Tema 6: Teorema de L'Hôpital, concavidad/convexidad, polinomios de Taylor

· **Prop 1** (Teorema del Valor Medio de Cauchy)

Sean $f, g : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ funciones diferenciables en todo $[a,b]$ con $g'(x) \neq 0$ en (a,b) y f, g continuas en $[a,b]$. Entonces $\exists\, \xi \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad (*)$$

(Obs: es parte del Teorema que los dos miembros de la igualdad en $(*)$ están bien definidos).

Dem: i) Veamos primero que $g(b)-g(a) \neq 0$.
De no ser así, por el Teorema de Rolle $\exists\, c \in (a,b)$ con $g'(c) = 0$, lo cual contradice que $g' \neq 0$ en (a,b). Por tanto, $\exists\, \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

ii) Consideremos $h(x) := (f(b)-f(a))\,g(x) - (g(b)-g(a))\,f(x)$.
La función h es continua en $[a,b]$ por serlo f y g, y es diferenciable en (a,b) por serlo f y g, con derivada

$$h'(x) = (f(b)-f(a))\,g'(x) - (g(b)-g(a))\,f'(x). \quad (1)$$

Asimismo:

$$h(a) = (f(b)-f(a))\,g(a) - (g(b)-g(a))\,f(a)$$
$$= f(b)g(a) - g(b)f(a)$$
$$h(b) = (f(b)-f(a))\,g(b) - (g(b)-g(a))\,f(b)$$
$$= f(b)g(a) - g(b)f(a) \qquad (2)$$
$$= h(a)$$

Usando (1) y (2) junto con el Teorema de Rolle,

$\exists\, \xi \in (a,b)$ con $h'(\xi) = 0 \iff$

$\iff 0 = (f(b)-f(a))\,g'(\xi) - (g(b)-g(a))\,f'(\xi)$

$\iff \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ (pues $g(b)-g(a) \neq 0$) $\boxtimes$

El Teorema del Valor Medio es el ingrediente fundamental de las diversas versiones del Teorema de L'Hôpital, que vamos a discutir ahora:

<u>Prop2:</u> (Teorema de L'Hôpital, 1^er^ caso)

Sean $f, g : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ continuas en $[a,b]$, diferenciables en (a,b), con $g' \neq 0$ en (a,b) y $f(a) = g(a) = 0$. Entonces, si

$\exists \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, también $\exists \lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$

y ambos límites son iguales.

<u>Obs</u>: i) Puesto que el Teorema de ~~L'H~~ L'Hôpital se refiere al límite $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$, basta con que las condiciones del Teorema se cumplan en $[a, a+\delta]$ con $\delta > 0$ suficientemente pequeño.

ii) En la conclusión del Teorema de L'Hôpital se permite que $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ sea $\pm \infty$.

<u>Dem:</u>

i) Supongamos primero que $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$:

Dado $x \in (a,b]$, puesto que $f(a) = g(a) = 0$, del Teorema del Valor Medio de Cauchy deducimos que $\exists \xi \in (a,x)$ con

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Puesto que $\exists \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, dado $\varepsilon>0$,

$\exists \delta \in (0, b-a]$ tal que si $a < x \le a+\delta$,

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \varepsilon.$$

En tal caso, $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - l\right|$; $\xi\in(a,x)$

Pero $\xi\in(a,x) \Rightarrow \xi \in (a, a+\delta)$, luego

$$\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - l\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < \varepsilon,\ x\in(a,a+\delta)$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

ii) Si $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, dado $R>0$ $\exists \delta\in(0,b-a]$

tal que si $a<x<a+\delta$,

$\frac{f'(x)}{g'(x)} \ge R$. Tomando entonces tal x,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (\xi\in(a,x))$$

$\ge R$, pues $(a,x) \subset (a, a+\delta)$

$\Rightarrow \lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ (el caso $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ es muy similar)

Corolario (Teorema de L'Hôpital, 2ª Versión)

Sean $f, g : (a,b) \longmapsto \mathbb{R}$ diferenciable en (a,b) y $x_0 \in (a,b)$. Entonces, si $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $g' \neq 0$ en (a,b) y $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, también $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

y son iguales

Obs: i) De nuevo, basta con que las hipótesis se cumplan en un intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b)$ para $\delta > 0$ suficientemente pequeño

ii) Los casos $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$ están permitidos

Dem:

i) Primero, observamos que una pequeña variación del Teorema de L'Hôpital en su primera versión también permite concluir:

• "Si $f, g : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ son continuas en $[a,b]$, diferenciables en (a,b), con $g' \neq 0$ en (a,b) y $f(b) = g(b)$, entonces, si $\exists \lim_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, también $\exists \lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$

y son iguales (omito la prueba).

ii) Usando i), si $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, eso equivale a:

$\exists \lim_{x\to x_0-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, $\exists \lim_{x\to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ y son iguales

$\Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)}$, $\exists \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)}$, y

ambos son iguales a $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (por i))

$\Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, y es igual a $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ $\blacksquare$

Prop 3 (Teorema de L'Hôpital, 2º Caso)
Sean $f, g : (a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ continuas en $(a,b]$, diferenciables en (a,b) con $g' \neq 0$ en (a,b), y $\lim_{x\to a+} f(x)$, $\lim_{x\to a+} g(x)$ son ambos $\pm\infty$.
Entonces, si $\exists \lim_{x\mapsto a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, también $\exists \lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$, y son iguales.

Dem: i) Supongamos $\exists \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$.
Entonces, dado $\varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta_\varepsilon \in (0, b-a]$ tal que

$a < x < a+\delta \Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell \right| < \varepsilon/2$.

Escribimos entonces, usando el Teorema del Valor Medio de Cauchy,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a+\delta)}{g(x)-g(a+\delta)}\,\frac{g(x)-g(a+\delta)}{g(x)}\,\frac{f(x)}{f(x)-f(a+\delta)}$$

$$= \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}\left[1-\frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right]\left[1-\frac{f(a+\delta)}{f(x)}\right]^{-1} \quad (1)$$

(para cierto $\xi_x \in (x, x+\delta)$)

(La fórmula (1) es válida siempre que $f(x)-f(a+\delta)\neq 0$, pero como $\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$, fijando $\delta>0$ y tomando $\delta_1 \in (0,\delta]$ de forma apropiada, si $a<x<a+\delta_1$ (1) se cumple).

Entonces, para $a<x<a+\delta_1$, (1) implica que

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\ell = \left[\left(\frac{f'}{g'}\right)(\xi_x)-\ell\right]\left[1-\frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right]\left[1-\frac{f(a+\delta)}{f(x)}\right]^{-1}$$

$$+\ell\left\{1-\left(1-\frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right)\left(1-\frac{f(a+\delta)}{f(x)}\right)^{-1}\right\} \quad (2).$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}-\ell\right| \le \mathrm{I} + \mathrm{II},$$

siendo:

$$\cdot\ \mathrm{I} = \underbrace{\left|\left(\frac{f'}{g'}\right)(\xi_x) - l\right|}_{<\varepsilon/2} \underbrace{\left|1 - \frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right|}_{\xrightarrow[x\to a+]{} 1} \underbrace{\left|1 - \frac{f(a+\delta)}{f(x)}\right|^{-1}}_{\xrightarrow[x\to a+]{} 1}$$

Por tanto, $\exists\ \delta_2 \in (0, \delta_1]$ tal que si

$a < x < a+\delta_2$, $\mathrm{I} < \frac{3}{4}\varepsilon$ $\left(\frac{\varepsilon}{2} < \frac{3}{4}\varepsilon\right)$

(para ver que $\left|1 - \frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right| \xrightarrow[x\to a+]{} 1$, usamos el

hecho de que $\lim\limits_{x\to a+} g(x) = \pm\infty$, y lo mismo

con $\left|1 - \frac{f(a+\delta)}{f(x)}\right|^{-1}$)

Del mismo modo, como $\lim\limits_{x\to a+}\left(1 - \frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right)\left(1 - \frac{f(a+\delta)}{f(x)}\right) = 1$,

$\exists\ \delta_3 \in (0, \delta_1]$ tal que $a < x < a+\delta_3 \Longrightarrow$

$\mathrm{II} < \left|1 - \left(1 - \frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right)\left(1 - \frac{f(a+\delta)}{f(x)}\right)^{-1}\right| |l| < \frac{\varepsilon |l|}{4(|l|+1)}$.

Tomando $\delta_4 = \min\{\delta_2, \delta_3\} \in (0, \delta_1]$, para

$a < x < a+\delta_4$, $\begin{cases} \mathrm{I} < \frac{3}{4}\varepsilon \\ \mathrm{II} < \frac{\varepsilon |l|}{4(|l|+1)} < \frac{1}{4}\varepsilon \end{cases} \Rightarrow \mathrm{I} + \mathrm{II} < \frac{3}{4}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon = \varepsilon$

iii) Si $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, la ecuación (1)

sigue siendo válida para $a<x<a+\delta$,

pero como $\lim_{x\to a+} \left[1-\frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right]\left[1-\frac{f(a+\delta)}{f(x)}\right]^{-1} = 1$,

si para un $R>0$ hemos elegido $\delta\in(0,b-a]$

tal que $a<x<a+\delta \Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} \geq 2R$,

podemos encontrar $\delta_1\in(0,\delta]$ tal que si

$a<x<a+\delta_1 \Rightarrow \left[1-\frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right]\left[1-\frac{f(a+\delta)}{f(x)}\right]^{-1} \geq \frac{1}{2}$,

en cuyo caso, para $a<x<a+\delta$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \underbrace{\left(\frac{f'}{g'}\right)(\xi_x)}_{\geq 2R} \underbrace{\left[1-\frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right]\left[1-\frac{f(a+\delta)}{f(x)}\right]^{-1}}_{\geq \frac{1}{2}} \geq 2R\cdot\frac{1}{2} = R.$$

$\Rightarrow \lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ $\boxed{R}$

Prop 4 (Teorema de L'Hôpital 3.º caso)

Sean $f,g: I\to\mathbb{R}$ con $I\supset[a,\infty)$ o $I\supset(-\infty,a]$ (para cierto $a\in\mathbb{R}$).

Entonces, si f y g son diferenciables en I con $g' \neq 0$ en I tenemos:

i) Si $I \supset [a, \infty)$ y $\exists \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, y ambos son iguales

ii) Si $I \supset (-\infty, a]$ y $\exists \lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, y ambos son iguales.

(Obs: se permite que $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ sean $\pm\infty$)

Dem: Pongamos que $I \subset [1, \infty)$, y consideramos

$$\begin{cases} f_1(x) = f(1/x) \\ g_1(x) = g(1/x) \end{cases} ; \; 0 < x \leq 1.$$

Puesto que f_1 y g_1 son diferenciables en $(0,1)$ si f y g lo son en $(1, \infty)$ con

- $f_1'(x) = -f'(1/x)\, x^{-2}$, $0 < x < 1$,
- $g_1'(x) = -g'(1/x)\, x^{-2}$

$g_1' \neq 0$ en $(0,1)$, $\frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \frac{f'(1/x)}{g'(1/x)}$, $0 < x < 1$

y si $\exists \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, tomando $t = 1/x$, $x \to \infty \Leftrightarrow t \to 0^+$

Por tanto, si $\exists \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, también

$\exists \lim_{t\to 0+} \frac{f_1'(t)}{g_1'(t)}$, (y son iguales).

Usando el 1er caso del Teorema de L'Hôpital,

$\exists \lim_{t\to 0+} \frac{f_1(t)}{g_1(t)}$ (y es igual a $\lim_{t\to 0} \frac{f_1'(t)}{g_1'(t)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$)

Pero $t\to 0+ \iff x = 1/t \to \infty$, luego

si $\exists \lim_{t\to 0+} \frac{f_1(t)}{g_1(t)}$, también existe $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

(y son iguales), luego $\exists \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ejemplos de uso del Teorema de L'Hôpital

i) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = "\frac{0}{0}"$.

Si $f(x) = 1-\cos x$, $g(x) = x^2$, $g'(x) = 2x \neq 0$ $(x\neq 0)$,

luego $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

$= \frac{1}{2} \operatorname{sen}'(0) = \frac{1}{2}\cos 1 = 1/2.$

ii) Veamos que si $a>0$, $\lim_{x\to 0+}(x^a \log x)=0$:

Tenemos $\lim_{x\to 0+}(x^a\log x)=$ "$0\cdot\infty$", que no es exactamente del tipo al que puede aplicarse directamente el Teorema de L'Hôpital, pero para $x>0$, $x^a\log x=\frac{\log x}{x^{-a}}$ y entonces $\lim_{x\to 0+}\frac{\log x}{x^{-a}}=$ "$\frac{\infty}{\infty}$", dónde sí puede aplicarse:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\log x}{x^{-a}}=\lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-ax^{-a-1}}=\lim_{x\to 0+}\left(-\frac{1}{a}x^{a}\right)=0,$$

por ser $a>0$.

iii) Veamos que si $a>0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^a}=0$ "$\frac{\infty}{\infty}$":

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^a}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{a}x^{-a}\right)=0,$$

por ser $a>0$.

iv) Veamos que $\forall p\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to\infty}(x^pe^{-x})=0$:

- Si $p\le 0$ y $x\ge 1$, $0<x^pe^{-x}\le e^{-x}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$, luego para $p\le 0$ es trivial.
- Si $p>0$, $\lim_{x\to\infty}(x^pe^{-x})$ es "$\infty\cdot 0$", pero para $x>0$, $x^pe^{-x}=\frac{x^p}{e^x}$, y usando L'Hôpital,

12)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{e^x} \left(= "\frac{\infty}{\infty}"\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{p x^{p-1}}{e^x} =$$

suponiendo

$$= \dots = \lim_{x\to\infty} \frac{p(p-1)\dots(p-k)\, x^{p-k}}{e^x} \quad (p-k+1>0)$$

L'Hôpital k veces con sentido) y siempre que p

Sea cual sea $p \in \mathbb{R}$, podemos encontrar k entero tal que $p-k \leq 0$ pero $p-k+1>0$. Entonces, usando que para $p\leq 0$, $\lim_{x\to\infty}(x^p e^{-x}) = 0$, se deduce el caso general.

V) Veamos que $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ "1^∞":

Si $l = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, $\log l = \log\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$$

(Suponemos $l>0$ y usamos que $\log x$ es continua en $(0,\infty)$). Pero $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \cancel{x}\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{\log(1+1/x)}{x^{-1}}$,

y $\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+1/x)}{x^{-1}} \left(= "\frac{0}{0}"\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{-x^{-2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-1}}{-x^{-2}} =$

$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-1} = 1$, luego $l = e^1 > 0$ (13)

por tanto, a posteriori, los cálculos anteriores están justificados.

vi) Veamos que si $\exists f''$ en $(x-\delta, x+\delta)$ con $\delta > 0$ y f'' es continua en x,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x) :$$

Usando el Teorema de L'Hôpital,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \left(= \text{"}\frac{0}{0}\text{"}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} \left(= \text{"}\frac{0}{0}\text{"}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f''(x+h) + f''(x+h)}{2} = \frac{2f''(0)}{2} = f''(0).$$

– Concavidad y convexidad

Def 1: Sea $f : I \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ con I un intervalo. Decimos:

i) f es convexa en I si dados $x, y \in I$ y $0 \leq t \leq 1$, $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$

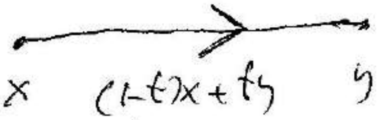
ii) f es cóncava en I si dados $x, y \in I$ y $0 \leq t \leq 1$, $f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y)$

Observaciones:

i) Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo y $x, y \in I$, si $0 \le t \le 1$, $(1-t)x + ty \in I$ (por ejemplo, si $I = [a,b]$ y $x, y \in I \Leftrightarrow a \le x, y \le b$, tomando $0 \le t \le 1$, luego si además $x \le y$,

$$x \le (1-t)x + ty \le y \, , \text{ pues}$$

$$\begin{cases} (1-t)x + ty - x = \underbrace{t}_{\geq 0}\underbrace{(y-x)}_{\geq 0} \geq 0. \\ (1-t)x + ty - y = \underbrace{(1-t)}_{\geq 0}\underbrace{(x-y)}_{\leq 0} \leq 0 \end{cases} \quad)$$



conforme t aumenta de 0 a 1, $(1-t)x + ty$ crece desde x hasta y.

ii) Si $f(x) = ax + b$, f es tanto cóncava como convexa.

iii) Si en la definición 1 sustituimos:
Def 1 i) $\to$ Def 1 i)', que dice: "dados $x, y \in I$ y $0 < t < 1$, $f((1-t)x + ty) < (1-t)f(x) + t f(y)$", f se denomina estrictamente convexa (en I)

Def 1 ii) $\to$ Def 1 ii)', que dice "dados $x, y \in I$ y $0 < t < 1$, $f((1-t)x + ty) > (1-t)f(x) + t f(y)$", f se denomina estrictamente cóncava (en I)

<u>Prop 5</u>: i) Sea $f:(a,b)\mapsto\mathbb{R}$ diferenciable en (a,b) y convexa en (a,b). Entonces f' es creciente en (a,b) (si f es estrictamente convexa, f' es estrictamente creciente).

ii) Recíprocamente, si $f:(a,b)\mapsto\mathbb{R}$ es diferenciable en (a,b) y f' es creciente en (a,b), f es convexa en (a,b) (si f' es estrictamente creciente, f es estrictamente convexa).

<u>Dem</u>: i) Fijemos $x,y\in(a,b)$ con $a<x<y<b$.

Si $z\in(x,y)\Leftrightarrow z=(1-t)x+ty$ con $t\in(0,1)$.

Entonces

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x}=\frac{f((1-t)x+ty)-f(x)}{t(y-x)}\quad;\ t(y-x)>0$$

$$\leq\frac{[(1-t)f(x)+tf(y)]-f(x)}{t(y-x)}\quad(f\text{ convexa})$$

$$=\frac{t[f(y)-f(x)]}{t[y-x]}=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\quad(1).$$

Tomando en (1), $z\to x+$, $\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\mapsto f'(x)$ (pues f' es diferenciable en todo $x\in(a,b)$), luego

$$f'(x) \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \quad \forall x\in(a,b)\ \forall y\in(x,b) \quad (2)$$

Razonando de forma similar:

$$\frac{f(y)-f(z)}{y-z} = \frac{f(y)-f((1-t)x+ty)}{(1-t)(y-x)} \ ; \quad (1-t)(y-x)>0$$

$$\ge \frac{f(y)-[(1-t)f(x)+tf(y)]}{(1-t)(y-x)}$$

$$= \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \qquad (3)$$

y tomando en (3), $z \longrightarrow y^-$, $\frac{f(y)-f(z)}{y-z} \longrightarrow f'(y)$,

luego $f'(y) \ge \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \ \forall y\in(a,b)\ \forall x\in(a,y)$ (4).

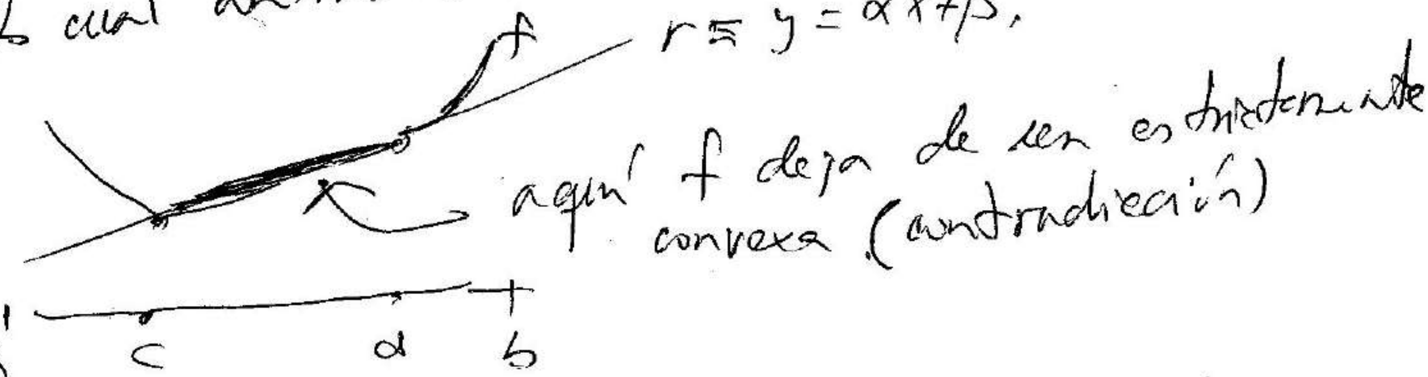
(4) y (5) $\Rightarrow f'(y) \ge \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \ge f'(x)$, de donde f' es creciente en (a,b).

- Por último, si f es estrictamente ~~[illegible]~~ convexa en (a,b) y diferenciable, si f' no fuera estrictamente creciente, entonces existiría un intervalo $[c,d]$ con $a<c<d<b$ y f' constante en $[c,d]$: $(f'(c) \le f'(z) \le f'(d)=f'(c)$ si $z\in[c,d])$ $\Longrightarrow f'(z)=f'(c)\ \forall z\in[c,d]$

$f'(x)=\alpha$, $x\in[c,d]$

Entonces $g(x) = f(x) - \alpha x$ sería continua en $[c,d]$

con $g'(x) = f'(x) - \alpha = 0$ en $[c,d]$, luego g sería constante: $\exists \beta$ con $g(x) = \beta$, $x \in [c,d]$, luego de donde $f(x) = \alpha x + \beta$ si $x \in [c,d]$, luego la gráfica de f tendría un segmento rectilíneo, lo cual contradice la convexidad estricta de f.



(ii) Supongamos que f' es creciente en (a,b) y sean $x, y \in (a,b)$, $0 \leq t \leq 1$ (y por conveniencia, suponemos $x < y$). Queremos ver que

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + t f(y)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{f((1-t)x + ty) - (1-t)f(x) - t f(y)}_{:= g(t)} \leq 0.$$

Pero $g(t) = (1-t)[f(x_t) - f(x)] + t[f(x_t) - f(y)]$

(con $x_t = (1-t)x + ty$; $x \leq x_t \leq y$)

Usando el Teorema del Valor Medio de Lagrange, $\exists \xi \in [x, x_t]$ $\exists \eta \in [x_t, y]$ con

$$g(t) = (1-t) f'(\xi) \underbrace{(x_t - x)}_{= t(y-x)} + t f'(\eta) \underbrace{(x_t - y)}_{= -(1-t)(y-x)}$$

$$\Rightarrow g(t) = \underbrace{\underset{\geq 0}{t}\,\underset{>0}{(1-t)}\,\underset{>0}{(y-x)}}_{\geq 0}\,\underbrace{\left(f'(\xi) - f'(\eta)\right)}_{\substack{\leq 0, \text{ pues } \xi \leq x_t \leq \eta \\ \text{y } f' \text{ es creciente}}} \quad (*)$$

≤ 0.

luego f es convexa en (a,b). Si f' fuera estrictamente creciente en (a,b), si $0<t<1$ y analizando la anterior expresión $(*)$ para $g(t)$, tenemos:

$$g(t) = \underset{>0}{t}\,\underset{>0}{(1-t)}\,\underset{>0}{(y-x)}\,\underbrace{\left(f'(\xi) - f'(\eta)\right)}_{<0} < 0$$

<0, pues si $0<t<1$, podemos tomar $\xi \in (x, x_t)$ y $\eta \in (x_t, y)$, luego $\xi < x_t < \eta$ y $f'(\xi) - f'(\eta) < 0$ por ser f' estrictamente creciente. $\blacksquare$

Corolario (Prop 6):

Sea $f: (a,b) \longmapsto \mathbb{R}$ con 2 derivadas en (a,b) ($\exists f''$ en (a,b)). Entonces:

i) f es convexa a (a,b) sii $f'' \geq 0$ en (a,b).

ii) f es estrictamente convexa en (a,b) sii $f'' > 0$ en (a,b)

Dem: Usando la Prop. 5, basta notar que si f tiene 2 derivadas en (a,b),

- f' creciente en (a,b) $\Leftrightarrow$ $f''=(f')'$ es ≥ 0 en (a,b)
- f' estrictamente creciente en (a,b) $\Leftarrow$ $f''=(f')'$ es > 0 en (a,b).

Ejemplos:

i) Si $f(x)=x^a$ con $a \geq 1$ en $(0,\infty)$, f es convexa (estrictamente convexa si $a>1$).

Dem: $f'(x)=ax^{a-1}$, $f''(x)=\underbrace{a(a-1)}_{\geq 0}\underbrace{x^{a-2}}_{>0} \geq 0$.

Si $a>1$, $f''(x)>0$ en $(0,\infty)$.

ii) Si $f(x)=e^x$, es convexa en $\mathbb{R}$.

Dem: $f'=f''=f$ y $f>0$.

iii) $f(x)=x^2$ es estrictamente convexa en $\mathbb{R}$

Dem: $f''=2>0$.

Prop 6: Sea $f:[a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ con f continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b). Entonces f es convexa en $[a,b]$ sii $f'\geq 0$ en (a,b) (estrictamente convexa en $[a,b]$ sii $f'>0$ en (a,b)).

Dem: f convexa en $[a,b]$ $\Rightarrow$ f convexa en (a,b) $\Rightarrow$ $f' \geq 0$ en (a,b). Si $f' \geq 0$ en (a,b) y f es continua en $[a,b]$, veamos que si $a < x < b$, y $0 \leq t \leq 1$,

$$\begin{cases} f((1-t)a + tx) \leq (1-t)f(a) + tf(x) & 1.1) \\ f((1-t)x + tb) \leq (1-t)f(x) + tf(b) & 1.2) \end{cases}$$

• 1.1): Si $g(t) = f(\underbrace{(1-t)a + tx}_{=x_t}) - (1-t)f(a) - tf(x)$,

como f es continua en $[a,x]$ y $a < x_t < x$, podemos (como en la prueba de la Prop 5), aplicando el Teorema del Valor Medio de Lagrange para obtener $g(t) = t(1-t)(x-a)(f'(\xi) - f'(\eta))$ con $\xi \in (a, x_t)$, $\eta \in (x_t, x)$. Si f' ~~creciente~~ si f' ~~creciente~~ en (a,b) $\Rightarrow$ $g(t) \leq 0$ y si f' estrictamente creciente en (a,b) $\Rightarrow$ $g(t) < 0$. De modo análogo se puede estudiar 1.2). $\boxtimes$

Más ejemplos:

iv) $f(x) = x^a$ en $[0,\infty)$ es:

→ Estrictamente convexa si $a > 1$

→ convexa ~~así~~ si $a \geq 1$.

v) Si $f(x) = x^a$ en $[0,\infty)$ y $0<a<1$,

f es continua $[0,\infty)$ (pues $\lim_{x\to 0^+} x^a = 0 = f(0)$)

y para $x>0$, $f'(x) = a x^{a-1}$, $f''(x) = \underbrace{a(a-1)}_{<0} \underbrace{x^{a-2}}_{>0}$

$\Rightarrow f''<0$ en $(0,\infty)$.

Por tanto, f es estrictamente cóncava

en $[0,\infty)$.

vi) Si $f(x) = x^a$ en $(0,\infty)$ con $a<0$,

f es estrictamente cóncava (inmediato).

Veamos un ejemplo distinto:

$\bar{\text{c}}$ convexa en $\mathbb{R}$:

vii) $f(x) = |x|$ es convexa en $\mathbb{R}$:

Dem (Directamente) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $0 \le t \le 1$.

$$
\begin{aligned}
f((1-t)x+ty) &= |(1-t)x + ty| \\
&\le |(1-t)x| + |ty| \\
&= (1-t)|x| + t|y| \quad (\text{pues } t, 1-t \ge 0) \\
&= (1-t) f(x) + t f(y)
\end{aligned}
$$

Para este ejemplo, la Prop. 5 no es aplicable.

- Más sobre máximos y mínimos locales:

Prop 7: Sea $f:(a,b) \longmapsto \mathbb{R}$ diferenciable en (a,b) y $x_0 \in (a,b)$ un punto crítico ($f'(x_0)=0$)

Entonces:

i) Si $\exists \delta_0 > 0$ tal que f es creciente en $(x_0-\delta_0, x_0]$ y f es decreciente en $[x_0, x_0+\delta_0)$ (con $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0) \subset (a,b)$), el punto x_0 es un máximo local de f en (a,b) (si f es estrictamente creciente en $(x_0-\delta_0, x_0]$ y estrictamente decreciente en $[x_0, x_0+\delta_0)$, x_0 es un máximo local estricto de f en (a,b))

ii) Si f tiene dos derivadas en x_0, y en x_0, f presenta un máximo local $\Rightarrow f''(x_0) \leq 0$.

iii) Si f tiene dos derivadas en x_0, y en x_0, $f''(x_0) < 0$, f presenta un máximo local estricto en x_0

Obs: Si en i) cambiamos la hipótesis por f decreciente en $(x_0-\delta_0, x_0)$, creciente en $(x_0, x_0+\delta_0)$, x_0 es mínimo local de f. Del mismo modo, f presenta mínimo local en $x_0 \Rightarrow f''(x_0) \geq 0$ (si $\exists f''(x_0)$) y si $\exists f''(x_0) < 0$, f presenta un mínimo local estricto

Dem:

i) a) Si f es $\begin{cases} \text{creciente en } (x_0-\delta_0, x_0] \\ \text{decreciente en } [x_0, x_0+\delta_0) \end{cases}$,

tomando $|x-x_0|<\delta_0$, ó bien $x_0-\delta_0<x\le x_0$ ó bien $x_0\le x<x_0+\delta$. En cualquiera de los dos casos, $f(x)\le f(x_0)$ (por ejemplo, si $x_0-\delta_0<x\le x_0$, $f(x)\le f(x_0)$ por ser f creciente en $(x_0-\delta_0, x_0]$).

b) Si f es $\begin{cases} \text{estrictamente creciente en } (x_0-\delta_0, x_0] \\ \quad '' \quad \text{decreciente en } [x_0, x_0+\delta_0) \end{cases}$

y $0<|x-x_0|<\delta_0$, ó bien $x_0-\delta_0<x<x_0$ ó bien $x_0<x<x_0+\delta_0$, y en cualquier caso, $f(x)<f(x_0)$.

- Si estamos en la situación a), x_0 será entonces un máximo local de f, y si estamos en la situación b), x_0 será un máximo local estricto de f.

ii) Sea $x_0\in(a,b)$ con $f'(x_0)=0$ y x_0 máximo local. Entonces $\exists\,\delta_0$ con $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)\subset(a,b)$ y para $|x-x_0|<\delta_0$, $f(x)\le f(x_0)$. Si además $\exists f''(x_0)$, para $0<|x-x_0|<\delta_0$, $\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{f'(x)}{x-x_0}$.

Como $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=f''(x_0)$, si suponemos $f''(x_0)>0$,

$\exists \delta_1 \in (0, \delta_0]$ tal que si $0 < |x - x_0| \leq \delta_1 \Rightarrow$

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow \begin{cases} f' < 0 \text{ en } (x_0 - \delta_1, x_0) \\ f' > 0 \text{ en } (x_0, x_0 + \delta_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f \text{ es estrictamente decreciente en } (x_0 - \delta_1, x_0] \\ f \text{ ---- -- creciente en } [x_0, x_0 + \delta_0) \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x) > f(x_0)$ si $0 < |x - x_0| < \delta_1$,

lo cual contradice que x_0 sea un máximo local.

Por tanto, en un máximo local, si $\exists f''(x_0)$, $f''(x_0) \leq 0$.

iii) Si $\exists f''(x_0) < 0$ (con $f'(x_0) = 0$), razonando como en i), $\exists \delta_1 \in (0, \delta_0]$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta_1$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0 \Rightarrow \begin{cases} f \text{ es estrictamente creciente en } (x_0 - \delta_0, x_0] \\ f \text{ ------ -- decreciente en } [x_0, x_0 + \delta_0) \end{cases}$$

Según i) $\Rightarrow$ x_0 es máximo local estricto de f.

Polinomio de Taylor y serie de Taylor

Sea $f : (c, d) \longmapsto \mathbb{R}$ una función con k derivadas ($k \geq 1$) en (c, d) y $a \in (c, d)$.

Queremos dar fórmulas que den aproximaciones locales para f de precisión tanto mayor según de k (número de derivadas). Para ello, introducimos lo siguiente:

Def 2: El polinomio de Taylor de f, centrado en a y de grado k es $P_a^k(f)(x)$ (ó $P_k(x)$):

$$P_k(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j \; ; \; f^{(0)}(a) \equiv f(a).$$

Queremos ver diversas versiones de resultados que vienen a precisar de qué modo estos polinomios aproximan localmente a f con precisión creciente (según k)

Prop 8: Si $k \geq 1$ es un entero y $f: (c,d) \mapsto \mathbb{R}$ tiene k derivadas en $x = a$ ($a \in (c,d)$), hay una función $h_k: (c,d) \mapsto \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = P_a^k(f)(x) + h_k(x)(x-a)^k \qquad (*)$$

y $\lim_{x \to a} h_k(x) = 0$ (Teorema de Taylor)

Obs: La fórmula $(*)$ de la Prop. 8 para el resto $f(x) - P_a^k(f)(x)$ se conoce como fórmula de Peano del resto.

Dem: Escribiendo $P_k(x)$ por $P_a^k(f)(x)$, tenemos:

- Caso $k=1$:

$$f(x) - P_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \text{ y}$$

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-P_1(x)}{x-a} = 0$, según una caracterización de que exista $f'(a)$ (caracterización analítica de la derivada, tema 5)

- Caso $k > 1$:

El límite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P_k(x)}{(x-a)^k}$ a $\frac{0}{0}$, y aplicando el Teorema de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P_k(x)}{(x-a)^k} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - \sum_{j=1}^{k} \frac{j f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^{j-1}}{k(x-a)^{k-1}}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - \sum_{j=1}^{k} \frac{f^{(j)}(a)}{(j-1)!}(x-a)^{j-1}}{k(x-a)^{k-1}}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(f')^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^{j}}{k(x-a)^{k-1}} = \frac{0}{0}$$

Si $k-1 > 1$, volvemos a aplicar el Teorema de L'Hôpital,

luego $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P_k(x)}{(x-a)^k} = \ldots = \lim_{x\to a} \frac{f^{(k-1)}(x) - P_k(x)^{(k-1)}}{k(k-1)\ldots 2\,(x-a)}$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(a) - f^{(k)}(a)(x-a)}{x-a} = 0,$$

por el hecho de existir $f^{(k)}(a)$.

Por tanto, si escribimos $h_k(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-P_k(x)}{(x-a)^k}, & x\neq a \\ 0, & x=a \end{cases}$,

$f(x) - P_k(x) = h_k(x)(x-a)^k$, siendo $h_k(x)$ una función que cumple que $\lim_{x\to a} h_k(x) = 0$.

<u>Obs</u>: Es habitual (notación de Landau), escribir

- $h(x) = o(1)$, $x \mapsto a$ si $\lim_{x\to a} h(x) = 0$
- $h(x) = O(1)$, $x \mapsto a$ si $\exists \delta > 0$ $\exists C > 0$ tal que si $|x-a| < \delta \Rightarrow |h(x)| \leq C$.

Entonces el Teorema de Taylor puede enunciarse como $f(x) - P_k(x) = o(1)(x-a)^k$, $x \mapsto a$

(que también se escribe como $f(x) - P_k(x) = o((x-a)^k)$, $x\to a$).

La Prop. 8 tiene el siguiente recíproco:

<u>Prop 9</u>: Sea $k \geq 1$ un entero y $f:(c,d) \mapsto \mathbb{R}$ una función con k derivadas en $a \in (c,d)$ para la cual cierto polinomio $P_k(x)$ de grado k cumple

que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P_k(x)}{(x-a)^k} = 0$. Entonces $P_k(x) = P_a^k(h)(x)$.

<u>Dem</u>: - <u>Caso $k=1$</u>: Si $P_1(x) = \alpha + \beta(x-a)$ cumple

que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P_1(x)}{x-a} = 0$, veamos que $\begin{cases} \alpha = f(a) \\ \beta = f'(a) \end{cases}$

Puesto que $\exists f'(a) \Rightarrow 0 = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a}$

$\Rightarrow 0 = \lim_{x\to 0} \left[\frac{f(x)-\alpha-\beta(x-a)}{x-a} - \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a} \right]$

$= \lim_{x\to a} \frac{f(a)-\alpha+(f'(a)-\beta)(x-a)}{x-a}$.

- Si $f(a)-\alpha \neq 0$, como $\lim_{x\to a^+} \frac{1}{x-a} = \infty$

$\Rightarrow \left| \lim_{x\to a} \frac{f(a)-\alpha+(f'(b)-\beta)(x-c)}{x-a} \right| = \infty$ (Contradicción)

Por tanto, $0 = \lim_{x\to a} \frac{(f'(a)-\beta)(x-\beta)}{x-\beta} = f'(a)-\beta$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = f(a) \\ \beta = f'(a). \end{cases}$

El caso $k\geq 1$ general usa que según el Teorema de Taylor,

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P_a^k(h)(x)}{(x-a)^k} = 0$, luego $\lim_{x\to a} \frac{P_k(x)-P_a^k(h)(x)}{(x-a)^k} = 0$.

Un razonamiento similar al hecho para $k=1$ proporciona que si $P_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j (x-a)^j$,

$$\alpha_j = \frac{f^{(j)}(a)}{j!}, \quad j=0,\ldots,k \quad \text{(omito los detalles)} \quad \boxtimes$$

<u>Prop 10</u> (Formas de Lagrange y Cauchy del resto).

Consideremos $f:(c,d) \longmapsto \mathbb{R}$ una función con $k+1 \geq 1$ derivadas en $x = a \in (c,d)$ y supongamos $x \in (c,d)$. Entonces si $R_k(x) = f(x) - P_k(x)$ ($P_k(x) = P_a^k(f)(x)$), se cumple:

i) $\exists\, \xi$ entre x y a (esto es, $\xi \in (x,a)$ si $x<a$ y $\xi \in (a,x)$ si $a<x$) tal que

$$R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} \quad \text{(forma de Lagrange del resto).}$$

ii) $\exists\, \eta$ entre x y a tal que

$$R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\eta)}{k!}(x-\eta)^k (x-a) \quad \text{(forma de Cauchy del resto)}$$

<u>Obs</u>: En el Tema siguiente, cuando veamos Integración, veremos una fórmula integral para el resto

Dem: • Consideremos $G : (c,d) \longmapsto \mathbb{R}$ función derivable en (c,d) con $G'(x) \neq 0$ si $x \neq a$.

• Consideremos asimismo, para un $x \in (c,d)$ fijo, la función $F(t) = f(t) + f'(t)(x-t) + \dots + \frac{f^{(k)}(t)}{k}(x-t)^k$

$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(t)}{j!}(x-t)^j$$

• Entonces
$$F'(t) = f'(t) + \left(f''(t)(x-t) - f'(t)\right)$$
$$+ \left(\frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2 - \frac{f^{(2)}(t)}{1!}(x-t)\right)$$
$$\vdots$$
(Suma telescópica)
$$+ \left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\right)$$
$$= \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k \qquad (1).$$

Usando (1) y el Teorema del Valor Medio de Cauchy,

$\exists\, \xi$ entre a y x con

$$\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{f(x)-P_k(x)}{G(x)-G(a)} = \frac{R_k(x)}{G(x)-G(a)}$$

$$\Rightarrow R_k(x) = F'(\xi)\frac{G(x)-G(a)}{G'(\xi)} \underset{(1)}{=} \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k \frac{G(x)-G(a)}{G'(\xi)}$$

• Eligiendo $G(t) = (x-t)^{k+1}$,

$$R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k \frac{0-(x-a)^{k+1}}{-(k+1)(x-\xi)^k}$$

$$= \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1},$$ que es

la forma de Lagrange del resto.

• Eligiendo $G(t) = t-a$,

$$R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k (x-a),$$ que es la

forma de Cauchy del resto ∎

Def 3: Sea $f: (c,d) \to \mathbb{R}$ que tiene derivadas de todos los órdenes ($k=1,2,\ldots$) en $x = a \in (c,d)$. Entonces a la serie $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ se la denomina <u>serie de Taylor de f</u> (centrada en $x=a$)

Con tal serie se plantean a priori dos problemas fundamentales:

i) ¿Hay algún $\delta > 0$ tal que si $|x-a| < \delta$, $S(x)$ converge?

ii) Supuesto que la respuesta en i) es positiva, ¿es $S(x) = f(x)$ si $|x-a| < \delta$?

Puesto que, para un $k = 1, 2$ cualquiera, podemos considerar $R_k(x) = f(x) - P_k(x)$, con $P_k(x) = P_a^k(f)(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

y tenemos las expresiones para $R_k(x)$ que da la Prop 10 (y otra integral que veremos más adelante), si somos capaces de probar que existe $\delta > 0$ tal que $|x-a| < \delta \Rightarrow R_k(x) \to 0, k \to \infty$, entonces respondemos afirmativamente a i) e ii) y entonces $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ si $|x-a| < \delta$.

- Hay algunos ejemplos en los que ya conocemos que se da tal situación:

—. Ejemplo 1): Sabemos que si $|x|<1$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ es una serie absolutamente convergente cuya suma es $\frac{1}{1-x}$, luego $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ es la serie de Taylor de $\overbrace{f(x)}^{\text{centrada en } x=0} = \frac{1}{1-x}$ $(|x|<1)$

(para ésta función $f'(x) = (1-x)^{-2}$,
$f''(x) = 2(1-x)^{-3} \to f^{(k)}(x) = k!(1-x)^{-k-1}$
$\Rightarrow f^{(k)}(0) = k!$ $\forall k$, y la serie de Taylor de f, centrada en $x=0$ será

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!}(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

—. Ejemplo 2) Sabemos que para cualquier $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

luego $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ es la serie de Taylor, centrada en $x=0$, de e^x.

Si $f(x) = e^x$, sabemos $f(0)=1$, $f'(x)=e^x$, luego $f^{(k)}(0) = 1$ $\forall k$ y su serie de Taylor $S(x)$, centrada en $x=0$ resulta $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

- Ejemplo 4) Sabemos que para cualquier $x \in \mathbb{R}$,

- $$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

- $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

y entonces las series arriba son las series de Taylor, centradas en $x=0$ de esas funciones (de nuevo, tales series pueden obtenerse sabiendo que $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$ con $\left|\begin{array}{l}\operatorname{sen} 0 = 0 \\ \cos 0 = 1\end{array}\right.$)

- Ejemplo 5: Sea $f(x) = \log(1+x)$,

y consideramos su serie de Taylor centrada en $x=0$.

- $f(0) = 0$. $\quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$; $f'(0) = 1$,

$f''(x) = -(1+x)^{-2}$; $f''(0) = -1$.

$f^{(3)}(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$; $f^{(3)}(0) = -2!$

$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\,(1+x)^{-k}$; $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$

y $$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty}{}' (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

- Veamos que para $0 \leq x \leq 1$, $S(x) = \log(1+x)$:

<u>Dem</u>: Sea $R_k = \log(1+x) - P_k(x)$ (para $x \in [0,1]$ fijo). Entonces, según la fórmula de Lagrange del resto, $\exists\, \xi \in (0,x)$ tal que

$$R_k = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} x^{k+1} \qquad (1)$$

A priori, tal ξ depende tanto de x como de k, pero como ignoramos cuál es ξ, más allá del hecho de que $\xi \in (0,x)$, lo que hacemos es <u>maximizar</u>

$$\left| \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} x^{k+1} \right|, \quad \xi \in (0,x):$$

$$f^{(k+1)}(\xi) = (-1)^k k! (1+\xi)^{-k-1}$$

$$\Rightarrow |f^{(k+1)}(\xi)| \leq k!, \text{ si } \xi \geq 0 \qquad (2).$$

Usando (1) y (2), $|R_k| \leq \frac{k!}{(k+1)!} x^{k+1} = \frac{x^{k+1}}{k}$ (3).

- Por tanto, si $0 \leq x < 1$, $R_k \mapsto 0$ "con velocidad geométrica" y $P_k(x) \mapsto \log(1+x)$ "rápidamente".
- Si $x = 1$, todavía es cierto que $|R_k| \leq 1/k \mapsto 0$,

Luego $\log 2 = \lim_{k \to \infty} P_k(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ $\square$

Obs: Puede probarse, que de hecho

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \ , \ -1 < x \leq 1,$$

aunque la prueba es más difícil! (puede hacerse con la Fórmula Integral del resto, que veremos en el próximo capítulo)