El determinante de una matriz puede ser positivo, cero o negativo.

El determinante de una matriz de orden 1 se define simplemente como el valor de su único elemento.

Para definir el determinante de una matriz de orden mayor que 2, conviene usar las nociones de *menores* y *cofactores*.

2.4.2 Definición de los menores y cofactores de una matriz

Si A es una matriz cuadrada, el **menor** M_{ij} del elemento a_{ij} es el determinante[2] de la matriz obtenida al eliminar en A la fila i y la columna j. El **cofactor** C_{ij} de ese mismo elemento viene dado por:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Por ejemplo, si A es una matriz de 3 x 3, algunos de sus menores y cofactores son los que se muestran a continuación:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ Cofactor de $a_{21} = C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21}$

$M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ Cofactor de $a_{22} = C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22}$

Los menores y cofactores de una matriz difieren a lo sumo en el signo. Para hallar los cofactores de una matriz, calculamos primero los menores y, a continuación, aplicamos la siguiente regla: si la suman de la *fila + columna* del elemento es par, el signo del cofactor es positivo, mientras que será negativo si la suma es impar.

2.4.3 Determinante de una matriz de orden 3

El determinante de una matriz de orden 3 se define mediante:

$$|A| = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + a_{13} \cdot C_{13} = a_{11} \cdot M_{11} - a_{12} \cdot M_{12} + a_{13} \cdot M_{13}$$

2.4.4 Determinante de una matriz de n x n

Sea A una matriz de orden n x n, entonces el determinante de A está dado indistintamente por:

$$|A| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} = \sum_{k=0}^{n} a_{ik}C_{ik} \qquad Desarrollo\ por\ la\ fila\ i$$

$$|A| = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} = \sum_{k=0}^{n} a_{kj}C_{kj} \qquad Desarrollo\ por\ la\ columna\ j$$

Nótese que cuando desarrollamos en cofactores no es necesario evaluar los cofactores de los elementos iguales a cero, porque cero multiplicado por el cofactor dará cero. Por esa razón suele desarrollarse por la fila o columna que tiene mayor número de ceros como vemos en el siguiente ejemplo.

[2] Algunos autores denominan menor a la matriz obtenida al eliminar la fila i y la columna j, no al determinante. Entonces el cofactor se define como $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

Ejemplo. Determinante de una matriz de orden 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 3 \cdot C_{13} + 0 \cdot C_{23} + 0 \cdot C_{33} + 0 \cdot C_{43}$$

Por tanto solo debemos calcular:

$C_{13} = (-1)^{(1+3)} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ = (desarrollando en cofactores por la segunda fila) =

$= 0 \cdot (-1)^{(2+1)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{(2+2)} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{(2+3)} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 2 \cdot (-4) + 3 \cdot (-1) \cdot (-7) = 13$

Por tanto det (A) = 3·(13) = 39

2.4.5 Cálculo de determinantes.

2.4.5.1 Teorema. Determinante de matrices triangulares

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada de orden n triangular superior o inferior. Entonces:

$$\boxed{|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ \ldots\ldots \cdot a_{nn}}$$

Esto es: *el determinante de una matriz triangular es igual al producto de sus componentes en la diagonal.*

Demostración.

Se demostrará la parte triangular superior por inducción matemática comenzando con $n = 2$. Si A es una matriz triangular superior de 2x2, entonces $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ y $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot 0 = a_{11} \cdot a_{22}$, de manera que el teorema se cumple para $n = 2$. Se supondrá que se cumple para $k = n - 1$ y se demostrará para $k = n$. El determinante de una matriz triangular superior de $n \ x \ n$ es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Cada uno de estos determinantes es el determinante de una matriz triangular superior de $(n - 1) \ x \ (n - 1)$ que, de acuerdo con la hipótesis de inducción, es igual al producto de las componentes en la diagonal. Todas las matrices, excepto la primera, tienen una columna de ceros, por lo que por lo menos una de sus componentes diagonales es cero. De este modo, todos los determinantes, excepto el primero, son cero. Por último,

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33}\cdots a_{nn})$$

lo que prueba que el teorema se cumple para matrices de $n\ x\ n$.

2.4.5.2 Cálculo de determinantes mediante operaciones elementales

Operaciones elementales y determinantes

Sean A y B matrices cuadradas.

1. Si B se obtiene intercambiando dos filas (columnas) de A

$$det(B) = -det(A)$$

2. Si B se obtiene sumando un múltiplo de una fila (columna) de A a otra fila de A,

$$det(B) = det(A)$$

3. Si B se obtiene multiplicando una fila (columna) de A por una constante $c \neq 0$,

$$det(B) = c \cdot det(A)$$

Esta última propiedad permite sacar un factor común de una fila. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Estas tres propiedades nos permiten calcular determinantes efectuando operaciones elementales por filas hasta obtener una matriz triangular equivalente. En cada paso del proceso las propiedades anteriores nos indican el efecto de la operación elemental sobre el determinante. Finalmente el determinante se calcula haciendo el producto de los elementos de su diagonal principal, tal como vemos en el siguiente ejemplo:

Calcular el determinante de:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Mediante operaciones elementales por filas, llevamos A a forma triangular:

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ = (Intercambiar las dos primeras filas)= - $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ =

= (Sumar -2 veces la primera fila a la segunda produce una nueva 2ª fila)= - $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -7 & 14 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ =

= (Sacar factor -7 de la segunda fila) = 7· $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ = (sustituir la 3ª fila por la diferencia entre la 2ª y 3ª filas) =7· $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ = (como la matriz es triangular) = 7 · 1·1·(-1) = -7

2.4.5.3 Condiciones que producen determinante cero

Si A es una matriz cuadrada y cumple cualquiera de las condiciones siguientes, entonces $det(A) = 0$.

- Hay una fila (o columna) completa de ceros
- Dos filas (o columnas) son iguales
- Una fila (o columna) es múltiplo de otra fila (o columna)

Estas condiciones no son las únicas que hacen que un determinante sea cero. Muchas veces, se aplican indirectamente, es decir, podemos comenzar con una matriz que no cumple ninguna de esas tres condiciones y llegar, efectuando operaciones elementales por filas o columnas, a otra que sí satisface alguna de ellas. En tales casos, podemos concluir que la matriz tiene determinante cero.

Conocemos, por tanto, dos sistemas para calcular determinantes. Reducir a forma triangular por operaciones elementales suele ser más rápido que desarrollar en cofactores, tal como se muestra en la siguiente tabla:

	Desarrollo por cofactores		Reducción por filas	
Orden n	Sumas	Productos	Sumas	Productos
3	5	9	5	10
5	119	205	30	45
10	3.628.799	6.235.300	285	339

Al calcular a mano un determinante, se puede ahorrar esfuerzo si se consigue llevar la matriz, mediante operaciones elementales, a una forma en la que una de sus filas (o columnas) tenga todos sus elementos cero menos uno. El desarrollo en cofactores por esa fila (o columna) reduce el orden de la matriz en 1, tal como se ilustra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo.

Calcular el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Solución. La matriz A ya tiene un cero en la tercera fila. Podemos crear otro sumando 2 veces la primera columna a la tercera:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollando en cofactores por la tercera fila, obtenemos:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3\cdot(-1)^4\cdot \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -3\cdot(-1) = 3$$

2.4.6 Propiedades de los determinantes

2.4.6.1 Determinante de un producto de matrices

Teorema. Si A y B son matrices cuadradas de orden n, se cumple que:

$$det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$$

Demostración.

Para empezar, observemos que si E es una matriz elemental (ver 2.3.4) por 2.4.5.2 son ciertas las siguientes afirmaciones:

- Si E se obtiene de I por intercambio de dos filas, $det(E) = -1$
- Si E se obtiene de I multiplicando una fila de I por una constante $c \neq 0$, $det\ (E) = c$
- Si E se obtiene de I sumando un múltiplo de una fila de I a otra fila, $det\ (E) = 1$

Además por el teorema de 2.3.4.1, si se aplica a B la misma operación elemental que convierte I en E, se obtiene la matriz EB. De todo ello se sigue que:

$$det\ (EB) = det\ (E) \cdot det\ (B)$$

Esto se puede generalizar para concluir que:

$$\det(E_k \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot B) = \det(E_k) \cdot \ldots \det(\mathrm{E}_2) \cdot \det(E_1) \cdot \det\ (B)$$

donde E_i es una matriz elemental. Consideremos ahora la matriz AB. Si A no es singular, por el segundo teorema de 2.3.4.3 podemos expresarla como producto de matrices elementales:

$A = E_k \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1$ y escribir:

$$\begin{aligned}\det(AB) = \det(E_k \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot B) = d \det(E_k) \cdot \ldots \det(\mathrm{E}_2) \cdot \det(E_1) \cdot \det(B) \\ = \det(E_k \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot B) = det(A) \cdot det(B).\end{aligned}$$

Si A es singular, A es equivalente a una matriz con toda la fila de ceros. Del teorema 2.4.5.3 se deduce que $det(A) = 0$. Además como A es singular, también AB lo es. (Si AB no fuera singular, $A[B(AB)^{-1}] = I$ implicaría que A es no singular). Así pues, $det(AB) = 0$, luego $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$.

___

Nota. El determinante de la suma no siempre es igual a la suma de los determinantes. Es decir, para la mayoría de los pares de matrices, A y B,

$$det\ (A + B) \neq det\ (A) + det\ (B)$$

Utilizando la factorización *LU* de una matriz cuadrada A de $n\ x$ *n* se tiene $A = LU$ (véase 2.3.5). Entonces, por el teorema anterior,

$$det\ (A) = det\ (LU) = det\ (L)\ det\ (U)$$

Pero L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal, así

$$det\ (L) = \text{producto de los elementos en la diagonal} = 1$$

De manera similar, como U es triangular superior,

$$det\ (U) = \text{producto de los elementos en la diagonal}$$

Entonces se tiene el siguiente teorema:

Si una matriz cuadrada A tiene la factorización *LU*, $A = LU$ donde L tiene unos en la diagonal, entonces

$$det\ (A) = det\ (U) = \text{producto de los elementos de la diagonal de } U$$

2.4.6.2 Determinante de un múltiplo escalar de un matriz

Teorema. Si A es una matriz cuadrada de orden n y c un escalar,

$$Det(cA) = c^n \cdot det(A)$$

Esta fórmula se puede demostrar aplicando repetidamente la propiedad 3 de 2.4.5.2. Es decir, sacando factor c de cada una de las n filas de $|cA|$.

2.4.6.3 Determinante de una matriz invertible

Teorema. Una matriz cuadrada A es invertible (no singular) si y solo sí

$$\det(A) \neq 0$$

Demostración.

a). Supongamos que A es invertible. Entonces $\exists\ A^{-1}$ tal que $AA^{-1} = I$, tomando determinantes a ambos lados de la igualdad y aplicando las propiedades del producto: $det(A) \cdot det(A^{-1}) = det(I) = 1$, de lo que se concluye que $\det(A) \neq 0$.

b) Supongamos que $\det(A) \neq 0$. Por eliminación de Gauss-Jordan, podemos hallar una matriz B, en forma escalonada reducida, equivalente por filas a A. Como B está en forma escalonada reducida, o es I o tiene al menos una fila completa de ceros. Pero si tuviera una fila entera de ceros, $det(B) = 0$, lo que implicaría que $det(A) = 0$. Puesto que hemos partido de que $\det(A) \neq 0$, podemos concluir que $B = \mathrm{I}$, por lo que A es equivalente por filas a la matriz identidad y, por tanto, invertible.

2.4.6.4 Determinante de la matriz inversa

Teorema. Si A es invertible,

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Demostración.

Si A es invertible, existe A^{-1} tal que $AA^{-1} = I$. Por el teorema de 2.4.6.1

$$det(AA^{-1}) = det(A) \cdot det(A^{-1}) = det(I) = 1$$

Además, por ser A invertible sabemos que $\det(A) \neq 0$, así que podemos dividir amos términos de la igualdad anterior por $det(A)$ resultando:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

2.4.6.5 Condiciones equivalentes para matrices no singulares

Si A es una matriz $n \; x \; n$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. A es invertible
2. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución única para toda matriz $\boldsymbol{b}$ de tamaño $n \; x \; 1$
3. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ tiene solo la solución trivial
4. A es equivalente por filas a I_n
5. A se puede escribir como producto de matrices elementales
6. $\det(A) \neq 0$

Como se vio en 2.4.5.3, una matriz cuadrada tiene determinante cero sí y sólo sí, es equivalente por filas a una matriz con al menos una fila completa de ceros La validez de esta afirmación se deduce de la equivalencia de las propiedades 4 y 6 anteriores.

2.4.6.6 Determinante de la matriz traspuesta

Teorema. Si A es una matriz cuadrada,

$$det(A) = det(A^T)$$

Dado que las filas de una matriz son las columnas de su traspuesta, se deduce que los teoremas se cumplen también para las columnas.

2.4.6.7 Otras propiedades de los determinantes

A continuación enumeramos algunas propiedades de los determinantes. La demostración se deja al lector.

1. Si cualquier fila o columna de A es un vector cero, entonces $det\, A = 0$.
2. Si la fila *i* o columna j de A se multiplica por un escalar c, entonces $det\, A$ se multiplica por c.
3. Si A, B y C son idénticas excepto por la columna j y que la columna j de C es la suma de las *j*-ésimas columnas de A y B. Entonces, $det\, C = det\, A + det\, B$. La misma afirmación es cierta para filas.
4. El intercambio de cualesquiera dos filas (o columnas) distintos de A tiene el efecto de multiplicar el determinante de A por -1.
5. Si una matriz cuadrada a tiene dos filas (o columnas) iguales, entonces su determinante es cero.
6. Si una fila (columna) de A es un múltiplo escalar de otra fila (columna), entonces $det\, A = 0$.
7. Si se suma un múltiplo escalar de una fila (columna) de A a otra fila (columna) de A, entonces el determinante no cambia.

Las propiedades que se acaban de presentar simplifican la evaluación de determinantes de alto orden. Se "reduce por renglones" el determinante, usando la propiedad 7, hasta que tenga una forma en la que se pueda evaluar con facilidad. La meta más común será utilizando la propiedad 7 de manera repetida hasta que:

a) el nuevo determinante tenga un renglón (columna) de ceros o un renglón (columna) que sea múltiplo de otro —en cuyo caso el determinante es cero—,o
b) que la nueva matriz sea triangular, con lo que su determinante será el producto de sus elementos en la diagonal.

Ejemplo

Calcular $det\ (A)$ si $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ -2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

Solución

Existen varias formas de proceder en este caso y no es evidente cuál de ellas será la más rápida para llegar a la respuesta. Sin embargo, como ya existe un cero en la primera fila, se comienza la reducción en esa fila.

Se multiplica la segunda columna por 2 y por -4 y se suma a la primera y cuarta columnas, respectivamente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 6 \\ 12 & 7 & 3 & -27 \\ -11 & -7 & 2 & 33 \end{vmatrix}$$

Se intercambian las primeras dos columnas.

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 6 \\ 7 & 12 & 3 & -27 \\ -7 & -11 & 2 & 33 \end{vmatrix} =$$

Se multiplica la segunda columna por -5 y por -6 y se suma a la tercera y cuarta columnas, respectivamente.

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 12 & -57 & -99 \\ -7 & -11 & 57 & 99 \end{vmatrix}$$

Como la cuarta columna es ahora un múltiplo de la tercera (columna 4 = $\frac{99}{57}$ x columna 3) se ve que $|A|$ = 0.

2.4.7 Aplicaciones de los determinantes

2.4.7.1 Matriz adjunta

Recordemos que el cofactor C_{ij} de un matriz A ha quedado definido como $(-1)^{i+j}$ veces el determinante de la matriz obtenida al eliminar en A la fila i y la columna j. Si A es una matriz cuadrada, la **matriz de cofactores** de A tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

La traspuesta de esta matriz se llama **matriz adjunta** de A y se denota por $adj(A)$, es decir:

$$adj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Teorema. Si A es una matriz $n \ x \ n$ invertible:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)$$

Demostración.

En primer lugar probaremos que: $A \cdot adj(A) = det(A) \cdot In$

Consideremos el producto: $A \cdot [adj(A)]$. En este producto, el elemento de la fila i y la columna j viene dado por:

$$a_{i1} \cdot C_{j1} + a_{i2} \cdot C_{j2} + \ldots\ldots.. + a_{in} \cdot C_{jn}$$

Si $i = j$, esta suma es simplemente el desarrollo en cofactores de A por la fila i, es decir, el determinante de A. Por otra parte, si $i \neq j$, la suma es cero.

En consecuencia:

$$A \cdot [adj(A)] = \begin{bmatrix} \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A) \cdot I$$

Como A es invertible, $\det(A) \neq 0$, así que podemos escribir:

$$\frac{1}{det(A)} \cdot A \cdot [adj\ (A)] = In \Rightarrow A \cdot \left[\frac{1}{\det(A)} \cdot [\mathrm{adj}\ (A)]\right] = I_n$$

Multiplicando a la izquierda en ambos lados de la igualdad por A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot \left[\frac{1}{\det(A)} \cdot [\mathrm{adj}\ (A)]\right] = A^{-1} I_n \Rightarrow \left[\frac{1}{\det(A)} \cdot [\mathrm{adj}\ (A)]\right] = A^{-1}$$

2.4.7.2 Regla de Cramer

La regla de Cramer, es una fórmula que utiliza determinantes para resolver sistemas de n ecuaciones lineales en n variables. Es aplicable sólo a sistemas lineales con solución única.

Teorema. Regla de Cramer

Si la matriz de coeficientes de un sistema de n ecuaciones con n variables tiene determinante no nulo, la única solución del sistema viene dada por:

$$X_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}\ ,\ X_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ X_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

Donde la columna i de A_i es la columna de constantes del sistema.

Demostración.

Consideremos el sistema representado por $AX = B$. Puesto que $\det(A) \neq 0$, podemos escribir:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A) \cdot B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Si $b_1, b_2, \ldots \ldots, b_n$ son los elementos de B, x_i viene dada por:

$$x_i = \frac{1}{|A|} \cdot (b_1 C_{1i} + b_2 C_{2i} + \cdots + b_n C_{ni})$$

Pero la suma entre paréntesis es justamente el desarrollo en cofactores de A_i, lo cual significa que $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$, como queríamos demostrar.

Ejemplo.

Usar la regla de Cramer para hallar el valor de x en el sistema lineal:

$$\begin{cases} -x + 2y - 3z = 1 \\ 2x \qquad\ \ + \ z = 0 \\ 3x - 4y + 4z = 2 \end{cases}$$

Solución

El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 10 \qquad\qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Como $|A| \neq 0$, la solución es única. Podemos hallar x aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix}}{10} = \frac{(-1)^5}{10} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = \frac{(-1)\cdot(-8)}{10} = \frac{4}{5}$$