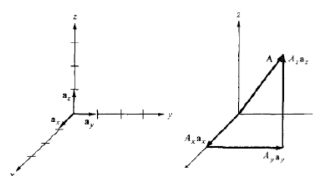
Tema 0

1. Sistemas de coordenadas ortogonales: cartesianas, cilíndricas, esféricas
2. Algebra vectorial: suma, resta y multiplicación de vectores. (no está)
3. Cálculo vectorial: diferenciación e integración de vectores.

- **Operaciones:**
  - **Gradiente (escalar-vector)**
  - **Divergencia (vector-escalar)**
  - **Rotacional (vector-vector)**

Sistemas de Referencia

Cartesiano



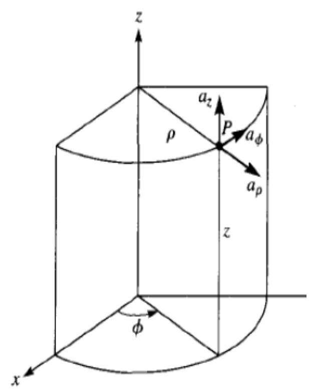
$-\infty < x < \infty$

$-\infty < y < \infty$

$-\infty < z < \infty$

(A_x, A_y, A_z) or $A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z$

Cilíndrico

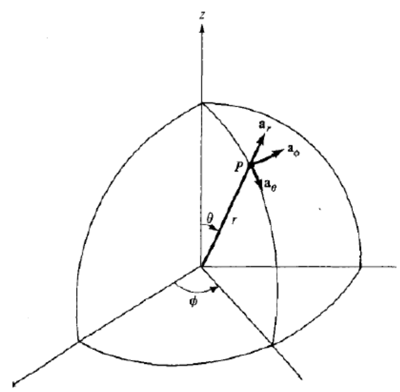


$0 \leq \rho < \infty$

$0 \leq \phi < 2\pi$

$-\infty < z < \infty$

Esférico



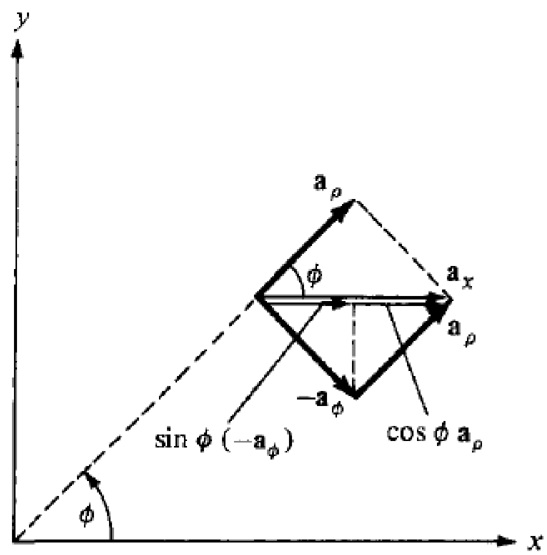
$0 \leq r < \infty$

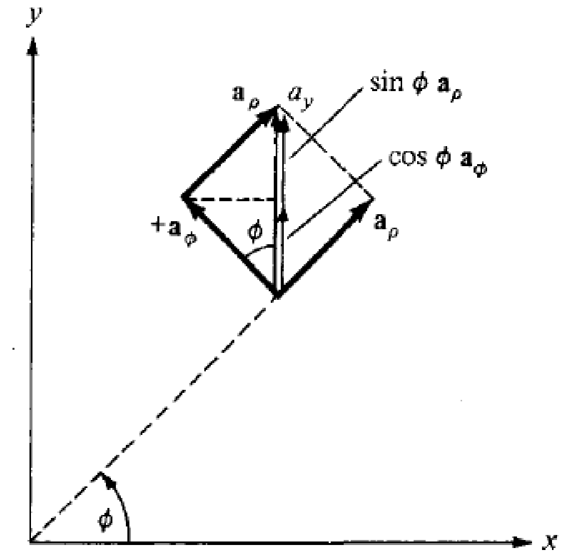
$0 \leq \theta \leq \pi$

$0 \leq \phi < 2\pi$

(A_r, A_θ, A_ϕ) or $A_r\mathbf{a}_r + A_\theta\mathbf{a}_\theta + A_\phi\mathbf{a}_\phi$

Cambio de vectores unitarios y coordenadas de cilíndricas a cartesianas y viceversa



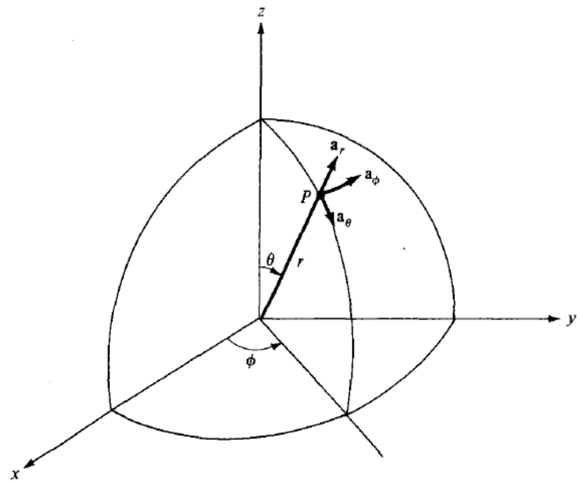


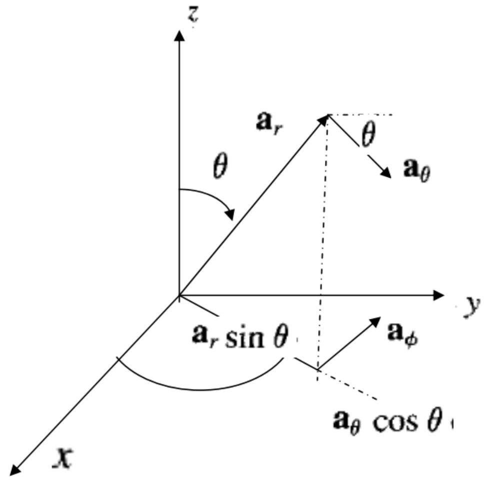
$$\mathbf{a}_x = \cos\phi\,\mathbf{a}_\rho - \sin\phi\,\mathbf{a}_\phi$$
$$\mathbf{a}_y = \sin\phi\,\mathbf{a}_\rho + \cos\phi\,\mathbf{a}_\phi$$
$$\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_\rho = \cos\phi\,\mathbf{a}_x + \sin\phi\,\mathbf{a}_y$$
$$\mathbf{a}_\phi = -\sin\phi\,\mathbf{a}_x + \cos\phi\,\mathbf{a}_y$$
$$\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z$$

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

Relación entre vectores unitarios de los sistemas cartesiano y esférico





$$\mathbf{a}_x = \sin\theta\cos\phi\,\mathbf{a}_r + \cos\theta\cos\phi\,\mathbf{a}_\theta - \sin\phi\,\mathbf{a}_\phi$$
$$\mathbf{a}_y = \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{a}_r + \cos\theta\sin\phi\,\mathbf{a}_\theta + \cos\phi\,\mathbf{a}_\phi$$
$$\mathbf{a}_z = \cos\theta\,\mathbf{a}_r - \sin\theta\,\mathbf{a}_\theta$$

$$\mathbf{a}_r = \sin\theta\cos\phi\,\mathbf{a}_x + \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{a}_y + \cos\theta\,\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{a}_\theta = \cos\theta\cos\phi\,\mathbf{a}_x + \cos\theta\sin\phi\,\mathbf{a}_y - \sin\theta\,\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{a}_\phi = -\sin\phi\,\mathbf{a}_x + \cos\phi\,\mathbf{a}_y$$

Cambio de coordenadas de esféricas a cartesianas y viceversa

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ -\cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ -\cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

Cambio de coordenadas de esféricas a cilíndricas

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

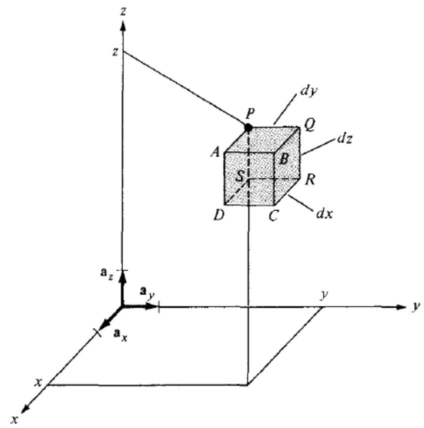
$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}$$

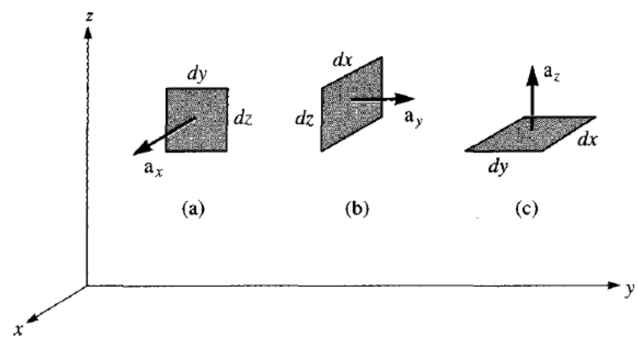
Resumen

CARTESIANAS	CILINDRICAS	ESFERICAS
x	$= \rho \cos \phi$	$= r \operatorname{sen} \theta \cos \phi$
y	$= \rho \operatorname{sen} \phi$	$= r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$
z	$= z$	$= r \cos \theta$
$\hat{\mathbf{x}}$	$= \cos \phi \hat{\boldsymbol{\rho}} - \operatorname{sen} \phi \hat{\boldsymbol{\varphi}}$	$= \operatorname{sen} \theta \cos \phi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} - \operatorname{sen} \phi \hat{\boldsymbol{\varphi}}$
$\hat{\mathbf{y}}$	$= \operatorname{sen} \phi \hat{\boldsymbol{\rho}} + \cos \phi \hat{\boldsymbol{\varphi}}$	$= \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \operatorname{sen} \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos \phi \hat{\boldsymbol{\varphi}}$
$\hat{\mathbf{z}}$	$= \hat{\mathbf{z}}$	$= \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \operatorname{sen} \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$
CILINDRICAS	**CARTESIANAS**	**ESFERICAS**
ρ	$= \sqrt{x^2 + y^2}$	$= r\, sen\, \theta$
ϕ	$= \tan^{-1}(y / x)$	$= \phi$
z	$= z$	$= r \cos \theta$
$\hat{\boldsymbol{\rho}}$	$= \cos \phi\, \hat{\mathbf{x}} + sen\, \phi\, \hat{\mathbf{y}}$	$= sen\, \theta\, \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}}$
$\boldsymbol{\varphi}$	$= -sen\, \phi\, \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi\, \hat{\mathbf{y}}$	$= \hat{\phi}$
$\hat{\mathbf{z}}$	$= \hat{\mathbf{z}}$	$= \cos \theta\, \hat{\mathbf{r}} - sen\, \theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}}$
ESFERICAS	**CARTESIANAS**	**CILINDRICAS**
r	$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$= \sqrt{\rho^2 + z^2}$
θ	$= \cos^{-1}(z / r)$	$= \cos^{-1}(z / r)$
ϕ	$= \operatorname{cotan}^{-1}(x / y)$	$= \phi$
$\hat{\mathbf{r}}$	$= sen\, \theta \cos \phi\, \hat{\mathbf{x}} + sen\, \theta sen\, \phi\, \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta\, \hat{\mathbf{z}}$	$= sen\, \theta\, \hat{\boldsymbol{\rho}} + \cos \theta\, \hat{\mathbf{z}}$
$\hat{\boldsymbol{\theta}}$	$= \cos \theta \cos \phi\, \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta sen\, \phi\, \hat{\mathbf{y}} - sen\, \theta\, \hat{\mathbf{z}}$	$= \cos \theta\, \hat{\boldsymbol{\rho}} - sen\, \theta\, \hat{\mathbf{z}}$
$\hat{\boldsymbol{\varphi}}$	$= -sen\, \phi\, \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi\, \hat{\mathbf{y}}$	$= \hat{\boldsymbol{\varphi}}$

Diferenciales de longitud, área y volumen

Cartesianas





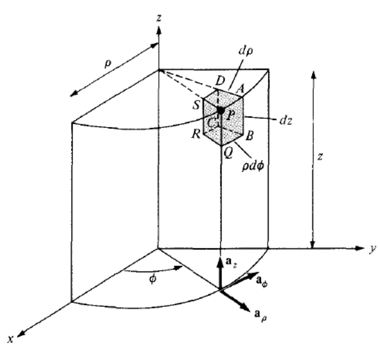
Longitud | **Superficie** ($\vec{dS} = dS\vec{a}_n$) | **Volumen**

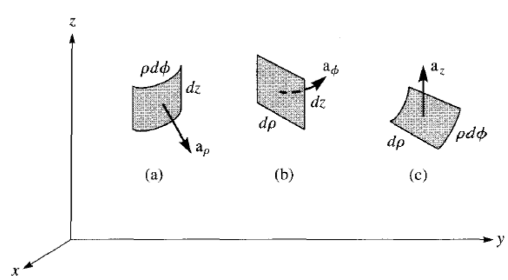
$$d\mathbf{l} = dx\,\mathbf{a}_x + dy\,\mathbf{a}_y + dz\,\mathbf{a}_z$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= dy\,dz\,\mathbf{a}_x \\ &\ dx\,dz\,\mathbf{a}_y \\ &\ dz\,dy\,\mathbf{a}_z \end{aligned}$$

$$dv = dx\,dy\,dz$$

Cilíndricas





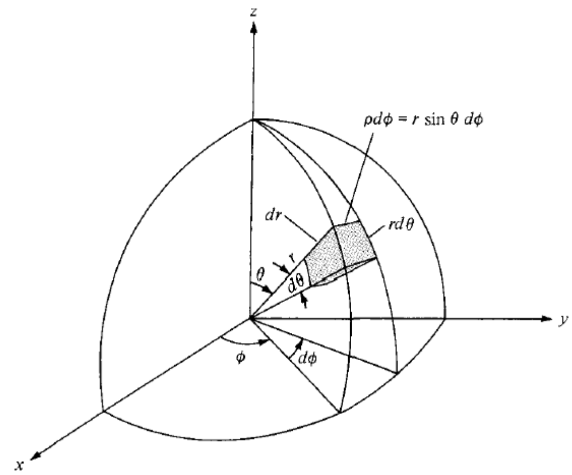
Longitud | **Superficie** ($\vec{dS} = dS\vec{a}_n$) | **Volumen**

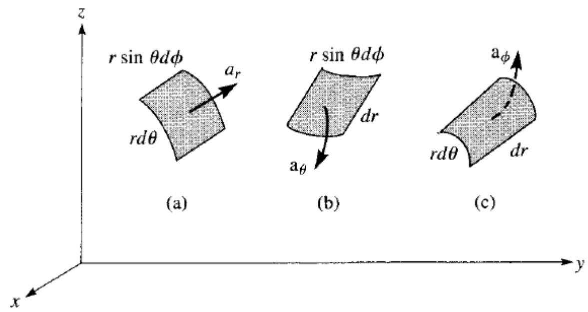
$$d\mathbf{l} = d\rho\,\mathbf{a}_\rho + \rho\,d\phi\,\mathbf{a}_\phi + dz\,\mathbf{a}_z$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= \rho\,d\phi\,dz\,\mathbf{a}_\rho \\ &\ d\rho\,dz\,\mathbf{a}_\phi \\ &\ \rho\,d\phi\,d\rho\,\mathbf{a}_z \end{aligned}$$

$$dv = \rho\,d\rho\,d\phi\,dz$$

Esféricas





Longitud **Superficie** ($\vec{dS} = dS\vec{a}_n$) **Volumen**

$$d\mathbf{l} = dr\,\mathbf{a}_r + r\,d\theta\,\mathbf{a}_\theta + r\sin\theta\,d\phi\,\mathbf{a}_\phi$$

$$d\mathbf{S} = \begin{array}{l} r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,\mathbf{a}_r \\ r\sin\theta\,dr\,d\phi\,\mathbf{a}_\theta \\ r\,dr\,d\theta\,\mathbf{a}_\phi \end{array}$$

$$dv = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

Resumen

CARTESIANAS	CILINDRICAS	ESFERICAS
$\mathbf{dl} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$	$\mathbf{dl} = d\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$	$\mathbf{dl} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$
$dS_x = dy\,dz$	$dS_\rho = \rho\,d\phi\,dz$	$dS_r = r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\,d\phi$
$dS_y = dx\,dz$	$dS_\phi = d\rho\,dz$	$dS_\theta = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\phi$
$dS_z = dx\,dy$	$dS_z = \rho\,d\rho\,d\phi$	$dS_\phi = r\,dr\,d\phi$
$dV = dx\,dy\,dz$	$dV = \rho\,d\rho\,d\phi\,dz$	$dV = r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

Factores de escala

Las líneas coordenadas de un sistema de coordenadas en el espacio tridimensional son aquellas que se obtienen partiendo de un punto dado, de coordenadas y se mantienen fijas las otras dos. Un sistema de coordenadas se dice *ortogonal* si las líneas coordenadas son ortogonales en cada punto. Las coordenadas cartesianas, las cilíndricas y las esféricas, son ejemplos de coordenadas ortogonales.

Dado un conjunto de coordenadas ortogonales, puede construirse una base vectorial ortonormal en cada punto, a partir de los vectores tangentes a cada línea coordenada. En la obtención de estos vectores se definen unas cantidades, denominadas *factores de escala*, que aparecen frecuentemente en las fórmulas del cálculo vectorial. Tomando los vectores tangentes a cada línea en un punto, obtenemos tres vectores ortogonales entre sí, pero no necesariamente unitarios:

Coordenadas esféricas y cilíndricas [editar]

Aplicando el cálculo de los factores de escala a las coordenadas cartesianas se obtiene:

$$h_1 = 1, \qquad h_2 = 1, \qquad h_3 = 1$$

En coordenadas cilíndricas:

$$h_1 = 1 \qquad h_2 = \rho \qquad h_3 = 1$$

y en coordenadas esféricas:

$$h_1 = 1, \qquad h_2 = r, \qquad h_3 = r\,\mathrm{sen}\theta$$

Debe recordarse que el espacio tridimensional, en el que existe una función para medir distancias y longitudes de curvas, Existen los factores de escala que relacionan como pueden calcularse, por ejemplo un "desplazamiento infinitesimal" en los tres sistemas de referencia mencionados.

En el sistema cilíndrico

Disponiendo de la base de coordenadas cilíndricas se obtiene que la expresión del vector de posición en estas coordenadas es:

$$\vec{r} = \rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}$$

Nótese que no aparece un término $\varphi\,\hat{\varphi}$. La dependencia en esta coordenada está *oculta* en los vectores de la base.

Efectivamente:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ &= \rho\cos\varphi\,\vec{i} + \rho\sin\varphi\,\vec{j} + z\vec{k} \\ &= \rho(\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}) + z\vec{k} \\ &= \rho\hat{\rho} + z\hat{z} \end{aligned}$$

Diferenciales de línea, superficie y volumen

Diferencial de línea

Un desplazamiento infinitesimal, expresado en coordenadas cilíndricas, viene dado por

$$d\vec{r} = h_\rho\, d\rho\, \hat{\rho} + h_\varphi\, d\varphi\, \hat{\varphi} + h_z\, dz\, \hat{z} = d\rho\, \hat{\rho} + \rho\, d\varphi\, \hat{\varphi} + dz\, \hat{z}$$

Diferenciales de superficie

La expresión general de un diferencial de superficie en coordenadas curvilíneas es complicada.

Sin embargo, para el caso de que se trate de una superficie coordenada, q_3=cte, el resultado es

$$d\vec{S}_{q_3=\mathrm{cte}} = h_1\, h_2\, dq_1\, dq_2\, \hat{q}_3$$

En el caso particular de las coordenadas cilíndricas, los diferenciales de superficie son

- ρ=cte: $d\vec{S}_{\rho=\mathrm{cte}} = \rho\, d\varphi\, dz\, \hat{\rho}$
- φ=cte: $d\vec{S}_{\varphi=\mathrm{cte}} = d\rho\, dz\, \hat{\varphi}$
- z=cte: $d\vec{S}_{z=\mathrm{cte}} = \rho\, d\rho\, d\varphi\, \hat{z}$

Diferencial de volumen

El volumen de un elemento en coordenadas cilíndricas

$$dV = h_1\, h_2\, h_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3 \qquad dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$$

En el sistema Esférico

En el cálculo de esta base se obtienen los factores de escala

$$h_r = 1 \qquad h_\theta = r \qquad h_\varphi = r\,\sin\theta$$

Disponiendo de la base de coordenadas esféricas se obtiene que la expresión del vector de posición en estas coordenadas es $\vec{r} = r\,\hat{r}$

Nótese que no aparecen término en $\vec{\varphi}$ y $\vec{\theta}$. La dependencia en estas coordenadas está *oculta* en el vector $\vec{r}$.

Diferenciales de línea, superficie y volumen

Diferencial de línea

Un desplazamiento infinitesimal, expresado en coordenadas esféricas, viene dado por

$$d\vec{r} = h_r\, dr\, \hat{r} + h_\theta\, d\theta\, \hat{\theta} + h_\varphi\, d\varphi\, \hat{\varphi} = dr\, \hat{r} + r\, d\theta\, \hat{\theta} + r \sin\theta\, d\varphi\, \hat{\varphi}$$

Diferenciales de superficie

La expresión general de un diferencial de superficie en coordenadas curvilíneas es complicada. Sin embargo, para el caso de que se trate de una superficie coordenada, q_3=cte, el resultado es

$$d\vec{S}_{q_3=\mathrm{cte}} = h_1\, h_2\, dq_1\, dq_2\, \hat{q}_3$$

En el caso particular de las coordenadas esféricas, los diferenciales de superficie son

- r=cte: $d\vec{S}_{r=\mathrm{cte}} = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \hat{r}$
- θ=cte: $d\vec{S}_{\theta=\mathrm{cte}} = r \sin\theta\, dr\, d\varphi\, \hat{\theta}$
- φ=cte: $d\vec{S}_{\varphi=\mathrm{cte}} = r\, dr\, d\theta\, \hat{\varphi}$

Diferencial de volumen

$$dV = h_1\, h_2\, h_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3$$

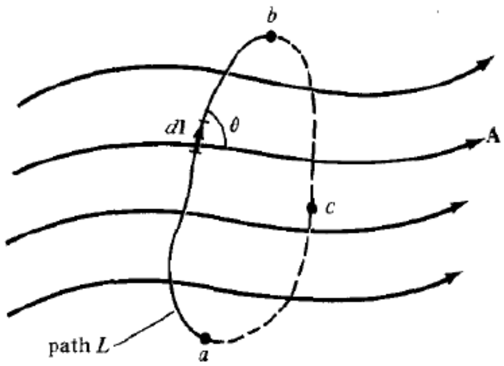
que para coordenadas esféricas en las que el ángulo vertical empieza en el eje z da

$$dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

y en las que el ángulo vertical empieza en el plano XY da

$$dV = r^2 \cos\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

Integral de Línea



$$\int_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \int_a^b |\mathbf{A}| \cos\theta \, dl$$

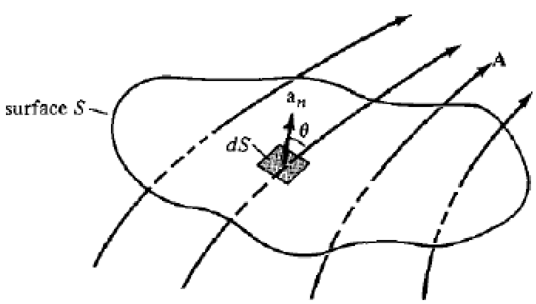
$$\int_{a\,(C)}^{b} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i\cdot\Delta\mathbf{l}_i$$

$$\oint_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} \qquad \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}$$

En general la integral va a depender del recorrido que haga para ir de a a b, si no depende del recorrido, el vector se dice que es conservativo y la integral a lo largo de un recorrido cerrado será 0.

Flujo

Si tenemos un vector que atraviesa una superficie, $\overrightarrow{da}$, se define flujo, Φ



$$\Phi = \int_S \vec{F}\,.\overrightarrow{da} = \int_S \left|\vec{F}\right|.da\cos\theta$$

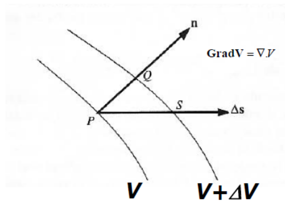
Gradiente

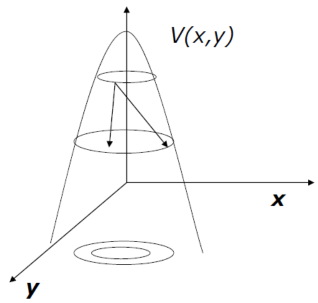
•Para analizar cómo cambia un campo escalar, si tenemos un función escalar en un punto P, ejemplo la temperatura T, puede variar su valor en otro punto, P_1, para estudiar sus variaciones en el espacio se utiliza las derivadas parciales en tres direcciones.

•La derivada depende de cuál es la dirección en que nos movemos,

•El gradiente de un campo escalar V es un vector que representa la magnitud y la dirección de la máxima rapidez de incremento espacial de la función

Sea la función V





- **dV es el diferencial total de V como resultado de un cambio de posición de P a S**

$$dV = \frac{\partial V}{\partial l_1}.dl_1 + \frac{\partial V}{\partial l_2}.dl_2 + \frac{\partial V}{\partial l_3}.dl_3 = \nabla \mathrm{V}.\mathbf{dl}$$

$$\partial V = \frac{\partial V}{\partial l_1}.dl_1 + \frac{\partial V}{\partial l_2}.dl_2 + \frac{\partial V}{\partial l_3}.dl_3 = \nabla \mathrm{V}_1.dl_1 h_1 + \nabla \mathrm{V}_2.dl_2 h_2 + \nabla \mathrm{V}_3.dl_3 h_3$$

$$\nabla \mathrm{V}_i.dl_i h_i = \frac{\partial V}{\partial l_i}.dl_i$$

$$\nabla \mathrm{V}_i. = \frac{1}{h_i}\frac{\partial V}{\partial l_i}$$

$$\nabla = \left(\mathbf{a}u_1 \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{dl_1} + \mathbf{a}u_2 \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{dl_2} + \mathbf{a}u_3 \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{dl_3} \right)$$ ***Operador gradiente***

La derivada es más grande a lo largo de la normal (PQ), porque es la distancia más corta entre ambas curvas (superficies) de nivel

•El gradiente es perpendicular a la curva de nivel

•Las derivadas en otras direcciones puede escribirse como el gradiente proyectado en esta dirección

El diferencial de V se puede expresar con el producto escalar de

$$dV = (\nabla . V).\mathbf{dl}$$

Que representa cuando cambia el valor de la función cuando se varía la posición de P a S, dV. **Recordar que el gradiente de un escalar es un vector.** $\boldsymbol{\nabla V = \vec{a}}$ **con componentes** $\boldsymbol{\frac{\partial V}{\partial a_i}}$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial l_1}.dl_1 + \frac{\partial V}{\partial l_2}.dl_2 + \frac{\partial V}{\partial l_3}.dl_3 = \nabla \mathrm{V}.\mathbf{dl}$$

$$\partial V = \frac{\partial V}{\partial l_1}.dl_1 + \frac{\partial V}{\partial l_2}.dl_2 + \frac{\partial V}{\partial l_3}.dl_3 = \nabla \mathrm{V}_1.dl_1 h_1 + \nabla \mathrm{V}_2.dl_2 h_2 + \nabla \mathrm{V}_3.dl_3 h_3$$

$$\nabla \mathrm{V}_i.dl_i h_i = \frac{\partial V}{\partial l_i}.dl_i$$

$$\nabla \mathrm{V}_i. = \frac{1}{h_i}\frac{\partial V}{\partial l_i}$$

$$\nabla = \left(\mathbf{a}u_1 \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{dl_1} + \mathbf{a}u_2 \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{dl_2} + \mathbf{a}u_3 \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{dl_3} \right)$$ ***Operador gradiente***

Fórmulas de cálculo, fácilmente comprobables

(a) $\nabla(V + U) = \nabla V + \nabla U$

(b) $\nabla(VU) = V\nabla U + U\nabla V$

(c) $\nabla\left[\frac{V}{U}\right] = \frac{U\nabla V - V\nabla U}{U^2}$

(d) $\nabla V^n = nV^{n-1}\nabla V$

Divergencia

El flujo saliente de un vector a través de una superficie cerrada se puede calcular o bien con:

$$\mathbf{\Phi} = \int_S \vec{F}\,.\,\overrightarrow{da}$$

O a través del cálculo de

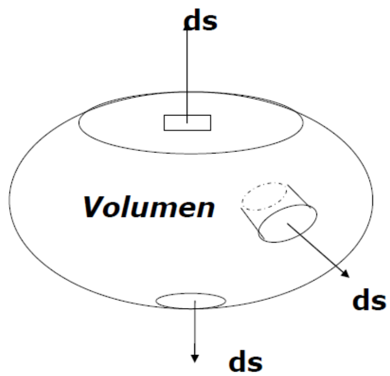
$$\mathbf{\Phi} = \int_V \left[\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right] dV$$

Donde dV es un diferencial de volumen

Al término $\left[\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right]$, flujo saliente por unidad de volumen recibe el nombre de **divergencia** y se representa por $\nabla\vec{F}$. **La divergencia de un vector es un escalar**

Teorema de la Divergencia

El flujo hacia fuera de un campo vectorial **A**, a través de una superficie cerrada, **S**, equivale a la integral de volumen (encerrado por la S) de la divergencia de **A**



$$\Phi = \int_S \vec{F} \, . \, \overrightarrow{da} = \int_V \nabla\vec{F} \, . \, dv$$

En el primer término se utilizan los valores de F sobre la superficie, mientras en el segundo se utilizando en todo el volumen que encierra S.

Por tanto, las derivadas espaciales de un vector se pueden representar con líneas de flujo

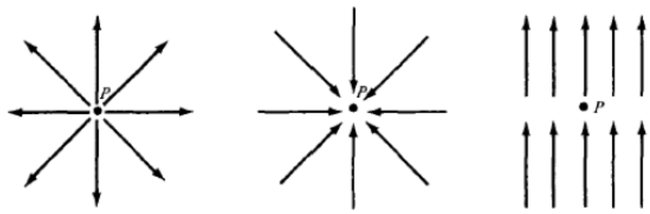
–Curvas que indican en cada punto su dirección

–La magnitud se puede indicar con la densidad o la longitud de las líneas

Resumiendo

Divergencia de un Campo vectorial:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v}$$



(a) (b) (c)

Fuente, diverge, +

Sumidero, converge, -

Divergencia nula, 0

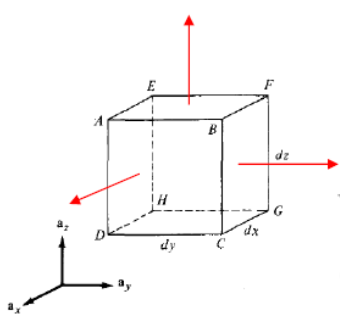
Opcional, demostración de la ecuación anterior

Encontremos la expresión en coordenadas cartesianas

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \left(\int_{\text{front}} + \int_{\text{back}} + \int_{\text{left}} + \int_{\text{right}} + \int_{\text{top}} + \int_{\text{bottom}} \right) \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

Desarrollo de A_x alrededor de P con series de Taylor

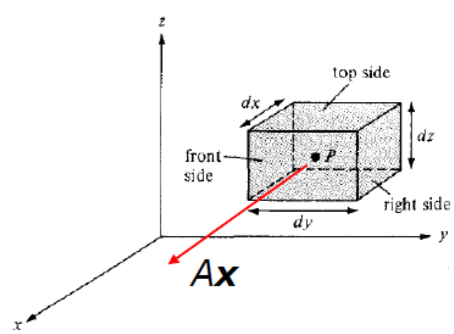
$$A_x(x, y, z) = A_x(x_o, y_o, z_o) + (x - x_o) \left.\frac{\partial A_x}{\partial x}\right|_P + (y - y_o) \left.\frac{\partial A_x}{\partial y}\right|_P + (z - z_o) \left.\frac{\partial A_x}{\partial z}\right|_P + \text{higher-order terms}$$



front side.

$$x = x_o + dx/2$$

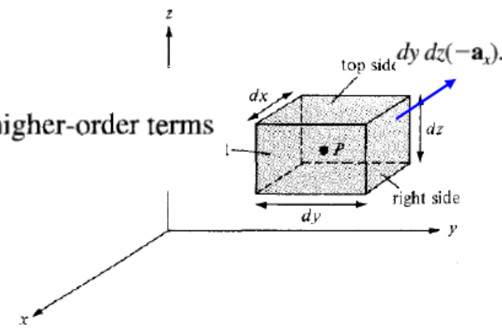
$$d\mathbf{S} = dy\, dz\, \mathbf{a}_x.$$



$$\int_{\text{front}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = dy\, dz \left[A_x(x_o, y_o, z_o) + \frac{dx}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} \bigg|_P \right] + \text{higher-order terms}$$

back side, $x = x_o - dx/2$, $d\mathbf{S} = dy\, dz(-\mathbf{a}_x)$

$$\int_{\text{back}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = -dy\, dz \left[A_x(x_o, y_o, z_o) - \frac{dx}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} \bigg|_P \right] + \text{higher-order terms}$$



$$\boxed{\int_{\text{front}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{back}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = dx\, dy\, dz \frac{\partial A_x}{\partial x} \bigg|_P + \text{higher-order terms}}$$

$$\int_{\text{left}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{right}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = dx\, dy\, dz \left.\frac{\partial A_y}{\partial y}\right|_P + \text{higher-order terms}$$

$$\int_{\text{top}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{bottom}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = dx\, dy\, dz \left.\frac{\partial A_z}{\partial z}\right|_P + \text{higher-order terms}$$

$$\Delta v = dx\, dy\, dz$$

$$\boxed{\lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Bigg|_{\text{at } P}}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

Propiedades

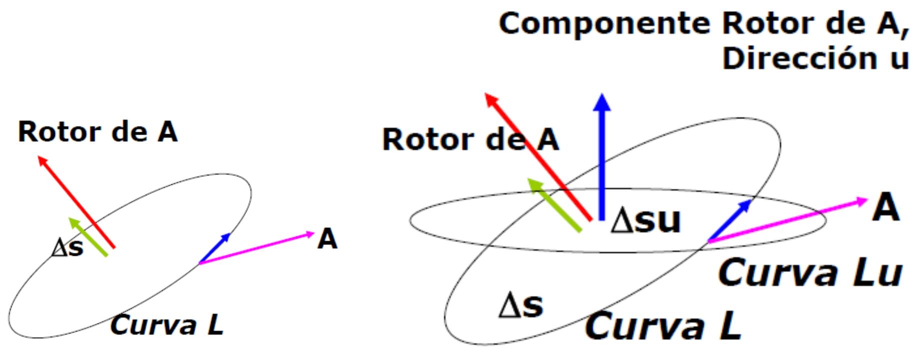
3. $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$
4. $\nabla \cdot (V\mathbf{A}) = V\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla V$

Rotacional

El rotacional es un vector cuya magnitud es la circulación máxima de A por unidad de área conforme el área tiende a cero. La orientación sigue la regla de la mano derecha.

Vector

$$\text{curl } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \left(\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S}\right)_{\max} \mathbf{a}_n$$



El rotacional es una función vectorial puntual, su componente en cualquier otra dirección es la proyección del rotacional sobre estas.

•Se puede obtener como la circulación por unidad de área normal a esta y tendiendo a cero
•Componente en otra dirección puede determinarse:

$$(\nabla \mathbf{x} \mathbf{A})_u = \mathbf{a}_u . (\nabla \mathbf{x} \mathbf{A}) = \lim_{\Delta su \to 0} \frac{1}{\Delta S_u} \left(\oint_{Lu} \mathbf{A.dl} \right)$$

$$(\nabla \mathbf{x} \mathbf{A})x = \frac{\partial Az}{\partial y} - \frac{\partial Ay}{\partial z}$$

$$(\nabla \mathbf{x} \mathbf{A})y = \frac{\partial Ax}{\partial z} - \frac{\partial Az}{\partial x}$$

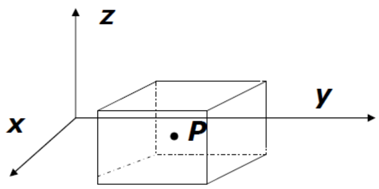
$$(\nabla \mathbf{x} \mathbf{A})z = \frac{\partial Ay}{\partial x} - \frac{\partial Ax}{\partial y}$$

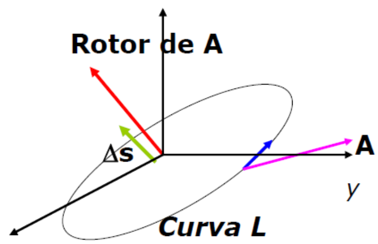
$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] \mathbf{a}_x + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \mathbf{a}_y + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \mathbf{a}_z$$

Demostración del valor del rotacional, optativo en cartesianas

- **Expresión del rotacional en coordenadas x,y,z**





P (x$_o$,y$_o$,z$_o$)

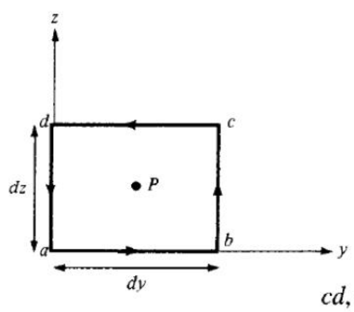
Desarrollo en series de Taylor

$$Ax = Ax(x_o, y_o, z_o) + (z - z_o)\frac{\partial Ax}{\partial z} + (y - y_o)\frac{\partial Ax}{\partial y} + (x - x_o)\frac{\partial Ax}{\partial x}$$

$$Ay = Ay(x_o, y_o, z_o) + (z - z_o)\frac{\partial Ay}{\partial z} + (y - y_o)\frac{\partial Ay}{\partial y} + (x - x_o)\frac{\partial Ay}{\partial x}$$

$$Az = Az(x_o, y_o, z_o) + (z - z_o)\frac{\partial Az}{\partial z} + (y - y_o)\frac{\partial Az}{\partial y} + (x - x_o)\frac{\partial Az}{\partial x}$$

$$Ay = Ay(x_o, y_o, z_o) + (z - z_o)\frac{\partial Ay}{\partial z} + (y - y_o)\frac{\partial Ay}{\partial y} + (x - x_o)\frac{\partial Ay}{\partial x}$$



$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \left(\int_{ab} + \int_{bc} + \int_{cd} + \int_{da} \right) \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

$ab,\ d\mathbf{l} = dy\,\mathbf{a}_y \qquad z = z_o - dz/2,$

$$\boxed{\int_{ab} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = dy \left[A_y(x_o, y_o, z_o) - \frac{dz}{2} \frac{\partial A_y}{\partial z} \bigg|_P \right]}$$

cd, $d\mathbf{l} = dy\,\mathbf{a}_y$ and $z = z_o + dz/2$, so

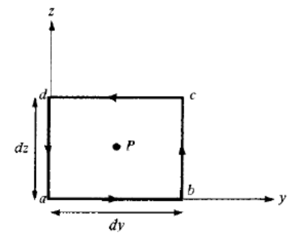
$$\boxed{\int_{cd} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -dy \left[A_y(x_o, y_o, z_o) + \frac{dz}{2} \frac{\partial A_y}{\partial z} \bigg|_P \right]}$$

$$\boxed{-\frac{\partial Ay}{\partial z} dz.dy}$$

- **Para los lados bc y da**

bc, $d\mathbf{l} = dz\,\mathbf{a}_z$ and $y = y_o + dy/2$, so

$$\int_{bc} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = dz \left[A_z(x_o, y_o, z_o) + \frac{dy}{2} \frac{\partial A_z}{\partial y} \bigg|_P \right]$$



da, $d\mathbf{l} = dz\,\mathbf{a}_z$ and $y = y_o - dy/2$, so

$$\int_{da} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -dz \left[A_z(x_o, y_o, z_o) - \frac{dy}{2} \frac{\partial A_z}{\partial y} \bigg|_P \right]$$

$$\boxed{\frac{\partial Az}{\partial y} dz.dy}$$

$$(\nabla \mathbf{x} \mathbf{A})x = \frac{\frac{\partial Az}{\partial y} dz.dy - \frac{\partial Ay}{\partial z} dz.dy}{dz.dy} = \frac{\partial Az}{\partial y} - \frac{\partial Ay}{\partial z}$$

Utilizando los factores de escala

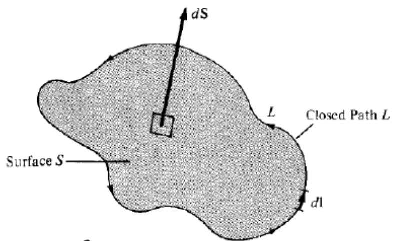
El rotacional expresado para las variables u1,u2,u3

$$\nabla \mathbf{x} \mathbf{A} = \frac{1}{h_1.h_2.h_3} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{u1} h_1 & \mathbf{a}_{u2} h_2 & \mathbf{a}_{u3} h_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1.A_1 & h_2.A_2 & h_3.A_3 \end{pmatrix}$$

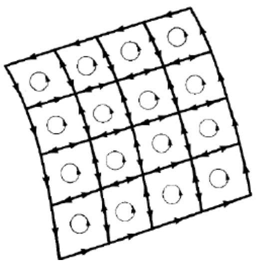
Cilíndricas (ρ,ϕ,z):
h1=1, h2=ρ, h3=1

Esféricas (r,θ,ϕ):
h1=1,h2=r; h3=r.senθ

- **Teorema de Stoke:** la circulación de un campo **A** alrededor de una trayectoria cerrada ***L*** es igual a la integral de superficie del rotacional de **A** sobre la superficie ***S*** circunscripta por ***L****, siempre que* **A** *y* **rotA** *sean continuos en* ***S***



$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$



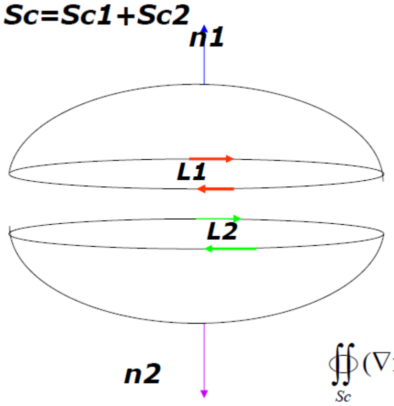
$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \right)_{\max} \mathbf{a}_n$$

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \sum_k \oint_{L_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \sum_k \frac{\oint_{L_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_k} \Delta S_k$$

- **Identidad Nula. Divergencia de un rotor**

$$\nabla.(\nabla \mathbf{x} \mathbf{A}) = 0$$

Sc=Sc1+Sc2



Gauss

$$\iiint_v \nabla.(\nabla \mathbf{x}\mathbf{A}) dv = \oiint_{Sc} (\nabla \mathbf{x}\mathbf{A}).\mathbf{ds}$$

•La integral de superficie se Divide en dos, conectadas por una frontera comun L1 y L2.

•Se aplica Stoke

$$\oiint_{Sc} (\nabla \mathbf{x}\mathbf{A}).\mathbf{ds} = \oiint_{Sc1} (\nabla \mathbf{x}\mathbf{A}).\mathbf{ds}_1 + \oiint_{Sc2} (\nabla \mathbf{x}\mathbf{A}).\mathbf{ds}2$$

$$\oiint_{Sc} (\nabla \mathbf{x}\mathbf{A}).\mathbf{ds} = \oint_{L1} \mathbf{A}.\mathbf{dl} + \oint_{L2} \mathbf{A}.\mathbf{dl} = 0$$

Si la divergencia de un campo vectorial es nula , el campo es solenoidal y se puede expresar como el rotacional de otro campo vectorial

$$\nabla.\mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{B} = \nabla \mathbf{x}\mathbf{A}$$

$$\nabla.(\nabla \mathbf{x}\mathbf{A}) \equiv 0$$

- **Identidad Nula. Rotor de un gradiente**

$$\nabla \mathbf{x}(\nabla V) = 0$$

- **Aplicamos Stoke en cualquier superficie**

$$\iint_s \nabla \mathbf{x}(\nabla V).\mathbf{ds} = \oint \nabla V.\mathbf{dl} = \int_P^P dV = V(P) - V(P) = 0$$

•Si el rotacional de un campo es nulo este campo se puede expresar como el gradiente de una función escalar.
•Un campo vectorial irrotacional es conservativo, y se puede expresar como el gradiente de un campo escalar

- **Divergencia (Gradiente)-->Laplaciano de un Escalar**

$$\nabla.(\nabla V) = \nabla^2 V$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}z$$

Operador nabla en rectangulares

$$\nabla^2 = \nabla.\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}z).(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}z)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z}$$

Laplaciano en rectangulares

- **Rotor de Un Rotor= Gradiente(divergencia)-Laplaciano del vector**

$$\nabla \mathbf{x} \nabla \mathbf{x} \mathbf{A} = \nabla(\nabla.\mathrm{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

- **Clasificación de Campos Vectoriales según sus fuentes de rotor y divergencia**

(a) $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0,\ \nabla \times \mathbf{A} = 0$

(b) $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0,\ \nabla \times \mathbf{A} = 0$

(c) $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0,\ \nabla \times \mathbf{A} \neq 0$

(d) $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0,\ \nabla \times \mathbf{A} \neq 0$

Teorema de Helmholtz

- Un campo vectorial está determinado si su divergencia y su rotacional están especificados en todo punto
  - **En el infinito debe anularse**
  - **O bien si está limitado a una región, se debe conocer la componente normal en la superficie límite**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \rho_v \qquad \nabla \times \mathbf{A} = \boldsymbol{\rho}_S$$

- Un campo vectorial puede expresarse como la suma de dos vectores uno irrotacional y otro solenoidal de divergencia nula.

$$\mathbf{A} = -\nabla V + \nabla \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A}_i = -\nabla V \qquad \mathbf{A}_s = \nabla \times \mathbf{B}$$

$\boxed{\nabla \times \mathbf{A}_i = 0 \quad \textit{Irrotacional}}$ $\boxed{\nabla . \mathbf{A}_s = 0 \quad \textit{Solenoidal}}$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \rho_v \qquad \nabla \times \mathbf{A} = \boldsymbol{\rho}_S$$

$$\mathbf{A} = -\nabla V + \nabla \times \mathbf{B}$$

***Laplaciano del vector* A se define como**

$$\nabla^2 \mathrm{A} = \nabla(\nabla.\mathbf{A}) - \nabla \mathbf{x} \nabla \mathbf{x} \mathbf{A}$$

Ecuación diferencial de A en función de sus fuentes

$$\nabla^2 \mathrm{A} = \nabla(\rho_v) - \nabla \mathbf{x}(\boldsymbol{\rho}_s)$$

Vector: densidad de circulación

Densidad de origen o ´carga´

Operadores diferenciales en coordenadas cilíndricas

El gradiente, la divergencia, el rotacional y el laplaciano poseen expresiones particulares en coordenadas cilíndricas:

- Gradiente

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}$$

- Divergencia

$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

- Rotacional

$$\nabla\times\vec{F} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\,\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho\,F_\varphi & F_z \end{vmatrix}$$

- Laplaciano

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

Operadores diferenciales en coordenadas esféricas

- Gradiente

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{e}_\varphi$$

- Divergencia

$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\,F_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(F_\varphi)}{\partial\varphi}$$

- Rotacional

$$\nabla\times\vec{F} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\,\hat{\theta} & r\sin\theta\,\hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta\,F_\varphi \end{vmatrix}$$

- Laplaciano

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

Anexo:Tabla en coordenadas cilíndricas y esféricas

Esta es una lista de algunas fórmulas de cálculo vectorial de empleo corriente trabajando con varios sistemas de coordenadas.

Operación	coordenadas cartesianas (x,y,z)	coordenadas cilíndricas (ρ,φ,z)	coordenadas esféricas (r,θ,φ)
Definición de las coordenadas		$\begin{bmatrix} x &=& \rho\cos\phi \\ y &=& \rho\operatorname{sen}\phi \\ z &=& z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x &=& r\operatorname{sen}\theta\cos\phi \\ y &=& r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \\ z &=& r\cos\theta \end{bmatrix}$
		$\begin{bmatrix} \rho &=& \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi &=& \arctan(y/x) \\ z &=& z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} r &=& \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &=& \arctan((\sqrt{x^2+y^2})/z) \\ \phi &=& \arctan(y/x) \end{bmatrix}$
$\mathbf{A}$	$A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}$	$A_\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + A_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + A_z\hat{\mathbf{z}}$	$A_r\hat{\boldsymbol{r}} + A_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$
∇f	$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$
$\nabla\cdot\mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 A_r}{\partial r} + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial A_\theta\operatorname{sen}\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$
$\nabla\times\mathbf{A}$	$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}$	$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho A_\phi}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right)\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\left(\frac{\partial A_\phi\operatorname{sen}\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right)\hat{\boldsymbol{r}} + \left(\frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial r A_\phi}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}$
$\Delta f = \nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
$\Delta\mathbf{A} = \nabla^2\mathbf{A}$	$\hat{\mathbf{x}}\Delta A_x + \hat{\mathbf{y}}\Delta A_y + \hat{\mathbf{z}}\Delta A_z$	$\hat{\boldsymbol{\rho}}\left(\Delta A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\right) + \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\Delta A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right) + \hat{\mathbf{z}}\Delta A_z$	$\hat{\boldsymbol{r}}\left(\Delta A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2A_\theta\cos\theta}{r^2\operatorname{sen}\theta} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\right) + \hat{\boldsymbol{\theta}}\left(\Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\right) + \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\Delta A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{2}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right)$

Reglas de cálculo no triviales:

1. $\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \nabla\cdot(\nabla f) = \nabla^2 f = \Delta f$ (laplaciano)
2. $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \nabla\times(\nabla f) = 0$
3. $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$
4. $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$
5. $\Delta fg = f\Delta g + 2\nabla f\cdot\nabla g + g\Delta f$
6. Fórmula de Lagrange para el producto vectorial: $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$