Tema 2. Espacios Vectoriales

Álgebra. 1º IEC

II. Espacios vectoriales

II.1. Definición

- II.1.1. Vectores geométricos en K^n
- II.1.2. Generalización
- II.1.3. Subespacios vectoriales
- II.1.4. Representación de un espacio vectorial
    - Box II.1.1. Representación de un espacio vectorial

II.2. Sistemas generadores e independencia lineal

- II.2.1. Envolvente lineal
- II.2.2. Sistemas dependientes e independientes
    - Box II.2.1. Análisis de la independencia lineal
- II.2.3. Rango de un sistema de vectores
    - Box II.2.2. Cálculo del rango de un sistema de vectores

II.3. Bases

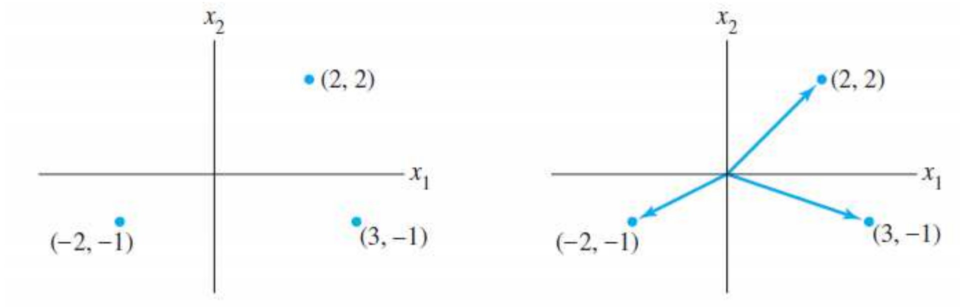
- II.3.1. Definición
- II.3.2. Dimensión de un espacio vectorial
- II.3.3. Criterio y propiedades de las bases
- II.3.4. Coordenadas de una base
- II.3.5. Cambio de coordenadas
    - Box II.3.1. Algoritmo de cambio de coordenadas

II.1. Definición

II.1.1. Vectores geométricos en K^n

Definición: Se denomina vector de K^n a la lista ordenada de n escalares del cuerpo K (o sea, los elementos formados por sucesiones ordenadas de n escalares de K). Los n escalares se llaman componentes. El conjunto K^n está formado por todos los vectores de n componentes .

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \equiv \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \in K^n$$

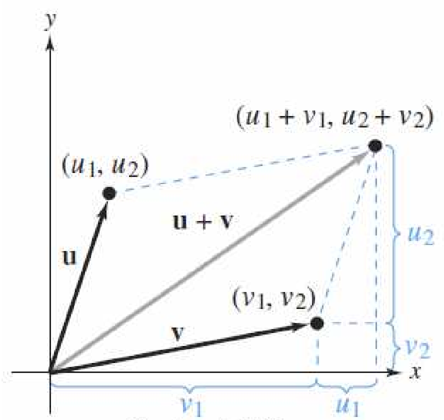


Vectors as points. Vectors with arrows.

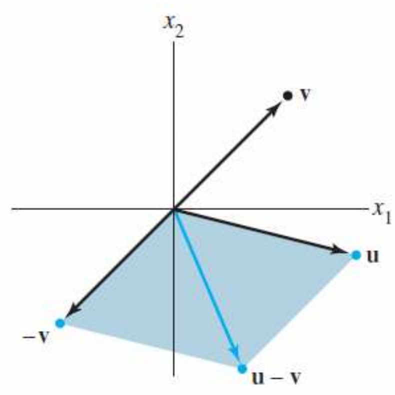
Operaciones canónicas:

1. Suma de vectores: $\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots u_n + v_n)\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in K^n$

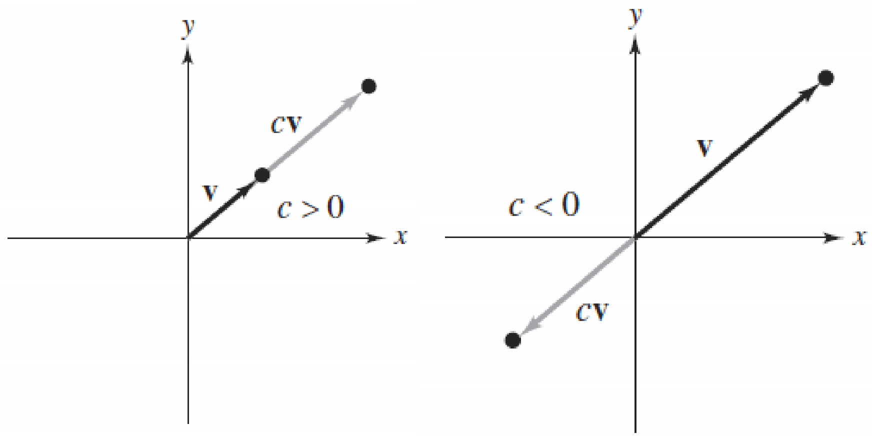
2. Producto por escalar: $c \cdot \vec{u} = c \cdot (u_1, u_2, \dots, u_n) = (c \cdot u_1, c \cdot u_2, \dots, c \cdot u_n)\ \forall c \in K,\ \forall \vec{u} \in K^n$



Vector Addition



Vector subtraction



Propiedades: $\forall c, d \in K$ y $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in K^n$ y $\vec{0}$ el vector nulo (o identidad aditiva)

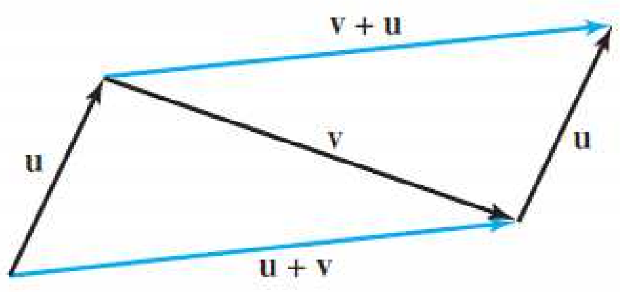
1. La suma es cerrada: $\vec{u} + \vec{v} \in K^n$

   - Asociatividad: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
   - Conmutatividad: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
   - Identidad Aditiva: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ con $\vec{0} = (0,0, \overset{n}{\cdots}, 0)$
   - Elemento opuesto (o simétrico aditivo): $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$

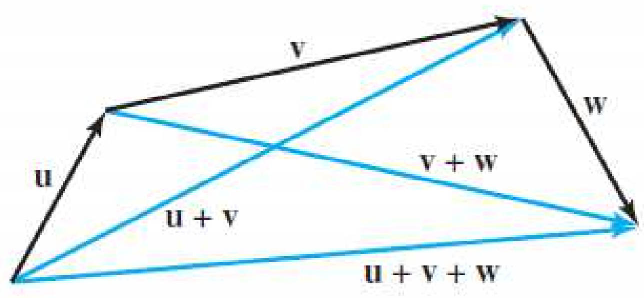
Nota: El inverso aditivo es único: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} = -\vec{v}$

2. El producto por escalar es cerrado: $c \cdot \vec{u} \in K^n$

   - Distributividad respecto de la suma de vectores: $c \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = c \cdot \vec{u} + c \cdot \vec{v}$
   - Distributividad respecto de la suma de escalares: $(c + d) \cdot \vec{u} = c \cdot \vec{u} + d \cdot \vec{u}$
   - Asociatividad: $c \cdot (d \cdot \vec{u}) = (c \cdot d) \cdot \vec{u}$
   - Identidad Escalar: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$



$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}.$



$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}).$

II.1.2. Generalización

Definición: Sea V un conjunto no vacío de objetos (llamados vectores) en el que se han definido dos operaciones: suma de vectores $(+)$ y multiplicación por escalar $(\cdot)$. Se considera un cuerpo K a cuyos elementos llamaremos escalares. Se dice que V es un espacio vectorial sobre K si $\forall\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\ \in V$ y $c, d\ \in K$ se satisfacen las siguientes propiedades o axiomas:

1. La suma de vectores es una operación interna en V (**la suma es cerrada**: $\vec{u} + \vec{v}\ \in V$) y cumple:

- Asociatividad: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- Conmutatividad: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- Identidad Aditiva: $\exists!\ \vec{0} \in V$ (vector nulo o vector cero) tal que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
- Elemento opuesto: $\forall \vec{u} \in V\ \Rightarrow \exists! - \vec{u}\ \in V$ (inverso aditivo) tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$

Nota: Estas cuatro propiedades se resumen diciendo que la estructura aditiva $(V, +)$ es un grupo conmutativo. Por serlo el vector nulo $\vec{0}$ es único, y cada vector $\vec{u}$ en V tiene un solo opuesto $-\vec{u}$.

2. **El producto por escalar es una operación externa cerrada** tal que $c \cdot \vec{u}\ \in V$ y cumple:

- Distributividad respecto de la suma de vectores: $c \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = c \cdot \vec{u} + c \cdot \vec{v}$
- Distributividad respecto de la suma de escalares: $(c + d) \cdot \vec{u} = c \cdot \vec{u} + d \cdot \vec{u}$
- Asociatividad: $c \cdot (d \cdot \vec{u}) = (c \cdot d) \cdot \vec{u}$
- Identidad Escalar: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ (1 es la unidad de K)

Nota: Estas cuatro propiedades resumen (regulan) la acción del cuerpo K sobre V.

Summary of Important Vector Spaces

$$
\begin{aligned}
R &= \text{set of all real numbers} \\
R^2 &= \text{set of all ordered pairs} \\
R^3 &= \text{set of all ordered triples} \\
R^n &= \text{set of all } n\text{-tuples} \\
C(-\infty, \infty) &= \text{set of all continuous functions defined on the real number line} \\
C[a, b] &= \text{set of all continuous functions defined on a closed interval } [a, b] \\
P &= \text{set of all polynomials} \\
P_n &= \text{set of all polynomials of degree} \leq n \\
M_{m,n} &= \text{set of all } m \times n \text{ matrices} \\
M_{n,n} &= \text{set of all } n \times n \text{ square matrices}
\end{aligned}
$$

Propiedades

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Para cualesquiera $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ y $c, d \in K$ se verifican las siguientes propiedades:

- $c \cdot \vec{0} = \vec{0}$
- $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$
- $c \cdot \vec{u} = \vec{0} \Rightarrow c = 0$ ó $\vec{u} = \vec{0}$
- $\left[c \cdot \vec{u} = d \cdot \vec{u} \text{ y } \vec{u} \neq \vec{0}\right] \Rightarrow c = d$
- $[c \cdot \vec{u} = c \cdot \vec{v} \text{ y } c \neq 0] \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$
- $(-c) \cdot \vec{u} = c \cdot (-\vec{u}) = -c \cdot \vec{u}$ (en particular $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$ y $-(-\vec{u}) = \vec{u}$)

II.1.3. Subespacios vectoriales

Definición: Sea V un espacio vectorial sobre K y sea U un subconjunto de V no vacío. Se dice que U es un **subespacio vectorial** de V si las operaciones de V son también operaciones (cerradas) para U, y con ellas U es un espacio vectorial sobre K.

Nota: U es un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalar definidas en V. Así, se llama subespacio vectorial a aquellos subconjuntos $U \subseteq V$ que son a su vez espacios vectoriales.

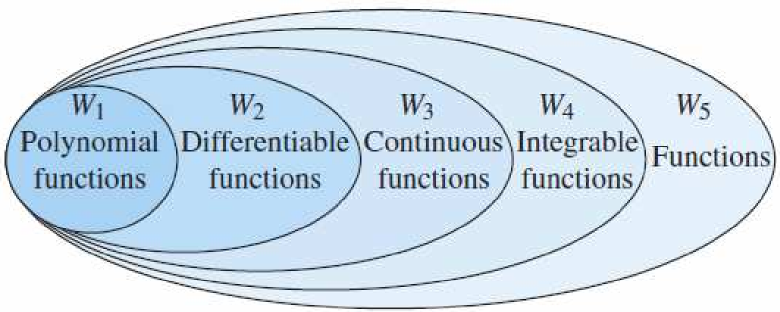
Caracterización (Teorema): $U \subseteq V$ es un subespacio vectorial de V si y solo si, siendo $U \neq \emptyset$ entonces:

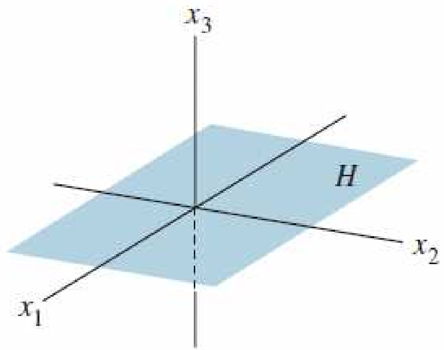
$$\left.\begin{array}{l} \forall \vec{u}, \vec{v} \in U \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in U \\ \forall c \in K, \vec{u} \in U \Rightarrow c \cdot \vec{u} \in U \end{array}\right\} \Leftrightarrow [\forall \vec{u}, \vec{v} \in U \ y\ \forall c, d \in K] \Rightarrow c \cdot \vec{u} + d \cdot \vec{v} \in U \text{ (Corolario)}$$

Se dice que el vector $c \cdot \vec{u} + d \cdot \vec{v}$ es una combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

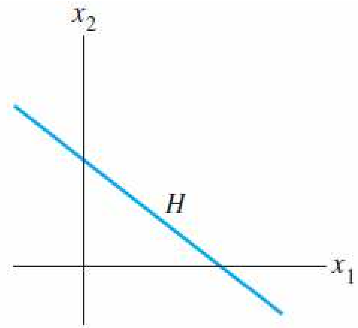
Nota: Un espacio vectorial V tiene como mínimo dos subespacios: el mismo V, y el subespacio nulo $\{\vec{0}\}$, que es el más pequeño de los subespacios de V. Éstos se llaman subespacios triviales o impropios. Los demás (si los hay) son subespacios propios.

Nota: Como un subespacio es un espacio vectorial, debe contener el vector $\vec{0}$, y así, si U es subespacio de V, U y V deben tener el mismo vector nulo. En general, $\vec{0} \in V$ pertenece a todos los subespacios de V.



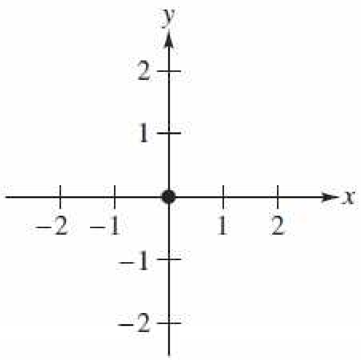


The x_1x_2-plane as a subspace of $\mathbb{R}^3$

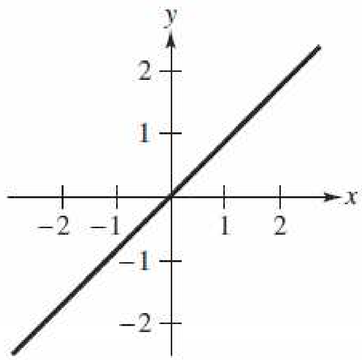


A line that is not a vector space

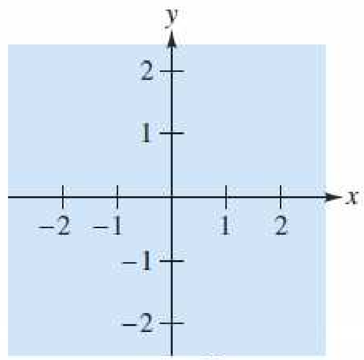
Un subconjunto U de $\mathbb{R}^2$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ si y solo si está formado por alguno de estos conjuntos: 1) $(0{,}0)$; 2) una recta que pasa por el origen; 3) todo $\mathbb{R}^2$. Un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ es subespacio vectorial (con las operaciones canónicas) si y solo si: 1) contiene $(0{,}0{,}0)$; 2) todos los puntos de una recta que pasa por el origen; 3) todos los puntos de un plano que pasa por el origen; 4) todo $\mathbb{R}^3$.



$W = \{(0, 0)\}$



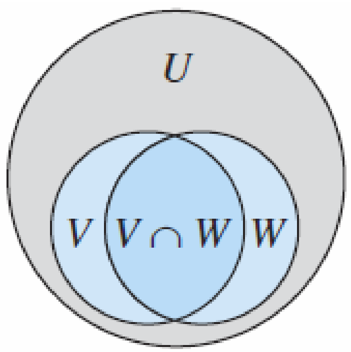
W = all points on a line passing through the origin

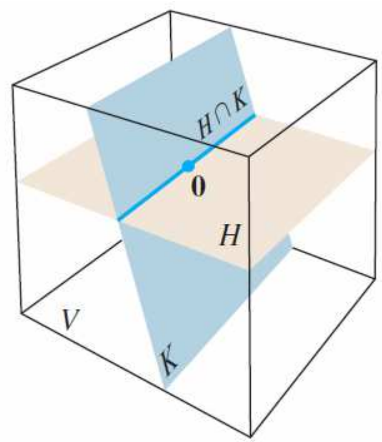


$W = R^2$

Teorema: La intersección de dos (o cualquier número) de subespacios de un espacio vectorial V es un subespacio vectorial de V.

Nota: La unión de dos subespacios $U_1 \cup U_2$ no es espacio vectorial.





II.1.4. Representación de un espacio vectorial

Box II.1.1. Representación de un espacio vectorial

Sea U un subespacio vectorial de un espacio vectorial V:

1. Si el subespacio vectorial U está dado en forma explícita $U = \{\vec{x} = f(s,t,\dots) \mid s,t,\dots \in K\}$, su forma implícita $U = \{(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n) \mid f(x_i) = 0\}$ puede obtenerse como sigue:

Paso 1. Escribir el sistema de ecuaciones $\vec{x} = f(s,t,\dots)$ cuyas incógnitas son $(s,t,\dots)$ en función de las componentes de $\vec{x} = (x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)$, esto es $S \cdot \vec{t} = \vec{x}$, siendo $\vec{t} = (s,t,\dots)$.

Paso 2. Reducir por filas la matriz ampliada del sistema de ecuaciones $[\,S \mid \vec{x}\,]$. El sistema será compatible si la columna de términos independientes $\vec{x}$ no es una columna pivote.

Paso 3. 3a). Si el sistema es compatible $\forall\vec{x}$, entonces $U = V$. 3b) En caso contrario, extraer las condiciones que debe satisfacer el vector $\vec{x}$ para que el anterior sistema sea compatible. Dichas condiciones representan una serie de relaciones entre sus componentes, esto es $f(x_i) = 0$, que no es otra que la representación implícita (ecuaciones cartesianas) de U.

Nota: Lo anterior equivale a eliminar los parámetros $(s,t,\dots)$ del sistema $\vec{x} = f(s,t,\dots)$. La matriz S tiene como columnas a los vectores $\vec{u},\vec{v},\dots$ tales que $\vec{x} = f(s,t,\dots) = \vec{u}\cdot s + \vec{v}\cdot t + \cdots$.

2. Si el espacio vectorial U está dado en forma implícita $U = \{(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n) \mid f(x_i) = 0\}$, su forma explícita $U = \{\vec{x} = f(s,t,\dots) \mid s,t,\dots \in K\}$ puede obtenerse como sigue:

Paso 1. Escribir el sistema de ecuaciones homogéneo dado por $f(x_i) = 0$ cuyas incógnitas son las componentes de $\vec{x} = (x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)$, esto es $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

Paso 2. Reducir por filas la matriz ampliada del sistema de ecuaciones $[\,A \mid \vec{0}\,]$.

Paso 3. Escribir la solución del anterior sistema en forma paramétrica, esto es $\vec{x} = f(s,t,\dots)$. Dichas soluciones representan la forma explícita (ecuaciones paramétricas) del subespacio vectorial de U.

II.2. Sistemas generadores e independencia lineal

II.2.1. Envolvente lineal

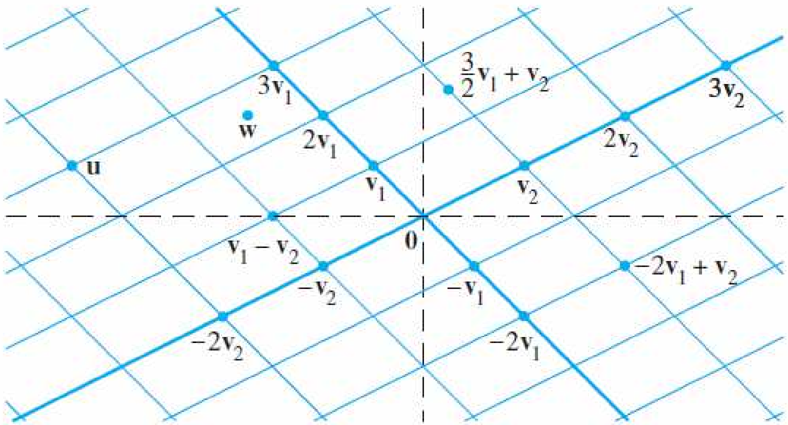
Definición. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sea $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ un conjunto (o sistema) de vectores de V. Se llama **combinación lineal** de los vectores de S a cualquier vector de la forma $\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_p\vec{u}_p, c_i \in K$. Los escalares c_i reciben el nombre de pesos. Se dice que $\vec{v}$ depende linealmente de S si puede expresarse como combinación lineal de alguno de sus vectores.

Nota: La dependencia lineal es transitiva: si $\vec{v}$ depende de unos vectores $\vec{u}_i$ y cada uno de éstos depende de otros $\vec{w}_j$, entonces $\vec{v}$ depende de los vectores $\vec{w}_j$.

Definición. Sea $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\} \in V$ un conjunto finito no vacío de vectores de un espacio vectorial V. Se llama **envolvente lineal** de S al conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores de S, y se denota por $Lin(S)$ o $Gen(S)$.

$$Lin(S) = \{c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_p\vec{u}_p \mid c_i \in K, i = 1,2,\dots,p\} = \left\{\sum_{i=1}^{p} c_i\vec{u}_i \mid c_i \in K\right\}$$

Nota: También se dice que S genera $Lin(S)$, o es un **sistema generador de vectores** del conjunto $Lin(S)$.



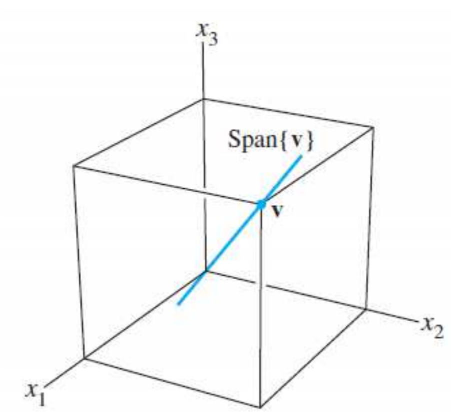
Linear combinations of $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$.

Teorema. Sea $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\} \in V$ un conjunto finito no vacío de vectores de un espacio vectorial V. $Lin(S)$ es un subespacio vectorial de V que contiene a S y es el menor subespacio de todos los que contienen a S.

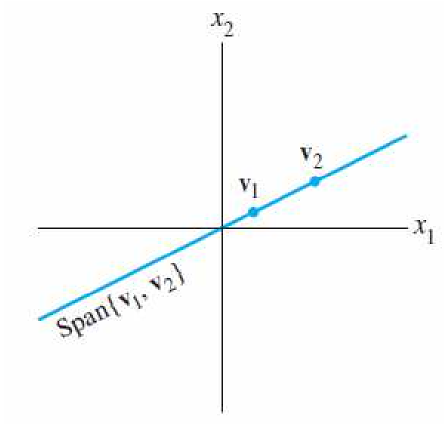
Nota: Por tanto cualquier conjunto de vectores S genera un subespacio vectorial $U = Lin(S)$. Así, $Lin(S)$ también se llama subespacio generado (o engendrado) por S.

Nota: Dado cualquier subespacio U de V, un conjunto generador de U es un sistema $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\} \in U$ tal que $U = Lin(S)$. Dicho conjunto no es único.

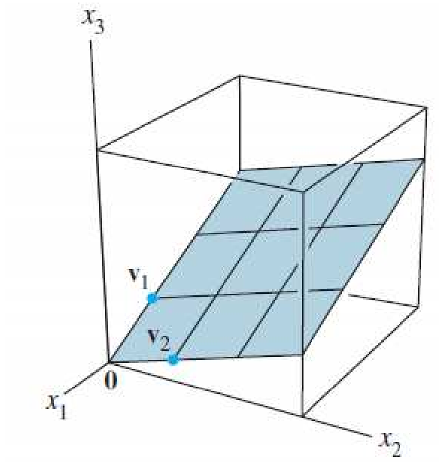
Nota: El conjunto de vectores $S \in V$ será un sistema generador de todo el espacio vectorial V si todo vector de V puede escribirse como combinación lineal de los vectores de S.



Span $\{\mathbf{v}\}$ as a line through the origin.



$\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_2 = k\mathbf{v}_1$.



Span $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ as a plane through the origin.

Sistemas equivalentes: Sean $S = \{\vec{u}_i, i = 1,2, \dots, p\}$ y $T = \{\vec{v}_j, j = 1,2, \dots, q\}$ dos sistemas de vectores de un espacio vectorial V. Se dice que S y T son sistemas equivalentes si engendran el mismo subespacio, esto es, si $Lin(S) = Lin(T)$.

Nota: Lo anterior implica que todo vector de uno cualquiera de los sistemas S o T depende linealmente (se puede escribir como combinación lineal) de los vectores del otro.

II.2.2. Sistemas dependientes e independientes

Definición: Sea $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ un sistema de vectores de un espacio vectorial V sobre un cuerpo K.

Se dice que S es un sistema **linealmente independiente** o libre si cumple alguna de las siguientes condiciones, que son equivalentes:

1. Ninguno de los vectores de S depende de los demás vectores de S

2. La única combinación lineal de vectores de S que vale $\vec{0}$ es la que tiene todos sus coeficientes nulos, esto es, la siguiente ecuación vectorial tiene solo la solución trivial:

$$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_p\vec{u}_p = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_p = 0 \ \ (c_i \in K) \ \ (1)$$

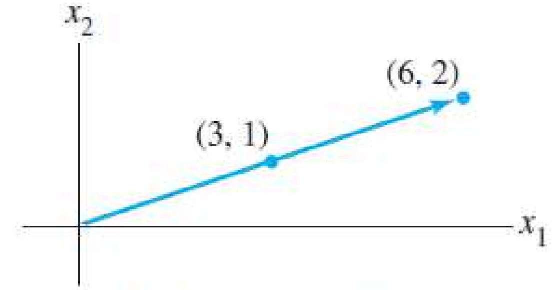
Se dice que S es un sistema **linealmente dependiente** o ligado si cumple alguna de las siguientes condiciones, que son equivalentes:

1. Alguno (al menos uno) de los vectores de S depende linealmente de los demás

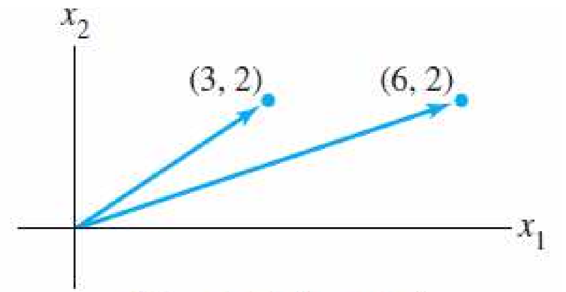
2. Existen escalares (o pesos) $c_1, c_2, \dots, c_p$ no todos nulos tales que:

$$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_p\vec{u}_p = \vec{0} \ \ (c_i \in K) \ \ (2)$$

Nota: (1) y (2) representan una ecuación vectorial de un sistema homogéneo. (1) implica que la ecuación tiene solo la solución trivial $c_i = 0$. (2) implica que el sistema homogéneo es compatible indeterminado.



Linearly dependent



Linearly independent

Box II.2.1. Análisis de la independencia lineal

Sea $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ un sistema de n vectores de un espacio vectorial V sobre el cuerpo K. Para saber si S es linealmente independiente:

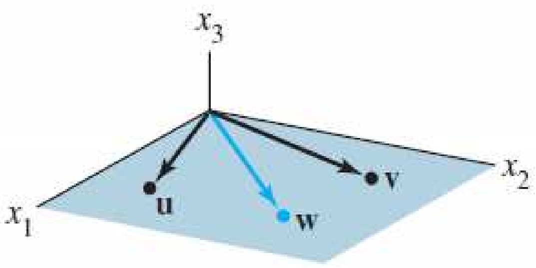
Paso 1. Resolver la ecuación vectorial $c_1 \cdot \vec{u}_1 + c_2 \cdot \vec{u}_2 + \cdots c_n \cdot \vec{u}_n = \vec{0}$ como un sistema lineal homogéneo en las variables $c_1, c_2, \dots, c_n$. Si $V = K^n$ esto se reduce a:

$$U \cdot \vec{c} = [\vec{u}_1 \quad \vec{u}_2 \quad \dots \quad \vec{u}_n] \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

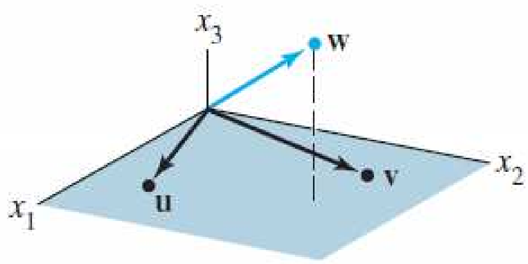
Paso 2. Por eliminación Gaussiana* (operaciones elementales en las filas de la matriz ampliada del sistema $[U \ \vec{c}]$) investigar la unicidad de las soluciones del sistema.

Paso 3. Si el sistema tiene solución única (esto es, la trivial $c_1 = c_2 =, \dots, = c_n = 0$) S es linealmente independiente. Si el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) S es linealmente dependiente.

*Nota: Análogamente, puede aplicarse el Teorema de Rouchê para analizar la unicidad de la solución del sistema de ecuaciones lineales.



Linearly dependent,
w in Span{**u**, **v**}



Linearly independent,
w *not* in Span{**u**, **v**}

Propiedades

1. El vector $\vec{0}$ es linealmente dependiente. Cualquier conjunto S que contenga el vector $\vec{0}$ es linealmente dependiente.

2. Si $S = \{\vec{u}\}$ y $\vec{u} \neq \vec{0}$ el sistema es linealmente independiente. Así, un conjunto S que contiene un único vector $\vec{u}$ es linealmente independiente si y solo si $\vec{u} \neq \vec{0}$.

3. Un sistema $S = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ formado por dos vectores es linealmente dependiente si y solo si uno de ellos es múltiplo del otro. Así, si dos vectores no nulos de S son iguales o uno es múltiplo de otro el sistema es linealmente dependiente.

4. Dos sistemas $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ y $T = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q\}$ son equivalentes (o sea $Lin(S) = Lin(T)$) si y solo si todo vector de uno de los sistemas depende de los vectores del otro, y viceversa.

5. Si S es un sistema linealmente independiente y $\vec{v}$ es un vector que no depende de los vectores de S, el sistema $S \cup \{\vec{v}\}$ también es linealmente independiente.

6. Si un sistema S es linealmente independiente, también lo es cualquier sistema que resulte de prescindir de alguno de los vectores de S. O sea si S es linealmente independiente necesariamente lo es cualquier subconjunto de S.

7. Si S es linealmente dependiente también lo es cualquier sistema que resulte de añadir un vector cualquiera a S. Alternativamente, si S contiene un subconjunto linealmente dependiente, S es linealmente dependiente.

8. Si S es un sistema linealmente independiente, un vector $\vec{v}$ pertenece a $Lin(S)$ si y solo si $S \cup \{\vec{v}\}$ es linealmente dependiente.

Nota: Si $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ son p vectores de n componentes (o sea, vectores de K^n) y $p > n$, entonces el sistema es dependiente.

S={ ● }	L.I.		S={ ○ }	L.D.
S={ ● ● }	L.D.		S={ ● ● }	L.I.
S={ ● ● ● }	L.I.	⟶	S={ ● ● }	L.I.
S={ ● ● } U { ● }	L.I.	⟶	S={ ● ● ● }	L.I.
S={ ● ● ● }	L.D.	⟶	S={ ● ● }	L.I.
S={ ● ● ● } U { ● }	L.D.	⟶	S={ ● ● ● ● }	L.D.

II.2.3. Rango de un sistema de vectores

Teorema del rango. Para cualquier sistema $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ de vectores no todos nulos se verifica que:

1) Hay algún sistema S_0 de vectores de S tal que: a) S_0 es linealmente independiente; b) todos los demás vectores dependen linealmente de los de S_0;

2) Todos los sistemas S_0 de vectores de S que satisfacen 1) tienen el mismo número de vectores. A ese número se le llama rango del sistema S, $rang(S)$

Nota: Así, el rango de S es el mayor número de vectores linealmente independientes que hay en S. S es linealmente independiente si y solo si su rango es igual al número de vectores que lo forman.

Teorema. Si $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ es un sistema de vectores no todos nulos y $S' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_h\}$ depende de S entonces $rang(S') \leq p$.

Nota: El anterior teorema implica que el rango de un subconjunto S_0 de vectores de S no puede exceder el rango de S: $rang(S_0) \leq rang(S)$.

Propiedad fundamental del rango. El rango de un sistema de vectores no se altera si se realizan en él operaciones elementales:

1) intercambiar el orden en el que figuran los vectores en el sistema: $\vec{u}_i \leftrightarrow \vec{u}_j$

2) multiplicar uno de los vectores por un escalar no nulo: $\vec{u}_i \rightarrow \vec{u}_i' = k \cdot \vec{u}_i$

3) sumar a un vector un múltiplo (o combinación lineal) de otro(s): $\vec{u}_i \rightarrow \vec{u}_i' = \vec{u}_i + k' \cdot \vec{u}_j$

Box II.2.2. Cálculo del rango de un sistema de vectores

Sea $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$ un sistema de n vectores de un espacio vectorial K^n. Para hallar el rango de S:

Paso 1. Construir la matriz $A_{p\times n}$ cuyas filas son los vectores $\vec{u}_i$ $(i = 1,2, \ldots, p)$ del sistema S.

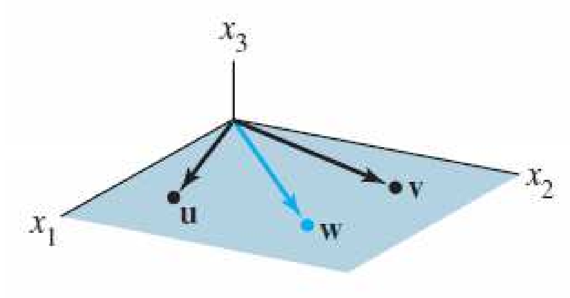
Paso 2. Hallar el rango por filas de A, aplicando operaciones elementales en sus filas.

Paso 3. El rango de S es el número de filas no nulas en la matriz escalonada por filas (o en la escalonada reducida C_r^f).

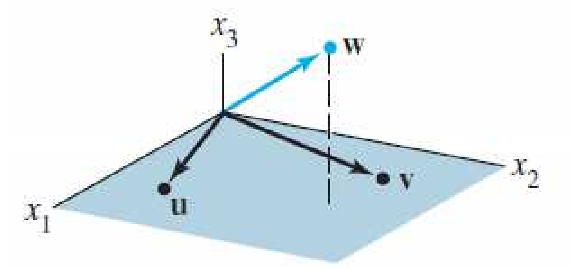
Nota: El algoritmo puede aplicarse igualmente construyendo la matriz $A'_{n\times p} = [\vec{u}_1 \quad \vec{u}_2 \quad \ldots \quad \vec{u}_p]$ cuyas columnas son los vectores del sistema S y hallando el rango por columnas (mediante operaciones elementales en las columnas de A').

Nota: Dado que el rango de una matriz por filas es igual al rango por columnas, el rango de $A_{p\times n}$ (o el de $A'_{n\times p}$) puede calcularse mediante operaciones elementales en las filas, en las columnas o en filas y columnas.

$rang(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 2$



$rang(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 3$



II.3. Bases

II.3.1. Definición

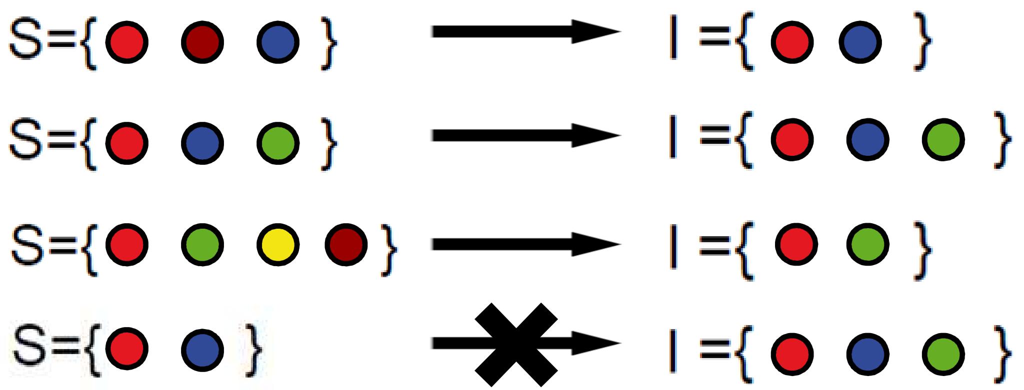
Teorema. Sea $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ un sistema formado por un número finito p de vectores de un espacio vectorial V y sea $U = Lin(S)$ el espacio vectorial generado por S. Se cumple:

- **Teorema del Sistema Generador**. Si uno de los vectores de S, por ejemplo $\vec{u}_i$, es linealmente dependiente en S, entonces $S' = S - \{\vec{u}_i\}$ todavía genera U, o sea $U = Lin(S) = Lin(S')$.

- **Teorema Fundamental de la Independencia**. Si $I = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_h\}$ es un sistema independiente formado por h vectores de U entonces $h \leq p$.

Nota: Así, el número de vectores independientes en un espacio vectorial U no puede exceder al número de vectores de cualquiera de sus sistemas generadores. Y a la inversa, el número de vectores de cualquier sistema generador es necesariamente mayor o igual al número máximo de vectores independientes en U.

Definición: Un espacio vectorial V sobre un cuerpo K se dice que es de tipo finito si está generado por un número finito de vectores, esto es, si en V existe algún sistema de vectores S finito tal que $V = Lin(S)$.



Base Ordenada: Si V es de tipo finito, se dice que un sistema de vectores $B=\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\dots,\vec{b}_n\}$ es una base de V si se verifica una cualquiera de las dos condiciones siguientes, que son equivalentes:

1.- B es un sistema generador de V linealmente independiente.

2.- **Teorema de representación única:** todo vector de $\vec{v}\in V$ se puede expresar de una y solo una manera como combinación lineal de los vectores de B (o sea, que existe un único conjunto de escalares $c_i\in K$ tales que $\vec{v}=c_1\vec{b}_1+c_2\vec{b}_2+\cdots+c_n\vec{b}_n$).

Nota: Así, una base de V es un conjunto linealmente independiente que genera todo el espacio vectorial V.

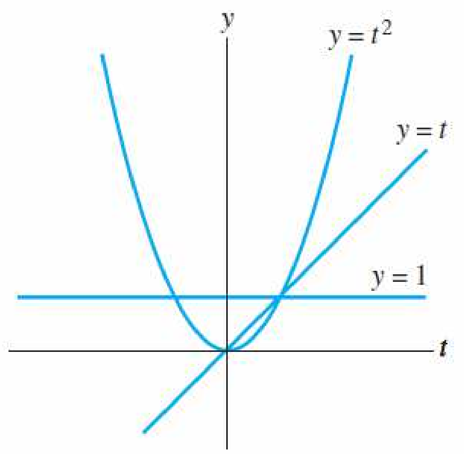
Nota: La definición también se aplica a cualquier subespacio vectorial U.

Bases Canónicas o Usuales:

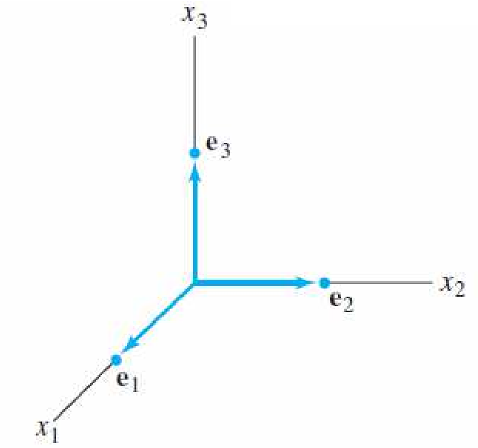
1.- En K^n: $E=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n\}$ con $\vec{e}_i=(0,\dots,(i^a=1),\dots 0)$.

2.- En $P_n[x]$: $E=\{1,x,x^2,\dots,x^n\}$.

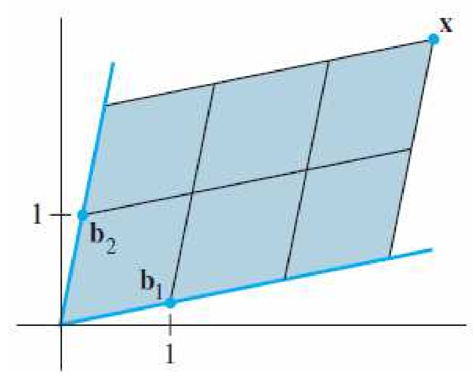
3.- En $\mathcal{M}_{m\times n}$, las $m\cdot n$ matrices $E=\{E_{ij}\}$ $(i=1,\dots,m, j=1,\dots,n)$ de $\mathcal{M}_{m\times n}$, siendo E_{ij} la matriz que tiene nulos todos sus elementos excepto el de lugar (i,j), que vale 1.



The standard basis for $\mathbb{P}_2$.



The standard basis for $\mathbb{R}^3$.



Nonstandard basis

II.3.2. Dimensión de un espacio vectorial

Teorema de la Dimensión. Todas las bases de un espacio vectorial $V \neq 0$ de tipo finito tienen el mismo número de vectores. A este número se le llama **dimensión** del espacio vectorial V, y se denota por $\dim V$.

Nota: Así, si B es una base de V y está formada por n vectores, cualquier otra base de V contiene exactamente n vectores. La dimensión de un espacio (o subespacio) vectorial $V \neq 0$ finito es por tanto el número de vectores que hay en cualquiera de sus bases (p.ej., la base canónica).

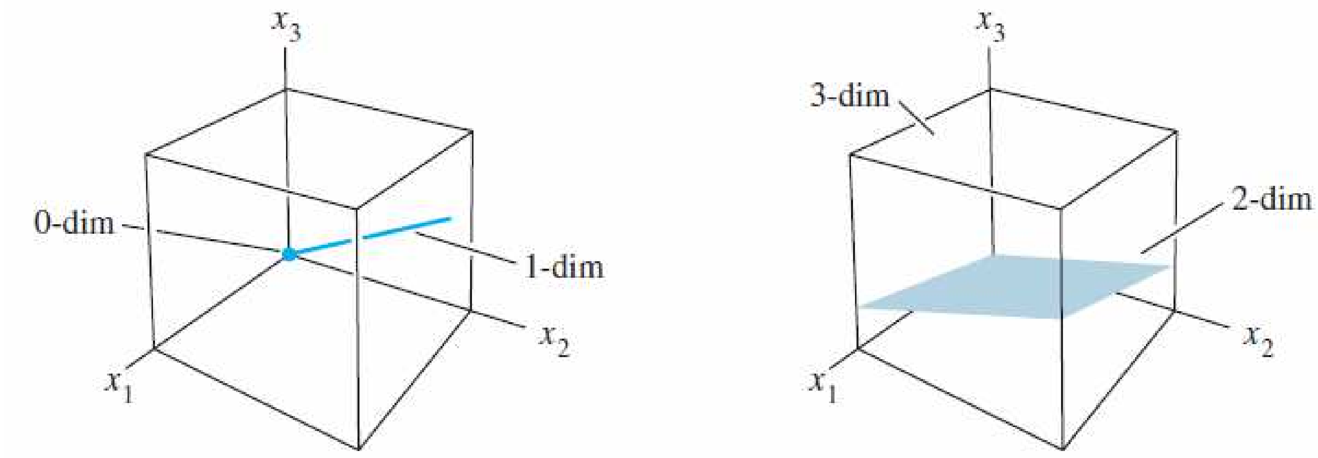
Nota: El subespacio nulo $V = 0$ no tiene base ($\vec{0}$ es linealmente dependiente) y por tanto tiene dimensión 0.

Teorema. Si U es un subespacio de un espacio vectorial V y V tiene dimensión finita, entonces U también tiene dimensión finita y $\dim U \leq \dim V$, donde $\dim U = \dim V$ solo es válido en el caso de que $U = V$.

Nota: Así, si U es un subespacio de un espacio n-dimensional V entonces $\dim U \leq n$ y $\dim U = n \Leftrightarrow U = V$.

Teorema. El rango de un sistema formado por un número finito de vectores $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ de un cierto espacio vectorial V es igual a la dimensión del subespacio que genera $rang\ S = \dim(Lin(S))$.

Nota: 1) Un sistema S es linealmente independiente si y solo si su rango es igual al número de vectores que los forman; 2) Un sistema generador S de n vectores de V es una base de V si y solo si su rango es n.



II.3.3. Criterio y propiedades de las bases

Sea $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ es un sistema de p vectores de un espacio vectorial V de dimensión finita $\dim V$:

1.- Si S es un sistema generador de V, $p \geq \dim V$

2.- Si S es un sistema independiente de V, $p \leq \dim V$

Nota: una base es un conjunto generador lo más pequeño posible (si se elimina un vector ya no genera V) y un conjunto linealmente independiente lo más grande posible (si se añade un vector ya no lo es).

Nota: Si $S = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ genera V, cualquier sistema S de más de n vectores de V es dependiente. Si $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ es una base de V, cualquier sistema S de más de n vectores de V es dependiente.

Teorema de la Base. Sea $V \neq 0$ un espacio vectorial de dimensión finita n: 1) Cualquier conjunto S linealmente independiente de exactamente n vectores de V es automáticamente una base de V; 2) Cualquier conjunto S de n elementos que genere V es automáticamente una base de V.

Nota: En general para concluir que un sistema S de n vectores es una base de V hay que probar que: 1) S genera V; 2) S es linealmente independiente. Pero si sabemos que $\dim V = n$ basta comprobar solo una.

Nota: Si V es un espacio vectorial de dimensión finita n y $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\} \in V$: 1) Si S es linealmente independiente, entonces S es una base (o sea S es base de V si y solo si su rango es n); 2) Si S genera V, entonces S es una base de V.

$$\begin{array}{cc} & p \\ n & \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix} \end{array}$$

FIGURE 3

If $p > n$, the columns are linearly dependent.

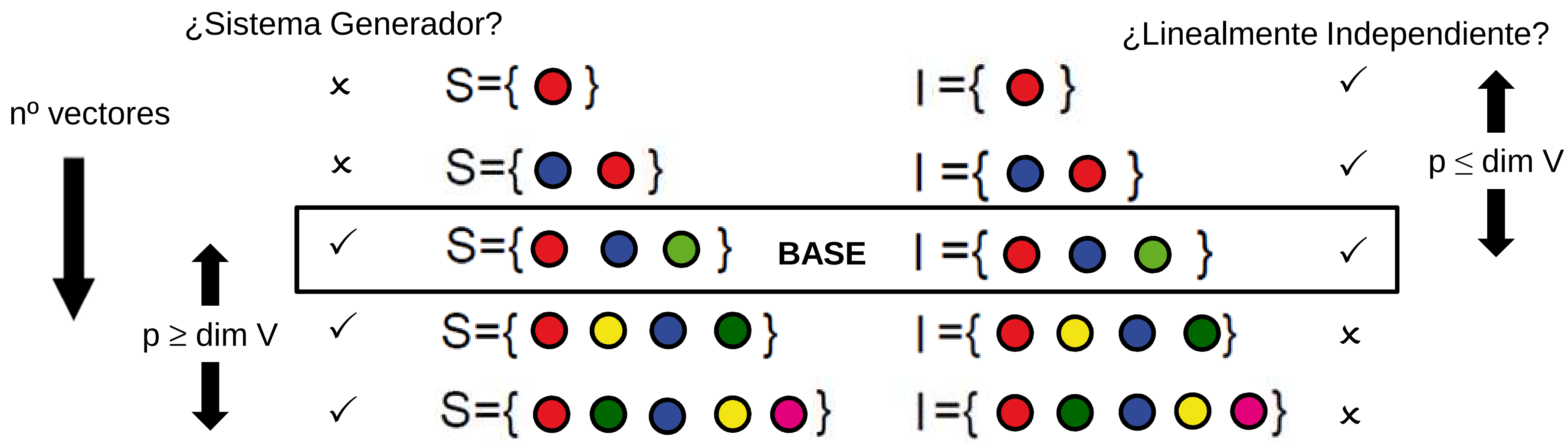
Teorema de Existencia de la Base. Cualquier sistema generador de un espacio vectorial de tipo finito $V \neq \{\vec{0}\}$ contiene al menos una base de V. Así, todo espacio vectorial $V \neq 0$ de tipo finito tiene alguna base.

Nota: Por tanto, se puede construir una base a partir de un conjunto generador desechando los vectores dependientes.

Teorema de la Base Incompleta (o del Conjunto Generador): Sea V un espacio vectorial finito de dimensión n, y sea $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$, con $p < n$ un conjunto de vectores linealmente independientes en V. En ese caso, S es parte de una base de V, es decir, S puede extenderse para formar una base. Esto es, es posible encontrar algún sistema S' de $n - p$ vectores de V tal que $S \cup S'$ sea una base.

Nota: Los vectores de S' se pueden tomar de entre los de una base cualquiera (p.ej. la canónica) de V.

Nota: En resumen, el teorema de la base incompleta y el de la existencia de base aseguran que todo sistema independiente S de vectores de V puede ampliarse para dar una base, y todo conjunto generador S de V puede reducirse para dar una base.



II.3.4. Coordenadas de una base

Definición. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo K. Dada una base $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ de V se sabe que para cada vector $\vec{v} \in V$ existen unos únicos escalares $c_1, c_2, \dots, c_n \in K$ tales que $\vec{v} = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \dots + c_n\vec{b}_n$. La sucesión de n escalares $c_1, c_2, \dots, c_n$ (o sea, los coeficientes de la combinación) se llama **sistema de coordenadas** (o simplemente coordenadas) del vector $\vec{v}$ en la base B.

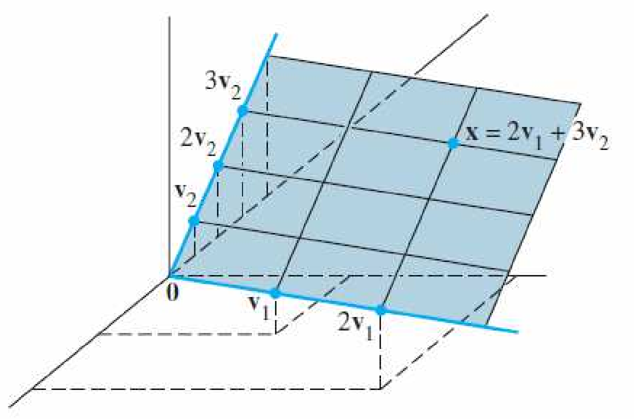
El vector $[\vec{v}]_B = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in K^n$ se llama **vector (o matriz columna) de coordenadas** de $\vec{v}$ relativo a B o vector de B-coordenadas de $\vec{v}$. Sus componentes son las coordenadas de $\vec{v}$ en la base B.

Nota: Es importante que los elementos de B estén numerados porque las entradas de $[\vec{v}]_B$ dependen del orden de los vectores en B.

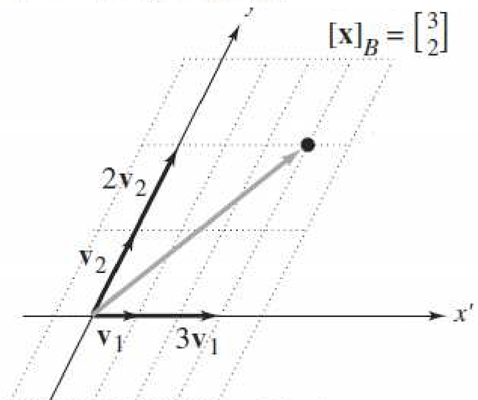
Nota: Los vectores de coordenadas $[\vec{v}]_B \in K^n$ son vectores de K^n, independientemente de la naturaleza de los vectores $\vec{v} \in V$, y del espacio vectorial V.

Nota: En la base canónica $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ del espacio vectorial K^n el vector de coordenadas de cualquier vector coincide con sus componentes. O sea, $[\vec{x}]_E = \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de K^n.

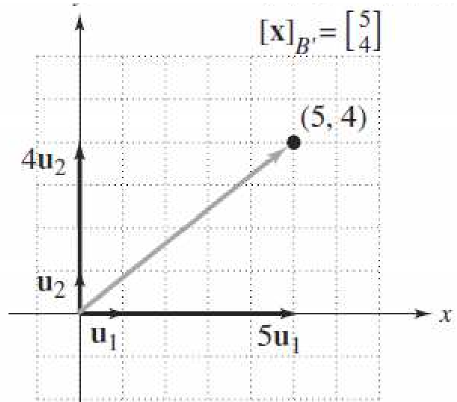
Nota: Un vector $\vec{v} \in V$ está completamente determinado por sus coordenadas $[\vec{v}]_B$ en una base B. Dichas coordenadas cambian con la base elegida y así $[\vec{v}]_B \neq [\vec{v}]_{B'}$.



A coordinate system on a plane H in $\mathbb{R}^3$.



Nonstandard basis:
$B = \{(1, 0), (1, 2)\}$



Standard basis:
$B' = \{(1, 0), (0, 1)\}$

Isomorfismo de Coordenadas (Introducción). Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K que tiene dimensión n. En V se adopta una base $B=\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\dots,\vec{b}_n\}$. Dado un sistema finito de vectores $S=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p\}$ de V y su correspondiente sistema de vectores de B-coordenadas $S^*=\{[\vec{u}_1]_B,[\vec{u}_2]_B,\dots,[\vec{u}_p]_B\}\in K^n$ se verifica que:

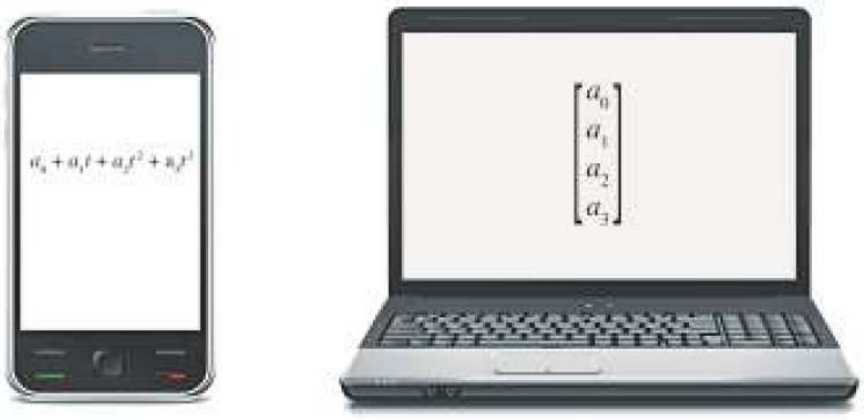
1. $c_1\vec{u}_1+c_2\vec{u}_2+\cdots+c_p\vec{u}_p=\vec{0} \Leftrightarrow c_1[\vec{u}_1]_B+c_2[\vec{u}_2]_B+\cdots+c_p[\vec{u}_p]_B=\vec{0}, c_i\in K$

2. $rang\ S = rang\ S^*$

Nota: Un sistema de vectores S de un espacio vectorial V es linealmente dependiente o independiente según lo sea su sistema de vectores coordenados en cualquiera de las bases de V.

Nota: Calcular el rango (independencia) de un sistema de p vectores de un espacio vectorial de dimensión n se reduce a calcular el rango (independencia) de sus p vectores de n coordenadas de K^n ya que las coordenadas de $\vec{v}\in V$ en B son las mismas que las coordenadas de $[\vec{v}]_B\in K^n$ en la base canónica de K^n.

Nota: Si B contiene n vectores, el sistema de coordenadas hace que V actúe o funcione como si fuera $\mathbb{R}^n$. Si V ya es $\mathbb{R}^n$, B determinará un sistema coordenado que dará una nueva visión de V. La función $\vec{x}\to[\vec{x}]_B$ se llama función de coordenadas determinada por B.



The space $\mathbb{P}_3$ is isomorphic to $\mathbb{R}^4$.

II.3.5. Cambio de Coordenadas

Definición. Sean $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n\}$ y $C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, ..., \vec{c}_n\}$ dos bases ordenadas de un espacio vectorial V. Si $\vec{x} \in V$ y $[\vec{x}]_B$ y $[\vec{x}]_C$ son sus matrices de coordenadas en B y en C, la **matriz de cambio de coordenadas** de B a C es la matriz $P_{C\leftarrow B}$ tal que $[\vec{x}]_C = P_{C\leftarrow B} \cdot [\vec{x}]_B$.

1. Por ser C base, cada vector de B puede expresarse como combinación lineal de C como $\vec{b}_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \cdot \vec{c}_j$. Sea $P = (p_{ji})$ la traspuesta de la matriz de coeficientes p_{ij}. Esta matriz es la matriz de cambio de coordenadas de B a C, o $P_{C\leftarrow B}$ de forma que:

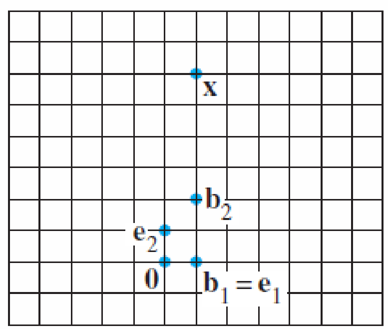
$$[\vec{x}]_C = P_{C\leftarrow B} \cdot [\vec{x}]_B = \left[\left[\vec{b}_1\right]_C \quad \left[\vec{b}_2\right]_C \cdots \quad \left[\vec{b}_n\right]_C \right] \cdot [\vec{x}]_B$$

2. $P_{C\leftarrow B}$ es una matriz $n \times n$ invertible, y su inversa $(P_{C\leftarrow B})^{-1} = Q_{B\leftarrow C}$ es la matriz de cambio de C a B (la que convierte C-coordenadas en B-coordenadas):

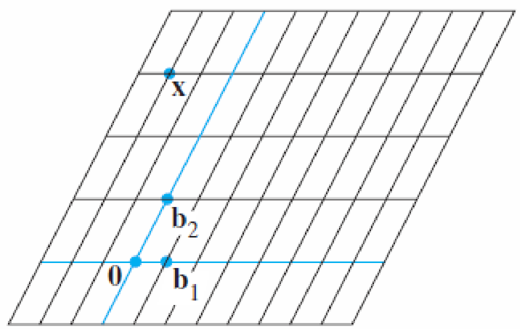
$$[\vec{x}]_B = (P_{C\leftarrow B})^{-1} \cdot [\vec{x}]_C = Q_{B\leftarrow C} \cdot [\vec{x}]_C$$

Nota: Las columnas de $P_{C\leftarrow B}$ son los vectores coordenados de los vectores de la base B relativos a la base C y se obtienen al expresar los vectores de B como combinación lineal de los vectores de la base C.

Nota: Para cambiar de coordenadas es necesario conocer los vectores de coordenadas (o sea, las relaciones de dependencia) de los vectores de la base "vieja" relativos a la base "nueva".



Standard graph paper.



$\mathcal{B}$-graph paper.

Sean $B=\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\dots,\vec{b}_n\}$ y $C=\{\vec{c}_1,\vec{c}_2,\dots,\vec{c}_n\}$ dos bases ordenadas de un mismo espacio vectorial V de dimensión n sobre K y sea $\vec{x}$ un vector cualquiera de V. Si $[\vec{x}]_B=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ y $[\vec{x}]_C=(x'_1,x'_2,\dots x'_3)$ son los vectores coordenados de $\vec{x}$ en B y C, $\vec{x}$ se expresa respectivamente como:

$$\vec{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot\vec{b}_i \quad (I) \qquad\qquad \vec{x}=\sum_{j=1}^{n} x'_j\cdot\vec{c}_j \quad (II)$$

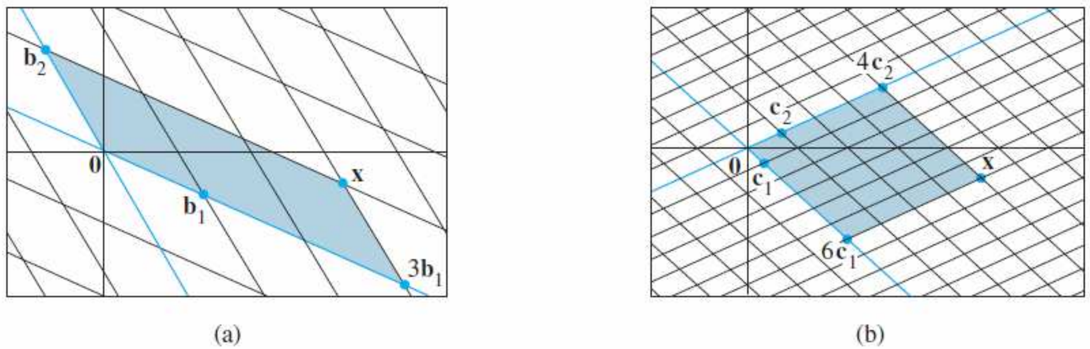
Por ser C base, cada vector $\vec{b}_i$ de B puede expresarse como combinación lineal de C. Así, si se conocen los vectores de B en función de los de C, esto es, los escalares p_{ij} tales que:

$$\left.\begin{aligned}\vec{b}_1&=p_{11}\cdot\vec{c}_1+p_{12}\cdot\vec{c}_2+\dots+p_{1n}\cdot\vec{c}_n\\ \vec{b}_2&=p_{21}\cdot\vec{c}_1+p_{22}\cdot\vec{c}_2+\dots+p_{2n}\cdot\vec{c}_n\\ &\dots\\ \vec{b}_n&=p_{n1}\cdot\vec{c}_1+p_{n2}\cdot\vec{c}_2+\dots+p_{nn}\cdot\vec{c}_n\end{aligned}\right\}\leftrightarrow \vec{b}_i=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}\cdot\vec{c}_j \ \ (i=1,2,\dots,n)\ (III)$$

entonces, sustituyendo en (I) : $\quad \vec{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}p_{ij}\cdot\vec{c}_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\cdot x_i\right)\cdot\vec{c}_j \quad (IV)$

Comparando (II) y (IV), se obtiene que los sistemas de coordenadas están relacionados mediante:

$$x'_j=\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\cdot x_i\ \ (j=1,2,\dots,n)\ \leftrightarrow\ \left.\begin{aligned}x'_1&=p_{11}\cdot x_1+p_{21}\cdot x_2+\dots+p_{n1}\cdot x_n\\ x'_2&=p_{12}\cdot x_1+p_{22}\cdot x_2+\dots+p_{n2}\cdot x_n\\ &\dots\\ x'_n&=p_{1n}\cdot x_1+p_{2n}\cdot x_2+\dots+p_{nn}\cdot x_n\end{aligned}\right\}\leftrightarrow\ [\vec{x}]_C=P_{C\leftarrow B}\,[\vec{x}]_B \quad (V)$$



Two coordinate systems for the same vector space.

Esto es, la **matriz del cambio de coordenadas** P de B a C es la traspuesta de la matriz de coeficientes de (III), o sea, aquella que tiene como columnas a las coordenadas de los vectores de B en la base C:

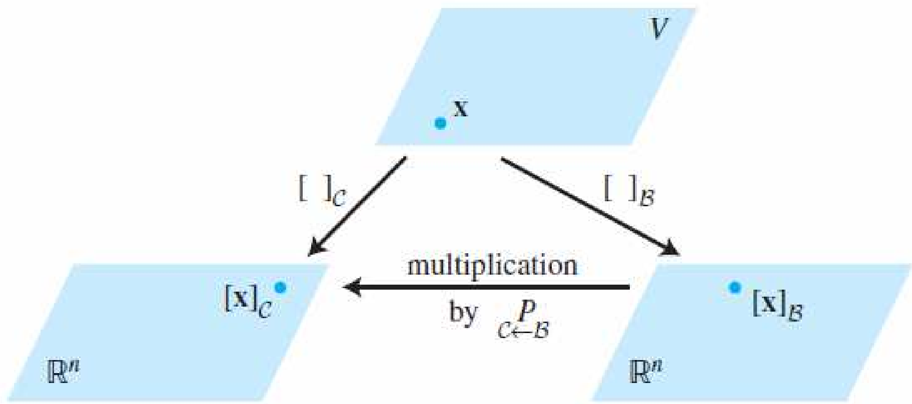
$$P_{C\leftarrow B}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \cdots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}=\left[\,[\vec{b}_1]_C \quad [\vec{b}_2]_C \cdots \quad [\vec{b}_n]_C\,\right]$$

A las ecuaciones (III) se les llama ecuaciones de cambio de base y a las de (V) ecuaciones de **cambio de coordenadas**.

Nota: $P_{C\leftarrow B}$ tiene como columna i al vector coordenado $[\vec{b}_i]_C$ en la base C. Como los vectores $\vec{b}_i$ de B son linealmente independientes, las columnas de $P_{C\leftarrow B}$ también lo son (ya que son los vectores de coordenadas del sistema linealmente independiente B). Por tanto $P_{C\leftarrow B}$ es invertible.

Análogamente, si se conocen los vectores de C en función de los de B se obtiene la matriz del cambio de coordenadas Q de C a B que será:

$$[\vec{x}]_B = Q_{B\leftarrow C}\cdot[\vec{x}]_C=(P_{C\leftarrow B})^{-1}\cdot[\vec{x}]_C \qquad Q_{B\leftarrow C}=[\,[\vec{c}_1]_B \quad [\vec{c}_2]_B \cdots \quad [\vec{c}_n]_B\,]$$



Two coordinate systems for V.

Box II.3.1. Algoritmo del cálculo de matrices de cambio de coordenadas

Sean $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ y $C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n\}$ dos bases ordenadas de un mismo espacio vectorial V de dimensión n sobre K. La matriz de cambio de coordenadas de C a B $Q_{B\leftarrow C} = (P_{C\leftarrow B})^{-1}$ que permite escribir $[\vec{x}]_B = Q_{B\leftarrow C} \cdot [\vec{x}]_C$ puede obtenerse de la siguiente forma:

Paso 1. Construir la matriz ampliada $n \times 2n$ que tiene por columnas a los vectores de la base B (en el lado izquierdo) y C (en el lado derecho), esto es:

$$[\, \vec{b}_1\, \vec{b}_2 \dots \vec{b}_n \mid \vec{c}_1\, \vec{c}_2 \dots \vec{c}_n \,] = [\, B \mid C \,]$$

Paso 2. Aplicar operaciones elementales fila a la matriz ampliada $[\, B \mid C \,]$ hasta reducir la mitad izquierda (esto es, la matriz B) a la identidad I_n, esto es:

$$[\, B \mid C \,] \overset{f}{\sim} [\, I_n \mid (P_{C\leftarrow B})^{-1} \,] = [\, I_n \mid Q_{B\leftarrow C} \,]$$

Paso 3. La matriz resultante que se obtiene en la mitad derecha de la matriz ampliada es $Q_{B\leftarrow C}$.

Nota: Análogamente $[\, C \mid B \,] \overset{f}{\sim} [\, I_n \mid P_{C\leftarrow B} \,]$ lo que permite escribir $[\vec{x}]_C = P_{C\leftarrow B} \cdot [\vec{x}]_B$.

1.- Si B es la base canónica el proceso $[\, C \mid B \,] \overset{f}{\sim} [\, I_n \mid P_{C\leftarrow B}]$ se convierte en $[\, C \mid I_n \,] \overset{f}{\sim} [\, I_n \mid P_{C\leftarrow B}]$ que es el mismo método que el empleado para calcular matrices inversas. En otras palabras, si B es la base canónica de K^n, la matriz de transición de B a C es $P_{C\leftarrow B} = (C)^{-1}$

2.- El proceso es aún más simple si C es la base canónica ya que $[\, C \mid B \,]$ está ya en la forma $[\, I_n \mid B \,] = [\, I_n \mid P_{C\leftarrow B}]$ y en este caso la matriz de transición es simplemente $P_{C\leftarrow B} = B$. Notar que $[\vec{b}_i]_C = \vec{b}_i$ y así $P_{C\leftarrow B} = [\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n] = B$ y $[\vec{x}]_B = P_{C\leftarrow B}[\vec{x}]_B \Rightarrow \vec{x} = B \cdot [\vec{x}]_B$.

Sean $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ y $C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_n\}$ dos bases (ordenadas) de un mismo espacio vectorial V de dimensión n sobre K. La matriz de cambio de coordenadas de C a B $Q_{B\leftarrow C} = (P_{C\leftarrow B})^{-1}$ se puede hallar aplicando Gauss-Jordan a la matriz $[\vec{b}_1\ \vec{b}_2 \ldots \vec{b}_n \mid \vec{c}_1\ \vec{c}_2 \ldots \vec{c}_n] = [B \mid C] \to [I_n \mid (P_{C\leftarrow B})^{-1}]$ ya que si:

$$\left.\begin{array}{c} \vec{c}_1 = p_{11}\cdot\vec{b}_1 + p_{12}\cdot\vec{b}_2 + \cdots + p_{1n}\cdot\vec{b}_n \\ \vec{c}_2 = p_{21}\cdot\vec{b}_1 + p_{22}\cdot\vec{b}_2 + \cdots + p_{2n}\cdot\vec{b}_n \\ \ldots \\ \vec{c}_n = p_{n1}\cdot\vec{b}_1 + p_{n2}\cdot\vec{b}_2 + \cdots + p_{nn}\cdot\vec{b}_n \end{array}\right\} \leftrightarrow \vec{c}_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\cdot\vec{b}_j = p_{i1}\cdot\vec{b}_1 + p_{i2}\cdot\vec{b}_2 + \cdots + p_{in}\cdot\vec{b}_n \ \ (i = 1,2,\ldots,n)$$

$$\begin{bmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \vdots \\ c_{in} \end{bmatrix} = p_{i1}\cdot\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{bmatrix} + p_{i2}\cdot\begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{2n} \end{bmatrix} + \cdots + p_{in}\cdot\begin{bmatrix} b_{n1} \\ b_{n2} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{bmatrix} \ \ (i = 1,2,\ldots n)$$

Entonces, para cada $\vec{c}_i$ tenemos un sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{c} c_{i1} = p_{i1}\cdot b_{11} + p_{i2}\cdot b_{21} + \cdots + p_{in}\cdot b_{n1} \\ c_{i2} = p_{i1}\cdot b_{12} + p_{i2}\cdot b_{22} + \cdots + p_{in}\cdot b_{n2} \\ \ldots \\ c_{in} = p_{i1}\cdot b_{1n} + p_{i2}\cdot b_{2n} + \cdots + p_{in}\cdot b_{nn} \end{array}\right\} (i = 1,2,\ldots n) \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} b_{11} & b_{21}\ldots & b_{n1} & c_{i1} \\ b_{12} & b_{22}\ldots & b_{n2} & c_{i2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n}\ldots & b_{nn} & c_{in} \end{array}\right] (i = 1,2,\ldots,n)$$

Como los n sistemas de ecuaciones lineales (uno para cada $\vec{c}_i$) tienen la misma matriz de coeficientes, pueden resolverse simultáneamente para los n vectores $\vec{c}_i$:

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|ccc} b_{11} & b_{21}\ldots & b_{n1} & c_{11} & c_{21}\ldots & c_{n1} \\ b_{12} & b_{22}\ldots & b_{n2} & c_{12} & c_{22}\ldots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n}\ldots & b_{nn} & c_{1n} & c_{2n}\ldots & c_{nn} \end{array}\right] \\ \vec{b}_1 \quad \vec{b}_2 \ldots \quad \vec{b}_n \quad \vec{c}_1 \quad \vec{c}_2 \ldots \quad \vec{c}_n \end{array} \overset{f}{\sim} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0\ldots & 0 & p_{11} & p_{21}\ldots & p_{n1} \\ 0 & 1\ldots & 0 & p_{12} & p_{22}\ldots & p_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0\ldots & 1 & p_{1n} & p_{2n}\ldots & p_{nn} \end{array}\right] \\ \qquad\qquad\qquad [\vec{c}_1]_B \quad [\vec{c}_2]_B.. \quad [\vec{c}_3]_B \end{array} = [I_n \mid (P_{C\leftarrow B})^{-1}] = [I_n \mid Q_{B\leftarrow C}]$$

II.4. Espacios vectoriales de una matriz

II.4.1. Espacio de filas y columnas

Para una matriz $A_{m\times n}$ con elementos escalares $\left(a_{ij}\right) \in K$, las filas de A se llaman vectores fila y se denotan por $\vec{a}_i^{\,f} \in K^n$. Las columnas se llaman vectores columna y se denotan por $\vec{a}_j^{\,c} \in K^m$.

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1^{\,f} \\ \vec{a}_2^{\,f} \\ \vdots \\ \vec{a}_m^{\,f} \end{bmatrix} \text{ con } \vec{a}_m^{\,f} = [a_{m1}\ a_{m2}\ \dots\ a_{mn}] \qquad A = [\vec{a}_1^{\,c} \quad \vec{a}_2^{\,c} \quad \cdots \quad \vec{a}_n^{\,c}] \text{ con } \vec{a}_n^{\,c} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \equiv (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$$

Definición: Sea A una matriz $m \times n$. El **espacio de filas** (**columnas**) de $A_{m\times n}$ es el **subespacio de K^n** (**K^m**) generado por los **vectores fila** $\vec{a}_i^{\,f}$, $i = 1,2, \dots m$ (**columna** $\vec{a}_j^{\,c}$, $j = 1,2, \dots n$) de A, o sea, el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores fila (columna). El espacio fila (columna) se denota por $Fil(A)$ $(Col(A))$. Así, $Fil(A) = Lin\{\vec{a}_1^{\,f}, \vec{a}_2^{\,f}, \dots, \vec{a}_m^{\,f}\} \subseteq K^n$ y $Col(A) = Lin\{\vec{a}_1^{\,c}, \vec{a}_2^{\,c}, \dots, \vec{a}_n^{\,c}\} \subseteq K^m$.

Nota: Como las filas de A se identifican con las columnas de A^t, se cumple $Fil(A) = Col(A^t)$ y $Col(A) = Fil(A^t)$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} \textit{Row Vectors of A} \\ (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \\ (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \\ \vdots \\ (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}) \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} \textit{Column Vectors of A} \\ \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Teorema. Las **matrices equivalentes por filas** (**columnas**) tienen el **mismo espacio fila** (**columna**). Así:

1) Si $A_{m\times n}$ es equivalente por filas (columnas) a $B_{m\times n}$, el espacio de filas (columnas) de A es igual al espacio de filas (columnas) de B, esto es $Fil(A) = Fil(B)$ $(Col(A) = Col(B))$

2) Si $B_{m\times n}$ es una forma escalonada por filas (columnas) de $A_{m\times n}$, las filas (columnas) no nulas de B son linealmente independientes y por tanto forman una base de $Fil(A)$ $(Col(A))$.

3) Dos matrices $A_{m\times n}$ y $B_{p\times n}$ $(A_{m\times n}$ y $B_{m\times p})$ tienen el mismo espacio fila (columna) si y solo si sus matrices canónicas por filas C_{rA}^{f} y C_{rB}^{f} (columnas C_{rA}^{c} y C_{rB}^{c}) tienen las mismas filas (columnas) no nulas.

Nota: Así, el espacio fila (columna) de una matriz no cambia al hacer operaciones elementales fila (columna) y por tanto las filas (columnas) no nulas de C_{rA}^{f} (C_{rA}^{c}) o de cualquier forma escalonada por filas (columnas) de A identifican una base de $Fil(A)$ $(Col(A))$.

Teorema. Las operaciones elementales fila (columna): 1) no cambian el espacio fila (columna) de una matriz pero modifican el espacio columna (fila); 2) no cambian las relaciones de dependencia entre las columnas (filas), pero sí entre las filas (columnas).

Nota: Las operaciones fila alteran las relaciones de dependencia entre filas pero preservan el espacio generado por ellas. Contrariamente, las operaciones fila cambian el espacio de columnas, pero preservan las relaciones de dependencia entre las columnas.

II.4.1.1. Bases de un sistema generador

Box II.4.1. Algoritmo del Espacio Fila

Sea $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ un sistema de vectores de un espacio vectorial V y $U = Lin(S) = Lin(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ el subespacio vectorial de V generado por S. Es posible obtener una base de U.

Paso 1. Construir la matriz F cuyas filas son los vectores dados $\vec{u}_i$, esto es, $F = \begin{bmatrix} \vec{u}_1^f & \vec{u}_2^f & \cdots & \vec{u}_n^f \end{bmatrix}^t$

Paso 2. Reducir por filas F a alguna forma escalonada F' (puede ser la forma escalonada reducida C_r^f).

Paso 3. Extraer los vectores fila no nulos de la matriz escalonada F'. Éstos forman una base del subespacio U.

Nota: Este algoritmo también proporciona una base para el Espacio Fila $Fil(A)$ de una matriz $A_{n\times m}$.

Nota: Análogamente puede definirse un **Algoritmo del Espacio Columna**, construyendo la matriz C, cuyas columnas son los vectores $\vec{u}_i$, esto es, $C = [\vec{u}_1^c \quad \vec{u}_2^c \quad \cdots \quad \vec{u}_n^c]$ reduciendo por columnas a una forma escalonada por columnas C' y extrayendo los vectores columna no nulos de C'.

Nota: El Algoritmo del Espacio Columna también proporciona una base para el Espacio Columna $Col(A)$ de una matriz $A_{m\times n}$. Alternativamente, puede calcularse una base para el espacio columna $Col(A)$ aplicando el algoritmo del espacio fila a la matriz A^t.

Teorema: Las **columnas pivote** de una matriz $A_{m\times n}$ forman una **base de $Col(A)$**. Así, si la matriz $A_{m\times n}$ se reduce por filas a la matriz $B_{m\times n}$ y $\left\{\vec{b}_{j_1}, \vec{b}_{j_2}, \dots, \vec{b}_{j_p}\right\}, 1 \le j_1, j_p \le n$ son las columnas pivote de B, entonces las correspondientes columnas de A, esto es, $\left\{\vec{a}_{j_1}, \vec{a}_{j_2}, \dots, \vec{a}_{j_p}\right\}$ forman una base de $Col(A)$.

Nota: Como las operaciones fila no cambian las relaciones de dependencia entre columnas, las correspondientes columnas de A son linealmente independientes y forman una base de $Col(A)$. Hay que tener cuidado de utilizar las columnas pivote de A y no de B para la base de $Col(A)$.

Box II.4.2. Algoritmo de Expulsión

Paso 1. Construir la matriz $C = [\vec{u}_1^c \quad \vec{u}_2^c \quad \cdots \quad \vec{u}_n^c]$ cuyas columnas son los vectores dados $\vec{u}_i$.

Paso 2. Reducir por filas C a una forma escalonada por filas C'

Paso 3. Para cada columna $\vec{c}'_k$ no pivote en la matriz escalonada C', suprimir (expulsar) el vector correspondiente $\vec{u}_k$ del conjunto original S (o descartar la columna correspondiente $\vec{c}_k$ en la matriz C)

Paso 4. Extraer los restantes vectores de C (los correspondientes a las columnas pivote de C'). Éstos forman una base de U.

Nota: No use los vectores columna de C' para construir una base, sino los de C. Las operaciones fila alteran el espacio de columnas (las columnas de la forma escalonada C' no forman una base de U) pero no las relaciones de dependencia entre las columnas de C.

Nota: El algoritmo también permite identificar una base del espacio columna $Col(A)$ de una matriz $A_{m\times n}$

II.4.1.2. Sistemas de ecuaciones lineales

Teorema. Sea $A_{m\times n}$ una matriz. El espacio columna de A viene dado por el conjunto de todos los vectores $\vec{b} \in K^m$ para los que el sistema $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ tiene alguna solución $\boldsymbol{Col(A)} = \{\vec{\boldsymbol{b}} \mid \vec{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{\boldsymbol{x}},\ \forall \vec{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{K^n}\}$.

Teorema. Compatibilidad de un sistema lineal. El sistema $\boldsymbol{A_{m\times n}} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ es **compatible** si y solo si $\vec{b}$ está en el espacio de columnas de A, esto es **si** $\vec{\boldsymbol{b}} \in \boldsymbol{Col(A)}$.

Nota: Las tres afirmaciones siguientes son equivalentes: 1) $\vec{b} \in K^m$ es combinación lineal de las columnas de $A_{m\times n}$ (o sea $\vec{b} \in Col(A)$); 2) el sistema de ecuaciones lineales $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ tiene alguna solución; 3) la matriz de coeficientes A y la ampliada $[\,A \mid \vec{b}\,]$ tienen el mismo rango.

Nota: Las siguientes afirmaciones son equivalentes: 1) Todo $\vec{b} \in K^m$ es combinación lineal de las columnas de $A_{m\times n}$; 2) Las columnas de A generan todo K^m ($Col(A) = K^m$); 3) Para cada $\vec{b} \in K^m$ la ecuación $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ tiene solución (al menos una); 4) A tiene una posición pivote en cada fila (A, no $[\,A \mid \vec{b}\,]$).

Propiedades

- Las columnas de $A_{m\times n}$ son linealmente independientes (y por tanto forman una base de $Col(A)$) si y solo si la ecuación $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ tiene únicamente la solución trivial.

- Sea A una matriz invertible $n \times n$. Entonces las columnas de A forman una base de K^n ya que son linealmente independientes y generan todo K^n ($Col(A) = K^n$).

Nota: Si las columnas de $A_{m\times n}$ son independientes forman una base de $Col(A)$, pero no necesariamente se cumple que $Col(A) = K^m$.

II.4.2. Espacio nulo de una matriz

Definición. Si A es una matriz $m \times n$, se llama **espacio nulo de A** (o espacio solución o núcleo) de A y se denota $Nul(A)$ al **conjunto solución del sistema** de ecuaciones **homogéneo** $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$. O sea $Nul(A) = \{ \vec{x} \in K^n \mid A \cdot \vec{x} = \vec{0} \}$.

Nota: Puede obtenerse $Nul(A)$ resolviendo $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ y escribiendo la solución en forma paramétrica. Para saber si un vector $\vec{v} \in Nul(A)$ basta comprobar si $A \cdot \vec{v} = \vec{0}$.

Teorema. El **espacio nulo** de una matriz $A_{m\times n}$ es un **subespacio** vectorial **de K^n**. La dimensión de $Nul(A)$ se llama nulidad de A.

Nota: El conjunto solución del sistema inhomogéneo $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ no es un subespacio vectorial.

Teorema. Sea una matriz $A_{m\times n}$. Todo **sistema generador no nulo** del conjunto solución **de $\boldsymbol{A \cdot \vec{x} = \vec{0}}$** (o sea del espacio nulo de A) es linealmente independiente y por tanto forma una **base de $\boldsymbol{Nul(A)}$**.

Nota: El procedimiento estándar para escribir el conjunto solución de $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ en forma paramétrica proporciona el sistema generador de $Nul(A)$.

Teorema. Dimensión del espacio de soluciones. Si $A_{m\times n}$ es una matriz de rango r, la dimensión del espacio de soluciones de $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ es $n - r$ siendo n el número de columnas o incógnitas. Esto es, $\boldsymbol{\dim(Nul\ A) = n - r}$

Nota: El número de variables libres determina la dimensión de $Nul(A)$. Si $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ tiene $k \neq 0$ variables libres, entonces el conjunto generador de $Nul(A)$ tiene k vectores linealmente independientes que forman una base de $Nul(A)$. Así, cada variable libre en $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ conduce a un vector de la base de $Nul(A)$.

II.4.3. Teorema del Rango

Definición de rango de una matriz (continuación): El rango por filas (columnas) de una matriz A es igual al número máximo de filas (columnas) linealmente independientes o equivalentemente a la dimensión del espacio fila (columna) de A, esto es, $rang^f(A) = \dim(Fil\ A)$ $(rang^c(A) = \dim(Col\ A))$.

Teorema: Si A es una matriz $m \times n$ su espacio de filas y su espacio de columnas tienen la misma dimensión. Así, el rango de una matriz A es la dimensión del espacio columna de A o del espacio fila $\boldsymbol{rang(A) = \dim(Col\ A) = \dim(Fil\ A)}$.

Nota: Como $Fil(A) = Col(A^t)$ entonces $\dim(Fil\ A) = \dim(Col\ A^t)$ (que a su vez es $rang(A^t) = rang(A)$).

Teorema del Rango de una Matriz. Sea la matriz $A_{m\times n}$. Se cumple $\boldsymbol{n = rang(A) + \dim(Nul\ A)}$.

Nota: El rango de una matriz $A_{m\times n}$ es igual a la dimensión de sus espacios columna y/o fila, esto es al número de columnas pivote $rang(A) = r$. La dimensión de $Nul(A)$ es el número de variables libres del sistema $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ esto es el número de columnas de $A_{m\times n}$ que no son pivote $\dim\big(Nul(A)\big) = n - r$.

II.4.3.1. Teorema de la Matriz Invertible

Una matriz cuadrada A_n es invertible si y solo si se verifica alguna (cualquiera) de las siguientes condiciones (que son equivalentes):

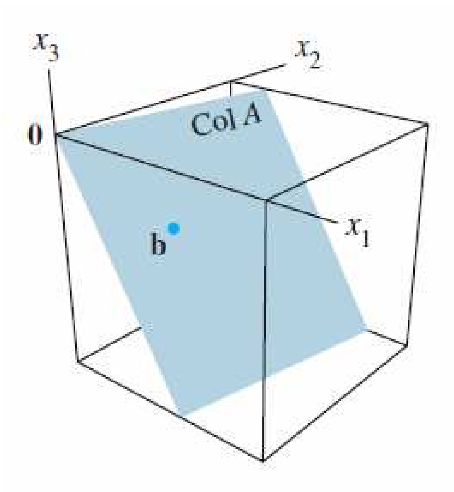
10. Las columnas de A forman una base de K^n (y las filas de A forman una base de K^n)

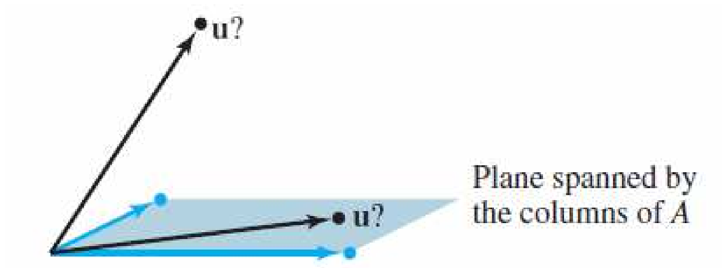
11. $Col\ A = K^n$ y $\dim(Col\ A) = n$. Como $Fil(A) \subseteq K^n$ y $n = \dim(Col\ A) = \dim(Fil\ A) \Rightarrow Fil(A) = K^n$

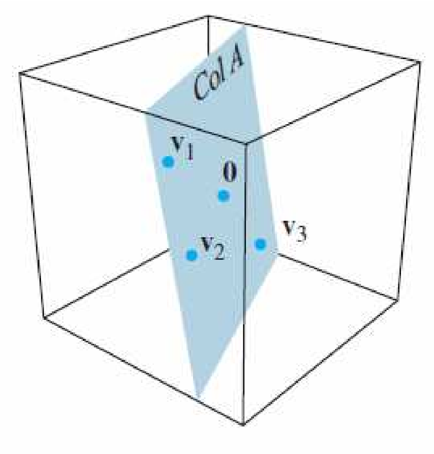
12. $Nul\ A = \{\vec{0}\}$ y $\dim(Nul\ A) = 0$

Nota: Se ha obviado agregar al Teorema de la Matriz Invertible algunas proposiciones sobre el espacio de filas de A porque $Fil\ (A) = Col(A^t)$.

Comparación del espacio columna y espacio nulo de una matriz	
$Nul\ A$ es un subespacio de K^n	$Col\ A$ es un subespacio de K^m
$Nul\ A$ está definido implícitamente	$Col\ A$ está definido explícitamente
Reducir A por filas permite hallar vectores en $Nul\ A$	Es fácil encontrar vectores en $Col\ A$ (p.ej. las columnas de A)
Un vector $\vec{v} \in Nul\ A \leftrightarrow A \cdot \vec{v} = \vec{0}$	Un vector $\vec{v} \in Col\ A \leftrightarrow A \cdot \vec{x} = \vec{v}$ es compatible
Basta hallar $A \cdot \vec{v}$ para saber si $\vec{v} \in Nul\ A$	Hay que reducir $[A \mid \vec{v}]$ para saber si $\vec{v} \in Col\ A$
$Nul\ A = \{\vec{0}\} \leftrightarrow A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ tiene solo la solución trivial	$Col\ A = K^m \leftrightarrow A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ tiene solución $\forall \vec{b} \in K^m$







II.5. Suma de subespacios vectoriales

II.5.1. Definición

Definición. Sean U_1 y U_2 dos subespacios de un espacio vectorial V. Se llama **suma de los subespacios** U_1 y U_2, y se escribe $U_1 + U_2$, al conjunto definido mediante:

$$U_1 + U_2 = \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \mid \vec{u}_1 \in U_1, \vec{u}_2 \in U_2\}$$

Dicho conjunto es un subespacio y es el menor de todos los subespacios de V que contienen a U_1 y U_2.

Nota: La suma de subespacios vectoriales puede extenderse a p subespacios. $U_1 + U_2 + \cdots + U_p = \{\vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_p \mid \vec{u}_i \in U_i, i = 1, \ldots, p\}$, así como la definición de suma directa que se verá a continuación.

Teorema. Se dice que dos subespacios U_1 y U_2 de V son subespacios independientes, o bien, que la suma $U_1 + U_2$ es una **suma directa de subespacios**, y se denota por $U_1 \oplus U_2$, si cualquier vector del subespacio suma puede expresarse de una única forma como suma de vectores de U_1 y U_2.

La suma será directa si y solo si se verifica alguna de las dos condiciones siguientes que son equivalentes:

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{u}'_1 + \vec{u}'_2 \Rightarrow \vec{u}_1 = \vec{u}'_1, \vec{u}_2 = \vec{u}'_2 \ \ (\vec{u}_1, \vec{u}'_1 \in U_1, \vec{u}_2, \vec{u}'_2 \in U_2)$$

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \vec{0}$$

Nota: La suma de los subespacios vectoriales $U_1, \ldots, U_p$ de V es directa ($U_1 \oplus \ldots \oplus U_p$) si y solo si:

$$\vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_p = \vec{u}'_1 + \cdots + \vec{u}'_p \Rightarrow \vec{u}_i = \vec{u}'_i \ \ (\vec{u}_i, \vec{u}'_i \in U_i, i = 1, \ldots, p)$$

$$\vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_p = \vec{0} \Rightarrow \vec{u}_i = \vec{0} \ \ (\vec{u}_i \in U_i, i = 1, \ldots, p)$$

Nota: Si la suma de varios subespacios es directa, también lo es la suma de algunos (cualesquiera) de ellos $U_1 \oplus \ldots \oplus U_p \Rightarrow U_{i_1} \oplus \ldots \oplus U_{i_h}$ $1 \leq i_1,\ i_h \leq p$.

Teorema. Los subespacios U_1 y U_2 son independientes si y solo si su intersección es nula, esto es:

$$U_1 \oplus U_2 \Leftrightarrow U_1 \cap U_2 = 0$$

Nota: El teorema anterior solo es válido para la suma directa de $p = 2$ subespacios, pero no para $p > 2$.

Nota: $U_1 \cap U_2 = 0$ equivale a escribir $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$. Recordar que la intersección de cualquier número de subespacios de un espacio vectorial V es un subespacio de V.

Nota: Si la suma de varios subespacios $U_1, \dots, U_p$ es directa, la intersección de cada dos de ellos es nula $U_i \cap U_j = 0, i \neq j$, pero el recíproco es falso en general (excepto para $p = 2$).

Propiedades: Sea V un espacio vectorial y $S = \{\vec{u}_1, \dots \vec{u}_p\}$ un sistema finito de vectores no nulos.

1. El subespacio que genera $S = \{\vec{u}_1, \dots \vec{u}_p\}$ es igual a la suma de los p subespacios que engendran los p vectores del sistema:

$$Lin(\vec{u}_1, \dots \vec{u}_p) = Lin(\vec{u}_1) + \cdots + Lin(\vec{u}_p)$$

2. El sistema $S = \{\vec{u}_1, \dots \vec{u}_p\}$ de vectores es linealmente independiente si y solo si los subespacios que engendran sus p vectores tienen suma directa:

$$S = \{\vec{u}_1, \dots \vec{u}_p\} \text{ linealmente independiente} \Leftrightarrow Lin(\vec{u}_1, \dots \vec{u}_p) = Lin(\vec{u}_1) \oplus \dots \oplus Lin(\vec{u}_p)$$

Nota: Lo anterior implica que siempre se puede obtener un sistema generador S del subespacio suma $U_1 + \cdots + U_p$ uniendo los sistemas generadores de los correspondientes subespacios $S = S_1 \cup \dots \cup S_p$.

II.5.2. Fórmula de Grassmann

Subespacios suplementarios. En un espacio vectorial V dos subespacios U_1 y U_2 se dicen **subespacios suplementarios** si cualquier vector $\vec{u} \in V$ se puede expresar de una sola manera como suma $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ con $\vec{u}_1 \in U_1$ y $\vec{u}_2 \in U_2$. Se verifica:

$$U_1 \text{ y } U_2 \text{ son suplementarios} \Leftrightarrow U_1 \bigoplus U_2 = V \Leftrightarrow U_1 + U_2 = V \text{ y } U_1 \cap U_2 = 0$$

Nota: O sea, el espacio vectorial V es la suma directa de dos subespacios U_1 y U_2 si y solo si: 1) $U_1 + U_2 = V$; 2) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$

Teorema. Sean U_1 y U_2 dos subespacios de un espacio vectorial V de dimensión finita. En ese caso $U_1 + U_2$ tiene dimensión finita y se verifica la **fórmula de las dimensiones o de Grassmann**:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$$

Propiedades:

1.- U_1 y U_2 subespacios suplementarios $\Leftrightarrow \dim(V) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$.

2.- Sea $B_1(B_2)$ una base de U_1 (U_2): U_1 y U_2 subespacios suplementarios $\Leftrightarrow B = B_1 \cup B_2$ es base de V.

3.- Todo subespacio vectorial de V tiene algún subespacio suplementario (no necesariamente único).

Nota: 1) Se cumple para r subespacios vectoriales; 2) implica que si $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots \vec{b}_s, \dots, \vec{b}_n\}$ es una base de V, $B_1 = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots \vec{b}_s\}$ es base de U_1, o sea $U_1 = Lin(B_1)$ y $B_2 = \{\vec{b}_{s+1}, \vec{b}_{s+2}, \dots \vec{b}_n\}$ es base de U_2, o sea $U_2 = Lin(B_2)$, entonces U_1 y U_2 son subespacios suplementarios.