

Capítulo 2: Revisión de los fundamentos Matemáticos

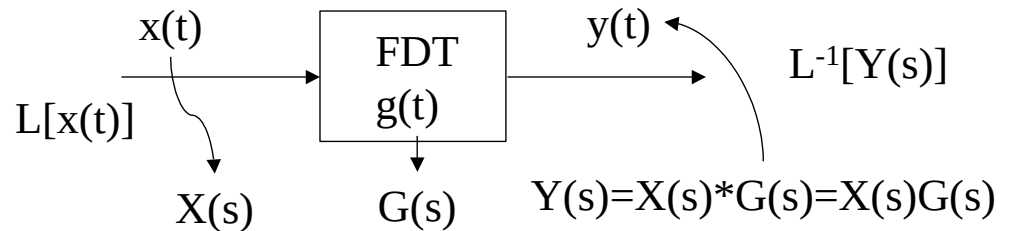
carlos.platero@upm.es (C-305)

Fundamentos matemáticos

► Señal y sistema

► Convolución:

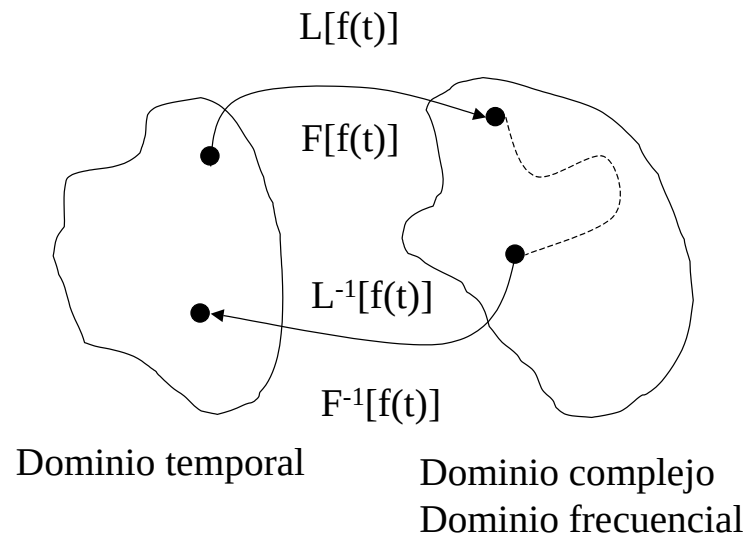
- continua
- discreta



$$y(t) = x(t) * g(t) = \int_0^t x(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t x(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

► Transformadas

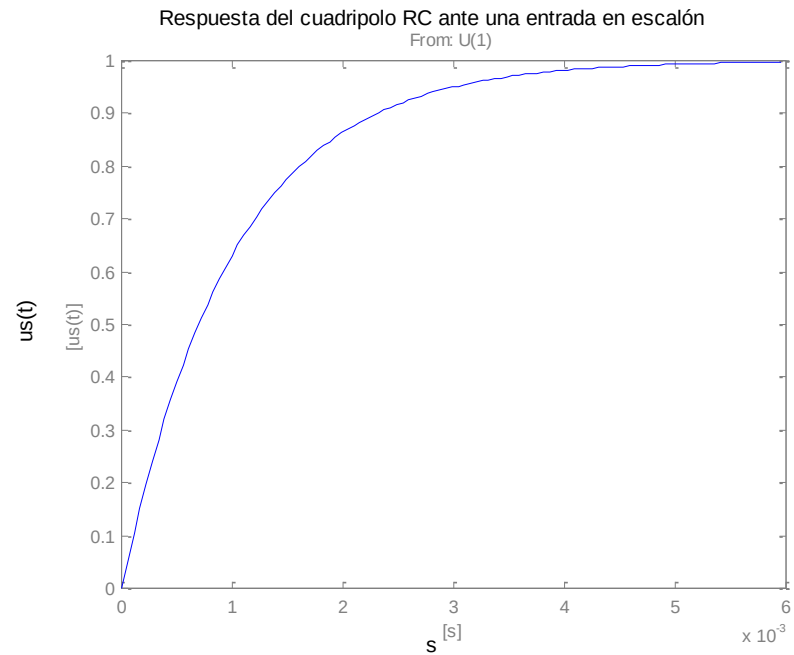
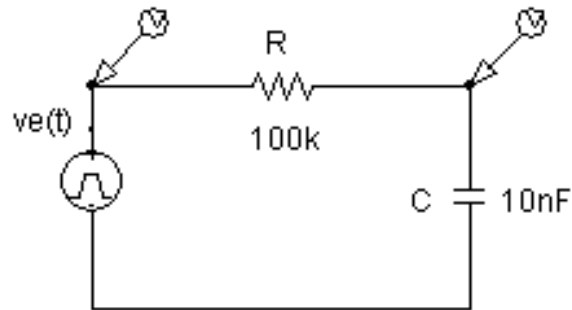
- Fourier
- Laplace



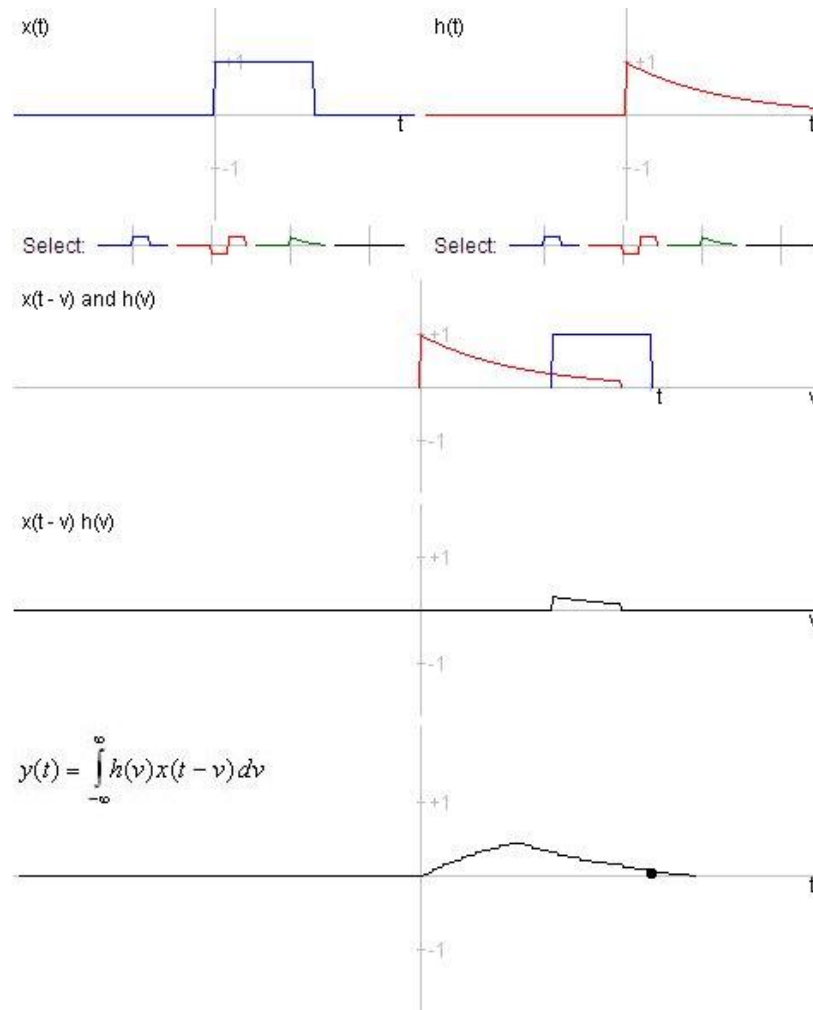
Ejemplo de convolución

► Escalón unitario a un circuito RC

$$u_s(t) = u_e(t) * g(t) = \int_0^t u_e(t-\tau) g(\tau) d\tau$$



Demo de convolución continua



<http://www.jhu.edu/~signals/convolve/index.html>

Series de Fourier



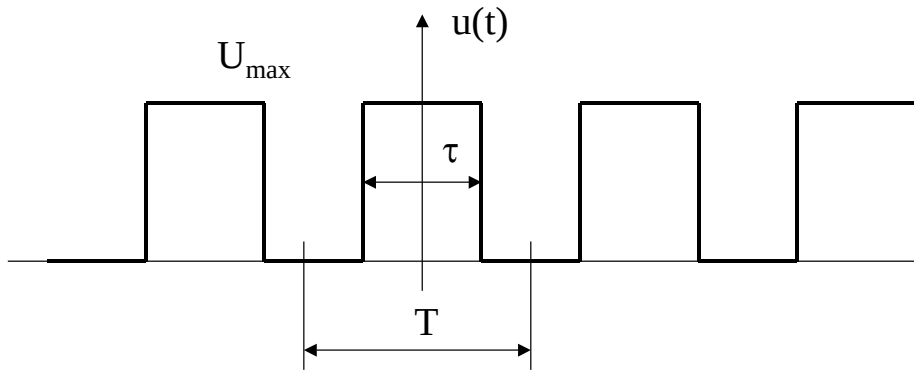
- ▶ Sea una función periódica temporal, $f(t)$, de periodo de T , acotada en un intervalo, con un número finito de máximos, mínimos y puntos discontinuos, ésta puede ser representada por una serie infinita de senos y cosenos. A esta serie se la llama de Fourier:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

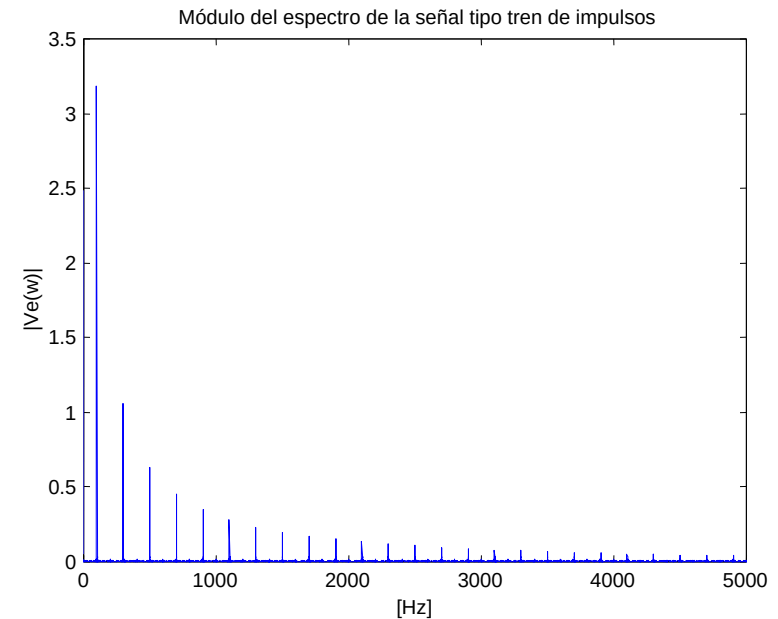
$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot dt \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt$$

Ejemplo 2.1

$$f(t) = f(-t) \Rightarrow b_n = 0$$
$$f(t) = -f(-t) \Rightarrow a_n = 0$$



$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} U_{\max} dt = U_{\max} \frac{\tau}{T}$$
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} U_{\max} \cos\left(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) dt = \frac{2U_{\max}}{\pi n} \sin\left(n \cdot \pi \cdot \frac{\tau}{T}\right)$$



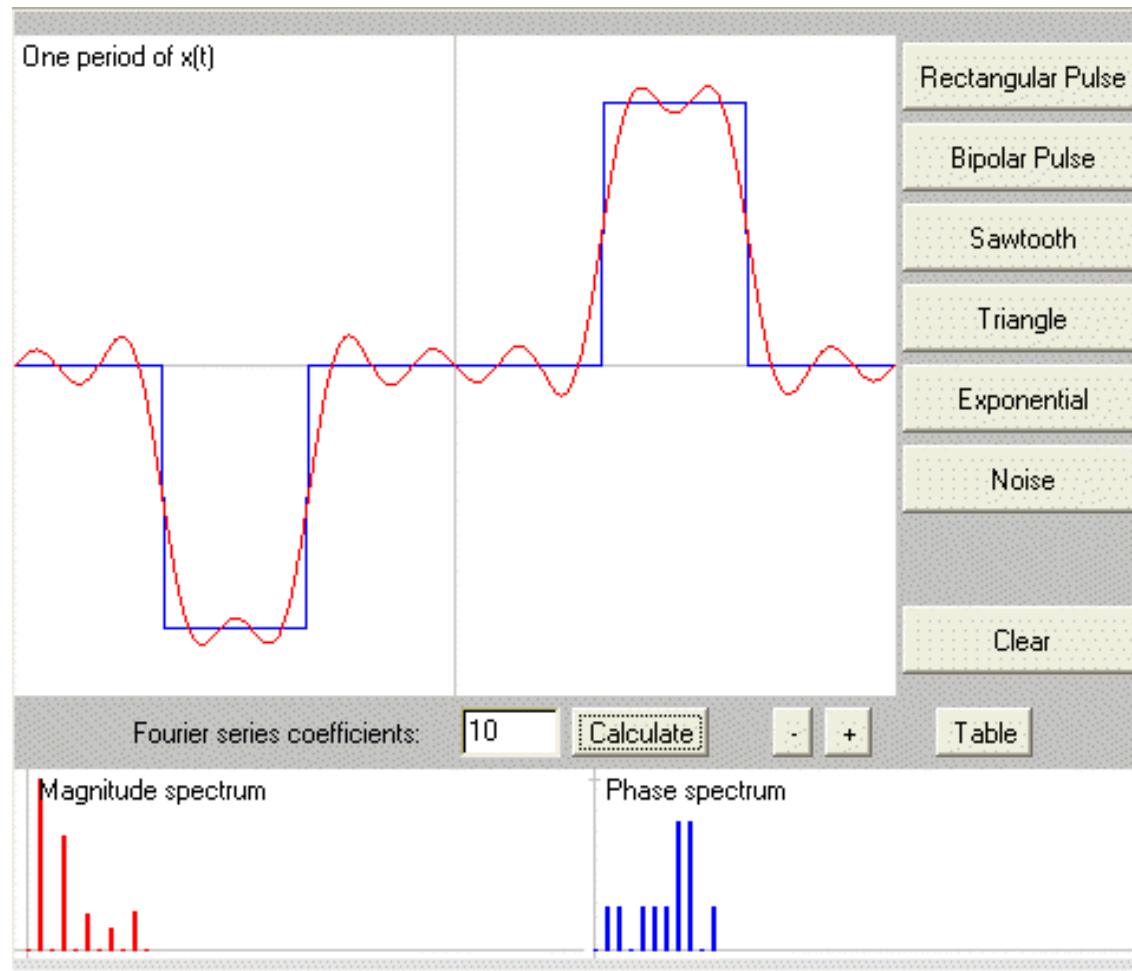
Si la señal es cuadrada de periodo de 10 ms y amplitud 5V:

$$a_0 = 2.5V \quad a_1 = 3.18V(100Hz) \quad a_2 = 0V(200Hz) \quad a_3 = -1.06V(300Hz)$$

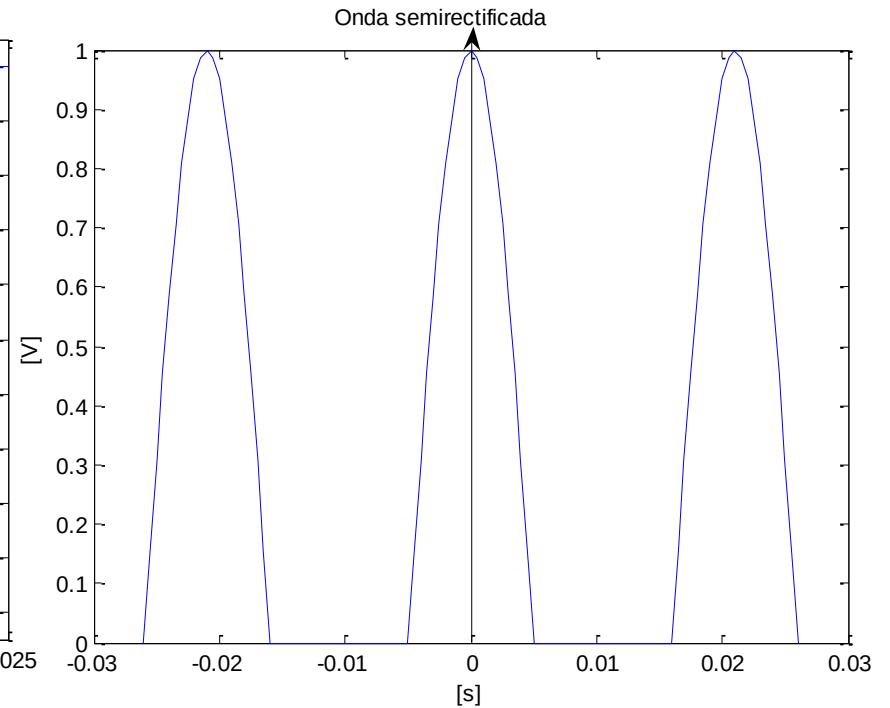
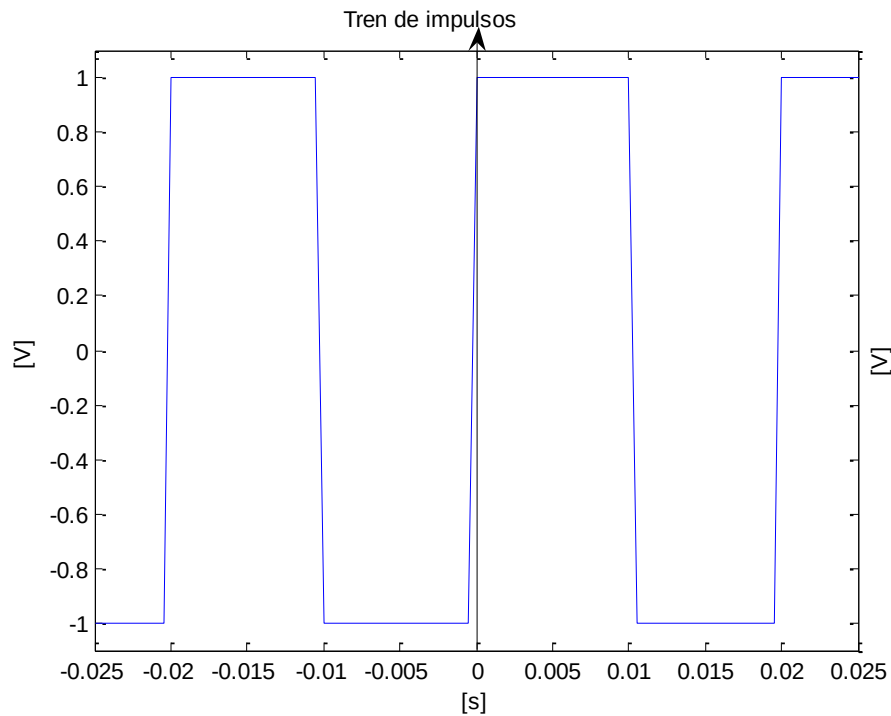
$$a_4 = 0V(400Hz) \quad a_5 = 0.635V(500Hz) \quad a_6 = 0V(600Hz) \quad a_7 = -0.45V(700Hz), \dots$$

Applet de Fourier

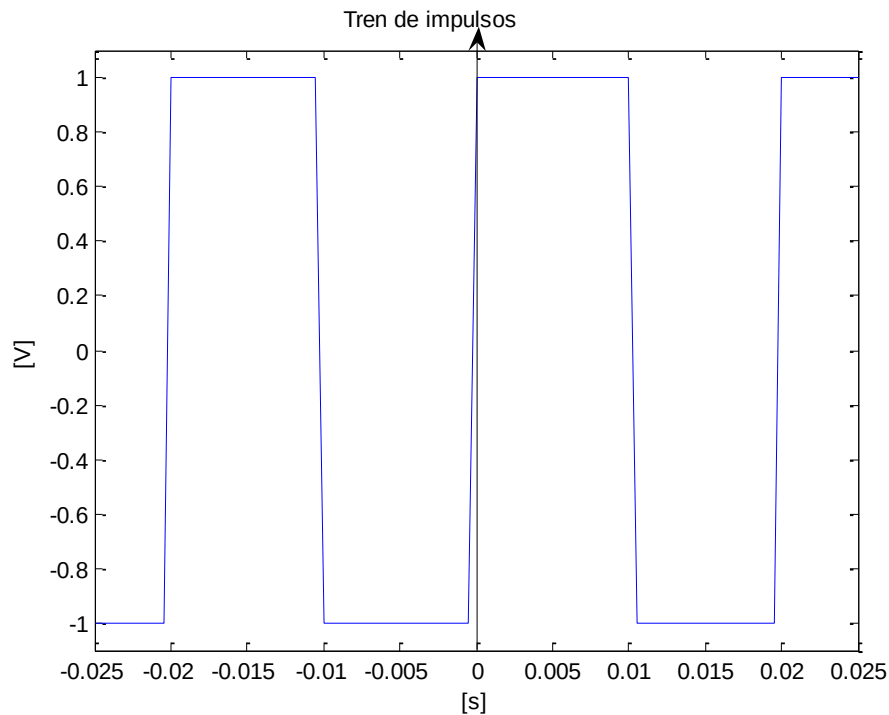
www.jhu.edu/~signals/fourier2/index.html



Problemas para casa



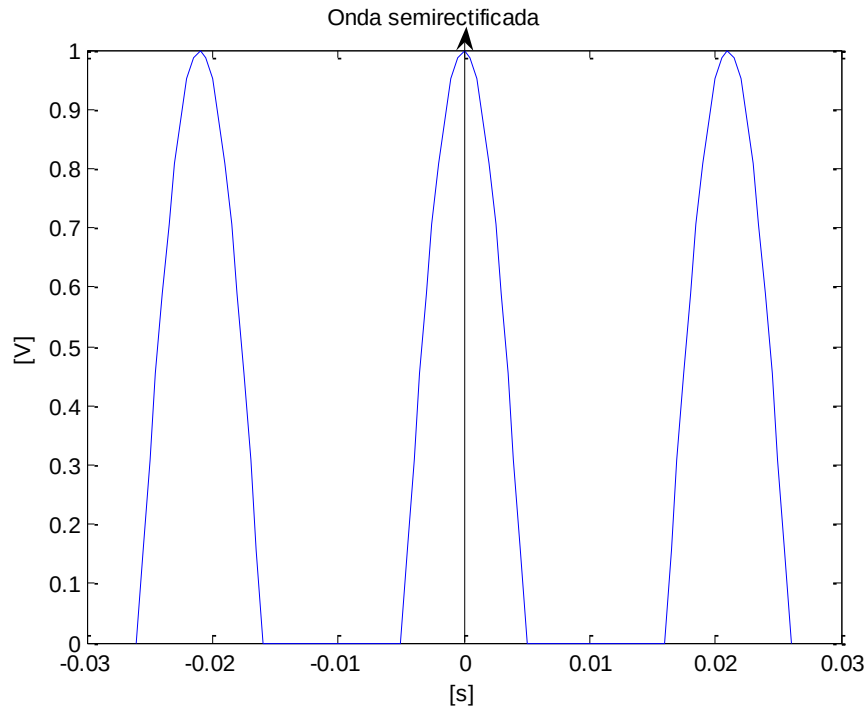
Resolución



$$u_e = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n \cdot 100\pi \cdot t)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi \cdot n} [1 - \cos(n\pi)]$$

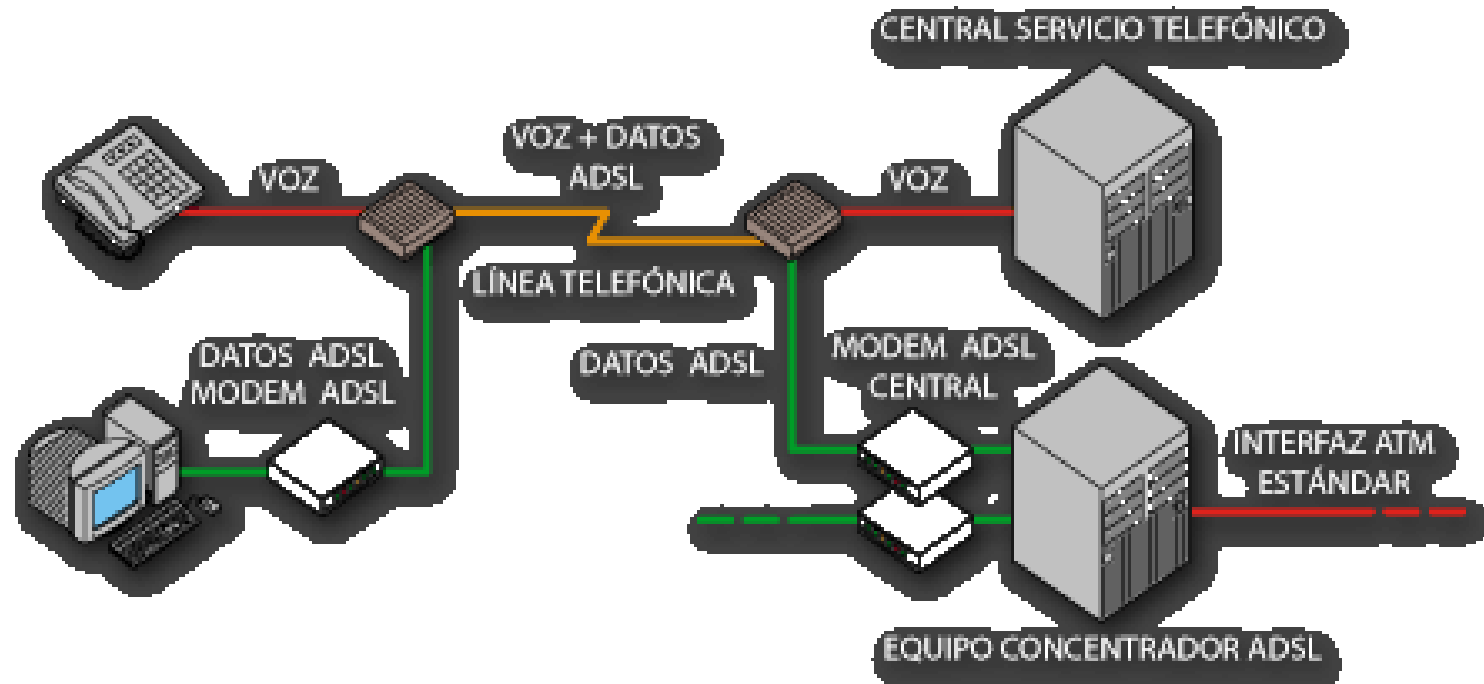
Resolución



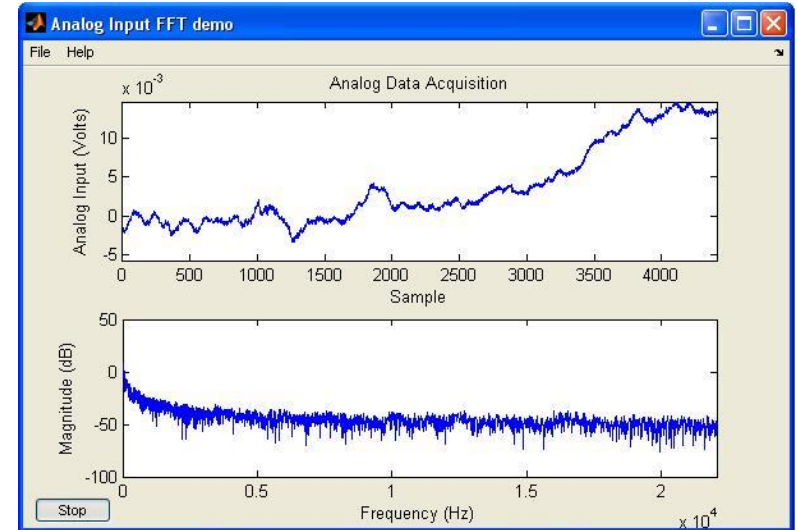
$$u_e = \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \cdot 100\pi \cdot t)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(n+1)\right)}{n+1} + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right)}{n-1} \right]$$

Transmisión de señales



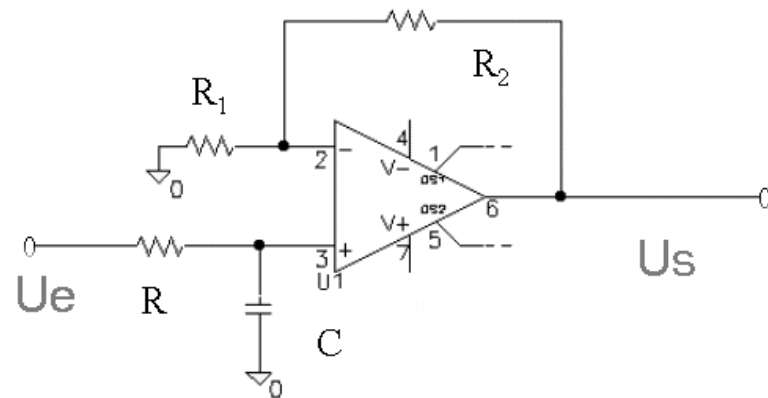
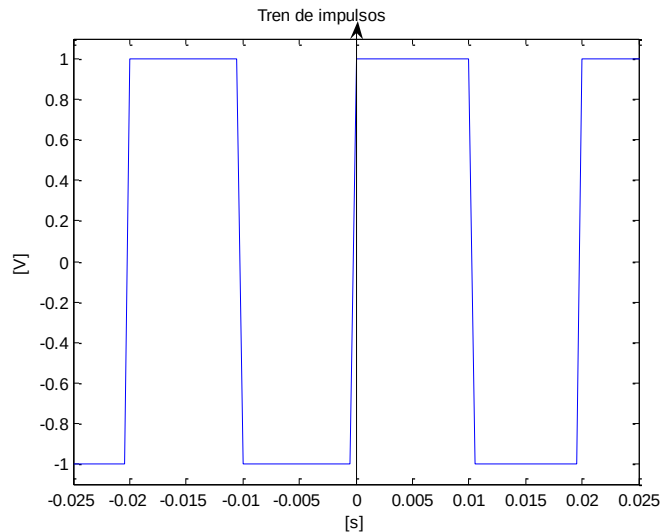
Ejercicio del laboratorio



Ejercicio de examen

En el circuito de la figura se considera que el amplificador operacional es ideal. Éste es atacado por el tren de impulsos indicado. Se pide:

1. Serie de Fourier de la señal de entrada.
2. Respuesta en frecuencia de la ganancia de tensión del circuito.
3. Diagrama de Bode y curva polar del apartado anterior.
4. Expresión analítica del armónico fundamental de la señal de salida.



De las series a las transformadas de Fourier

- ▶ Segunda y tercera forma de expresar las series de Fourier:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \psi_n) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$
$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \psi_n = \arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

- ▶ Relaciones de Euler

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n \cdot \omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t} \quad F(n \cdot \omega_0) = \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt$$

De las series a las transformadas de Fourier

- ▶ Tercera forma de expresar las series de Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n \cdot \omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t} \quad F(n \cdot \omega_0) = \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt$$

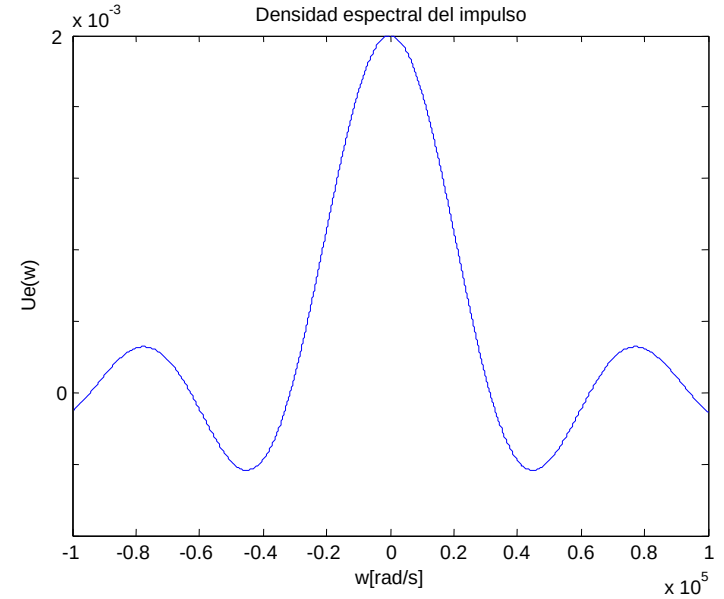
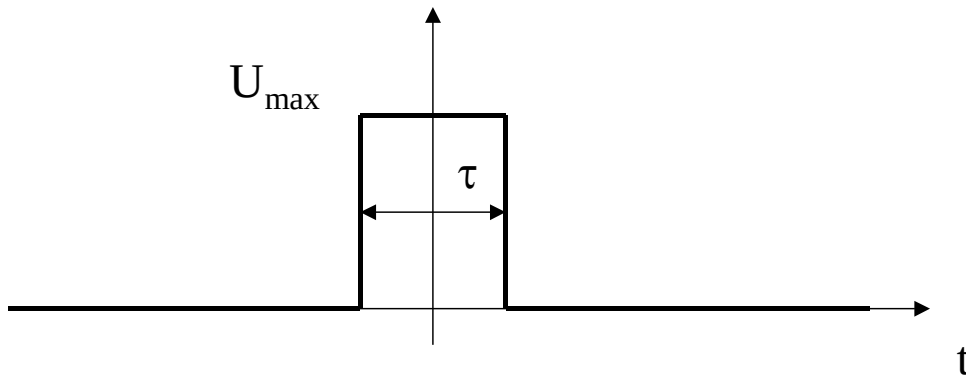
- ▶ Para la aplicación de la serie de Fourier sobre señales aperiódicas, se procede al artificio matemático de hacer que el periodo de la señal sea infinito, convirtiendo todas las señales en periódicas:

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T\omega_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n \cdot \omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t} \cdot \omega_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot dt < \infty$$

Ejemplo 2.2



$$U_e(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} U_{\max} \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = 2U_{\max} \frac{\text{sen}(\omega\tau/2)}{\omega} = U_{\max} \cdot \tau \cdot \text{senc}(\omega\tau/2)$$



Transformadas de Laplace



- ▶ Las funciones de control no tienen transformadas de Fourier (teorización)
- ▶ Convergencia y causalidad

$$F(\sigma, \omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt \xRightarrow{s=\sigma+j\omega} F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

▶ Ejemplos

- ▶ Función escalón unitario:

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

- ▶ Función exponencial decreciente:

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} \cdot dt = \left[\frac{e^{-(\alpha+s)t}}{-(\alpha+s)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{(s+\alpha)}$$

- ▶ Señal senoidal:

$$L(u(t)) = U(s) = U_{\max} \int_0^{\infty} \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} e^{-st} \cdot dt = \frac{U_{\max}}{2j} \left[\frac{e^{-(s-j\omega_0)t}}{-(s-j\omega_0)} - \frac{e^{-(s+j\omega_0)t}}{-(s+j\omega_0)} \right]_0^{\infty} = U_{\max} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

Teoremas importantes de la transformada de Laplace

- ▶ **Teorema 1**: Multiplicación por una constante:

$$L(k \cdot f(t)) = k \cdot F(s)$$

- ▶ **Teorema 2**: Suma y resta de dos funciones:

$$L(a \cdot f_1(t) \pm b \cdot f_2(t)) = a \cdot F_1(s) \pm b \cdot F_2(s)$$

- ▶ **Teorema 3**: Diferenciación:

$$L\left(\frac{d(f(t))}{dt}\right) = s \cdot F(s) - \lim_{t \rightarrow 0} (f(t)) = s \cdot F(s) - f(0)$$

$$L\left(\frac{d^n(f(t))}{dt^n}\right) = s^n \cdot F(s) - \lim_{t \rightarrow 0} \left(s^{n-1} f(t) + s^{n-2} \frac{d(f(t))}{dt} + s^{n-3} \frac{d^2(f(t))}{dt^2} + \dots + \frac{d^{n-1}(f(t))}{dt^{n-1}} \right)$$
$$L\left(\frac{d^n(f(t))}{dt^n}\right) = s^n \cdot F(s) - (s^{n-1} f(0) + s^{n-2} f^1(0) + s^{n-3} f^2(0) + \dots + f^{n-1}(0))$$

Teoremas importantes de la transformada de Laplace

► **Teorema 4:** Integración:

$$L\left(\int_0^t f(\tau) \cdot d\tau\right) = \frac{F(s)}{s}$$

$$L\left(\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \dots \int_0^{t_n} f(\tau) \cdot d\tau \cdot dt_1 \dots \cdot dt_{n-1}\right) = \frac{F(s)}{s^n}$$

► **Teorema 5:** Teorema del valor inicial (sólo aplicable si $f(t)$ está acotada):

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$$

► **Teorema 6:** Teorema del valor final (sólo aplicable si $f(t)$ está acotada):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$

Teoremas importantes de la transformada de Laplace

- ▶ **Teorema 7:** Traslación compleja:

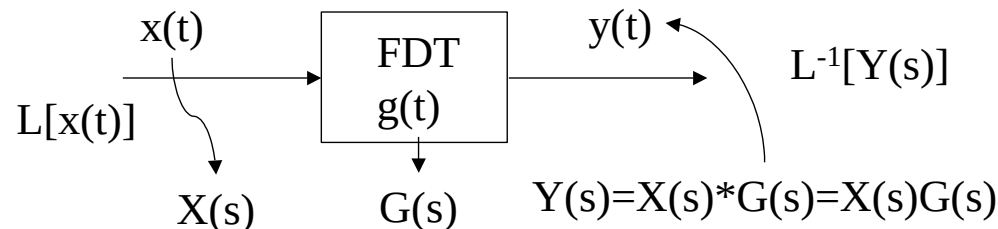
$$L(e^{\pm\alpha t} f(t)) = F(s \mp \alpha)$$

- ▶ **Teorema 8:** Traslación temporal:

$$L(f(t-T) \cdot u(t-T)) = e^{-sT} F(s)$$

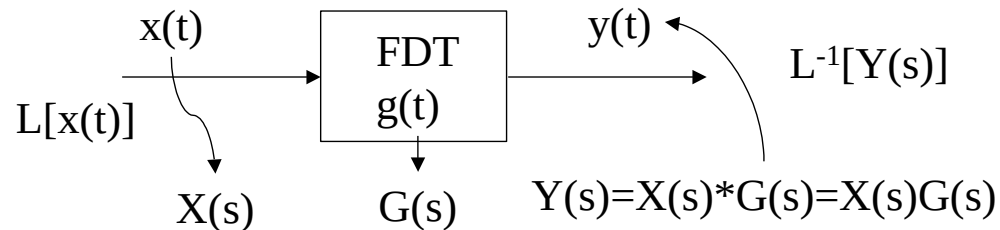
- ▶ **Teorema 9:** Convolución:

$$L(f_1(t) * f_2(t)) = F_1(s) * F_2(s) = F_1(s) \cdot F_2(s)$$



Transformada inversa de Laplace mediante la expansión de fracciones simples

► Señal y sistema LTI de forma polinómica



► Raíces simples

$$X(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$$

$$G(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$

$$Y(s) = X(s)G(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$

$$\left. \begin{aligned} Y(s) &= \frac{k_1}{(s + s_1)} + \frac{k_2}{(s + s_2)} + \dots + \frac{k_n}{(s + s_n)} \\ k_i &= [(s + s_i)Y(s)]_{s=-s_i} \end{aligned} \right\}$$

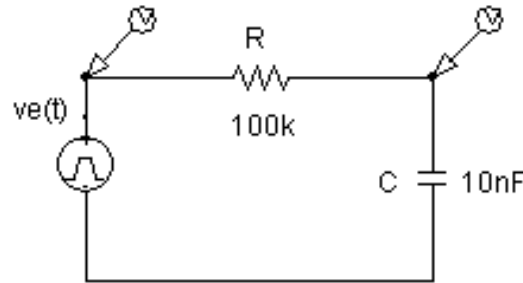
$$y(t) = \sum_{i=0}^n k_i e^{-s_i t}$$

Ejemplo 2.3

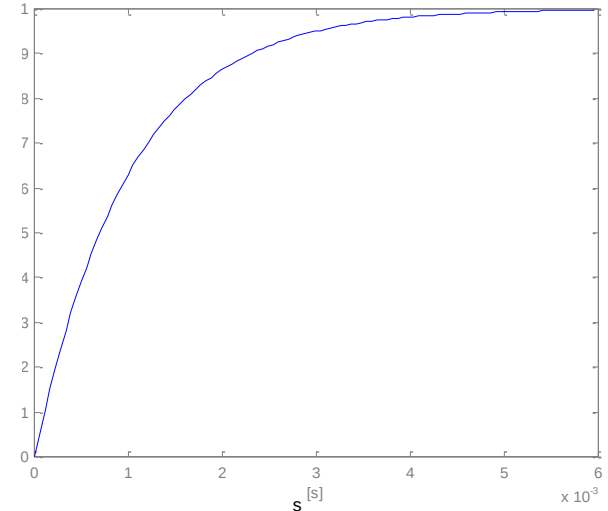
► Respuesta del cuadripolo RC ante una entrada en escalón unitario

$$u_e(t) = RC \frac{du_s(t)}{dt} + u_s(t)$$

$$A_V(s) = \frac{1}{1 + RCs}$$



Respuesta del cuadripolo RC ante una entrada en escalón
From: U(1)



$$U_s(s) = U_e(s)A_V(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + RCs} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)}$$
$$\left. \begin{aligned} k_1 &= [s \cdot U_s(s)]_{s=0} = 1 \\ k_2 &= \left[\left(s + \frac{1}{RC}\right) \cdot U_s(s) \right]_{s=-1/RC} = -1 \end{aligned} \right\}$$

$$u_s(t) = 1 - e^{-t/RC}$$

Transformada inversa de Laplace mediante la expansión de fracciones simples

► Raíces múltiples

$$Y(s) = \frac{Q(s)}{(s + s_1) \dots (s + s_{n-r}) (s + s_i)^r} = \frac{k_1}{(s + s_1)} + \dots + \frac{k_{n-r}}{(s + s_{n-r})} + \frac{A_1}{(s + s_i)} + \frac{A_2}{(s + s_i)^2} + \dots + \frac{A_r}{(s + s_i)^r}$$

$$\begin{aligned} A_r &= \left[(s + s_i)^r Y(s) \right]_{s=-s_i} \\ A_{r-1} &= \left[\frac{d}{ds} (s + s_i)^r Y(s) \right]_{s=-s_i} \\ A_{r-2} &= \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{ds^2} (s + s_i)^r Y(s) \right]_{s=-s_i} \\ &\vdots \\ A_1 &= \frac{1}{(r-1)!} \left[\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} (s + s_i)^r Y(s) \right]_{s=-s_i} \end{aligned}$$

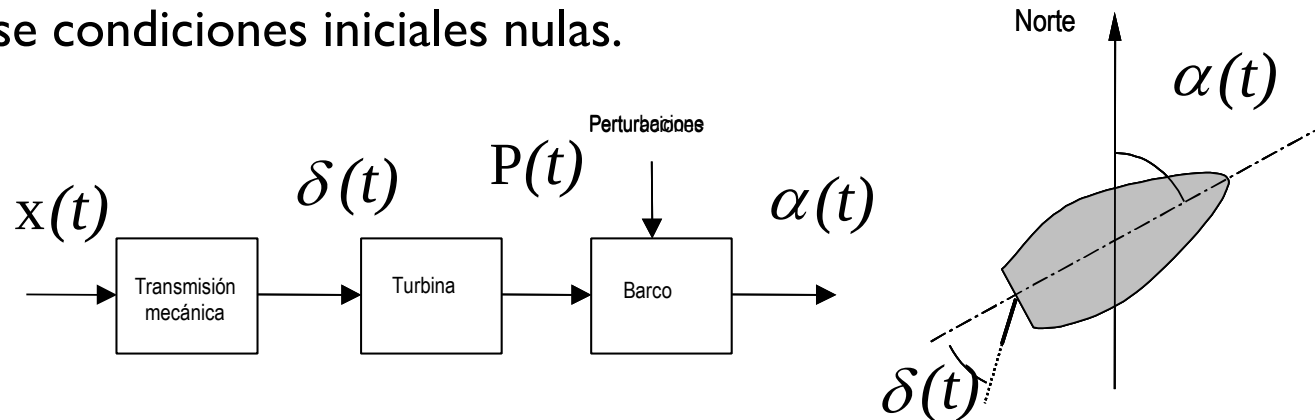
Ejemplo 2.4

- Determinar el comportamiento dinámico de un barco ante una entrada unitaria en el cambio del timón de éste. Con este propósito se ha extraído un diagrama a bloques y un modelo de comportamiento para un conjunto de velocidades válidas. Así, se observa que el ángulo $\delta(t)$ dado en radianes del timón, provoca un par de giro sobre el barco de $P(t) = 500 \frac{Nm}{rad} \cdot \delta(t)$, el cual provoca un giro sobre el barco según la siguiente ecuación diferencial,

$$\dot{\alpha}(t) + 10\ddot{\alpha}(t) = 0.002 P(t)$$

Por otro lado, el sistema de transmisión mecánica del timón de control, $x(t)$, al timón del barco, responde a: $\delta(t) + \dot{\delta}(t) = x(t)$

Considérese condiciones iniciales nulas.



Ejemplo 2.4

$$G_1(s) = \frac{\delta(s)}{X(s)} = \frac{1}{(s+1)}$$

$$G_2(s) = \frac{P(s)}{\delta(s)} = 500$$

$$G_3(s) = \frac{\alpha(s)}{P(s)} = \frac{0.002}{s(10 \cdot s + 1)}$$

$$\alpha(s) = X(s) \cdot G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s)$$

$$\alpha(s) = \frac{1}{s} \frac{0.1}{s(s+1)(s+0.1)} = \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_1}{s} + \frac{k_1}{(s+1)} + \frac{k_2}{(s+0.1)}$$

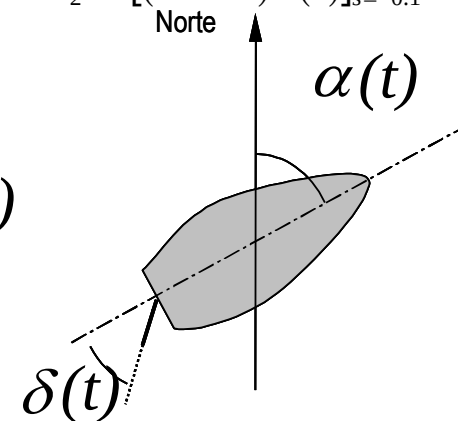
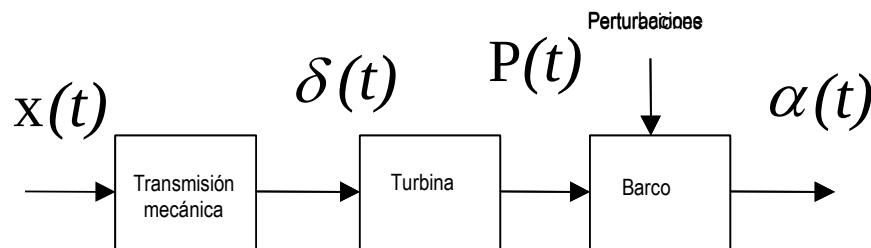
$$\alpha(t) = t - 11 - \frac{1}{9}e^{-t} + \frac{100}{9}e^{-0.1t}$$

$$a_2 = [s^2 \alpha(s)]_{s=0} = 1$$

$$a_1 = \left[\frac{d}{ds} (s^2 \alpha(s)) \right]_{s=0} = -11$$

$$k_1 = [(s+1)\alpha(s)]_{s=-1} = -\frac{1}{9}$$

$$k_2 = [(s+0.1)\alpha(s)]_{s=-0.1} = \frac{100}{9}$$

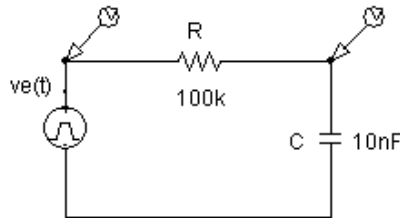


Uso de Matlab en las transformadas de Laplace

► FDT y estímulo al escalón unitario

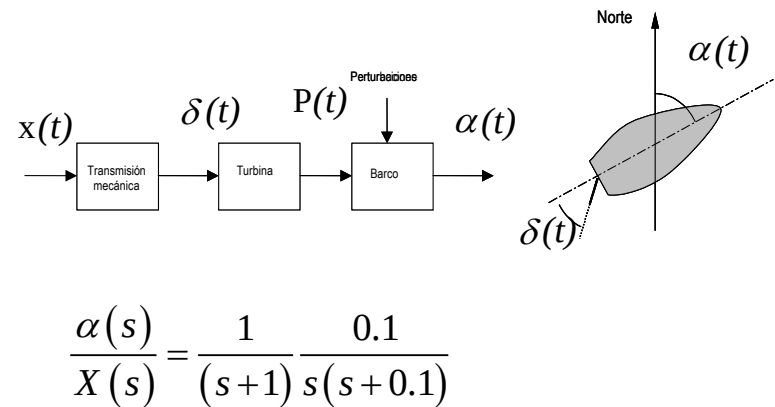
$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots b_ms^m}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots a_ns^n}$$

```
>> g = tf([b_m b_{m-1} ... b_2 b_1 b_0],[a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0])
```



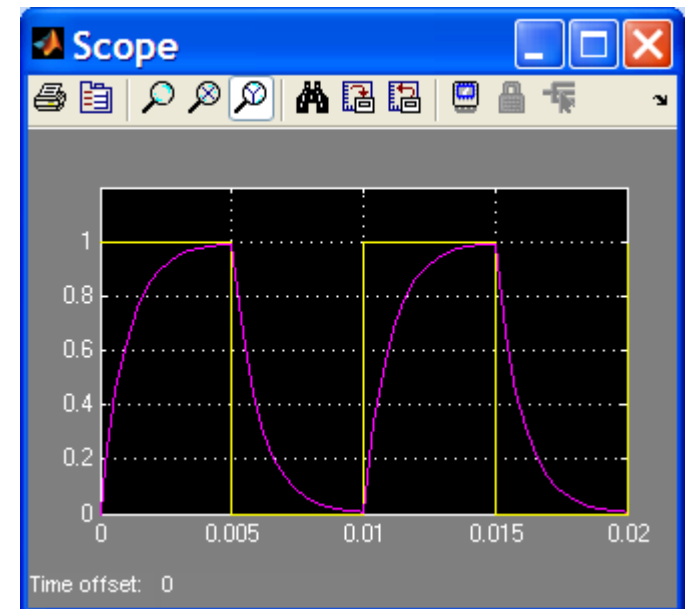
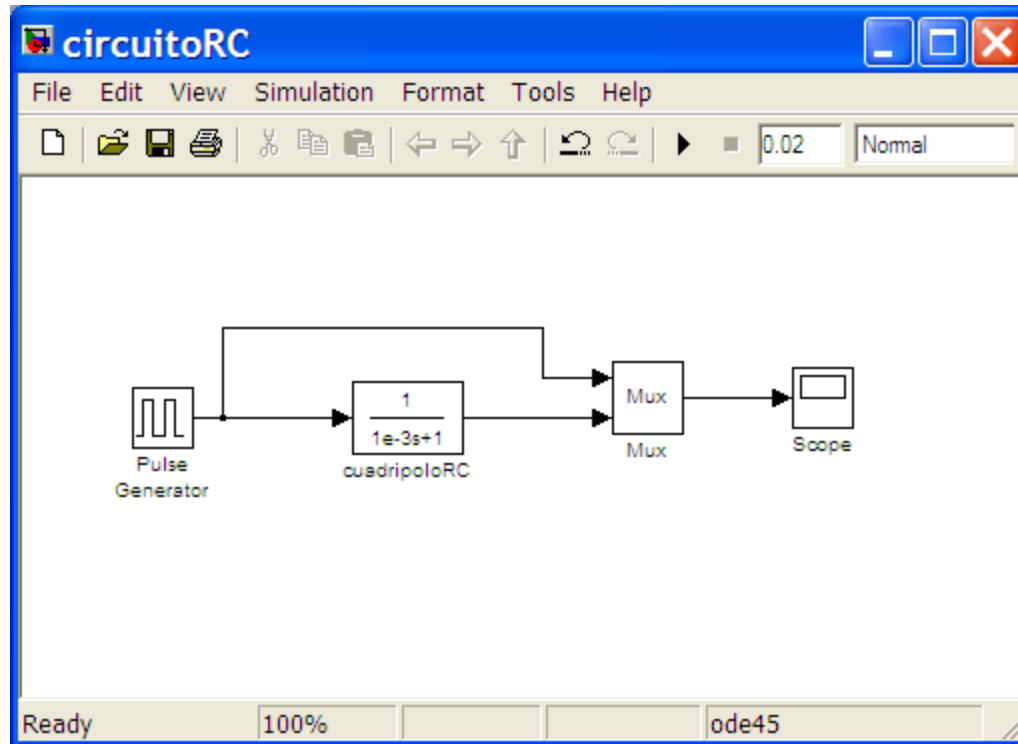
$$A_v(s) = \frac{1}{1 + RCs}$$

```
>>%Circuito RC  
>> g1 = tf(1,[1e-3 1])  
>>step(g1)
```



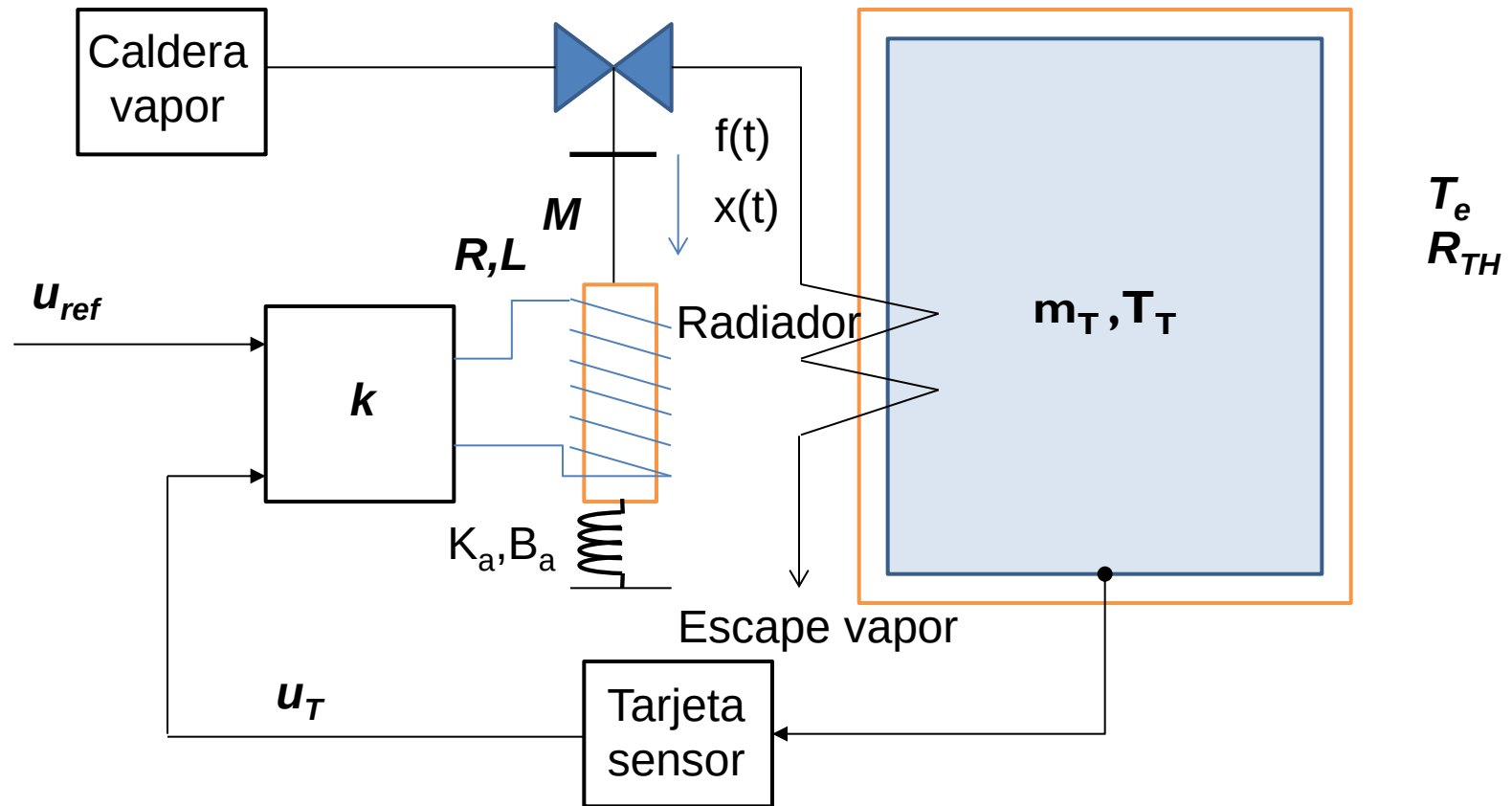
```
>>%Control del barco  
>> g2 = tf(0.1,poly([0 -0.1 -1]))  
>>step(g2)
```

Simulink (programación gráfica)

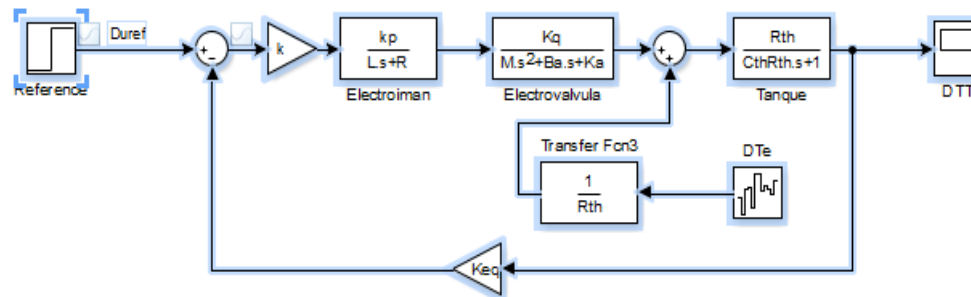
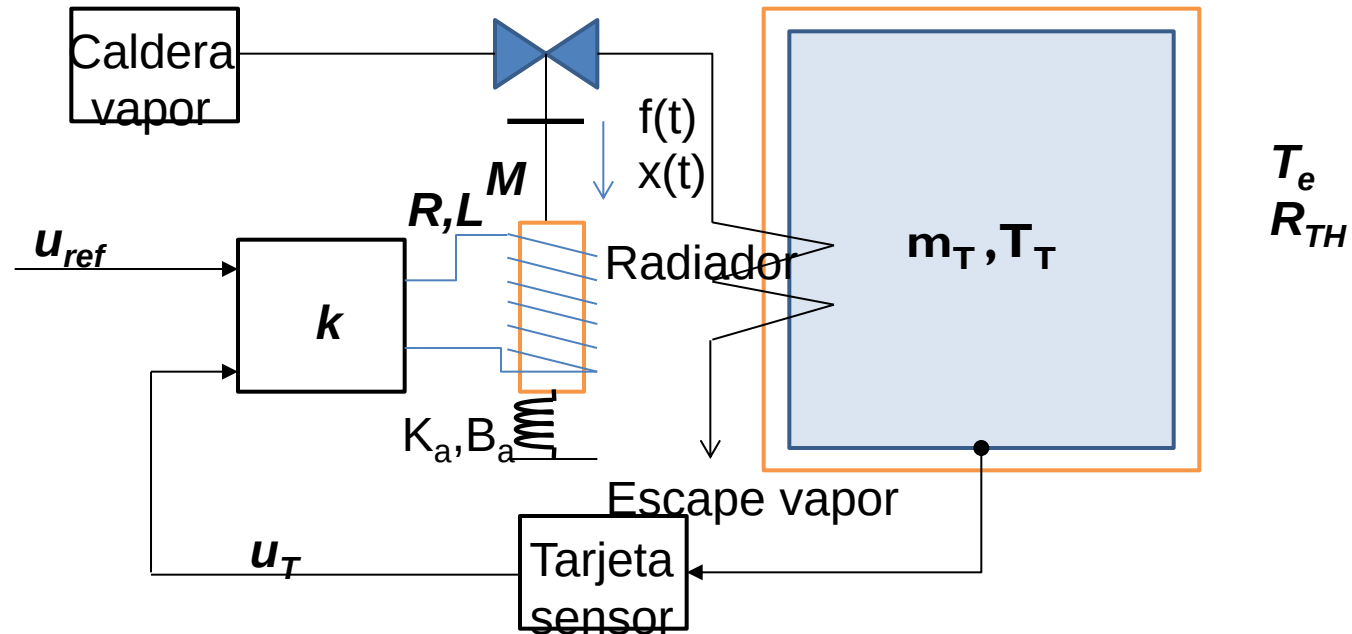


Parcial noviembre 2016

- ¿Cómo funciona? ¿Cuál es el diagrama de bloques?



Parcial noviembre 2016



Problema 2.3

El sistema de control de una locomotora eléctrica está basado en una estructura de realimentación negativa. La velocidad de mando es convertida en una señal eléctrica con ganancia unitaria, la cual es comparada con la tensión de salida de un sensor de velocidad de traslación del tren, con ganancia k_T . La señal de error ataca a un amplificador de tensión con ganancia k . Esta etapa se conecta con el motor eléctrico de la locomotora, generando la fuerza de empuje del tren. Se pide:

1. Para determinar la función de transferencia del motor, se le aplica una función en escalón de 100V a la entrada del motor. La fuerza de empuje se registra y describe la siguiente evolución temporal:

$$f(t) = 5000 \cdot \left(1 - 1.5 \cdot e^{-\frac{t}{30}} + 0.5 \cdot e^{-\frac{t}{10}} \right)$$

Obtener la FDT del motor.

2. Diagrama a bloques del sistema de control de la locomotora.



Datos: Masa del tren = 138 toneladas, $k = 20$, Constante del sensor de velocidad, $k_T = 1$ [V/m/s]

Problema 2.3

- ▶ Por la expresión temporal, la transformada de Laplace de la fuerza del motor aplicando el teorema de traslación compleja y descomposición en fracciones simples será del tipo:

$$F(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{\left(s + \frac{1}{30}\right)} + \frac{k_3}{\left(s + \frac{1}{10}\right)} \qquad \frac{F(s)}{u_m(s)} = \frac{k_m}{\left(s + \frac{1}{30}\right)\left(s + \frac{1}{10}\right)}$$

- ▶ Para determinar k_m se aplicará el teorema del valor final:

$$\lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot F(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{100}{s} \frac{k_m}{\left(s + \frac{1}{30}\right)\left(s + \frac{1}{10}\right)} = 5000 \Rightarrow k_m = \frac{1}{6}$$

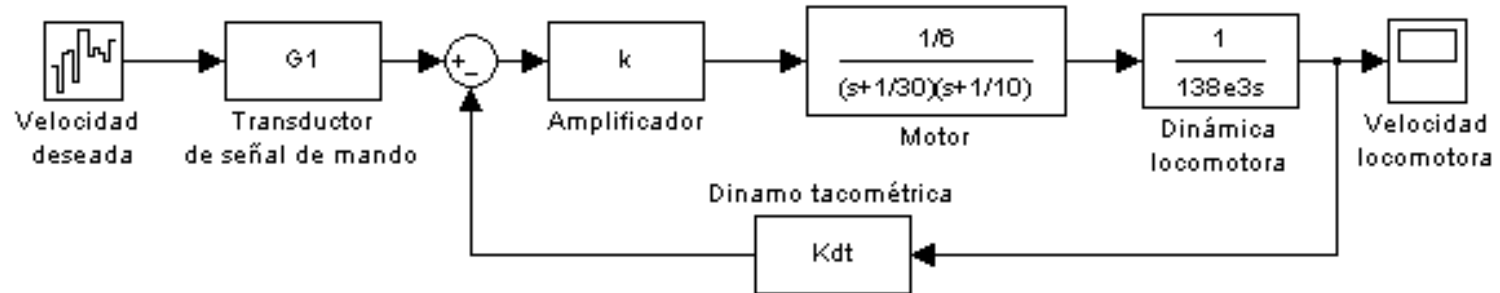
$$f(t) = 5000 \cdot \left(1 - 1.5 \cdot e^{-\frac{t}{30}} + 0.5 \cdot e^{-\frac{t}{10}} \right)$$



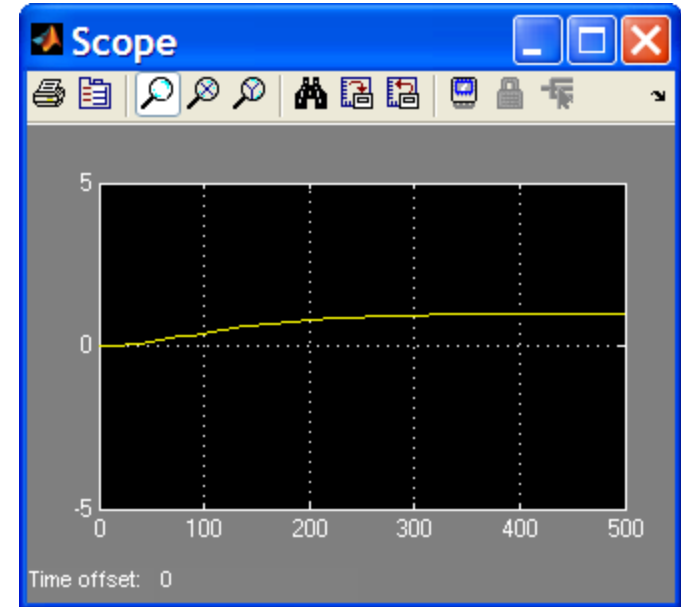
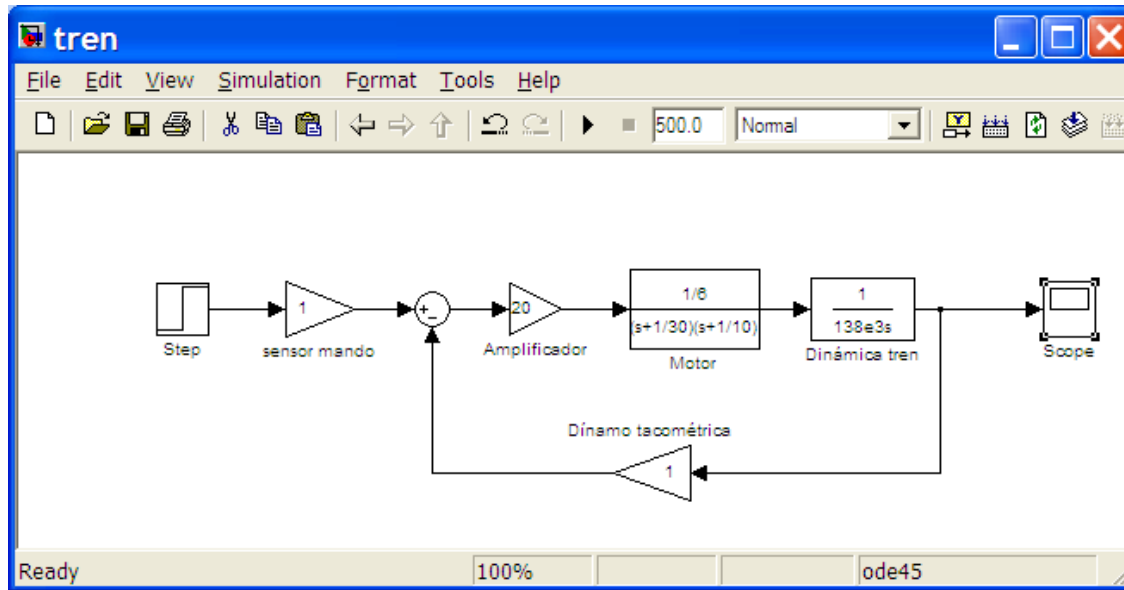
Problema 2.3

La relación entre la fuerza aplicada a la locomotora y su velocidad será:

$$f = m_T \cdot \dot{v}_T \Rightarrow \frac{v_T(s)}{F(s)} = \frac{1}{m_T \cdot s}$$



Problema 2.3



Problema 2.3 (casa)

Se desea el control automático de altura de un globo aerostático. Para ello se dispone de un quemador de gas controlado eléctricamente, de forma que ante una señal de referencia de 1 [V], dicho quemador aporta 1 Kcal/seg al aire contenido en el globo. Tras linealizar las ecuaciones, se obtienen las siguientes ecuaciones que modelan su comportamiento:

$$\frac{d\Delta T(t)}{dt} = 0,3\Delta Q(t) - 0,1\Delta T(t)$$
$$\frac{d\Delta Z(t)}{dt} = \int_0^t \Delta T(t) - 2\Delta Z(t)$$



Para poder cerrar el lazo de control se dispone de un altímetro electrónico cuyo cero se ha fijado a la altura de linealización de las ecuaciones. Dicho altímetro da una señal de 10 mV/m . La referencia al sistema de control inicialmente se da por medio de un potenciómetro lineal calibrado de forma que a un incremento de 1 metro en la referencia provoca un incremento en la tensión de referencia de 10 mV.

- Determinar el diagrama de bloques y la dinámica del globo ante una entrada en escalón unitario.

Problema del globo

