Tema 1
I.3. Matrices

Álgebra. 1º IEC

I.3. Matrices

I.3.1. Operaciones

I.3.1.1. Suma y Producto por escalar

I.3.1.2. Producto de matrices

I.3.1.3. Traspuesta

I.3.2. Equivalencia y Rango

I.3.2.1. Matrices equivalentes

I.3.2.2. Rango de una matriz

Box I.3.1. Cálculo del rango de una matriz y su forma equivalente

I.3.2.3. Matrices elementales

I.3.3. Matrices invertibles

I.3.3.1. Propiedades

I.3.3.2. Aplicación a matrices elementales

Box I.3.2. Algoritmo de la Inversa (Gauss-Jordan)

I.3.3.3. Teorema de la Matriz Invertible

I.3.4. Aplicaciones

I.3.4.1. Teorema de Rouche

I.3.4.2. Tipos de matrices

I.3.4.3. Matrices en bloques

I.3.4.4. Factorización LU

Box I.3.3. Algoritmo Factorización LU

I.3. Matrices

I.3.1. Operaciones

Las matrices se denotan por: i) mayúsculas $A_{m\times n}$; ii) $\left[a_{ij}\right]$ o bien $\left(a_{ij}\right), i = 1,2,\dots m, j = 1,2,\dots n$; iii) Notación por vectores columna: $A = [\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \dots\ \vec{a}_n]$; iv) Notación por vectores fila: $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{bmatrix}$; v) $\begin{matrix} A: I \times J \to K \\ (i,j) \mapsto a_{ij} \end{matrix}$ con $I = \{1,2,\dots,m\}, J = \{1,2,\dots,n\}$

El conjunto de matrices de tamaño $m \times n$ se denota por $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ (o $\mathcal{M}_n(K)$ si $m = n$).

- Si $m = n \Rightarrow A$ cuadrada $A_{n\times n} \equiv A_n$. Si $m \neq n \Rightarrow A$ rectangular $A_{m\times n}$.
- Si $m = 1 \Rightarrow A$ matriz fila. Si $n = 1 \Rightarrow A$ matriz columna.
- La diagonal de A son los elementos $a_{ij}, i = j$.
- La traza es $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

$$\begin{array}{cc} & \text{Column } j \\ \text{Row } i & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = A \\ & \begin{matrix} \uparrow & \quad & \uparrow & \quad & \uparrow \\ \mathbf{a}_1 & & \mathbf{a}_j & & \mathbf{a}_n \end{matrix} \end{array}$$

I.3.1.1. Suma y Producto por escalar

Dadas dos matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ del mismo tamaño $m \times n$ formadas por escalares de un cuerpo K y $\alpha \in K$:

- $A = B \Rightarrow a_{ij} = b_{ij}\,,\ 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ (o sea tienen iguales sus elementos).
- $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$ (cada entrada de $A + B$ es la suma de las entradas de A y B; la suma de matrices de tamaño distinto no está definida)
- $A - B = A + (-1) \cdot B$
- $-A$ es la matriz opuesta de A $(a_{ij} = -a_{ij}\ \forall i, j)$ (sus elementos son los opuestos de los de A)
- $\alpha \cdot A = \alpha \cdot [a_{ij}]$ (en concreto $(-1) \cdot A = -A$)

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & \cdots & a_{3n}+b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{m3}+b_{m3} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$k \cdot A = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & k\cdot a_{13} & \cdots & k\cdot a_{1n} \\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & k\cdot a_{23} & \cdots & k\cdot a_{2n} \\ k\cdot a_{31} & k\cdot a_{32} & k\cdot a_{33} & \cdots & k\cdot a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k\cdot a_{m1} & k.a_{m2} & k\cdot a_{m3} & \cdots & k\cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Propiedades

$A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $\alpha, \beta \in K$.

- Asociativa: $(A+B)+C = A+(B+C)$
- Elemento Neutro: $A + 0_{m\times n} = 0_{m\times n} + A = A$
- Elemento Opuesto: $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m\times n}$
- Conmutativa: $A + B = B + A$
- Distributiva: $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$

  $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
- Asociativa del producto: $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

Propiedades de la matriz 0:

$0_{m\times n}$: Matriz nula (aquella con $a_{ij} = 0 \; \forall i, j$)

- $A + 0_{m\times n} = A$
- $\alpha A = 0_{m\times n} \Rightarrow \alpha = 0 \;\; o \;\; A = 0_{m\times n}$
- $A + (-A) = 0_{m\times n}$

Propiedades producto matriz-vector

- $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$
- $A(c\vec{u}) = c(A\vec{u})$
- $A\vec{0} = \vec{0}$

Nota: Cuando se introduzca espacio vectorial $\mathcal{M}_{m\times n}$ se hablará de un conjunto donde se definen una suma y un producto por escalar que han de satisfacer unos axiomas que no son sino los dados aquí.

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

I.3.1.2. Producto de matrices

Si el producto $A\vec{x}$ está definido, entonces éste puede obtenerse como:

i) $A\vec{x}$ usando las columnas de A: $A\vec{x} = [\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \dots\ \vec{a}_p]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_p\vec{a}_p$

Nota: Así, $A\vec{x}$ es una combinación lineal de las columnas de A usando como pesos las entradas de x_i de $\vec{x}$.

ii) $A\vec{x}$ usando las filas de A: $\begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{h=1}^{p} a_{1h}x_h \\ \sum_{h=1}^{p} a_{2h}x_h \\ \vdots \\ \sum_{h=1}^{p} a_{mh}x_h \end{bmatrix} = \sum_{h=1}^{p} \vec{a}_{ih}x_h\ (i = 1,2,\dots,m)$

Nota: la fila *i*-ésima en $A\vec{x}$ es la suma de los productos de las correspondientes entradas de la fila i de A y de las componentes del vector $\vec{x}$ (regla fila-vector).

Análogamente, el **producto de matrices** $A_{m\times p}$ y $B_{p\times n}$ puede expresarse usando particiones sencillas:

i) columna de AB en función de la columna de B: $C = AB = A[\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \dots\ \vec{b}_n] = [A\vec{b}_1\ A\vec{b}_2\ \dots\ A\vec{b}_n]$

Nota: Así, cada columna $A\vec{b}_i$ de AB es una combinación lineal de las columnas de A usando como pesos los coeficientes de $\vec{b}_i$ (esto es, la columna correspondiente de B).

ii) fila de AB en función de la fila de A: $C = AB = \begin{bmatrix} \vec{c}_1 \\ \vec{c}_2 \\ \vdots \\ \vec{c}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 B \\ \vec{a}_2 B \\ \vdots \\ \vec{a}_m B \end{bmatrix}$

Nota: Así, cada fila $\vec{a}_i B$ de AB es una combinación lineal de los vectores fila de B usando como pesos los coeficientes de $\vec{a}_i$ (o sea, la combinación de los vectores fila de B usando la fila correspondiente de A).

Regla fila-columna: la entrada en la fila i y columna j de AB es la suma de los productos de los elementos de la fila i de A y de la columna j de B: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{h=1}^{p} a_{ih}b_{hj}$

Nota: El producto AB no está definido en general. Solo puede realizarse cuando el número de columnas de A es igual al de filas de B.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3j} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = c_{ij}$$

$$A_{1\times p}B_{p\times 1} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} = a_1\,b_1 + \cdots + a_p\,b_p \;;\; c = \sum_{h=1}^{p} a_h b_h$$

$$A_{1\times p}B_{p\times n} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \;;\; c_j = \sum_{h=1}^{p} a_h b_{hj} \;\; (j = 1, \dots n)$$

$$A_{m\times p}B_{p\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \;;\; c_i = \sum_{h=1}^{p} a_{ih} b_h \;\; (i = 1, \dots m)$$

$$A_{m\times 1}B_{1\times n} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & \cdots & a_1 b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & \cdots & a_m b_n \end{bmatrix} \;\; c_{ij} = a_i b_j \;\; (i = 1, \dots m, j = 1, \dots n)$$

Propiedades del producto

$A_{m\times p},\ A'_{m\times p},\ B_{p\times n},\ B'_{p\times n},\ C_{n\times k},\ D_q,\ E_p = eI_p,\ \alpha \in K$

- Asociativa: $(AB)C = A(BC)$
- Distributiva: $A(B + B') = AB + AB'$

  $(A + A')B = AB + A'B$
- Identidad: $AI_p = A$ y $I_m A = A$ con $I_m = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

  Si D es cuadrada: $DI_q = I_q D = D$
- Escalar: $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
- Matriz Nula: $A0_{p\times n} = 0_{m\times n}$ y $0_{k\times m}A_{m\times p} = 0_{k\times p}$
- No conmutativa: $AB \neq BA$ (en general)
- $AB = 0 \nRightarrow A = 0\ o\ B = 0$ (hay divisores de cero).
- $AB = AB' \nRightarrow B = B'$ (la ley de cancelación no se aplica, en general)
- $AE_p = eA,\ E_pB = eB,\ e \in K$ y $E_p = \begin{bmatrix} e & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e \end{bmatrix}$

Propiedades potencias

- $D^0 = I_q$
- $D^j D^k = D^{j+k}$
- $(D^j)^k = D^{jk}$

Nota: Para $\mathcal{M}_n(K)$ la suma y el producto son operaciones internas. Con ellas, $\mathcal{M}_n(K)$ es un anillo unitario no conmutativo y con divisores de cero.

I.3.1.3. Traspuesta

Dada $A_{m\times n}$, la matriz traspuesta $A^t_{n\times m} = \left(a_{ij}\right)^t$ es la que tiene por elemento a^t_{ij} al elemento a_{ji} de A para $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$, esto es $a^t_{ij} = a_{ji}$ $\forall i, j$. A^t se construye tomando las filas de A como columnas.

Propiedades

- La trasposición es involutiva: $(A^t)^t = A$
- Traspuesta de la suma: $(A+B)^t = A^t + B^t$ (A y B del mismo tamaño)
- Traspuesta de un escalar: $(\alpha A)^t = \alpha A^t$ $(\alpha \in K)$
- Traspuesta del producto: $(AB)^t = B^t A^t$ con $A_{m\times p}, B_{p\times m}$ (La traspuesta de un producto de matrices es igual al producto de sus traspuestas en el orden inverso). Igualmente $(ABC)^t = C^t B^t A^t$.
- Traspuesta de la Inversa: $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$ con A_n
- $rang(A) = rang(A^t)$

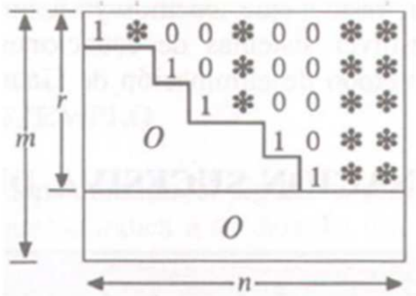
$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \qquad A^t = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

I.3.2. Equivalencia y Rango

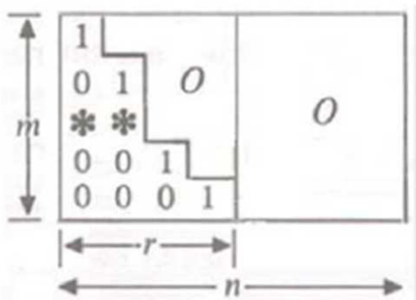
I.3.2.1. Matrices equivalentes

Una matriz $A_{m\times n}$ puede concebirse como un sistema de m vectores fila ($\in K^n$) o un conjunto de n vectores columna ($\in K^m$). Así, si $A_{m\times n}$ y $A'_{m\times n}$ son dos matrices del mismo tamaño se verifica:

1. $A'_{m\times n}$ es **equivalente por filas** a $A_{m\times n}$ si A' puede obtenerse de A mediante una sucesión finita de operaciones elementales en las filas de A. Toda matriz es equivalente por filas a una única matriz escalonada reducida (por filas) llamada *Matriz Canónica de Equivalencia por filas* C_r^f, donde r (*rango por filas* de A) es el número de filas no nulas de C_r^f (o de cualquier forma escalonada por filas):



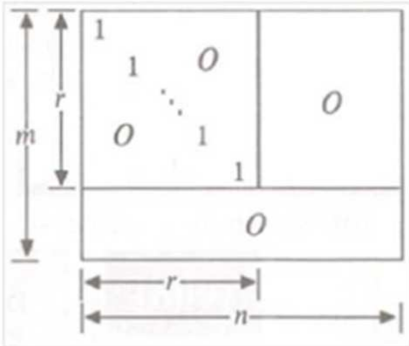
2. $A'_{m\times n}$ es **equivalente por columnas** a $A_{m\times n}$ si A' puede obtenerse de A mediante una sucesión finita de operaciones elementales en las columnas de A. Realizar una operación elemental en las columnas es igual a realizarla en las correspondientes filas de A^t. Toda matriz es equivalente por columnas a una única matriz escalonada reducida (por columnas), llamada *Matriz Canónica de Equivalencia por Columnas* C_r^c, donde r (*rango por columnas* de A) es el número de columnas no nulas de C_r^c:



3. $A'_{m\times n}$ es **equivalente** a $A_{m\times n}$ si A' puede obtenerse de A mediante una sucesión finita de operaciones elementales en las filas y/o en las columnas de A. Toda matriz $A_{m\times n}$ es equivalente a una única matriz $m\times n$ escalonada reducida por filas y por columnas llamada *Matriz Canónica de Equivalencia* C_r :

Nota: equivalencia por filas (columnas)⇒equivalencia pero equivalencia⇏equivalencia por filas (columnas).

Nota: En general, $C_r^f \neq C_r^c \neq C_r$ (no es lo mismo realizar operaciones en las filas que en las columnas).



I.3.2.2. Rango de una matriz

Definición. El **rango** por filas (columnas) de una matriz $A_{m\times n}$ es el número de filas (columnas) no nulas en cualquier matriz escalonada por filas (columnas). Además, **el rango por filas es siempre igual al rango por columnas** de $A_{m\times n}$, y se llama rango de la matriz A.

Nota: El rango de una matriz es pues el número de filas o columnas linealmente independientes y $0 \leq rang(A) \leq \min(m,n)$.

Teorema del rango. El rango de $A_{m\times n}$ no se altera si se realizan operaciones elementales en las filas y/o en las columnas de A. Así, las **matrices equivalentes tienen el mismo rango**. A la inversa, dos matrices del mismo tamaño son **equivalentes si tienen el mismo rango**. Así, si $A_{m\times n}$ tiene rango r, A es equivalente a la matriz C_r de tamaño $m\times n$ y rango r (que es única).

Nota: Como C_r tiene rango r, es la matriz canónica de equivalencia de todas las matrices $m\times n$ de rango r.

Box I.3.1. Cálculo del rango de una matriz y su forma equivalente

Cálculo del rango de una matriz: Realizando operaciones fila (columna) siempre es posible transformar $A_{m\times n}$ en una matriz equivalente M^f (M^c) escalonada por filas (columnas), o en C_r^f (C_r^c). El rango de filas (columnas) de M^f o C_r^f $(M^c\ o\ C_r^c)$ es el número de filas (columnas) no nulas y es igual al de A.

Nota: De hecho, para calcular el rango se pueden realizar operaciones fila y columna indistintamente, con tal de llegar a una forma escalonada por filas, por columnas o por filas y columnas.

Cálculo de C_r : Cualquier matriz $A_{m\times n}$ de rango r $(0 \le r \le min(m,n))$ puede reducirse a C_r (con todos sus elementos nulos excepto los r primeros de su diagonal que valen 1) mediante una sucesión finita de operaciones elementales en las filas y en las columnas de A (pero no necesariamente solo en las filas o solo en las columnas). Para ello:

Paso 1. Realizar operaciones elementales fila a la matriz $A_{m\times n}$ para obtener una matriz escalonada por filas con r filas no nulas M^f (o la matriz escalonada reducida por filas C_r^f si se desea), las cuales tienen un elemento no nulo (pivote) como cabecera.

Paso 2. Utilizar como pivotes las r cabeceras de M^f (o C_r^f) y aplicar operaciones columna para obtener la matriz C_r, cuyos únicos elementos no nulos son 1 dominantes y coinciden con las posiciones de dichos r pivotes.

$$C_r = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nota: Análogamente se puede proceder haciendo operaciones en las columnas y después en las filas.

I.3.2.3. Matrices elementales

Definición. Una **matriz elemental** es aquella que transforma a una matriz cualquiera $A_{m\times n}$ en una matriz equivalente a A. Se llama matriz elemental a una matriz cuadrada $n \times n$ que se obtiene al realizar una única operación elemental sobre la matriz identidad I_n. Las **matrices elementales fila** son de la forma:

$$E^f(I) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & \cdots & 1 & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad E^f(I) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & k & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad E^f(I) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & k' & \\ & & \ddots & \vdots & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Análogamente se definen las **matrices elementales columna** $E^c(I_n)$ de una matriz $A_{m\times n}$, verificándose $E^c(I_n) = \left[E^f(I_n)\right]^t$, esto es, la matriz elemental columna de una determinada operación elemental es la traspuesta de la correspondiente matriz elemental fila.

Nota: Así, una matriz cuadrada $m \times m$ será elemental fila si se puede obtener de la matriz I_m mediante una única operación fila. Cada operación elemental fila tiene una matriz elemental fila asociada que, aplicada sobre la matriz $A_{m\times n}$, produce en ella el mismo resultado que la correspondiente operación elemental fila.

Teorema. Si se realiza una operación fila E^f en una matriz $A_{m\times n}$ la matriz resultante $E^f(A)$ puede escribirse como $E^f(A) = E^f(I_m)A$, donde $E^f(I_m)$ es la matriz elemental fila que se crea al realizar la misma operación fila E^f sobre I_m. Así, el resultado de efectuar una operación elemental fila sobre A puede obtenerse multiplicando por la izquierda de A por la matriz elemental correspondiente.

Teorema. El resultado de efectuar una operación elemental columna E^c sobre $A_{m\times n}$ puede obtenerse multiplicando por la derecha a A por la matriz elemental correspondiente $E^c(I_n)$, esto es, $E^c(A) = AE^c(I_n)$

Nota: Se cumple: $E^c(A) = \left[E^f(A^t)\right]^t$ (realizar la operación en las columnas de A conduce al mismo resultado que hacerlo en las filas de la matriz traspuesta A^t y luego tomar la traspuesta).

Las matrices elementales permiten expresar las operaciones elementales como producto de matrices:

1. Dada una operación elemental E^f o E^c sobre filas o sobre columnas al aplicársela a la matriz $A_{m\times n}$ se obtiene, respectivamente, una matriz $E^f(A)$ o $E^c(A)$, que vale:

$$E^f(A) = F\cdot A \text{ donde } F = E^f(I_m) \qquad E^c(A) = A\cdot C \text{ donde } C = E^c(I_n) \equiv \left[E^f(I_n)\right]^T$$

2. Si E es la operación elemental que consiste en aplicar una operación E^f a las filas y una operación E^c a las columnas, al realizar una tras otra (en cualquier orden) la matriz $A_{m\times n}$ se transforma en:

$$E(A) = E^f\big(E^c(A)\big) = E^f(I_m)E^c(A) = E^f(I_m)\big(AE^c(I_n)\big) = E^f(I_m)AE^c(I_n) = FAC$$
$$E(A) = E^c\left(E^f(A)\right) = E^f(A)E^c(I_n) = \big(E^f(I_m)A\big)E^c(I_n) = E^f(I_m)AE^c(I_n) = FAC$$

3. Se cumple: $E^f(A) = E_2^f\left(E_1^f(A)\right) = E_2^f(I_m)E_1^f(A) = E_2^f(I_m)E_1^f(I_m)A = \left(E_2^f(I_m)E_1^f(I_m)\right)A = FA$

$$E^c(A) = E_2^c\big(E_1^c(A)\big) = E_1^c(A)E_2^c(I_n) = AE_1^c(I_n)E_2^c(I_n) = A\big(E_1^c(I_n)E_2^c(I_n)\big) = AC$$

4. En general si se realizan k operaciones elementales en las filas y h operaciones en las columnas de $A_{m\times n}$:

$$E(A) = F\cdot A\cdot C = \left(E_k^f(I_m)\cdot E_{k-1}^f(I_m)\cdot \dots \cdot E_2^f(I_m)\cdot E_1^f(I_m)\right)\cdot A\cdot \left(E_1^c(I_n)\cdot E_2^c(I_n) \dots \cdot E_{h-1}^c(I_n)\cdot E_h^c(I_n)\right)$$

Teorema. A' es equivalente por filas a $A_{m\times n}$ si y solo si existe una matriz F (o sea, una secuencia de matrices elementales fila) tal que $A' = FA$. Análogamente, A' es equivalente por columnas a $A_{m\times n}$ si y solo si existe una matriz C tal que $A' = AC$. Así, A' es equivalente a $A_{m\times n}$ si y solo si existen matrices F y C tales que $A' = FAC$.

Nota: F y C son matrices no singulares (invertibles), pero no son únicas (aunque C_r lo sea).

Nota: F y C es el resultado de acumular sobre I_m y I_n las sucesivas operaciones elementales fila y columna, respectivamente. Así, si al mismo tiempo que se aplican operaciones elementales fila (columna) en $A_{m\times n}$, éstas se aplican en I_m (I_n), se obtiene F (C), tal que $C_r = F\cdot A\cdot C$.

I.3.3. Matrices invertibles

I.3.3.1. Propiedades

Definición: Una matriz cuadrada A_n se dice que es **invertible (no singular)** si existe otra matriz de igual tamaño B_n, que se llama inversa de A y se denota por A^{-1}, tal que $AB = BA = I_n \Rightarrow B = A^{-1}$

Nota: $AB = I_n \Leftrightarrow BA = I_n$ o sea si $AB = I_n$ necesariamente $BA = I_n$, y por tanto $B = A^{-1}$ (la relación es simétrica). Solo las matrices cuadradas pueden tener inversa, pero no todas la tienen.

Propiedades: Sean A, B y C matrices cuadradas $n \times n$. Si A_n es invertible se verifica:

- Su inversa es única

- Su traspuesta A^t también es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ (de hecho A invertible$\Leftrightarrow$ A^t invertible)

- A^{-1}, A^k y cA $(c \neq 0)$ son también invertibles con inversas $(A^{-1})^{-1} = A$, $(A^{-1})^k = A^{-k}$ y $c^{-1}A^{-1}$

- $BA = CA \Rightarrow B = C$ (cancelación por la derecha) y $AB = AC \Rightarrow B = C$ (cancelación por la izquierda), o sea, A es regular o no singular (análogamente, las matrices no regulares se llaman singulares)

- A no es divisor de cero (o sea $AB = 0 \Rightarrow B = 0$)

- Si B también es invertible, el producto AB también lo es y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. El producto de matrices invertibles es invertible y el inverso es el producto de sus inversos en orden opuesto. En general $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

- Si A tiene una fila o columna de ceros entonces A no es invertible.

I.3.3.2. Aplicación a matrices elementales

Aunque no todas las matrices cuadradas son invertibles, todas las elementales lo son y su inversa es otra matriz elemental.

1. Las tres operaciones elementales (sean en filas o en columnas) son reversibles:

   i) Intercambio: $[E_1]\ R_i \leftrightarrow R_j \Rightarrow [E_1^{-1}]\ R_j \leftrightarrow R_i$

   ii) Escalamiento: $[E_2]\ k \cdot R_i \rightarrow R'_i\ , k \neq 0\ \Rightarrow [E_2^{-1}]\ k^{-1} \cdot R'_i \rightarrow R_i\ , k \neq 0$

   iii) Reemplazo: $[E_3]\ k' \cdot R_j + R_i \rightarrow R'_i\ ,\ k' \neq 0 \Rightarrow [E_3^{-1}] - k' \cdot R_j + R'_i \rightarrow R_i\ ,\ k' \neq 0$

2. Así, las matrices elementales $E^f(I_m)$ y $E^c(I_n)$ son invertibles porque si $E^f(I_m)$ se produce aplicando una operación fila sobre I_m, entonces existe otra operación fila que convierte de nuevo $E^f(I_m)$ en I_m, o sea, existe una matriz elemental $E^{f\prime}(I_m)$ tal que $E^{f\prime}(I_m)\, E^f(I_m) = I_m$

3. Como las matrices elementales son invertibles su producto $F = \prod_{i=k}^{1} E_i^f(I_m)$ y $C = \prod_{i=1}^{h} E_i^c(I_n)$ también lo será, con inversa: $F^{-1} = \prod_{i=1}^{k}\left[E_i^f(I_m)\right]^{-1}$ y $C^{-1} = \prod_{i=h}^{1}[E_i^c(I_n)]^{-1}$.

4. Así, si $E(I)$ es una matriz elemental (fila o columna), $E^{-1}(I)$ existe, y es también una matriz elemental.

Teorema. A_n es invertible si y solo si cualquier matriz escalonada M de A (por filas o por columnas o por filas y columnas) tiene todos los elementos de la diagonal no nulos: $\boldsymbol{A}$ **invertible** $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{M}$ **diagonal no nula**

Teorema. Una matriz $\boldsymbol{A_n}$ **es invertible si y solo si $\boldsymbol{A}$ es equivalente a $\boldsymbol{I_n}$**, esto es, si $C_r = I_n$. Por tanto $\boldsymbol{A_n}$ **es invertible si y solo si tiene rango $\boldsymbol{n}$**. Aún más, A_n es equivalente por filas y equivalente por columnas a I_n, esto es $C_r^f = C_r^c = I_n$, y se puede llegar a C_r realizando solamente operaciones fila o solamente operaciones columna.

Teorema. A_n es invertible si y solo si puede expresarse como producto de matrices elementales. La misma secuencia de operaciones elementales que reduce A a I_n también transforma I_n en A^{-1}.

Nota: Si $A_n$es invertible, entonces $A_n \overset{f}{\sim} I_n \Rightarrow I_n = E^f(A) = E^f(I_n)A = FA$. Además, $A_n \overset{c}{\sim} I_n \Rightarrow I_n = E^c(A) = AE^c(I_n) = AC$. Por tanto $FA = I_n$ y $AC = I_n$, y $A^{-1} = F = C$. Como $F = E^f(I_n) = E_k^f(I_n)E_{k-1}^f(I_n) \dots E_1^f(I_n)$ entonces A^{-1} se puede obtener haciendo sobre I_n las mismas operaciones fila que llevan a A a I_n. Análogamente $A^{-1} = C = E^c(I_n) = E_1^c(I_n)E_2^c(I_n) \dots E_h^c(I_n)$.

Box I.3.2. Algoritmo de la Inversa (Gauss-Jordan)

Calcula la inversa de una matriz cuadrada $A_{n\times n}$ mediante $[A_n \mid I_n] \overset{f}{\sim} [I_n \mid A^{-1}]$ (o bien $\left[\frac{A_n}{I_n}\right] \overset{c}{\sim} \left[\frac{I_n}{A^{-1}}\right]$).

Paso 1. Escribir la matriz ampliada o por bloques $[A_n \mid I_n]$ de tamaño $n \times 2n$ (o bien $\left[\frac{A_n}{I_n}\right]$ de tamaño $2n \times n$)

Paso 2. Reducir A_n a I_n aplicando operaciones elementales en las filas de $[A \mid I_n]$ (o bien en las columnas de $\left[\frac{A_n}{I_n}\right]$) (solo en las filas o solo en las columnas).

Paso 3. Si durante el proceso se genera una fila (o una columna) nula, A_n no es invertible. En caso contrario, continuar hasta reducir A_n a su forma canónica por filas C_r^f (o por columnas C_r^c).

Paso 4. Si A_n es equivalente por filas (o por columnas) a I_n, entonces $[A \mid I_n]$ es equivalente por filas a $[I_n \mid A^{-1}]$ (o por columnas a $\left[\frac{I_n}{A^{-1}}\right]$).

Nota: Si no es posible la reducción de A_n a I_n, A_n no es invertible.

I.3.3.3. Teorema de la Matriz Invertible

Una matriz cuadrada A_n es invertible si y solo si se verifica alguna (cualquiera) de las siguientes condiciones (que son equivalentes):

1. Existe otra matriz cuadrada D_n (de igual tamaño) tal que $AD = DA = I_n$ y entonces $D = A^{-1}$ y $A = D^{-1}$.

2. A es regular : $AB = AC \Rightarrow B = C$ y $BA = CA \Rightarrow B = C$.

3. A no es divisor de cero: Si $AB = 0 \Rightarrow B = 0$ y si $BA = 0 \Rightarrow B = 0$.

4. A^t es invertible.

5. A es equivalente a I_n (y también lo es por filas y por columnas). De hecho, $C_r = C_r^f = C_r^c = I_n$

6. A tiene rango n (las n columnas y las n filas de A son linealmente independientes) y por tanto A tiene n pivotes (todos los elementos de la diagonal de cualquier forma escalonada son no nulos).

7. A puede escribirse como producto de matrices elementales.

8. Si A es la matriz de coeficientes de un sistema inhomogéneo de ecuaciones lineales $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, el sistema tiene solución única para cada $\vec{b}$, que es $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \quad \forall \vec{b} \in K^n$ y su sistema homogéneo asociado $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ solo tiene la solución nula (ambos son compatibles determinados).

9. El determinante de A es no nulo $|A| \neq 0$

10. Las columnas de A forman una base de K^n y las filas de A forman una base de K^n

11. $Col\ A = K^n$ y $\dim(Col\ A) = n$

12. $Nul\ A = \{\vec{0}\}$ y $\dim(Nul\ A) = 0$

Nota: La negación del teorema describe una propiedad de toda matriz singular A_n

I.3.4. Aplicaciones

I.3.4.1. Teorema de Rouche

Dado un sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b}$, dependiendo del número n de incógnitas y de los rangos de las matrices $A_{m\times n}$ (de coeficientes) y $[A \mid B]$ (ampliada) se tiene:

1. $A\vec{x} = \vec{b}$ es compatible $\Leftrightarrow$ $rang\ AB = rang\ A$

2. $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene una y solo una solución (compatible determinado) $\Leftrightarrow$ $rang\ AB = rang\ A = n$

3. $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene más de una solución (compatible indeterminado) $\Leftrightarrow$ $rang\ AB = rang\ A < n$

Nota: El teorema permite hacer un estudio de compatibilidad de un sistema (pero no la búsqueda de sus soluciones). Es equivalente al Teorema de Existencia y Unicidad.

Aplicación a los sistemas homogéneos: Dado un sistema de ecuaciones lineales homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$ con matriz de coeficientes $A_{m\times n}$

1. $A\vec{x} = \vec{0}$ es siempre compatible, pues tiene, al menos la solución nula $\vec{x} = \vec{0}$

2. $A\vec{x} = \vec{0}$ es compatible indeterminado (tiene alguna solución no nula) $\Leftrightarrow$ $rang\ A < n$

3. Si $A\vec{x} = \vec{0}$ es cuadrado (tantas ecuaciones como incógnitas, $m = n$) entonces si el sistema tiene alguna solución no nula $\Leftrightarrow$ A no es invertible $(det(A) = 0)$

I.3.4.2. Tipos de matrices

- $a_{ij} = 0, i > j \Rightarrow A_n$ triangular superior. Si $a_{ij} = 0, i < j \Rightarrow A_n$ triangular inferior.

· **Matrices Triangulares.** Si A_n y B_n son matrices triangulares superiores: i) $A + B$ es triangular superior con diagonal $a_{ii} + b_{ii}$; ii) kA también, con diagonal ka_{ii}; iii) AB también, con diagonal $a_{ii}b_{ii}$; iv) A^n también, con diagonal a_{ii}^n ; v) A es invertible si y solo si cada elemento diagonal $a_{ii} \neq 0$ y en ese caso A^{-1} es triangular superior con diagonal a_{ii}^{-1}.

Nota: Lo análogo se aplica a matrices triangulares inferiores.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- $a_{ij} = 0, i \neq j \;\Rightarrow A_n$ diagonal (matriz cuadrada con entradas no diagonales nulas).

· **Matrices Diagonales.** i) Son matrices triangulares superiores e inferiores y por tanto; ii) La suma, producto por escalar y producto de matrices diagonales son matrices diagonales y cumplen todas la propiedades de las matrices triangulares haciendo $a_{ij} = 0 \; \forall i \neq j$; iii) Dos matrices diagonales conmutan.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

▪ $a_{ij} = 0, i \neq j$ y $a_{ij} = k, i = j,\ k \in K \Rightarrow A_n$ matriz escalar (diagonal con iguales elementos en su diagonal)

· **Matrices Escalares.** Si $D_k = kI$ es una matriz escalar, entonces: i) $D_k A = kA$; ii) $BD_k = kB$; iii) $D_k + D_{k'} = D_{k+k'}$; iv) $D_k D_{k'} = D_{kk'}$; v) $D_k \cdot B = B \cdot D_k$

▪ $a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j \Rightarrow A_n$ simétrica. Si $a_{ij} = -a_{ji}\ \forall i, j \Rightarrow A_n$ antisimétrica.

· **Matrices Simétricas.** Si A_n y B_n son simétricas: i) $A + B$ es simétrica; ii) kA es simétrica; iii) AB no es necesariamente simétrica; iv) Si A es invertible, entonces A^{-1} es simétrica $(A^{-1} = (A^{-1})^t)$; v) Si A es simétrica, A^n es simétrica.

Nota: Las propiedades i)-iv) se aplican a las matrices antisimétricas.

Nota: A_n simétrica $\Leftrightarrow A = A^t\ (a_{ij} = a_{ji})$ y A_n antisimétrica $\Leftrightarrow A = -A^t\ (a_{ij} = -a_{ji})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema: Para toda matriz $A_{m\times n}$ entonces AA^t y A^tA son simétricas. Además, si M_n es una matriz cuadrada se verifica: i) $M + M^t$ es simétrica; ii) $M - M^t$ es antisimétrica; iii) $M = S + A$ con S simétrica y A antisimétrica y tal descomposición es única

Nota: $M = S + A$ con $S = (M + M^t)/2$ y $A = (M - M^t)/2$.

I.3.4.3. Matrices en bloques

Definición. Dada una matriz $A_{m\times n}$ se llama submatriz de A que definen los índices de filas $i_1, i_2, \dots, i_q$ y los de columnas $j_1, j_2, \dots, j_k$ a la matriz $q \times k$ cuyo elemento de lugar (r, s) es el elemento de lugar (i_r, j_s) de A. Los elementos de la submatriz son aquellos en los que se cruzan dichas filas y columnas.

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j_1} & \dots & a_{1j_2} & \dots & a_{1j_k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i_1 1} & \dots & a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_k} & \dots & a_{i_1 n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i_q 1} & \dots & a_{i_q j_1} & \dots & a_{i_q j_2} & \dots & a_{i_q j_k} & \dots & a_{i_q n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj_1} & \dots & a_{mj_2} & \dots & a_{mj_k} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_q j_1} & a_{i_q j_2} & \dots & a_{i_q j_k} \end{bmatrix}$$

Si los índices de filas y columnas son consecutivos $(0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_q = m; 0 < j_1 < j_2 < \cdots < j_k = n)$ la submatriz A_{rs} que definen las filas entre $i_{r-1} + 1$ y i_r (inclusive) y las columnas entre $j_{s-1} + 1$ y j_s (inclusive) se llama bloque o caja. Siendo así, $A_{m\times n}$ se descompone en $q \cdot k$ bloques A_{rs}.

$$A' = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1k} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2k} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{q1} & A_{q2} & \dots & A_{qk} \end{array}\right]$$

Suma: Si las matrices $A_{m\times n}$ y $B_{m\times n}$ son del mismo tamaño y están partidas en la misma forma , cada bloque de $A' + B'$ es la suma matricial de los bloques correspondientes de A y B:

$$A' + B' = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & \cdots & A_{1k} + B_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{q1} + B_{q1} & \cdots & A_{qk} + B_{qk} \end{bmatrix} \qquad kA' = \begin{bmatrix} kA_{11} & \cdots & kA_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ kA_{q1} & \cdots & kA_{qk} \end{bmatrix}$$

Producto de matrices: Si $A_{m\times p}$ se configura en q bloques fila y k bloques columna $(A'_{q\times k})$, y $B_{p\times n}$ lo está en k bloques fila y r bloques columna $(B'_{k\times r})$, el producto $C_{m\times n} = AB$ puede expresarse en $q \times r$ bloques operando con los bloques A_{ih} y B_{hj} como si se tratara de escalares $(C'_{q\times r} = A'_{q\times k}B'_{k\times r})$, siempre y cuando el número de columnas en cada bloque A_{ih} sea igual al numero de filas de cada bloque B_{hj}

$$C' = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{q1} & \cdots & C_{qr} \end{bmatrix} C_{ij} = \sum_{h=1}^{k} A_{ih}B_{hj} \qquad AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_1 + A_{12}B_2 \\ A_{21}B_1 + A_{22}B_2 \end{bmatrix}$$

Una matriz A por bloques se llama **matriz cuadrada por bloques** si: i) A es cuadrada; ii) los bloques forman una matriz cuadrada; iii) los bloques diagonales son también matrices cuadradas.

$$A_n = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kk} \end{bmatrix}$$

Una **matriz diagonal por bloques** es una matriz cuadrada por bloques en la que todos los bloques no diagonales son matrices nulas. Análogamente se define la matriz triangular por bloques:

$$A_n = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_{kk} \end{bmatrix}$$

Nota: En general, las matrices por bloques cumplen las mismas propiedades que las ya vistas para las matrices triangulares, diagonales, etc.

I.3.4.4. Factorización LU

La factorización LU es un método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, en el cual la matriz $A_{m\times n}$ se expresa como producto $A = L \cdot U$, donde L_m es triangular inferior unitaria y $U_{m\times n}$ es una forma escalonada superior por filas de A (que será triangular superior si A es cuadrada).

Teorema. Si $A_{m\times n}$ puede reducirse a una forma escalona por filas $U_{m\times n}$ haciendo solamente operaciones elementales fila de reemplazo (o sea, sin intercambios de filas), entonces A admite factorización LU, con $L = F^{-1}$ (notar que no es esencial escalar filas para reducir una matriz a una forma escalonada)

$$E^f(A) = F \cdot A = E_k^f(I_m) \cdot E_{k-1}^f(I_m) \cdot \ldots \cdot E_2^f(I_m) \cdot E_1^f(I_m) \cdot A = U$$

$$A = \left[E_k^f(I_m) \cdot E_{k-1}^f(I_m) \ldots E_1^f(I_m)\right]^{-1} \cdot U = F^{-1} \cdot U$$

Nota: L es el producto de las inversas de las matrices elementales usadas en la reducción de A a U.

Nota: Una matriz A_n invertible siempre admite factorización LU, ya que tiene n pivotes, por lo que no será necesario hacer intercambios de fila. Además, si A_n es invertible: i) L y U son únicas; ii) Las matrices L y U pueden usarse para calcular $A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1}$; iii) Además se cumple: $|A| = |L| \cdot |U| = |U|$

Nota: El Teorema proporciona un método de resolución de un conjunto de sistemas con la misma matriz de coeficientes $A_{m\times n}$: $A\vec{x} = \vec{b}_1, \ldots, A\vec{x} = \vec{b}_n$.

Supongamos que F^{-1} es una matriz triangular inferior $F^{-1} = L$. Escribiendo $A\vec{x} = \vec{b}$ como $A\vec{x} = LU\vec{x}$ y llamando $U\vec{x} = \vec{y}$, el sistema queda como $L\vec{y} = \vec{b}$, y $\vec{x}$ puede despejarse en dos pasos:

i) se resuelve $L\vec{y} = \vec{b}$ mediante sustitución hacia adelante;

ii) se resuelve $U\vec{x} = \vec{y}$ mediante sustitución hacia atrás.

Box I.3.3. Algoritmo Factorización LU

Paso 1. Reduzca $A_{m\times n}$ a una forma escalonada $U_{m\times n}$ mediante sucesión de operaciones de reemplazo de filas (si es posible).

Paso 2. El paso 1 no siempre es posible, pero si lo es, existe factorización LU. En ese caso, $L_m = F^{-1} = \left[E_k^f(I_m)\cdot E_{k-1}^f(I_m)\ldots E_1^f(I_m)\right]^{-1}$

Truco: Las entradas de L pueden colocarse de forma que la misma sucesión de operaciones que reduce A a U reduzca L a I_m. Se llaman multiplicadores a los números $m_{ij}^k = a_{ij}^k / a_{ii}^k$ que resultan de aplicar $-m_{ij}^k R_i + R_j \to R'_j$, $i = 1,2,\ldots m-1$, $j = i+1, i+2, \ldots, m$ en la matriz equivalente $E_k^f(A)$ obtenida en cada paso k de la reducción. La inversa de dicha operación es $m_{ij}^k R_i + R'_j \to R_j$. Efectuar estas operaciones en orden inverso sobre I proporciona la matriz L. Así, L tiene cada multiplicador de la operación elemental en la misma posición usada para introducir el correspondiente 0 en U.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ m_{21}^1 & 1 & 0 & & \\ m_{31}^2 & m_{32}^m & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ m_{m1}^{m-1} & m_{m2}^{2m-3} & \ldots & m_{mm-1}^k & 1 \end{bmatrix}$$

Nota: Las operaciones de escalamiento no están prohibidas en la factorización LU. Si se hacen, F^{-1} seguirá siendo triangular inferior L, pero su diagonal contendrá elementos distintos de 1.

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{U}$$

$$\boxed{\begin{aligned} L\mathbf{y} &= \mathbf{b} \\ U\mathbf{x} &= \mathbf{y} \end{aligned}}$$