GEOMETRÍA AFÍN Y PROYECTIVA

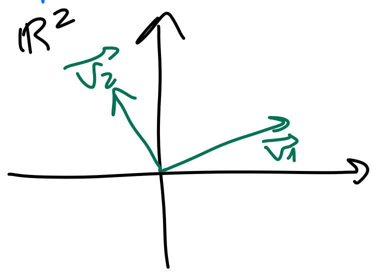
TEMA 2: APLICACIONES AFINES

ALFONSO ZAMORA

Aplicaciones afines

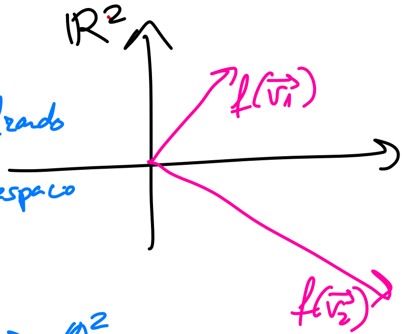
28 Sept

Aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

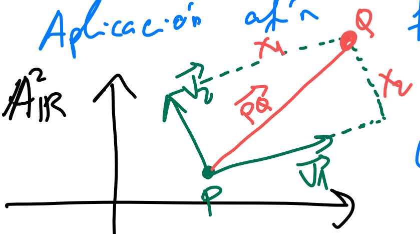


f

(determinada por completo especificando las imágenes de una base del espacio de partida).



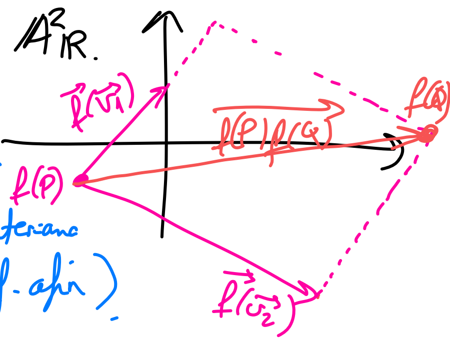
Aplicación afín $f: \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$



$R_c = \{P; \{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}\}$.

f

(una aplicación afín queda especificada por la imagen de una referencia cartesiana o una ref. afín).



2.1. Aplicaciones afines y representación matricial

2.1.1 Definición y propiedades de las aplicaciones afines

Definición: Sean A y A' espacios afines. Una aplicación $f: A \longrightarrow A'$ es afín si preserva las combinaciones afines, es decir, $f(\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n) = \lambda_0 f(P_0) + \ldots + \lambda_n f(P_n)$ con $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$

$$\boxed{f\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(P_i)}$$

Corolario: Sean $P_0, P_1, \dots, P_r \in A$ afínmente indep. y $f: A \longrightarrow A'$ afín
Si $B \in A$ es el baricentro de $P_0, P_1, \dots, P_r \in A$ entonces $f(B)$ es el baricentro de $f(P_0), f(P_1), \dots, f(P_r)$.

Demostración: Por definición de baricentro, las coordenadas baricéntricas de B respecto de $P_0, P_1, \dots, P_r$ son $\lambda_i = \frac{1}{r+1}$, $i = 0, \dots, r$.
por tanto B se puede expresar como la combinación afín:

$$B = \sum_{i=0}^{r} \frac{1}{r+1} P_i \overset{f \text{ afín}}{\Longrightarrow} f(B) = \sum_{i=0}^{r} \frac{1}{r+1} f(P_i)$$

y $f(B)$ es el baricentro de $f(P_0), f(P_1), \dots, f(P_r)$ ya que tiene por coordenadas baricéntricas respecto a ellos $\lambda_i = \frac{1}{r+1}$, $i = 0, 1, \dots, r$. ∎

Proposición: La definición de aplicación afín es equivalente a:
1) Para todo $P \in A$, la aplicación $\vec{f}: V \longrightarrow V'$ es lineal
$$\overrightarrow{PQ} \longmapsto \overrightarrow{f(P)f(Q)}$$

2) Existe $P \in A$, tal que la aplicación $\vec{f}: V \longrightarrow V'$ es lineal.
$$\overrightarrow{PQ} \longmapsto \overrightarrow{f(P)f(Q)}$$

Dem: Def $\Rightarrow$ 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ Def

Def $\Rightarrow$ 1): Supongamos f afín y probemos que se cumple 1). Para ver que $\vec{f}$ es lineal, sean $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in V$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.
quiero probar que $\vec{f}(\lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2}) = \lambda_1 \vec{f}(\vec{v_1}) + \lambda_2 \vec{f}(\vec{v_2})$.

Sea $P \in A$ y dados $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in V$, existen Q_1, Q_2 tales que $\overrightarrow{PQ_1} = \vec{v_1}$, $\overrightarrow{PQ_2} = \vec{v_2}$. Definimos $R := P + \lambda_1 \overrightarrow{PQ_1} + \lambda_2 \overrightarrow{PQ_2}$
$= P + \lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2}$.
Observamos que $R = \lambda_0 P + \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2$ con $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$.
combinación afín ya que $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$.
Como f es afín, preserva las combinaciones afines:
$f(R) = f(\lambda_0 P + \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) = \lambda_0 f(P) + \lambda_1 f(Q_1) + \lambda_2 f(Q_2) =$

$= \lambda_0 f(P) + \lambda_1 f(Q_1) + \lambda_2 f(Q_2) = (1-\lambda_1-\lambda_2) f(P) + \lambda_1 f(Q_1) + \lambda_2 f(Q_2)$

$= f(P) + \lambda_1 (f(Q_1) - f(P)) + \lambda_2 (f(Q_2) - f(P))$

$= f(P) + \lambda_1 \overrightarrow{f(P)f(Q_1)} + \lambda_2 \overrightarrow{f(P)f(Q_2)} =$

$= f(P) + \lambda_1 \vec{f}(\overrightarrow{PQ_1}) + \lambda_2 \vec{f}(\overrightarrow{PQ_2}) =$

$= f(P) + \lambda_1 \vec{f}(\vec{v_1}) + \lambda_2 \vec{f}(\vec{v_2})$ y $\vec{f}$ es lineal.

porque $\vec{f}(\lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2}) = \vec{f}(\lambda_1 \overrightarrow{PQ_1} + \lambda_2 \overrightarrow{PQ_2}) = \vec{f}(\overrightarrow{PR})$.

$= \overrightarrow{f(P)f(R)} = \lambda_1 \vec{f}(\vec{v_1}) + \lambda_2 \vec{f}(\vec{v_2})$.

$\underline{1) \Longrightarrow 2}$ inmediato.

$\underline{2) \Longrightarrow \text{Def}}$: Hip: para un punto P, $\vec{f}$ es lineal.
y quiero probar que f conserva las combinaciones afines.

Sean $P_0, P_1, \ldots, P_r \in A$ y escalares $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$
tales que $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1$. Quiero probar $f\left(\sum_{i=0}^{r} \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i f(P_i)$

Observamos que $\underbrace{\sum_{i=0}^{r} \lambda_i P_i}_{\text{punto final}} = \underbrace{P_0}_{\text{punto inicial}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i}}_{\text{vector.}}$, entonces

$\overrightarrow{P_0 \sum_{i=0}^{r} \lambda_i P_i} \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i}$

$\underbrace{f\left(\sum_{i=0}^{r} \lambda_i P_i\right)}_{\text{punto final}} = \underbrace{f(P_0)}_{\text{punto inicial}} + \underbrace{\overrightarrow{f(P_0)\, f\left(\sum_{i=0}^{r} \lambda_i P_i\right)}}_{\text{vector.}} = f(P_0) + \vec{f}\left(\overrightarrow{P_0 \sum_{i=0}^{r} \lambda_i P_i}\right) \overset{(*)}{}$

$= f(P_0) + \vec{f}\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i}\right) \underset{\vec{f}\text{ lineal}}{=} f(P_0) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \vec{f}(\overrightarrow{P_0P_i}) = f(P_0) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{f(P_0)f(P_i)}$

$= \sum_{i=0}^{r} \lambda_i f(P_i)$ ∎

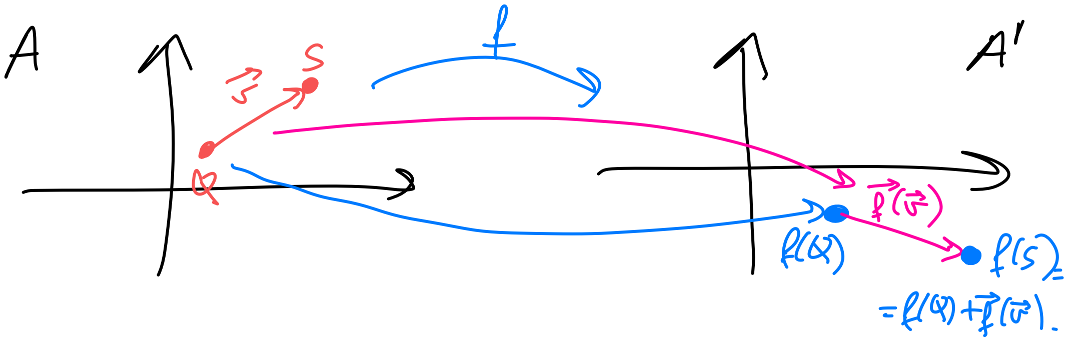
La anterior proposición caracteriza f afín en términos de una aplicación lineal $\vec{f}$ llamada aplicación lineal asociada a f. Se cumple que, para cualesquiera $Q,R \in A$ y $\vec{v} \in V$

$$\vec{f}(\overrightarrow{QR}) = \overrightarrow{f(Q)f(R)}$$

$$\boxed{f(Q+\vec{v}) = f(Q) + \vec{f}(\vec{v}).}$$

En efecto, sea $S := Q+\vec{v}$ entonces $\vec{f}(\vec{v}) = \vec{f}(\overrightarrow{QS}) =$
$= \overrightarrow{f(Q)f(S)}$

Entonces $f(Q+\vec{v}) = f(S) = f(Q) + \overrightarrow{f(Q)f(S)} = f(Q) + \vec{f}(\vec{v})$



Ejemplo: Sea $f: \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$

$$(x,y,z) \longmapsto (3x-y+2z-1,\ 2x+z+2).$$

Queremos ver si f es afín.

Veamos que si $P = (0,0,0) \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sea

$$\vec{f}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\overrightarrow{PQ} \longmapsto \overrightarrow{f(P)f(Q)}$$

$f(P) = f(0,0,0) =$
$= (-1,2)$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{(0,0,0)(x,y,z)} = (x,y,z)$$

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{(-1,2)f(x,y,z)} = \overrightarrow{(-1,2)(3x-y+2z-1,\ 2x+z+2)} = (3x-y+2z,\ 2x+z)$$ es lineal.

f es afín porque he encontrado un punto $P=(0,0,0)$ tal que $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{PQ} \longmapsto \vec{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$ es lineal (probando la definición 2)).

Ejemplo: $f: \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$

$$(x,y) \longmapsto (x^2-1,\ y+1).$$

Veamos que f no es afín, porque existe $P=(0,0) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ tal que $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{PQ} \longmapsto \overrightarrow{f(P)f(Q)}$ no es lineal, lo cual viola la definición 1).

$$\vec{f}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\overrightarrow{PQ} \longmapsto \overrightarrow{f(P)f(Q)}$$
$$\overrightarrow{(0,0)(x,y)} \qquad \overrightarrow{(-1,1)\,(x^2-1,y+1)}$$
$$(x,y) \longmapsto (x^2, y).$$

no es lineal por el cuadrado.

(ejercicio 1.5)

Proposición: Sean aplicaciones afines $f: A \longrightarrow A'$, $g: A' \longrightarrow A''$ con aplicaciones lineales asociadas $\vec{f}$, $\vec{g}$.

1) La composición $g\circ f: A \longrightarrow A''$ es afín y su aplicación lineal asociada es $\overrightarrow{(g\circ f)} = \vec{g}\circ\vec{f}$.

(Dem en notas)

2) $f: A \longrightarrow A'$ es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva si y sólo si $\vec{f}$ lo es.

3) Dadas $f_i: A \longrightarrow A'$ afines y escalares $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1$, la combinación

afín de aplicaciones afines $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i f_i$ es aplicación afín (dem. en notas).

Demostración:

inyectividad: Dados $P, Q \in A$, f inyectiva si

$$[f(P) = f(Q) \Longleftrightarrow P = Q.] \text{ equivale a}$$

$$[\vec{0} = \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \vec{f}(\overrightarrow{PQ}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \vec{0}]$$ que es que $\vec{f}$ sea inyectiva.

sobreyectividad:

Sea f sobreyectiva y probemos $\vec{f}$ sobreyectiva. Sea $\vec{v}' \in V'$, con $P', Q' \in A$ tales que $\overrightarrow{P'Q'} = \vec{v}'$. Como f sobreyectiva, existen $P, Q \in A$ con $f(P) = P'$ y $f(Q) = Q'$. Entonces

$$\vec{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{P'Q'} = \vec{v}' \Rightarrow \vec{f} \text{ sobreyectiva}$$

Recíprocamente, supongamos $\vec{f}$ sobreyectiva. y probemos f sobreyectiva. Sea $P' \in A'$ y sea otro punto $O \in A$, el vector $\overrightarrow{f(O)P'} \in V'$ y existe $\vec{v} \in V$ tal que $\vec{f}(\vec{v}) = \overrightarrow{f(O)P'}$. Definimos

$$P := O + \vec{v}$$

$$f(P) = f(O + \vec{v}) = f(O) + \vec{f}(\vec{v}) = f(O) + \overrightarrow{f(O)P'} = P'$$

f sobreyectiva.

Equivalencia para $f, \vec{f}$ biyectivas es consecuencia de las dos anteriores.

Cualquier aplicación lineal lleva subespacios vectoriales en subespacios vectoriales. Lo mismo ocurre con las aplicaciones afines.

<u>Proposición</u>: Sea $f: A \longrightarrow A'$ aplicación afín y sea B un subespacio afín de A tal que $B = P + W$, $P \in A$, $W \subset V$. Entonces se verifica que $\boxed{f(B) = f(P) + \vec{f}(W)}$.

Por tanto $f(B)$ es subespacio afín de A' con dirección $\vec{f}(W)$.

<u>Demostración</u>: En efecto:

$$f(B) = \{f(Q) : Q \in B\} = \{f(P+\vec{w}) : \vec{w} \in W\}$$
$$= \{f(P) + \vec{f}(\vec{w}) : \vec{w} \in W\} = f(P) + \{\vec{f}(\vec{w}) : \vec{w} \in W\}$$
$$= f(P) + \vec{f}(W). \quad \blacksquare$$

<u>Definición</u>: Una aplicación afín biyectiva entre dos espacios afines A y A' se denomina isomorfismo afín. En el caso $A = A'$ diremos que $f: A \longrightarrow A$ es una afinidad

<u>Observación</u>: Si $f: A \longrightarrow A$ es una afinidad, la aplicación inversa (que existe porque f es biyectiva)

$$\begin{aligned} f^{-1}: A &\longrightarrow A \\ P &\longmapsto f^{-1}(P) \end{aligned} \quad \text{tal que } f(f^{-1}(P)) = P.$$

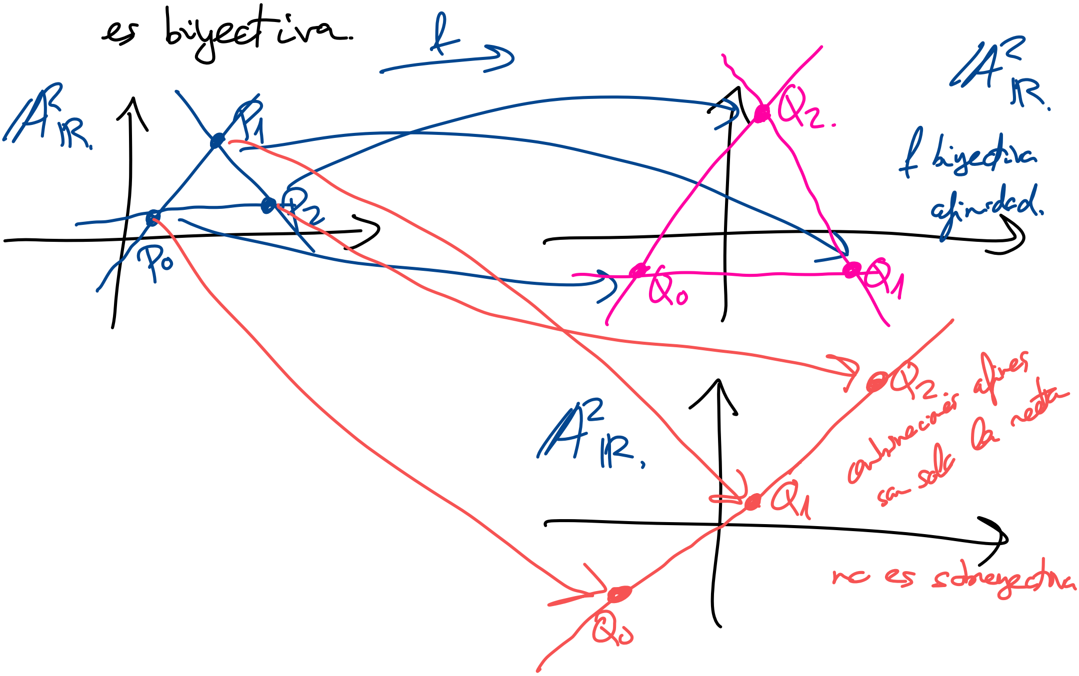
es afín. Además, sus aplicaciones lineales asociadas son inversas: $\overrightarrow{f^{-1}} = (\vec{f})^{-1}$

(ej 1.4).

Teorema: Sea A espacio afín de dimensión n. y sea $R_a = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ referencia afín. Si A' es otro espacio afín y $Q_0, Q_1, \dots, Q_n \in A'$ existe una única aplicación afín $f: A \longrightarrow A'$ tal que $f(P_i) = Q_i$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Además

- Si los Q_i son afínmente independientes, entonces f inyectiva.
- Si los Q_i son afínmente generadores de A', entonces f es sobreyectiva
- Si los Q_i son referencia afín de A', entonces f es biyectiva.



Demostración: $R_a = \{P_0, \dots, P_n\}$ es referencia afín de A. Cualquier punto $P \in A$ se escribe de forma única como combinación afín $P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i$, $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$.

Defino $f(P) := \sum_{i=0}^{n} \lambda_i Q_i$ (la combinación afín de los Q_i con los mismos escalares).

- f así definida es afín ya que conserva las combinaciones afines:

$$f(P) = f\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i\right) \overset{def\,f}{=} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(P_i) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i Q_i$$

- $f(P_i) = Q_i$, para todo i:

En efecto $P_i = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = P_i$ ($\lambda_i = 1$ y el resto 0)

Entonces $f(P_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i = Q_i$.

- f es única. En efecto sea otra $g: A \longrightarrow A'$ afín y lleve cada P_i en $g(P_i) = Q_i$.

Como g es afín, conserva las combinaciones afines:

$$g(P) = g\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i\right) \overset{g\ \text{afín}}{=} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i g(P_i) \overset{g(P_i)=Q_i}{=} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i Q_i$$

g y f coinciden en todo $P \in A$ $\qquad = f(P)$.

por tanto $g = f$. y f es única.

Supongamos los Q_i afínmente independientes y veamos f es inyectiva. Sean $R_1 = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i$, $R_2 = \sum_{i=0}^{n} \mu_i P_i$ tales que $f(R_1) = f(R_2)$. Entonces:

$$f\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i\right) = f\left(\sum_{i=0}^{n} \mu_i P_i\right) \Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{n} \lambda_i Q_i = \sum_{i=0}^{n} \mu_i Q_i$$

Entonces las coordenadas baricéntricas de $f(R_1) = f(R_2)$ en la referencia afín de $V(\{Q_0, \dots, Q_n\})$ deben ser únicas. $\Longrightarrow \lambda_i = \mu_i$, $i = 0, \dots, n \Longrightarrow R_1 = R_2$ y f es inyectiva.

• Supongamos $Q_0, \dots, Q_n$ afínmente generadores de A'.
Entonces para todo $R \in A'$, existen $\lambda_0, \dots, \lambda_n$, $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$ tales que $R = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i Q_i$.
Definiendo $P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i \in A$, tenemos

$$f(P) = f\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i\right) \overset{f \text{ afín}}{=} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(P_i) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i Q_i = R.$$

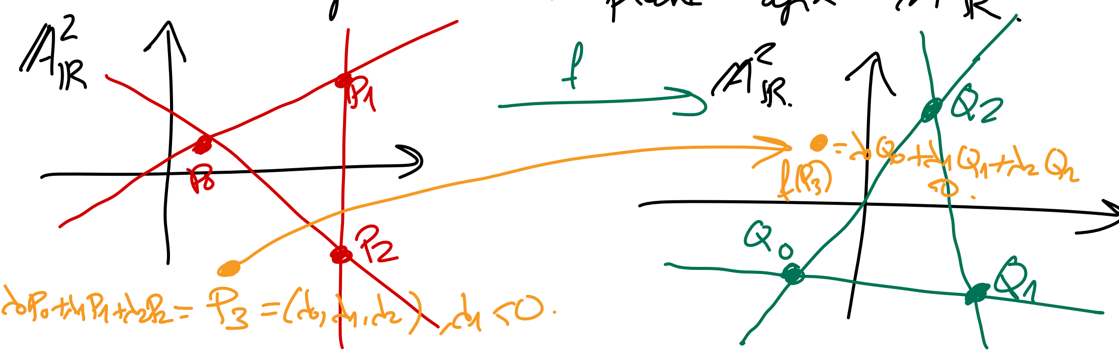
f es sobreyectiva.

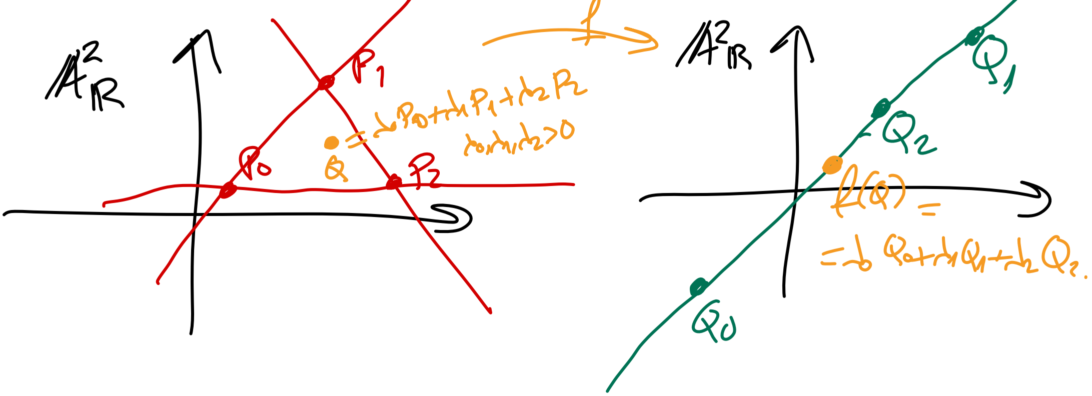
• Si los Q_i son referencia afín, son afínmente independientes y generadores $\Longrightarrow$ f es inyectiva y sobreyectiva $\Longrightarrow$ f biyectiva y f es isomorfismo afín. $\blacksquare$

Observaciones:

• Dados 3 puntos no alineados de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ (una referencia afín) y dados otros 3 puntos en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, existe una única f afín que lleva unos en otros.

• Si los 3 puntos no están alineados, son también ref. afín y f es afinidad del plano afín $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.





- En general, dadas $n+1$ puntos en A dim n, cualquier otro punto tiene su imagen ya especificada por f.

$\boxed{\text{Problemas } 1.6, 1.7 \text{ y } 1.8}$

2.1.2 Representación matricial de aplicaciones afines

Sea $f: A \longrightarrow A'$ afín con aplicación lineal asociada
$\vec{f}: V \longrightarrow V'$ (en general $\underbrace{\dim A}_{=n}$ no tiene que ser igual a $\underbrace{\dim A'}_{=m}$).

Representación en coordenadas cartesianas

Sean $R_c = \{O; \mathcal{B}\}$ y $R_c' = \{O'; \mathcal{B}'\}$ referencias cartesianas de A y A'.

Sea un punto $P \in A$, con coordenadas cartesianas $x = (x_1, \ldots, x_n)$ respecto de $R_c \iff \overrightarrow{OP}$ tiene coordenadas $x = (x_1, \ldots, x_n)$ respecto de $\mathcal{B}$.

Su imagen $f(P) \in A'$, con coordenadas cartesianas $y = (y_1, \ldots, y_m)$ respecto de $R_c' \iff$ coordenadas de $\overrightarrow{O' f(P)}$ respecto de la base $\mathcal{B}'$.

Sea $b=(b_1, \dots, b_m)$ las coordenadas cartesianas de $f(O)$ en $R'_c \iff \overrightarrow{O'f(O)}$ coordenadas en B'.

Tenemos que:

$$\overrightarrow{O'f(P)} = \overrightarrow{O'f(O)} + \overrightarrow{f(O)f(P)} = \overrightarrow{O'f(O)} + \vec{f}\,(\overrightarrow{OP}).$$

reescribo esta relación en coordenadas:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} + \left(M_{BB'}(\vec{f}) \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{y^t = b^t + M_{BB'}(\vec{f}) \cdot x^t}$$

que se puede escribir también como:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \hline y^t \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b^t & M_{BB'}(\vec{f}) \end{array}\right)}_{\begin{array}{c} \shortparallel \\ M_{R_cR_c'}(f) \end{array}} \begin{pmatrix} 1 \\ \hline x^t \end{pmatrix}.$$

matriz de la aplicación afín f respecto de R_c y R_c'.

Cómo relaciono $M_{R_{c_1}R'_{c_1}}(f)$ con $M_{R_{c_2}R'_{c_2}}(f)$ donde R_{c_1} R_{c_2} son referencias cartesianas de A y $R'_{c_1} R'_{c_2}$ son referencias cartesianas de A'.

X_1, X_2 son coordenadas cartesianas de P en R_{C_1}, R_{C_2}
y_1, y_2 " " " " $f(P)$ en R_{C_1}', R_{C_2}'

$$\underline{M_{R_{C_2} R_{C_2}'}(f)\begin{pmatrix}1\\ X_2^t\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1\\ y_2^t\end{pmatrix} = C_{R_{C_1}' R_{C_2}'}\begin{pmatrix}1\\ y_1^t\end{pmatrix}$$

mat. cambio referencia

$$= C_{R_{C_1}' R_{C_2}'} \cdot M_{R_{C_1} R_{C_1}'}(f) \cdot \begin{pmatrix}1\\ X_1^t\end{pmatrix} =$$

$$= \underline{C_{R_{C_1}' R_{C_2}'} \cdot M_{R_{C_1} R_{C_1}'}(f) \cdot C_{R_{C_2} R_{C_1}}\begin{pmatrix}1\\ X_2^t\end{pmatrix}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{M_{R_{C_2} R_{C_2}'}(f) = C_{R_{C_1}' R_{C_2}'} \cdot M_{R_{C_1} R_{C_1}'}(f) \cdot C_{R_{C_2} R_{C_1}}}$$

Dada una composición de aplicaciones afines

$$f: \underset{R_c}{A} \longrightarrow \underset{R_c'}{A'} \quad , g: \underset{R_c'}{A'} \longrightarrow \underset{R_c''}{A''}.$$ ref's cartesianas.

$$M_{R_c R_c''}(g \circ f) = M_{R_c' R_c''}(g) \cdot M_{R_c R_c'}(f).$$

Representación en coordenadas baricéntricas

(problema 10) coordenadas de P, $f(P)$, $g(f(P))$ en cada referencia.

Sean $R_a = \{P_0, \ldots, P_n\}$ y $R_a' = \{Q_0, \ldots, Q_m\}$ referencias afines de A y A'.

Sea $P \in A$ con coordenadas baricéntricas $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$, $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$ respecto de R_a. Su imagen $f(P) \in A'$ con coordenadas baricéntricas $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_m)$, $\sum_{j=0}^{m} \mu_j = 1$ respecto de Ra'. Se verifica (ver notas) que

$$\begin{pmatrix} \mu_0 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ m+1 \end{array} \overbrace{\begin{pmatrix} | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | \end{pmatrix}}^{n+1} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

coordenadas baricéntricas de cada $f(P_i)$ en la referencia Ra'

$M_{RaRa'}(f)$. es matriz de tamaño $(m+1) \times (n+1)$.

Si tomamos referencias afines Ra_1, Ra_2 en A

Ra_1', Ra_2' en A'

se tiene:

$$\boxed{M_{Ra_2 Ra_2'}(f) = C_{Ra_1' Ra_2'} \cdot M_{Ra_1 Ra_1'}(f) \cdot C_{Ra_2 Ra_1}}$$

y también:

$$M_{RaRa''}(g \circ f) = M_{Ra'Ra''}(g) \cdot M_{RaRa'}(f)$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & A' \\
P \arrow[r, mapsto] & f(P) \\
R_c \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & R_c' \arrow[d, leftrightarrow] \\
R_a \arrow[r] & R_a'
\end{tikzcd}$$

$x=(x_1,\dots,x_n)$ de P $\qquad \begin{pmatrix}1\\ y^t\end{pmatrix} = M_{R_cR_c'}(f)\cdot\begin{pmatrix}1\\ x^t\end{pmatrix}$ $\qquad y=(y_1,\dots,y_m)$ de $f(P)$

$\lambda^t = M_n\cdot\begin{pmatrix}1\\ x^t\end{pmatrix}$ $\qquad \mu^t = M_m\cdot\begin{pmatrix}1\\ y^t\end{pmatrix}$.

$\lambda=(\lambda_0,\dots,\lambda_n)$ de P $\qquad \mu^t = M_{R_aR_a'}(f)\lambda^t$ $\qquad \mu=(\mu_0,\dots,\mu_m)$ de $f(P)$.

Obtenemos la relación entre matrices en coordenadas cartesianas y baricéntricas:

$$\boxed{\begin{aligned} M_{R_aR_a'}(f) &= M_m\cdot M_{R_cR_c'}(f)\cdot M_n^{-1} \\ M_{R_cR_c'}(f) &= M_m^{-1}\cdot M_{R_aR_a'}(f)\cdot M_n \end{aligned}}$$

Ejemplo: Sean en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ los puntos

$P_0=(1,0,1)$, $P_1=(0,0,1)$, $P_2=(2,1,0)$, $P_3=(1,0,2)$

y los puntos $Q_0=(0,1,0)$, $Q_1=(0,1,1)$, $Q_2=(2,1,-1)$, $Q_3=(-1,1,0)$.

Los puntos P_0, P_1, P_2 y P_3 forman una referencia afín ya que

$\{\vec{v_1}=\overrightarrow{P_0P_1}=(-1,0,0), \vec{v_2}=\overrightarrow{P_0P_2}=(1,1,-1), \vec{v_3}=\overrightarrow{P_0P_3}=(0,0,1)\}$ sean base de $\mathbb{R}^3$, la llamamos $R_a=\{P_0,P_1,P_2,P_3\}$.

con referencia cartesiana asociada $R_C = \{P_0 ; \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}\}$.

Por el teorema, existe una única aplicación afín f tal que $f(P_i) = Q_i$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Los puntos Q_0, Q_1, Q_2 y Q_3 no forman una referencia afín ya que $\{\vec{v_1}' = \overrightarrow{Q_0Q_1} = (0,0,1), \vec{v_2}' = \overrightarrow{Q_0Q_2} = (2,0,-1), \vec{v_3}' = \overrightarrow{Q_0Q_3} = (-1,0,0)\}$

$\vec{v_2}' = -2\vec{v_3}' - \vec{v_1}'$

no son base de $\mathbb{R}^3$.

Por tanto f no es ni inyectiva ni sobreyectiva.

(Q_i son afínmente dependientes) (4 puntos en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ afínmente dependientes no pueden generar todo $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$) ($Q_i$ son coplanarios, generan solo un plano afín).

Sea $Q_3' = (0,2,0)$ y comprobamos que

$\{\vec{v_1}' = \overrightarrow{Q_0Q_1} = (0,0,1), \vec{v_2}' = \overrightarrow{Q_0Q_2} = (2,0,-1), \vec{w} = \overrightarrow{Q_0Q_3'} = (0,1,0)\}$

sí es base de $\mathbb{R}^3$ por lo que

$R_a' = \{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3'\}$ es referencia afín de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

Representamos matricialmente f:

- Coordenadas baricéntricas $M_{R_aR_a'}(f) = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \end{pmatrix}_{4\times 4}$

coordenadas de $f(P_0), f(P_1), f(P_2)$ y $f(P_3)$ en R_a'

como $f(P_0) = Q_0 = \alpha_0 Q_0 + \underset{0}{\underbrace{\alpha_1}} Q_1 + \underset{0}{\underbrace{\alpha_2}} Q_2 + \underset{0}{\underbrace{\alpha_3}} Q_3'$

coordenadas baricéntricas de $f(P_0)$ en R_a' son $(1,0,0,0)$.

De igual modo $f(P_1)$ tiene coordenadas $(0,1,0,0)$ y $f(P_2)$, $(0,0,1,0)$.

Pero observa que $f(P_3) = Q_3 \neq Q_3'$. Calculemos las coordenadas baricéntricas de $f(P_3) = Q_3 = (-1,1,0)$

$$f(P_3) = \lambda_0 Q_0 + \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3'$$

$$(-1,1,0) = \lambda_0(0,1,0) + \lambda_1(0,1,1) + \lambda_2(2,1,-1) + \lambda_3(0,2,0)$$

LD sistema

$$\begin{cases} -1 = 2\lambda_2 \\ 1 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ 0 = \lambda_1 - \lambda_2 \\ 1 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{cases} \qquad \text{con } \sum_{i=0}^{3} \lambda_i = 1$$

su solución $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$.

$$M_{RaRa'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

observa que el rango es 3 porque f lleva P_0, P_1, P_2, P_3 que generan $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ de dim 3 en un plano de dim 2 generado (afínmente) por 3 puntos.

Esto equivale a que la aplicación lineal asociada $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lleva 3 vectores linealmente independientes ($\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}$) en 2 vectores linealmente independientes ($\overrightarrow{Q_0Q_1}$ y $\overrightarrow{Q_0Q_3}$).

$$\dim \operatorname{Im} \vec{f} = 2 \qquad \dim \operatorname{Ker} \vec{f} = 1$$

porque $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \dim \operatorname{Ker} \vec{f} + \dim \operatorname{Im} \vec{f}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \quad + \quad 2.$

Para obtener la matriz en cartesianas hago:

$$M_{RcRc'}(f) = M_3^{-1} \cdot M_{RaRa'}(f) \cdot M_3 =$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = M_{R_c R_c'}(f)$$

Queremos entender f respecto de las referencias cartesianas canónicas:

$$M_{R_{ce}R_{ce}}(f) = C_{R_c' R_{ce}} \cdot M_{R_c R_c'}(f) \cdot C_{R_{ce} R_c}^{-1} =$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)^{-1}$$