n\to\infty} z_n = z$ de modo que $x = z$, entonces $\exists \lim_{n\to\infty} y_n = x = z$.

Ej: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \dfrac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$

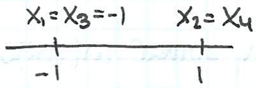
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

23-10-14

- Subsucesiones
- Teorema de Boltzano-Weirstrass
- Sucesiones de Cauchy
- Ejemplos

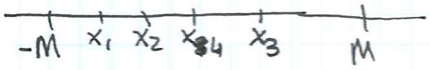
Observación:

- Si $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ convergente entonces está acotada
(e.d. $\exists M>0$ tal que $|X_n| \leq M$ 

)
- Hay sucesiones acotadas que no son convergentes: Ej: $(-1)^n$ 

- Si una sucesión no está acotada no puede ser convergente.

Sea una sucesión acotada (X_n) (e.d $\exists M>0$ tal que $|X_n| \leq M$ ó $X_n \in [-M, M]$



DEF: Dada una sucesión $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ una subsucesión es una parte suya infinita que guarda el orden relativo $(X_{n_k})_{n=1}^{\infty}$ con $n_1 < n_2 < n_3 < \quad < n_k < n_{k+1} <$

Teorema de Boltzano-Weirstrass:

Si $(X_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ sucesión de números reales acotada, entonces existe una subsucesión $(X_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ que es convergente.

DEF: Una sucesión $(X_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ se llama de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ de modo que $\forall n, m, \geq n_0$ si tiene que $|X_n - X_m| < \varepsilon$

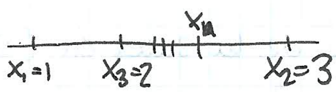
Teorema: en $\mathbb{R}$ son equivalentes

a) $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy

b) $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ es convergente

Ej 8 (Hoja 2):

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = 1 \\ X_2 = 3 \\ X_{n+2} = \dfrac{X_{n+1} + X_n}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sucesión recurrente} \\ \text{¿ '' convergente?} \end{array}$$



$X_n \in [1, 3]$ $\forall n$, sucesión acotada

$|X_n - X_{n+k}| \leq |X_n - X_{n+1}| =$ 

$= \left| X_n - \dfrac{X_n + X_{n-1}}{2} \right| = \left| \dfrac{2X_n - X_n - X_{n-1}}{2} \right|$

$= \left| \dfrac{X_n - X_{n-1}}{2} \right| = \dfrac{1}{2} |X_n - X_{n-1}| = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} |X_{n-1} - X_{n-2}| = \dfrac{1}{2^{n-1}} |X_2 - X_1| = \dfrac{2}{2^{n-1}}$

Ejer 9:

n datos $\longrightarrow$ a_n instrucciones para n datos con $4n$ instrucciones se pasa al caso $n-1$. $n=1$ $a_1=1$

a) Sucesión recurrente $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ $a_1=1$ $a_{n+1}=4(n+1)+a_n$

b) Monotonía y acotación de la sucesión $a_1=1<a_2=2\times 2+a_1<a_3<\dots<a_n<a_{n+1}$ creciente ¿Está acotada? $a_{n+1}>4(n+1)\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$. No está acotada.

c) Prueba por inducción $|a_n-2n^2|<2n$

~~Ejer~~ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n^2}=1$ ($\iff a_n \approx 2n^2$) por la def de límite

$$0\le\left|\frac{a_n}{2n^2}-1\right|=\left|\frac{a_n-2n^2}{2n^2}\right|\le\frac{\cancel{2}n}{\cancel{2}n^2}=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \Rightarrow \frac{a_n}{2n^2}-1\longrightarrow 0 \iff \frac{a_n}{2n^2}\to 1$$

24-10-14

SERIES:

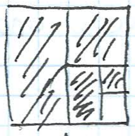
¿Se pueden sumar infinitos números?

- $2+3=5$
- $\pi+e=\bigcirc>5$
- $1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$
  $\sum_{k=1}^{n}k$
- $\sum_{n=1}^{k+1}n^3=1^3+2^3+\dots+(k+1)^3=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$

Dada una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathbb{R}$

¿$a_1+a_2+a_3+\dots+a_n+a_{n+1}+\dots$?

Ejemplo:



1

1

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\dots=1$$

Ejemplo: $1+2+\dots+n+(n+1)+\dots=r\in\mathbb{R}$ NO

(Si fuese así $\forall n\in\mathbb{N}$ $n<r$!!)

DEF: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión de números reales

- se define la sucesión de sumas parciales

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}a_n=a_1+a_2+\dots+a_n$$

- Consideramos el límite de la sucesión $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ $\left(\lim\limits_{N\to\infty}S_N=\lim\limits_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n=\lim\limits_{N\to\infty}(a_1+a_2+\dots+a_n)\right)$ $\overset{not.}{=}\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, lo llamamos la serie de la sucesión $(a_n)_{n=1}$

DEF: Una serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ de números reales es convergente si $\exists\lim\limits_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n\overset{not.}{=}\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ y lo llamamos suma de la serie. Decimos que la serie es divergente si NO existe $\lim\limits_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n$ o es infinito.

Ejemplo: ¿1? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^N}\right) = \lim_{N\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{N+1}}}{1-\frac{1}{2}}$

$= \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} n = \lim_{N\to\infty} (1+2+\cdots+N) = \lim_{N\to\infty} \frac{N(N+1)}{2} = \infty$$

DEF: Si $r>0$ a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ se le llama serie geométrica.

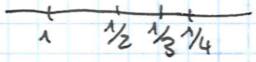
Teorema:

- Si $r \geq 1$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \infty$
- Si $r \in (0,1)$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}$

DEM: $\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} r^n = \lim_{N\to\infty} \frac{r-r^{(N+1)}}{1-r} = \begin{cases} \infty & \text{si } r>1 \\ \frac{r}{1-r} & \text{si } r<1 \end{cases}$

DEF: A la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots$ se le llama serie armónica

Teorema: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \infty$



DEM: $N = 2^k$ $\quad \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k} \geq 1+\frac{k}{2} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$

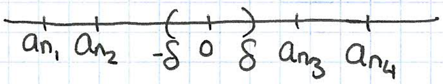
Propiedades de las series:

- $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
- $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

DEM:
$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (a_n+b_n) = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right) + \left(\sum_{n=1}^{N} b_n\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} b_n$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Teorema: Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

DEM: Supongamos que no $\exists \delta>0$ tal hay una subsucesión (a_{n_k}) tal que $|a_{n_k}| > \delta > 0$



supongamos $a_{n_k} > \delta > 0$

$$\sum_{k=1}^{N} a_{n_k} \geq N\delta \xrightarrow[N\to\infty]{} \infty$$

— Una condición necesaria para que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sea convergente es que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ sin embargo no es suficiente.

Ejemplo: $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pero $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ no es convergente.

Ejemplo: 17 Hoja 2:

b) $\frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \frac{5}{4} - \frac{6}{5} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{n+2}{n+1} + \cdots \quad \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1} \frac{n+2}{n+1}$

$\lim (-1)^{n+1} \frac{n+2}{n+1} \begin{cases} 1 & n \text{ impar} \\ -1 & n \text{ par} \end{cases} \neq 0$

Criterios de convergencia:

Teorema: dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente, la serie lo es.

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

DEF: Una serie $\sum a_n$:

a) se dice absolutamente convergente si $\sum |a_n| < \infty$

b) se dice condicionalmente convergente si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

Teorema (Leibniz):
Si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ decreciente ($a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$) y convergente a cero ($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$) entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ es convergente.

Ejemplo:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ es cond. convergente, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, pero no lo hace $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ diverge.

27-10-14

Serie geométrica:
$$\sum_{n=n_0}^{\infty} r^n = \frac{r^{n_0}}{1-r} \quad 0<r<1$$

Serie aritmética:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Criterios de convergencia para series de términos positivos:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

OBSERV.: Si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ de términos positivos ($a_n \geq 0$ $\forall n$) entonces las sumas parciales $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_N$ es una sucesión creciente.
$S_{N+1} = S_N + a_{N+1}$ como $a_{N+1} \geq 0 \Rightarrow S_{N+1} > S_N$. Existe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = \lim_{N\to\infty} S_N$ si y sólo si $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ está acotada.

Criterios de comparación:
Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos, de modo que $a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

a) si $\sum b_n$ es convergente $\Rightarrow \sum a_n$ también y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también.

b) si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también.

Criterio de comparación por cociente:

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos de modo que $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = r \neq 0$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y solo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente

DEM: $0 \quad (\; r/2 \quad r \quad 3r/2 \;)$ $\quad \frac{r}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2} b_n \Leftrightarrow \frac{r}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3}{2} r \quad \forall n \geq n_0$

Criterio del cociente:

Sea una serie de términos positivos. $\sum a_n$ de modo que existe $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \geq 0$

- si $r<1$, la serie converge
- si $r>1$, la serie diverge
- si $r=1$, el criterio no decide.

DEM: $r=1$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Diverge.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1$. Convergente.

Criterios de la raíz:

Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos de modo que $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$

si $r<1 \Rightarrow$ serie convergente

si $r>1 \Rightarrow$ serie divergente

y si $r=1 \Rightarrow$ el criterio no decide.

Aplicación de las series:

Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad x \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ existe $\forall x \in \mathbb{R}$

por el criterio del cociente: $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} \frac{n!}{(n+1)\cancel{n}!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$

30-10-14

- $\mathbb{R}$ es un ~~cierto~~ cuerpo ordenado con la propiedad del extremo superior
- Sabemos que $\forall x \in \mathbb{R} \; \exists m \in \mathbb{Z}$ tal que $m \leq x < m+1$ $\quad m \quad x \quad m+1$

la propiedad del extremo $\quad x = \sup \{ \frac{p}{q} : \frac{p}{q} < x \}$

$\mathbb{R}$: Recta $\quad m \quad p/q \quad x \quad m+1$

¿ $\cdot = \{ m, a_1, a_2, \dots, a_n \dots : a_i \in \{0,1,2,\dots 9\} \}$?

$m \in \mathbb{Z}$ y $a_i \in \{0,1,\dots 9\}$ $\quad m, a_1 a_2 \dots a_n = m + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$

LEMA: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ $\quad a_n \in \{0,1,\dots 9\}$ es convergente e.d. $\exists r \in \mathbb{R}$ tal que $r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ $\quad =(0,9999\dots)$

DEM: $\sum \frac{a_n}{10^n}$ serie de términos positivos. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 9 \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 9 \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$

Serie geométrica

Teorema: $x \in \mathbb{R}$ entonces

a) $x = m + r$ con $m \in \mathbb{Z}$ y $r \in [0,1)$

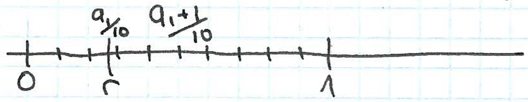
b) $r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ para ciertos $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ cifras

DEM:

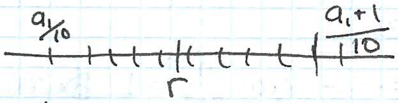
a) Si $x \in \mathbb{R}$ $\exists m \in \mathbb{Z}$ tal que $m \leq x < m+1$

$r = x - m$ así $x = m + r$ y $x \geq m \Rightarrow 0 \leq r < (m+1) - m = 1$ $x < m+1$

b) Sea $r \in [0,1)$  dividimos en 10 partes



$a_1 \in \{0,1,\ldots,9\}$ tal que $\frac{a_1}{10} \leq r < \frac{a_1+1}{10}$

dividimos por 10 otra vez  $a_2 \in \{0,\ldots,9\}$ tal que

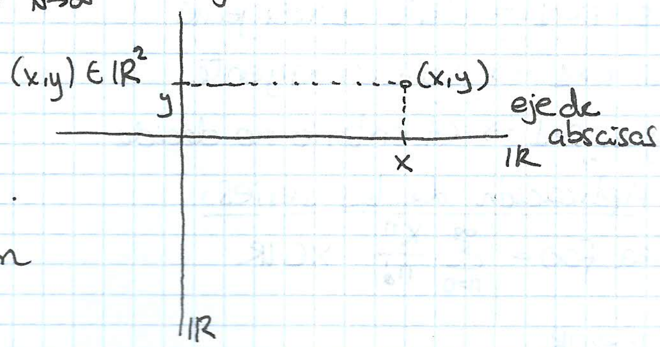
$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} \leq r < \frac{a_1}{10} + \frac{a_2+1}{100}$ ... etc.

Repitiendo el proceso conseguimos $a_1 \ldots a_n \ldots \in \{0,\ldots,9\}$ tal que $\forall N \in \mathbb{N}$

$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{10^n} \leq r < \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_{N+1}}{10^N}$ ahora $r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$

DEM: $\left| \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{10^n} - r \right| \leq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_{N+1}}{10^N} - \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{10^N} = \frac{1}{10^N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

FUNCIONES CONTINUAS:



$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$. Representación gráfica

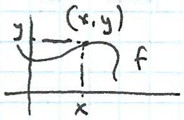
Representación cartesiana de puntos de plano.

DEF: Una aplicación f de $\mathbb{R}$ en sí mismo es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ ($f \subseteq \mathbb{R}^2$) de modo que se

llama dominio de f $\{x \in \mathbb{R} : \exists (x,y) \in f\} = \mathrm{Dom} f$

llama imagen de f $\{y \in \mathbb{R} : \exists (x,y) \in f\} = \mathrm{Im} f$

y siempre se tiene que verificar que $\forall x \in \mathrm{Dom} f$ existe un <u>único punto</u> $y \in \mathbb{R}$



DEF: (aproximada) una aplicación de f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es una asignación de puntos de $\mathbb{R}$ a puntos de $\mathbb{R}$ de modo que algunos puntos $x \in \mathbb{R}$ le hacemos corresponder otro (y sólo uno) punto de $\mathbb{R}$.

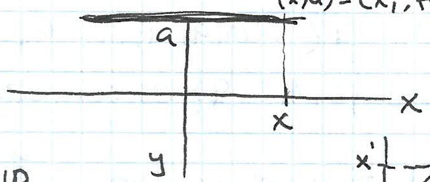
Notamos: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama $\mathrm{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R}$ con $f(x) = y\}$

$x \to f(x) = y$ se llama $\mathrm{Im} f = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}$ con $f(x) = y\}$

A las aplicaciones entre $\mathbb{R}$ y sí mismo se le llama funciones reales de variable real, y brevemente hablamos de funciones.

Ejemplos: $f\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to f(x) = a = \text{cte}$



$f\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to f(x) = x$