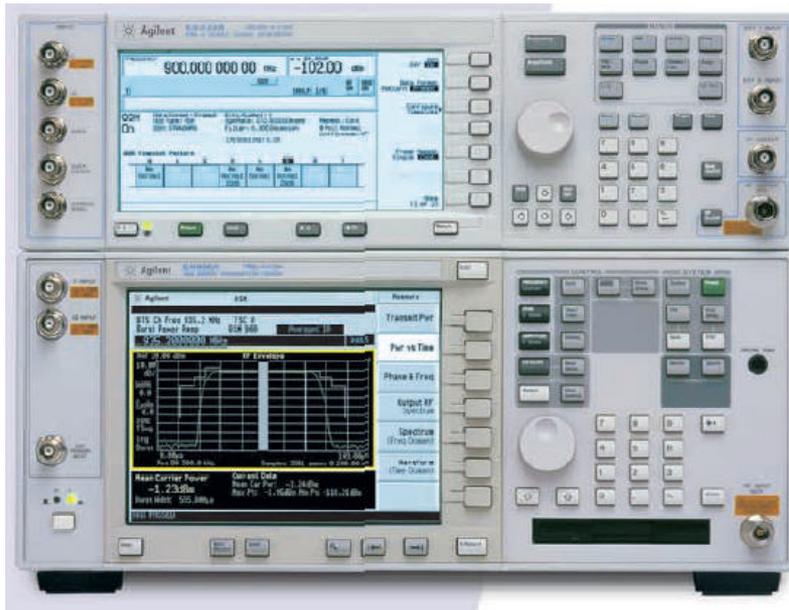


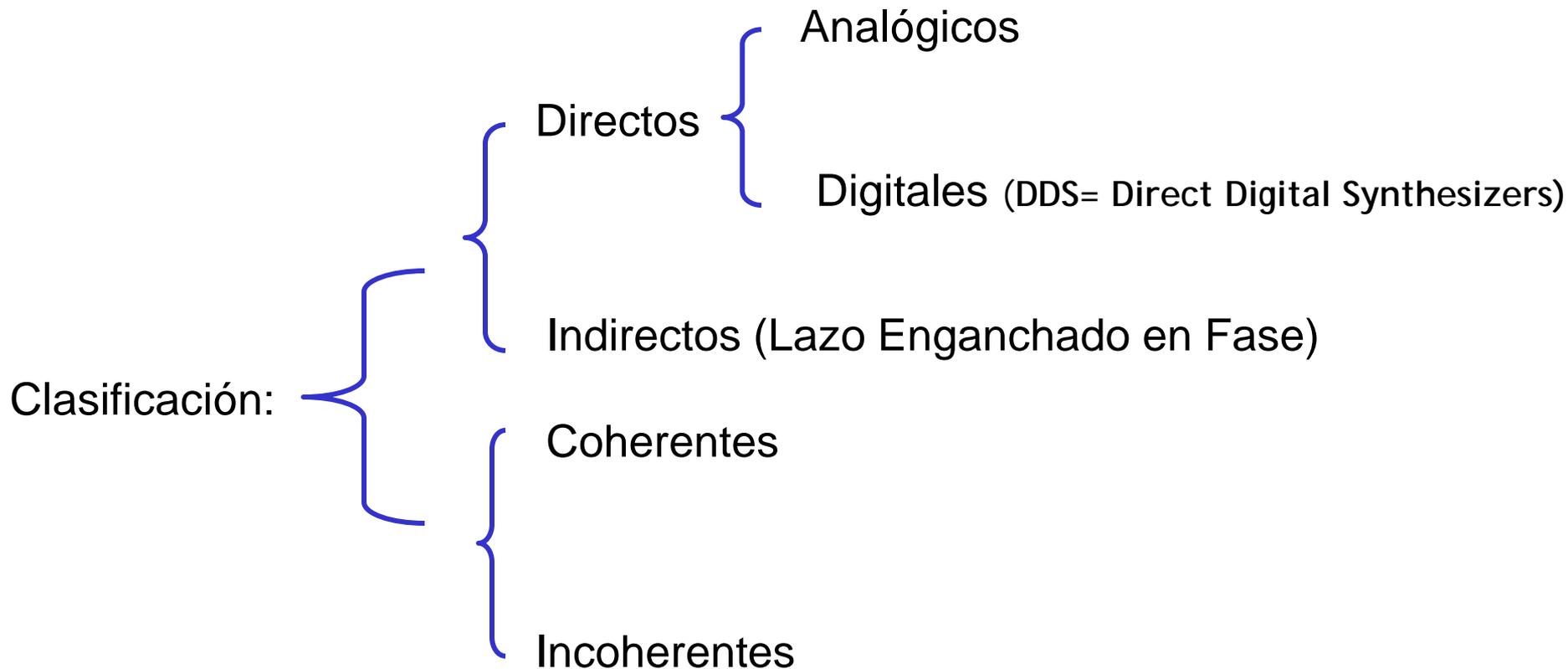
# ELECTRÓNICA DE COMUNICACIONES I

## Capítulo V: SINTETIZADORES INDIRECTOS DE FRECUENCIA.



## ⌘ Sintetizadores de Frecuencia.

Definición: *“Sintetizador de Frecuencia es un Circuito electrónico, que genera un conjunto de frecuencias discretas equiespaciadas a partir de una o varias frecuencias de referencia”.*

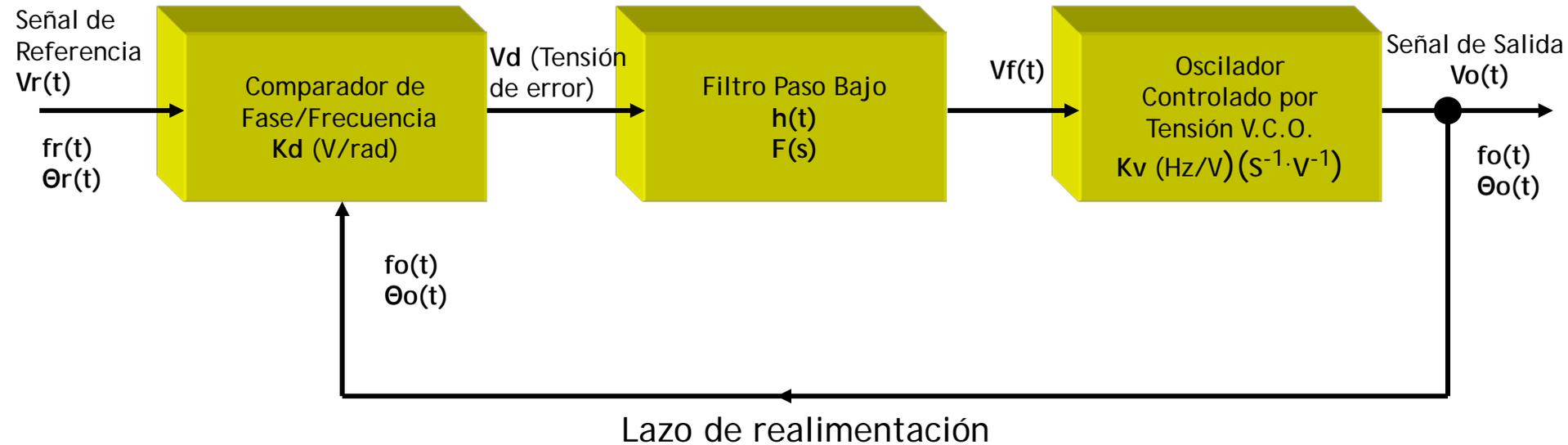


## Aplicaciones de los Lazos Enganchados en Fase

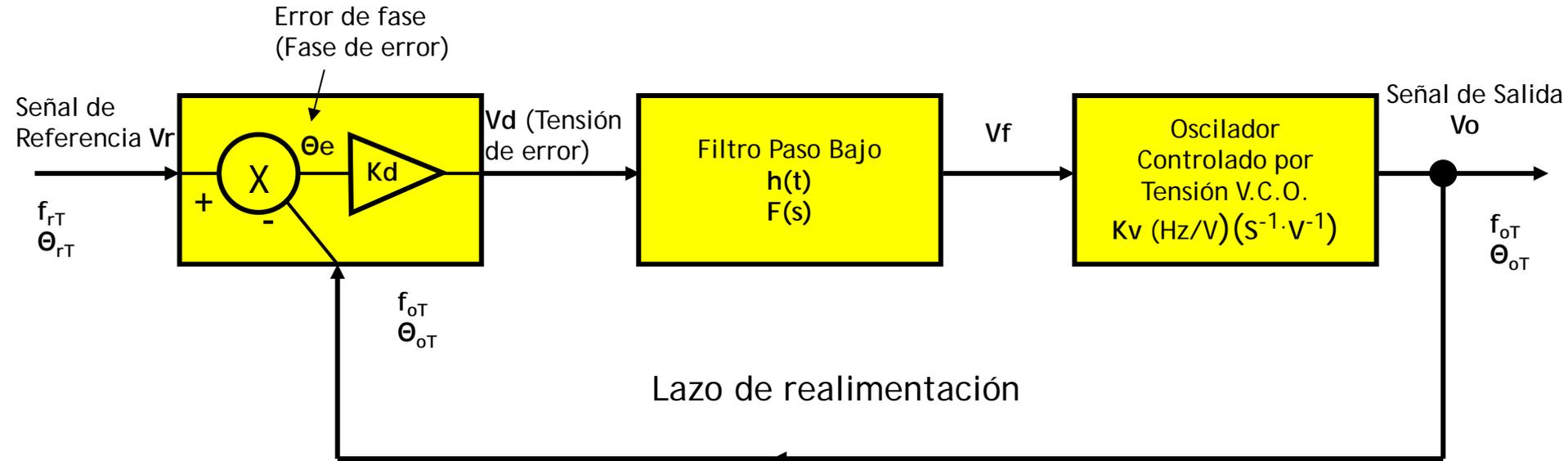
- **Generación de señales (Sintetizadores Indirectos de Frecuencia)**
- **Modulación analógica y digital**
- **Demodulación analógica y digital**
- **Filtrado y tracking de señales en entornos ruidosos y/ o bajo efecto Doppler**
- **“Limpieza” de osciladores de microondas**
- **Recuperación de portadoras y sincronismos en sistemas digitales y analógicos**
- **Sincronización en sistemas digitales**
- **Sistemas de telecontrol, telemando y telemedida**
- **Sistemas de servo-mecanismos y robótica.**
- **etc**

# Estructura general de un Lazo Enganchado en Fase (P.L.L.)

“Un PLL (**P**hase-**L**ocked **L**oop) es un dispositivo electrónico que trata de mantener la coherencia de fase de un oscilador VCO con respecto a una señal de referencia a través de la comparación de las fases entre ambas señales”. (Kroupa)



# Estructura general de un Lazo Enganchado en Fase (P.L.L.)



$$\theta_{eT}(t) = \theta_{rT}(t) - \theta_{oT}(t) \quad (1)$$

$$V_d(t) = K_d \cdot \theta_{eT}(t) = K_d \cdot [\theta_{rT}(t) - \theta_{oT}(t)] \quad (2)$$

$$V_f(t) = V_d(t) \otimes h(t) = h(t) \otimes V_d(t) \quad (3)$$

$$f_{oT}(t) = f_c + K_v \cdot V_f(t) = f_c + K_v \cdot [h(t) \otimes V_d(t)] = f_c + K_v \cdot [h(t) \otimes \{K_d \cdot [\theta_{rT}(t) - \theta_{oT}(t)]\}] \quad (4)$$

$$f_{oT}(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\theta_{oT}(t)}{dt} = f_c + K_v \cdot [h(t) \otimes \{K_d \cdot [\theta_{rT}(t) - \theta_{oT}(t)]\}] \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d\theta_{oT}(t)}{dt} = 2\pi \cdot [f_c + K_v \cdot [h(t) \otimes \{K_d \cdot [\theta_{rT}(t) - \theta_{oT}(t)]\}]]} \quad (5)$$

# Estructura general de un Lazo Enganchado en Fase (P.L.L.)

## ECUACIÓN DINÁMICA DEL PLL

$$\theta_{eT}(t) = \theta_{rT}(t) - \theta_{oT}(t)$$

$$V_d(t) = K_d \cdot \theta_{eT}(t) = K_d \cdot [\theta_{rT}(t) - \theta_{oT}(t)]$$

$$f_{oT}(t) = f_c + K_v \cdot V_f(t) \Rightarrow$$

$$\omega_{oT}(t) = 2\pi \cdot f_c + 2\pi \cdot K_v \cdot V_f(t) = \omega_c + 2\pi \cdot K_v \cdot V_f(t) = \frac{d\theta_{oT}(t)}{dt}$$

$$V_f(t) = V_d(t) \otimes h(t) = h(t) \otimes V_d(t) = K_d \cdot [\theta_{rT}(t) - \theta_{oT}(t)] \otimes h(t) \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d\theta_{oT}(t)}{dt} = \omega_c + 2\pi \cdot K_v \cdot K_d \cdot [\theta_{rT}(t) - \theta_{oT}(t)] \otimes h(t)}$$

**Definimos:**

$$\begin{cases} \theta_o(t) = \theta_{oT}(t) - \omega_c \cdot t \\ \theta_r(t) = \theta_{rT}(t) - \omega_c \cdot t \end{cases} \Rightarrow \text{substituyendo:}$$

$$\frac{d\theta_{oT}(t)}{dt} = \frac{d\theta_o(t)}{dt} + \omega_c = \omega_c + 2\pi \cdot K_v \cdot K_d \cdot [\theta_r(t) - \theta_o(t)] \otimes h(t) \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d\theta_o(t)}{dt} = K \cdot [\theta_r(t) - \theta_o(t)] \otimes h(t)} \text{ Ecuación Dinámica o Diferencial del PLL}$$

# Capacidad de Enganche de un PLL (1)

- Supongamos que a la entrada del PLL aplicamos una señal de frecuencia fija y estable (pe. Xtal)

$$v_r(t) = V \cdot \cos(\omega_r \cdot t + \Phi) = V \cdot \cos(\omega_c \cdot t + \omega_\Delta \cdot t + \Phi)$$

$$\text{donde } \omega_\Delta = \omega_r - \omega_c \Rightarrow \boxed{\theta_r(t) = \omega_\Delta \cdot t + \Phi}$$

Para simplificar los cálculos supongamos que el PLL no tiene filtro paso bajo:  $F(s)=1, \forall s \Rightarrow$

$\Rightarrow h(t) = \delta(t) \Rightarrow$  la ecuación dinámica del PLL quedará como:

$$\frac{d\theta_o(t)}{dt} = K \cdot [\theta_r(t) - \theta_o(t)] \Rightarrow \text{Su solución será de la forma: } \theta_o(t) = \theta_{oh}(t) + \theta_{op}(t)$$

La solución homogénea es inmediata:  $\boxed{\theta_{oh}(t) = \lambda \cdot e^{-K \cdot t}}$

Para la solución particular, ensayamos una expresión similar a la excitación:

$\theta_{op}(t) = A \cdot t + B \Rightarrow$  reemplazando y operando:

$$A = K \cdot [\omega_\Delta \cdot t + \Phi - A \cdot t + B] \Rightarrow$$

$$\boxed{A = \omega_\Delta} \quad \omega_\Delta = K \cdot [\Phi + B] \Rightarrow \boxed{B = \Phi - \frac{\omega_\Delta}{K}} \Rightarrow \boxed{\theta_{op}(t) = \omega_\Delta \cdot t + \Phi - \frac{\omega_\Delta}{K}} \Rightarrow$$

La solución dinámica completa queda en la forma:

$$\boxed{\theta_o(t) = \lambda \cdot e^{-K \cdot t} + \omega_\Delta \cdot t + \Phi - \frac{\omega_\Delta}{K}}$$

## Capacidad de Enganche de un PLL (2)

- Comparando las señales de entrada y del VCO nos queda pues:

$$v_r(t) = V_R \cdot \cos(\omega_r \cdot t + \Phi) = V \cdot \cos(\omega_c \cdot t + \omega_\Delta \cdot t + \Phi)$$

$$v_o(t) = V_o \cdot \cos\left(\omega_c \cdot t + \lambda \cdot e^{-K \cdot t} + \omega_\Delta \cdot t + \Phi - \frac{\omega_\Delta}{K}\right) = V_o \cdot \cos\left(\omega_r \cdot t + \lambda \cdot e^{-K \cdot t} + \Phi - \frac{\omega_\Delta}{K}\right)$$

Se observa que "transitoriamente" ambas fases difieren en los términos:  $\lambda \cdot e^{-K \cdot t} - \frac{\omega_\Delta}{K}$

y que en régimen "permanente" la única diferencia entre ambas fases es  $-\frac{\omega_\Delta}{K}$  que es constante

luego el PLL se "engancha" a la señal de entrada en régimen permanente estable.

Otra forma de verlo es trabajando en el dominio de Laplace:

$$H(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_r(s)} = \frac{K \cdot F(s)}{s + K \cdot F(s)} = \frac{K}{s + K} \Rightarrow \theta_o(s) = \frac{K}{s + K} \cdot \theta_r(s)$$

$$\theta_r(s) = L[\theta_r(t)] = L[\omega_r \cdot t + \Phi] = \frac{\omega_\Delta}{s^2} + \frac{\Phi}{s} \Rightarrow \theta_o(s) = \frac{K}{s + K} \cdot \left[ \frac{\omega_\Delta}{s^2} + \frac{\Phi}{s} \right] =$$

$$= \frac{K}{s + K} \cdot \frac{\omega_\Delta}{s^2} + \frac{K}{s + K} \cdot \frac{\Phi}{s} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s + K} \Rightarrow \text{resolviendo e identificando:}$$

## Capacidad de Enganche de un PLL (3)

$$\boxed{A=\omega_{\Delta}} \quad \boxed{B=\Phi - \frac{\omega_{\Delta}}{K}} \quad \boxed{C=-\Phi + \frac{\omega_{\Delta}}{K}} \Rightarrow \theta_o(s) = \frac{\omega_{\Delta}}{s^2} + \frac{\Phi - \frac{\omega_{\Delta}}{K}}{s} + \frac{-\Phi + \frac{\omega_{\Delta}}{K}}{s + K} \Rightarrow$$

Calculando la transformada inversa de Laplace obtendremos:

$$\theta_o(t) = \omega_{\Delta} \cdot t + \Phi - \frac{\omega_{\Delta}}{K} + \left[ -\Phi + \frac{\omega_{\Delta}}{K} \right] \cdot e^{-K \cdot t}$$

Que es el mismo resultado anterior si llamamos  $\lambda = \left[ -\Phi + \frac{\omega_{\Delta}}{K} \right]$

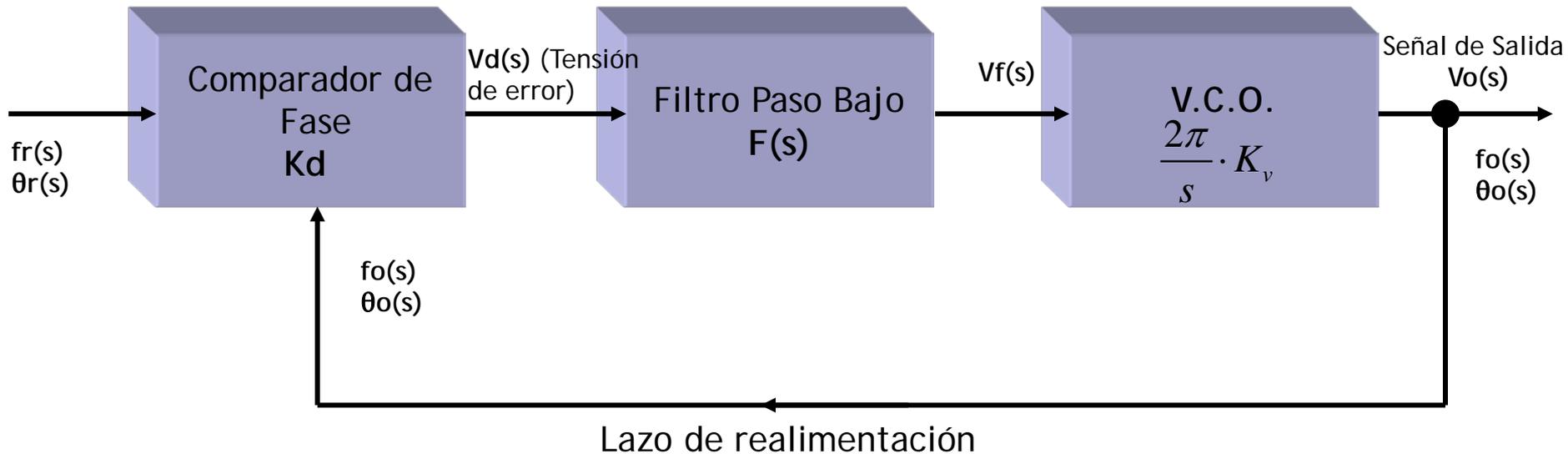
También podemos hacer uso del Teorema del Valor Final (TVF) de las transformadas de Laplace y obtener directamente el valor de la fase y frecuencias de salida en régimen permanente:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_o(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot \theta_o(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot H(s) \cdot \theta_r(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \cdot \frac{K}{s + K} \left( \frac{\omega_{\Delta}}{s^2} + \frac{\Phi}{s} \right) \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s + K} \cdot \frac{\omega_{\Delta}}{s} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s + K} \cdot \Phi = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-\omega_{\Delta}}{s + K} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\omega_{\Delta}}{s} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s + K} \cdot \Phi = \\ &= \frac{-\omega_{\Delta}}{K} + \infty + \Phi \end{aligned}$$

El sumando correspondiente al infinito es el que corresponde al límite del término  $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_{\Delta} \cdot t$

# Función de Transferencia de un PLL (1)

En el dominio de la frecuencia compleja de Laplace el esquema del PLL queda en la forma:



- Para el VCO, su función de transferencia: fase de salida – tensión de control vendrá dada por:

$$\text{Parate variable de } f_o(t) = K_v \cdot V_f(t) \Rightarrow \omega_o(t) = 2\pi \cdot K_v \cdot V_f(t) \equiv \frac{d\theta_o(t)}{dt} \Rightarrow$$

$$\text{Tomando Transformadas de Laplace: } 2\pi \cdot K_v \cdot V_f(s) = s \cdot \theta_o(s) \Rightarrow \boxed{\frac{\theta_o(s)}{V_f(s)} = \frac{2\pi \cdot K_v}{s}}$$

$$\text{Definimos: } \boxed{H(s) \equiv \frac{\theta_o(s)}{\theta_r(s)}} \quad \boxed{\text{Función de Transferencia de Fases Dinámica del PLL}}$$

## Función de Transferencia de un PLL (2)

Partiendo de la ecuación diferencial que define el comportamiento dinámico del PLL:

$$\frac{d\theta_o(t)}{dt} = K \cdot [\theta_r(t) - \theta_o(t)] \otimes h(t)$$

y tomando Transformadas de Laplace a ambos lados de la igualdad:

$$s \cdot \theta_o(s) = K \cdot [\theta_r(s) - \theta_o(s)] \square F(s) \Rightarrow \text{reordenando y despejando:}$$

$$H(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_r(s)} = \frac{K \cdot F(s)}{s + K \cdot F(s)}$$

Podemos aprovechar este resultado para obtener la **Función de Transferencias de Frecuencias** dinámica del lazo:

$$H_F(s) = \frac{f_o(s)}{f_r(s)}$$

puesto que  $f(s) = \frac{s}{2\pi} \cdot \theta(s) \Rightarrow$  multiplicando numerador y denominador de  $H(s)$  por este

factor de escala, nos quedará que:

$$H(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_r(s)} = \frac{\frac{s}{2\pi} \cdot \theta_o(s)}{\frac{s}{2\pi} \cdot \theta_r(s)} = \frac{f_o(s)}{f_r(s)} = H_F(s)$$

# Función de Error de Fases de un PLL (1)

- En numerosas ocasiones es interesante operar directamente con la diferencia entre las fases de las señales que llegan al Comparador de Fases. A esta señal se la denomina **Error de Fases** (o también Fase de Error):

$$\theta_e(t) = \theta_r(t) - \theta_0(t)$$

-A partir de esta información se define la:

$$\text{Función de Error de Fases} = E(s) = \frac{\theta_e(s)}{\theta_r(s)} = \frac{\theta_r(s) - \theta_0(s)}{\theta_r(s)} = 1 - H(s) = 1 - \frac{K \cdot F(s)}{s + K \cdot F(s)} = \frac{s}{s + K \cdot F(s)}$$

Nótese que puesto que  $F(s)$  tiene carácter de Paso-Bajo  $\Rightarrow E(s)$  tiene comportamiento Paso-Alto respecto a los errores entre los cambios de la fase del VCO y los cambios que experimenta la fase de la señal de referencia.

- De semejante forma puede definirse la Función de Error de Frecuencias:

$$\text{Función de Error de Frecuencias} = E_F(s) = \frac{f_e(s)}{f_r(s)} = \frac{f_r(s) - f_0(s)}{f_r(s)} = \frac{\frac{2\pi}{s} \cdot [f_r(s) - f_0(s)]}{\frac{2\pi}{s} \cdot f_r(s)} = E(s)$$

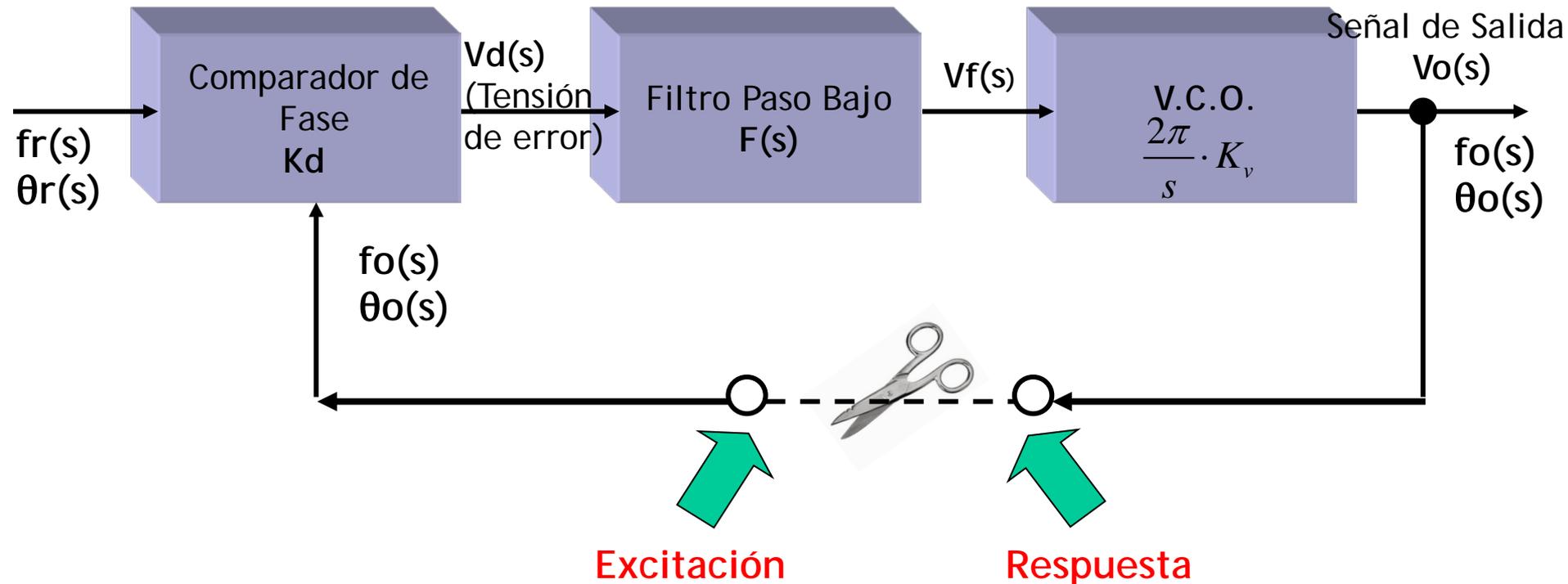
# Función de Transferencia de un PLL (3)

Método directo del cálculo de funciones de transferencia.

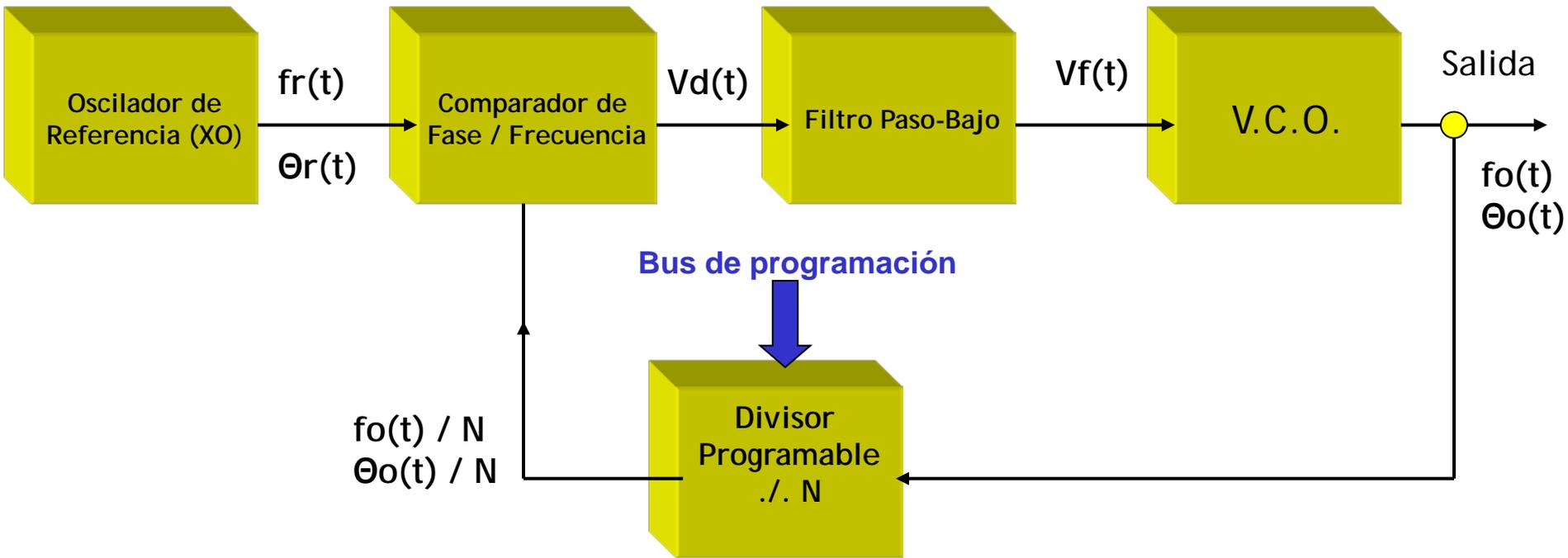
- En todo Sistema electrónico realimentado (negativamente) se puede determinar la relación entre la Excitación aplicada en un punto y la Respuesta que se produce en otro punto cualquiera en la forma: **Función de Transferencia en Lazo Cerrado  $H(s)$** =

$$H(s) = \frac{\text{Ganancia Directa}(s)}{1 + \text{Ganancia en Lazo Abierto}(s)} = \frac{GD(s)}{1 + GLA(s)}$$

- Si lo aplicamos en el PLL y abrimos (por ejemplo el lazo de realimentación) nos queda:



# Estructura general de un Sintetizador Indirecto de Frecuencias (1)



$$H(s) = \frac{\theta_0(s)}{\theta_r(s)} = \frac{GD(s)}{1 + GLA(s)} = \frac{K_d \cdot F(s) \cdot \frac{2\pi}{s} \cdot K_v}{1 + K_d \cdot F(s) \cdot \frac{2\pi}{s} \cdot K_v \cdot \frac{1}{N}} = \frac{\frac{K \cdot F(s)}{s}}{1 + \frac{K \cdot F(s)}{N \cdot s}} =$$

$$\frac{K \cdot F(s)}{s + \frac{K \cdot F(s)}{N}} = \frac{f_0(s)}{f_r(s)}$$

## Estructura general de un Sintetizador Indirecto de Frecuencias (2)

Supongamos que aplicamos un oscilador de referencia de frecuencia fija y asumiendo fase de referencia

$$\text{cero: } f_r(t) = f_r = \text{Constante} \Rightarrow f_r(s) = L(f_r) = \frac{f_r}{s} \Rightarrow f_0(s) = H(s) \cdot f_r(s) = \frac{K \cdot F(s)}{s + \frac{K \cdot F(s)}{N}} \cdot f_r(s)$$

Si queremos conocer el valor al que tiene la frecuencia de salida en régimen permanente, aplicamos el T.V.F.:

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} f_0(t)} = \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot f_0(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \cdot \frac{K \cdot F(s)}{s + \frac{K \cdot F(s)}{N}} \cdot f_r(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \cdot \frac{K \cdot F(s)}{s + \frac{K \cdot F(s)}{N}} \cdot \frac{f_r}{s} \right] = \boxed{N \cdot f_r}$$

Se define la **Frecuencia de Canalización** (o **resolución del sintetizador**) a la mínima separación entre dos canales adyacentes generados, y valdrá en este caso:

$$f_0 = N \cdot f_r \Rightarrow \boxed{f_{ch}} = (N + 1) \cdot f_r - N \cdot f_r = \boxed{f_r}$$

## Estructura general de un Sintetizador Indirecto de Frecuencias (3)

### Conversión de Función de Transferencia a Ecuación Diferencial equivalente.

- Si se conoce una determinada función de transferencia, se puede obtener inmediatamente la ecuación diferencial de la que proviene (y viceversa), para ello simplemente hay que tomar la Transformada Inversa de Laplace:

Para el Sintetizador de frecuencias elemental tendremos:

$$H(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_r(s)} = \frac{K \cdot F(s)}{s + \frac{K \cdot F(s)}{N}} \Rightarrow \text{multiplicando entre sí los términos en cruz:}$$

$$\theta_o(s) \cdot \left[ s + \frac{K \cdot F(s)}{N} \right] = \theta_r(s) \cdot K \cdot F(s) \Rightarrow \text{tomando transformadas inversas de Laplace:}$$

$$\frac{d\theta_o(t)}{dt} + \frac{K}{N} \cdot [\theta_o(t) \otimes h(t)] = K \cdot [\theta_r(t) \otimes h(t)] =$$

$$\frac{d\theta_o(t)}{dt} + \frac{K}{N} \cdot [\theta_o(t) \otimes h(t)] = K \cdot [\theta_r(t) \otimes h(t)] \Rightarrow \text{reordenando y agrupando:}$$

$$\frac{d\theta_o(t)}{dt} = K \cdot \left[ \theta_r(t) - \frac{\theta_o(t)}{N} \right] \otimes h(t)$$

# Función de Error de Fases de un Sintetizador Indirecto de Frecuencias(1)

- Para el caso del sintetizador, la función de error de fases (o frecuencias) se define como la diferencia entre las dos fases comparadas normalizada con respecto a los cambios de fase de la señal de referencia, esto es:

$$\boxed{\text{Función de Error de Fases}} = E(s) \equiv \frac{\theta_e(s)}{\theta_r(s)} = \frac{\theta_r(s) - \frac{\theta_0(s)}{N}}{\theta_r(s)} = 1 - \frac{1}{N} \cdot \frac{\theta_0(s)}{\theta_r(s)} = 1 - \frac{1}{N} \cdot H(s) =$$
$$= 1 - \frac{1}{N} \cdot \frac{K \cdot F(s)}{s + \frac{K \cdot F(s)}{N}} = \boxed{\frac{s}{s + \frac{K \cdot F(s)}{N}}} \equiv \frac{f_e(s)}{f_r(s)} = E_f(s) = \boxed{\text{Función de Error de Frecuencias}}$$

donde  $\boxed{f_e(s) \equiv f_r(s) - \frac{f_0(s)}{N}}$

- Notemos que los valores de H(s) y E(s) para un Sintetizador de Frecuencias dependen no sólo de la rapidez de cambio de la señal de referencia, sino también del valor del divisor programable N, y por ende del canal generado a la salida.

# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (1)

Analógicos (PLL): Usan VCO, Filtros Analógicos y Comparadores de Fase analógicos y / o digitales.

Digitales (DPLL): Usan NCO, Filtros IIR o FIR y Comparadores Digitales

- Clasificación según las frecuencias propias de la ganancia en Lazo Abierto y Cerrado, que viene impuestas por el Orden del Filtro Paso Bajo empelado.

**TIPO**

*Número de Integradores ideales en el filtro paso-bajo + 1*

*Valor de la multiplicidad del polo en el origen de frecuencias de la Ganancia en Lazo Abierto.*

**ORDEN**

*Grado de la variable de Laplace en el denominador de la Función de Transferencia en Lazo Cerrado.*

*Orden de la Ecuación Diferencial en el dominio temporal del PLL.*

# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (2)

## PLL sin Filtro Paso Bajo: PLL de Tipo 1 – Orden 1 (1)

- Si no se emplea Filtro Paso Bajo alguno (esto es FPB de orden 0), se tiene:

$$F(s) = 1, \forall s \Rightarrow GD(s) = \frac{K}{s} \equiv GLA(s) \Rightarrow H(s) = \frac{\frac{K}{s}}{1 + \frac{K}{s}} = \frac{K}{s + K} \Rightarrow$$

{ Un sólo polo en el origen en GLA(s)  $\Rightarrow$  **Tipo 1**

{ Polinomio de grado 1 en el denominador de H(s)  $\Rightarrow$  **Orden 1**

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{K}{j\omega + K} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\omega^2 + K^2}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |H(j\omega)|_{MAX} = |H(0)| = 1 \\ |H(j\omega)|_{MAX-3dB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \Delta B_{3dB} = K \end{array} \right. \\ \phi(j\omega) = -\arctan \frac{\omega}{K} \end{array} \right.$$

Las ecuaciones diferenciales que gobiernan el PLL son:

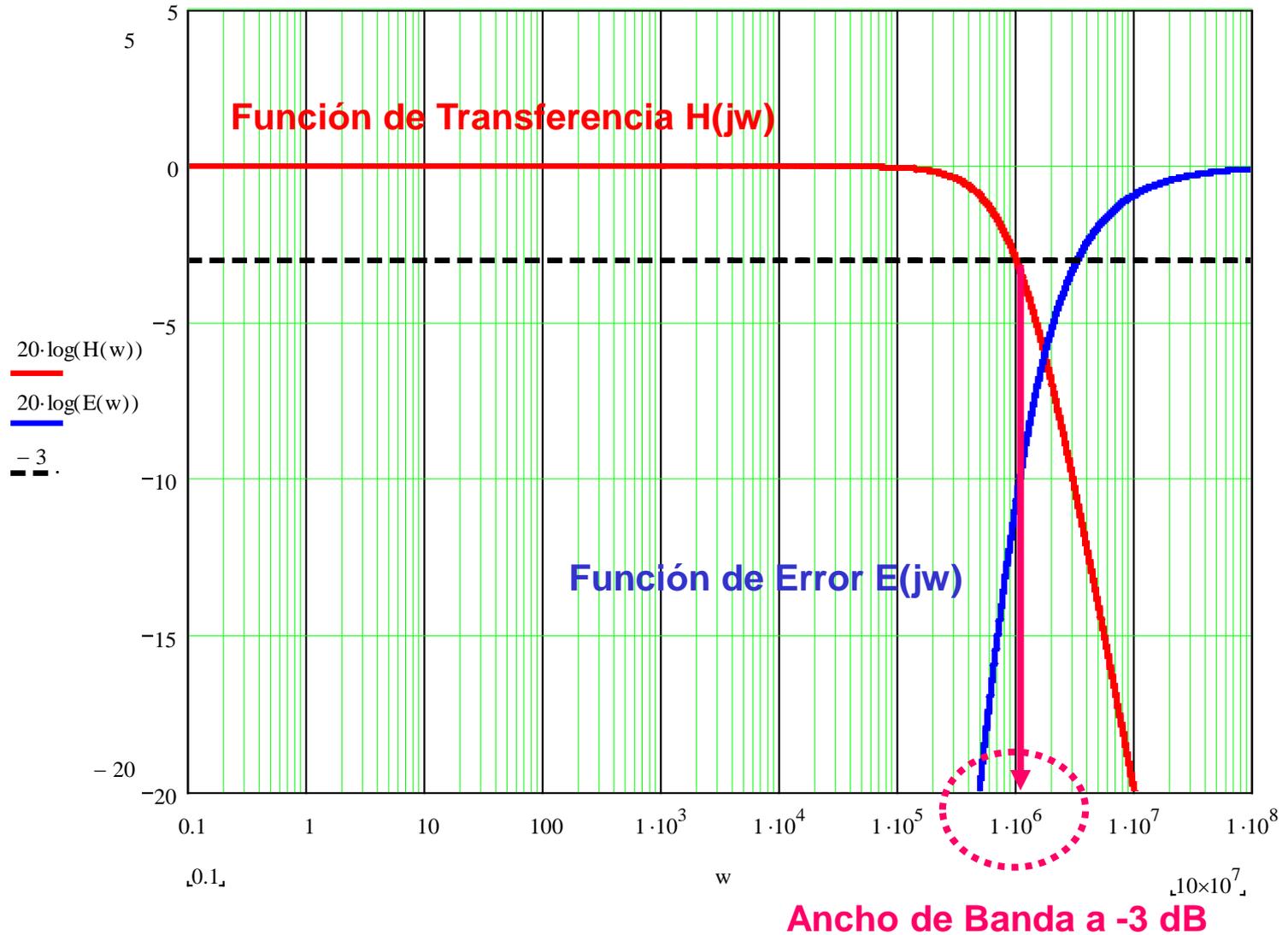
$$H(s) = \frac{\theta_0(s)}{\theta_r(s)} = \frac{K}{s + K} \Rightarrow \boxed{\frac{d\theta_0(t)}{dt} = K \cdot [\theta_r(t) - \theta_0(t)]} \Rightarrow \theta_0(t) = \lambda \cdot e^{-K \cdot t} + \theta_{0p}(t)$$

$$E(s) = 1 - H(s) = \frac{\theta_e(s)}{\theta_r(s)} = \frac{s}{s + K} \Rightarrow \boxed{\frac{d\theta_e(t)}{dt} + K \cdot \theta_e(t) = \frac{d\theta_r(t)}{dt}}$$

# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (3)

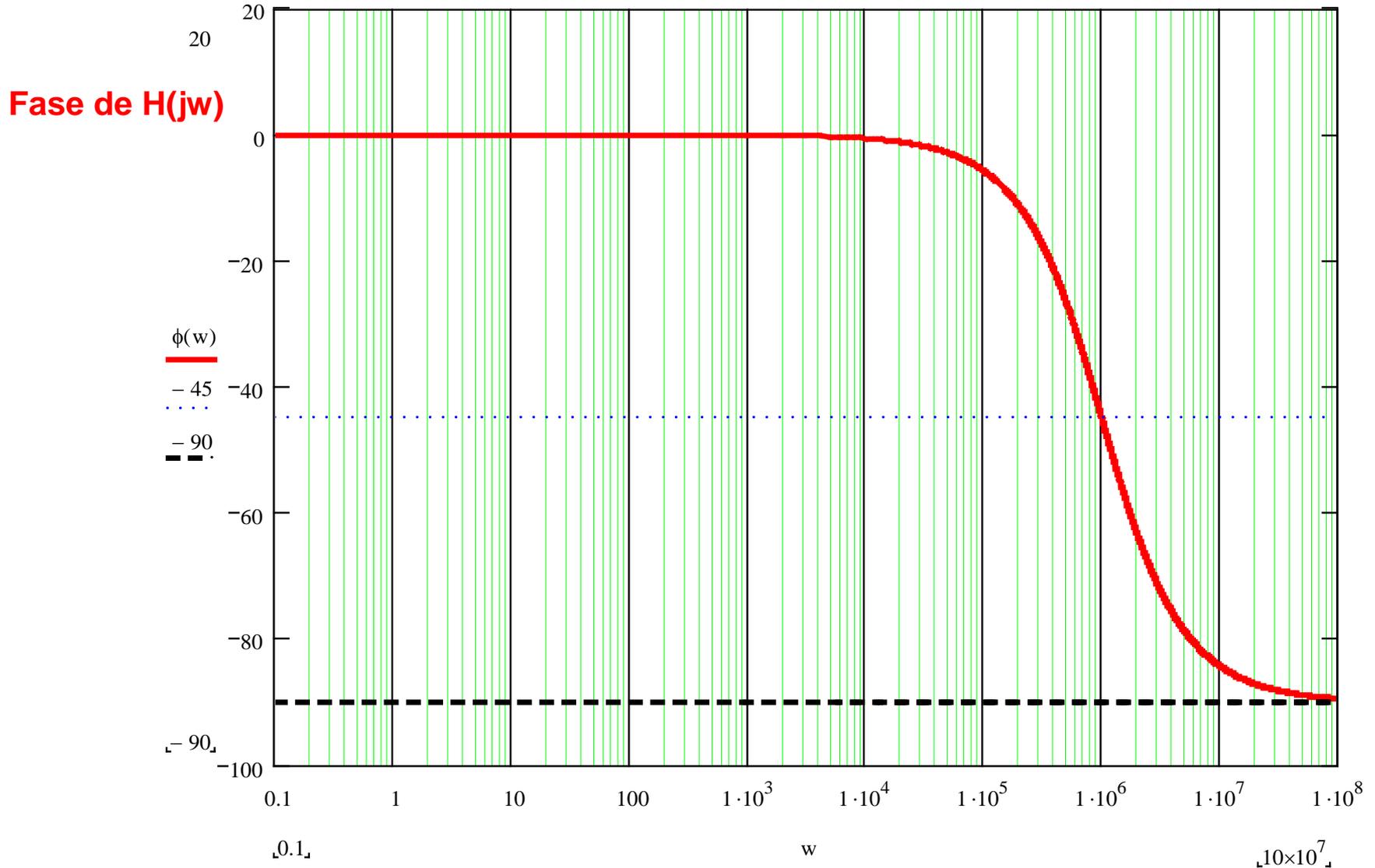
## PLL sin Filtro Paso Bajo: PLL de Tipo 1 – Orden 1 (2)

Ejemplo: PLL con  $K=10^6$



# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (4)

PLL sin Filtro Paso Bajo: PLL de Tipo 1 – Orden 1 (3)



# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (5)

## PLL sin Filtro Paso Bajo: PLL de Tipo 1 – Orden 1 (4)

Para el ejemplo de anterior de una señal de referencia fija:

$$v_r(t) = V \cdot \cos(\omega_r \cdot t + \Phi) = V \cdot \cos(\omega_c \cdot t + \omega_\Delta \cdot t + \Phi)$$

donde  $\omega_\Delta = \omega_r - \omega_c \Rightarrow \boxed{\theta_r(t) = \omega_\Delta \cdot t + \Phi}$  Ya obtuvimos anteriormente que la salida del sistema es:

$$\boxed{\theta_o(t) = \lambda \cdot e^{-K \cdot t} + \omega_\Delta \cdot t + \Phi - \frac{\omega_\Delta}{K}}$$
 De aquí se deuce que la forma en la que evoluciona el error de

fases es:

$$\boxed{\theta_e(t) = \theta_r(t) - \theta_o(t) = \lambda \cdot e^{-K \cdot t} - \frac{\omega_\Delta}{K}} \Rightarrow \text{y como } f = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow$$

el error de frecuencias tomará la expresión:

$$\boxed{f_e(t) = f_r(t) - f_o(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\theta_e(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\left[\lambda \cdot e^{-K \cdot t} - \frac{\omega_\Delta}{K}\right]}{dt} = \frac{-K \cdot \lambda \cdot e^{-K \cdot t}}{2\pi}} = \frac{-K_d \cdot K_v \cdot \lambda \cdot e^{-K \cdot t}}{2\pi}$$

y obviamente  $\lim_{t \rightarrow \infty} f_e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-K \cdot \lambda \cdot e^{-K \cdot t}}{2\pi} = 0$  Lo que demuestra que en régimen

permanente el PLL se engancha.

**Problema de este PLL: al no tener filtro, los ruidos del Comparador de Fases llegan al VCO**

# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (6)

## Sintetizador Indirecto con PLL de Tipo1, Orden 1 (1)

- Supongamos que analizamos el esquema de un sintetizador al que no hemos colocado filtro entre el comparador de fases y el VCO:

$$H(s) = \frac{\theta_0(s)}{\theta_r(s)} = \frac{f_0(s)}{f_r(s)} = \frac{K \cdot F(s)}{s + \frac{K \cdot F(s)}{N}} \Bigg|_{F(s)=1, \forall s} = \frac{K}{s + \frac{K}{N}} \Rightarrow f_0(s) \cdot \left[ s + \frac{K}{N} \right] = f_r(s) \cdot K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{df_0(t)}{dt} + \frac{K}{N} \cdot f_0(t) = K \cdot f_r(t) \Rightarrow f_0(t) = \lambda \cdot e^{-\frac{K}{N} \cdot t} + f_{0p}(t)$$

Supongamos que  $f_r(t) = f_r = cte \Rightarrow$  ensayamos  $f_{op}(t) = A \Rightarrow$  substituyendo en la EDO  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{K}{N} \cdot A = K \cdot f_r \Rightarrow A = N \cdot f_r \Rightarrow \text{La solución completa es: } \boxed{f_0(t) = \lambda \cdot e^{-\frac{K}{N} \cdot t} + N \cdot f_r}$$

- Como se observa, el régimen transitorio (velocidad de respuesta del sistema) depende del valor del divisor programable (N) y por tanto del canal generado.

- A mayor valor de N mayor duración del tiempo necesario para que se extinga la exponencial transitoria.

- En régimen permanente no existe error ninguno de frecuencia (por tanto como máximo uno de fase constante), luego el Sintetizador queda enganchado con el oscilador de referencia.

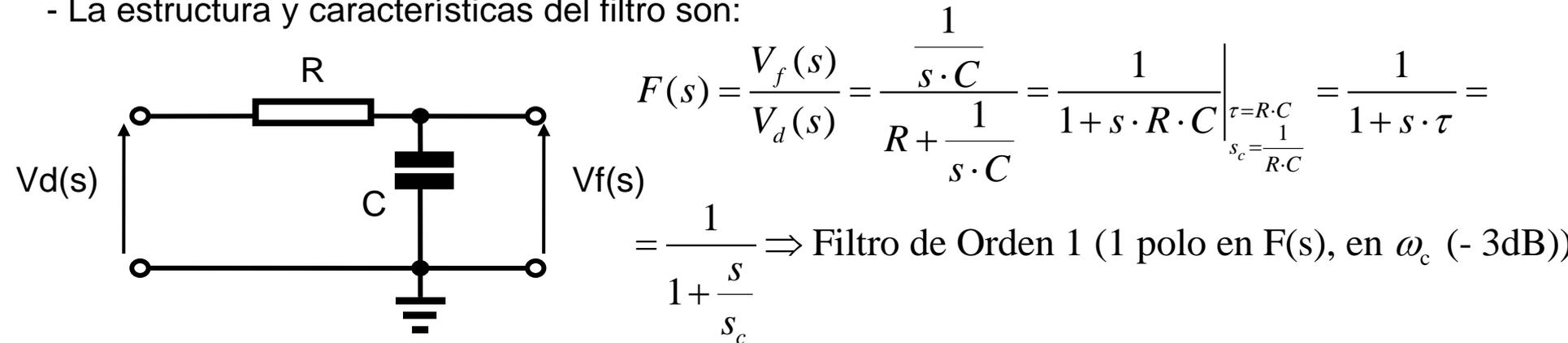
# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (7)

## Clasificación de los Filtros Paso Bajo para PLL's (1)

- Pasivos** (Formados por R, C y L)
- Pasivos** (Realizados en torno a Amplificadores Operacionales)

## PLL con Filtro Paso Bajo Pasivo "Phase - lag": PLL de Tipo 1 - Orden 2 (1)

- La estructura y características del filtro son:



$$F(s) = \frac{1}{1 + s \cdot \tau} \Rightarrow F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega \cdot \tau} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \cdot \tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \\ \varphi(j\omega) = -\text{atan}(\omega \cdot \tau) = -\text{atan}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \end{array} \right.$$

# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (8)

## PLL con Filtro Paso Bajo Pasivo "Phase – lag": PLL de Tipo 1 – Orden 2 (2)

- Llevando la Función de transferencia del filtro a la general del PLL tendremos:

$$H(s) = \frac{\theta_0(s)}{\theta_r(s)} = \frac{K \cdot F(s)}{s + K \cdot F(s)} = \frac{K \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \tau}}{s + K \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \tau}} = \frac{K}{s^2 \cdot \tau + s + K} = \frac{\frac{K}{\tau}}{s^2 + \frac{s}{\tau} + \frac{K}{\tau}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{PLL de Orden 2} \\ GLA(s) = \frac{K}{s} \cdot \left( \frac{1}{1 + s \cdot \tau} \right) \Rightarrow \text{PLL de Tipo 1} \end{array} \right.$$

- Para analizar su comportamiento, escribimos el denominador de H(s) en la forma estándar de los sistemas dinámicos lineales de 2º orden:

$$H(s) = \frac{\theta_0(s)}{\theta_r(s)} = \frac{\frac{K}{\tau}}{s^2 + \frac{s}{\tau} + \frac{K}{\tau}} = \frac{\frac{K}{\tau}}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \Rightarrow \text{identificando: } \left\{ \begin{array}{l} \omega_n = \sqrt{\frac{K}{\tau}} = \sqrt{K \cdot \omega_c} \text{ (rad/s)} \\ \zeta = \frac{1}{2\sqrt{K \cdot \tau}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\omega_c}{K}} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow H(s) \text{ en forma estándar: } \left[ H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \Rightarrow \underline{E(s)} = 1 - H(s) = \frac{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \right]$$

# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (9)

## PLL con Filtro Paso Bajo Pasivo "Phase – lag": PLL de Tipo 1 – Orden 2 (3)

- Analicemos el comportamiento de la Función de Transferencia y de Error, para ello separamos el módulo y el argumento en cada caso:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |H(j\omega)| = \left| \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + 2j \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot \omega + \omega_n^2} \right| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2 \cdot \zeta \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}} \\ \phi(j\omega) = -\text{atan} \left[ \frac{2 \cdot \zeta \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right] \end{array} \right.$$

- En la función modular podemos localizar los puntos notables:

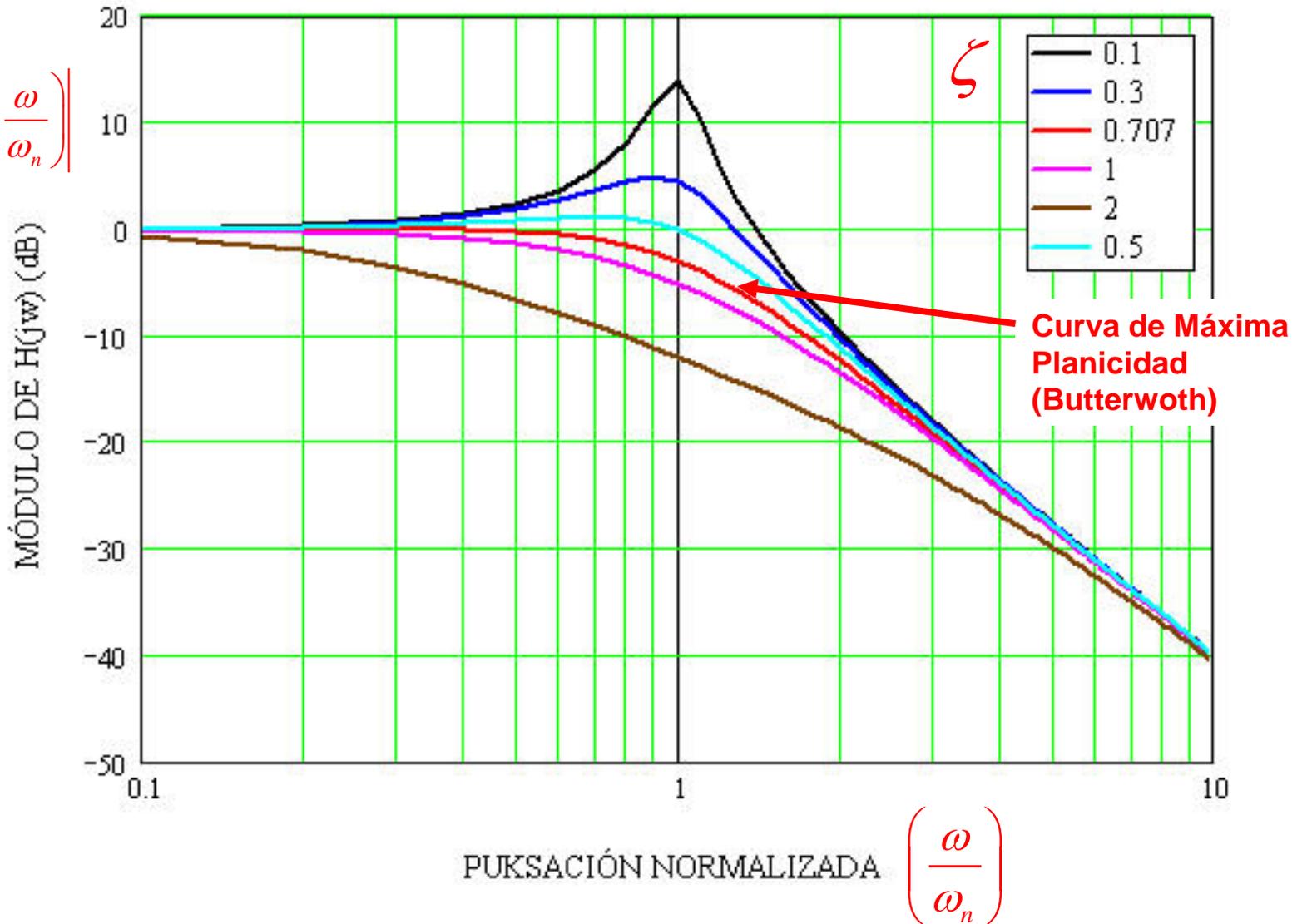
$$\frac{\partial |H(j\omega)|}{\partial \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)} \equiv 0 \Rightarrow -4 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \cdot \left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\} + 8 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \cdot \zeta^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_{MAX} = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \zeta^2}} \Big|_{\zeta \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707} \Rightarrow$$

$$\|H(j\omega)\|_{\omega_{MAX}} = \boxed{M_r = \frac{1}{2 \cdot \zeta \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}}} \quad \text{Magnitud de pico a la pulsación de resonancia}$$

# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (10)

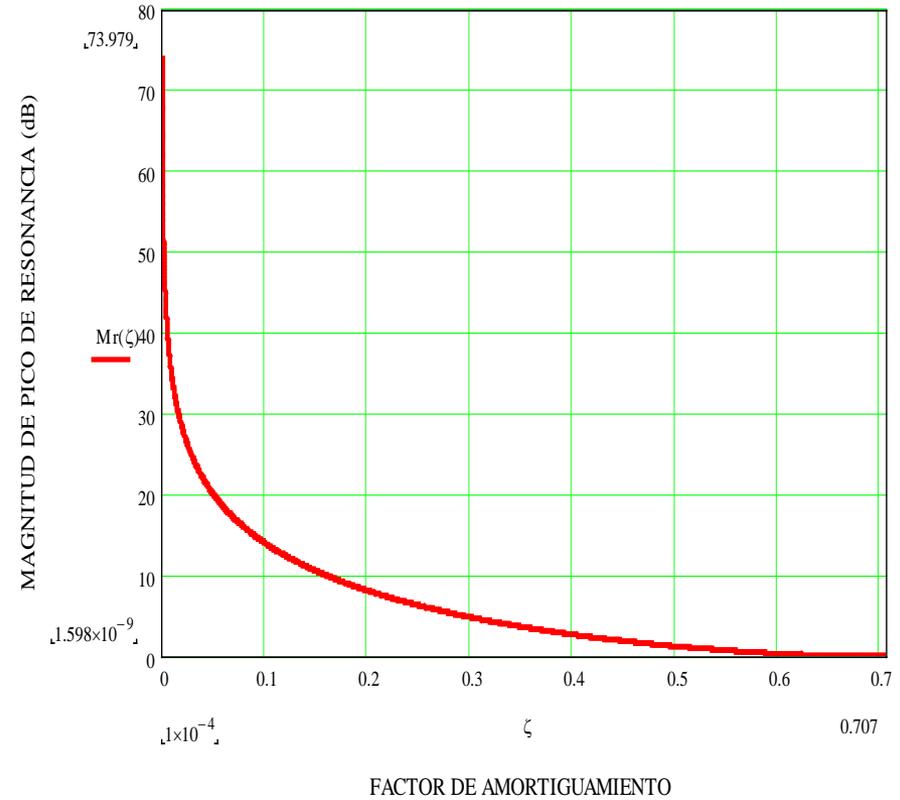
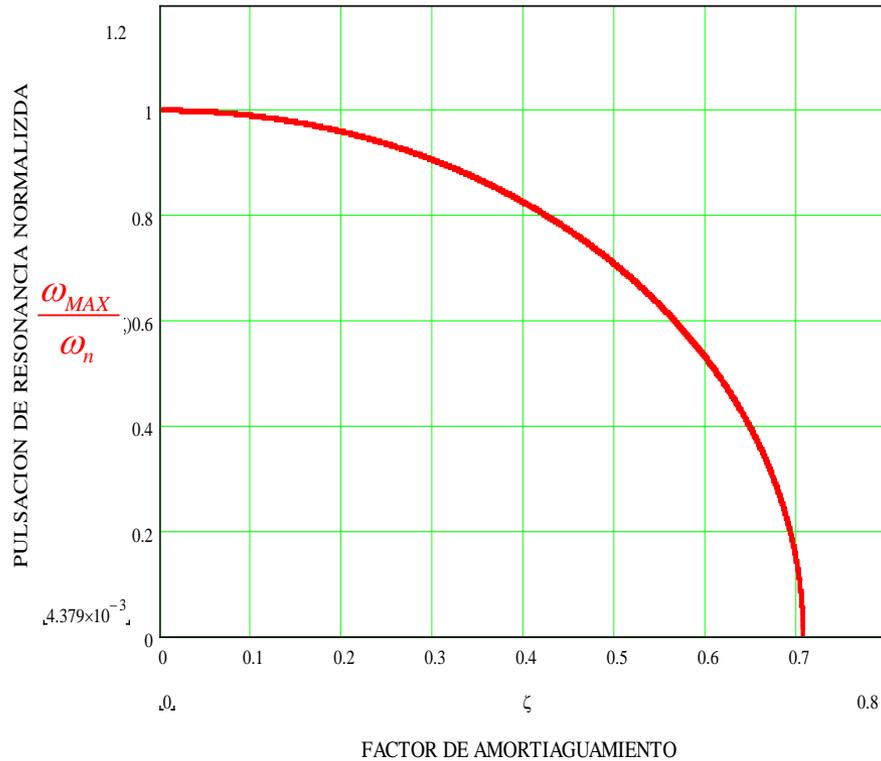
PLL con Filtro Paso Bajo Pasivo "Phase - lag": PLL de Tipo 1 - Orden 2 (4)

$$20 \cdot \log \left| H \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right) \right|$$



# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (11)

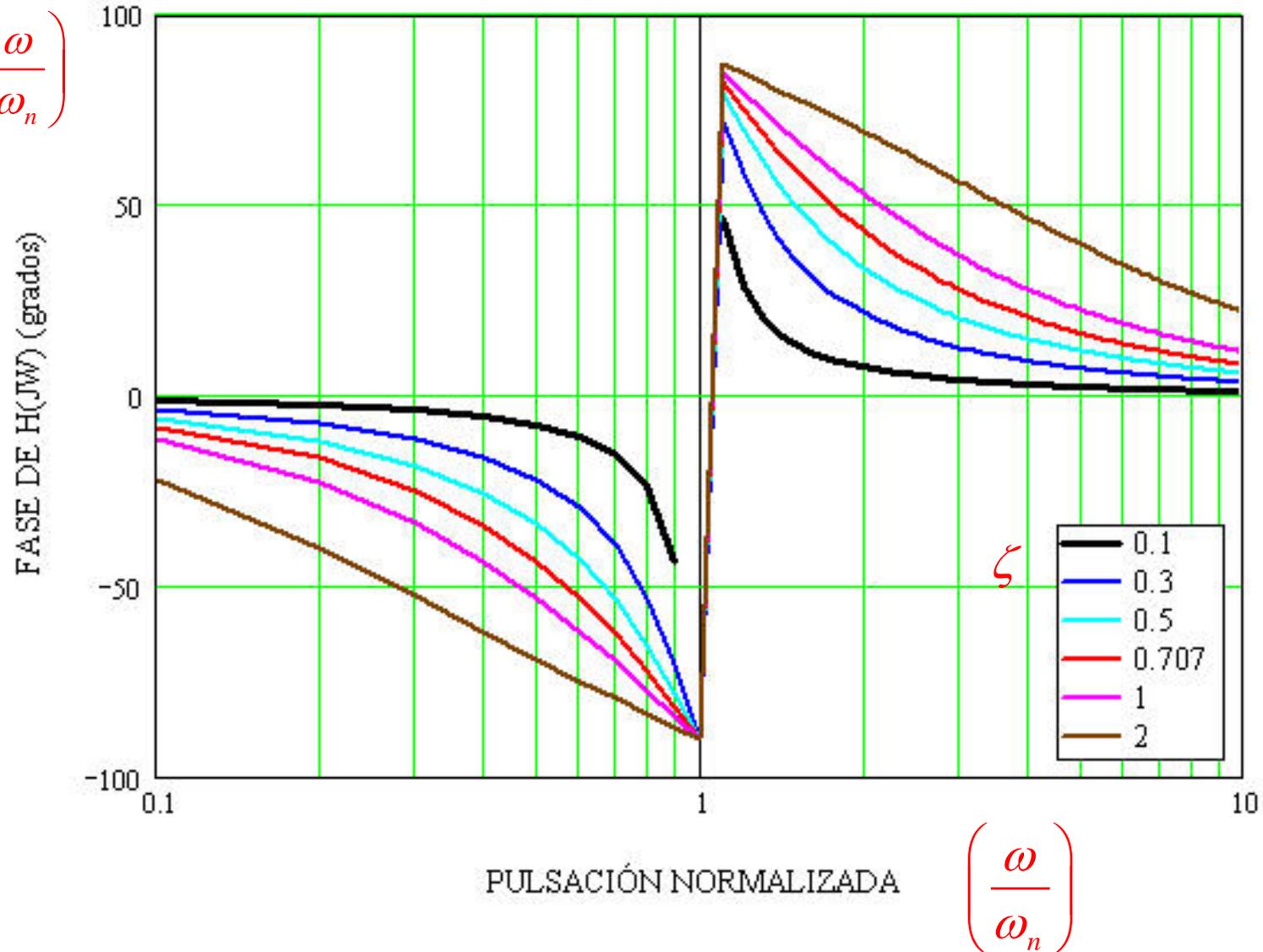
PLL con Filtro Paso Bajo Pasivo "Phase – lag": PLL de Tipo 1 – Orden 2 (5)



# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (12)

PLL con Filtro Paso Bajo Pasivo "Phase - lag": PLL de Tipo 1 - Orden 2 (6)

$$\phi \left( j \cdot \frac{\omega}{\omega_n} \right)$$



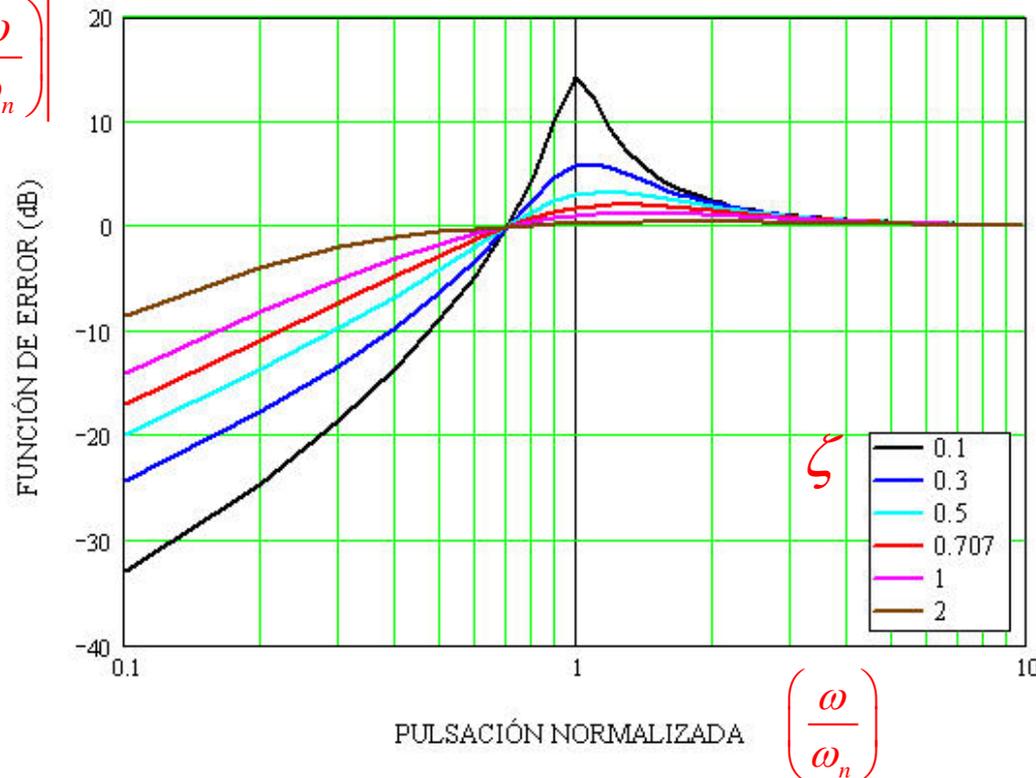
# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (13)

## PLL con Filtro Paso Bajo Pasivo "Phase - lag": PLL de Tipo 1 - Orden 2 (7)

- En cuanto a la función de Error de Fases y Frecuencias:

$$E(s) = \frac{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \Rightarrow |E(j\omega)| = \frac{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4 + \left[2 \cdot \zeta \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2 \cdot \zeta \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}}$$

$$\left| E\left(j \cdot \frac{\omega}{\omega_n}\right) \right|$$



- La Función de Error tiene comportamiento paso-alto.

- Para  $\zeta \rightarrow 0 \Rightarrow |E(j\omega)| \rightarrow \infty$

$\Rightarrow$  el PLL autooscila en  $\omega = \omega_n$

# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (14)

## PLL con Filtro Paso Bajo Pasivo “Phase – lag”: PLL de Tipo 1 – Orden 2 (8)

- Veamos el comportamiento de un PLL en el que no existiese amortiguamiento alguno:

$$\text{Si } \zeta = 0 \Rightarrow H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \Rightarrow \text{Su Transformada Inversa de Laplace es: } \omega_n \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot t)$$

Este resultado indica que la frecuencia del VCO no permanece fija, sino que resulta modulada precisamente por el valor de la pulsación natural no-amortiguada.

### Ancho de Banda del PLL (1)

- Puesto que  $H(s)$  se puede interpretar como la respuesta de un filtro a la velocidad de cambio de la fase o frecuencia de la señal de referencia y su efecto sobre la salida del VCO, podemos calcular una especie de “Ancho de Banda” a  $-3$  dB, buscando aquella pulsación para la cual la respuesta del PLL ha bajado este valor respecto a  $H(0)$  (donde no hay cambio en la señal de entrada). Es decir:

$$H(0) = 1 \equiv 0 \text{ dB} \Rightarrow \Delta B(-3\text{dB}) \Rightarrow |H(j\Delta B)|^2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\Delta B}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2 \cdot \zeta \cdot \left(\frac{\Delta B}{\omega_n}\right)\right]^2} \Rightarrow$$

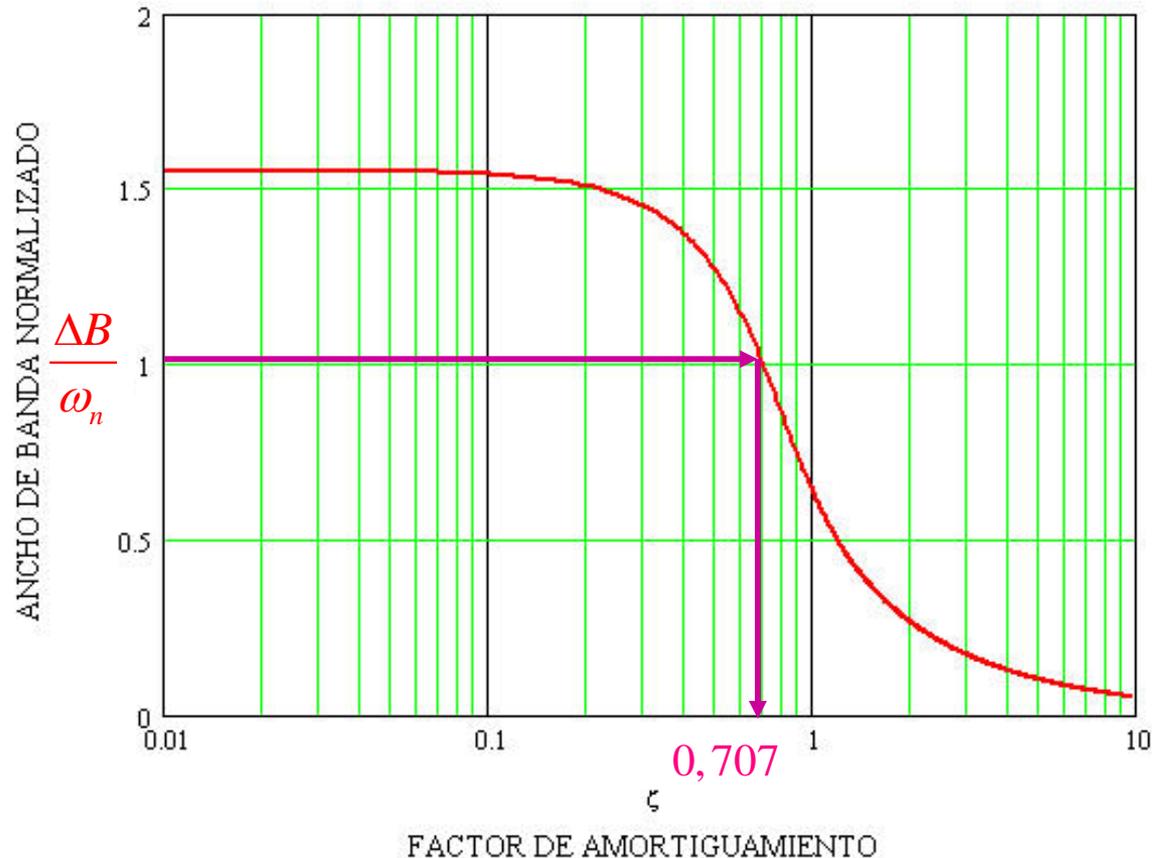
operando se obtiene:

$$\Delta B \text{ (rad/s)} = \omega_n \cdot \sqrt{\left[1 - 2 \cdot \zeta^2 + \sqrt{2 - 4 \cdot \zeta^2 + 4 \cdot \zeta^4}\right]}$$

# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (15)

PLL con Filtro Paso Bajo Pasivo "Phase – lag": PLL de Tipo 1 – Orden 2 (9)

## Ancho de Banda del PLL (2)



Se puede observar que:

$$\Delta B|_{\zeta \rightarrow 0} = \Delta B_{\text{MAX}} = \sqrt{1 + \sqrt{2}} \cdot \omega_n \approx 1,5537 \cdot \omega_n$$

$$\Delta B|_{\zeta = 0,707} = \omega_n$$

# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (16)

Sintetizador con Filtro Paso Bajo Pasivo "Phase – lag": Tipo 1 – Orden 2 (1)

$$H(s) = \frac{\theta_0(s)}{\theta_r(s)} = \frac{K \cdot F(s)}{s + \frac{K \cdot F(s)}{N}} = \frac{K \cdot \frac{1}{1+s \cdot \tau}}{s + \frac{K}{N} \cdot \left( \frac{1}{1+s \cdot \tau} \right)} = \frac{N \cdot K}{s^2 \cdot N \cdot \tau + N \cdot s + K} = \frac{\frac{K}{\tau}}{s^2 + \frac{s}{\tau} + \frac{K}{N \cdot \tau}} \Rightarrow$$

Escribiendo el denominador en la forma estándar:

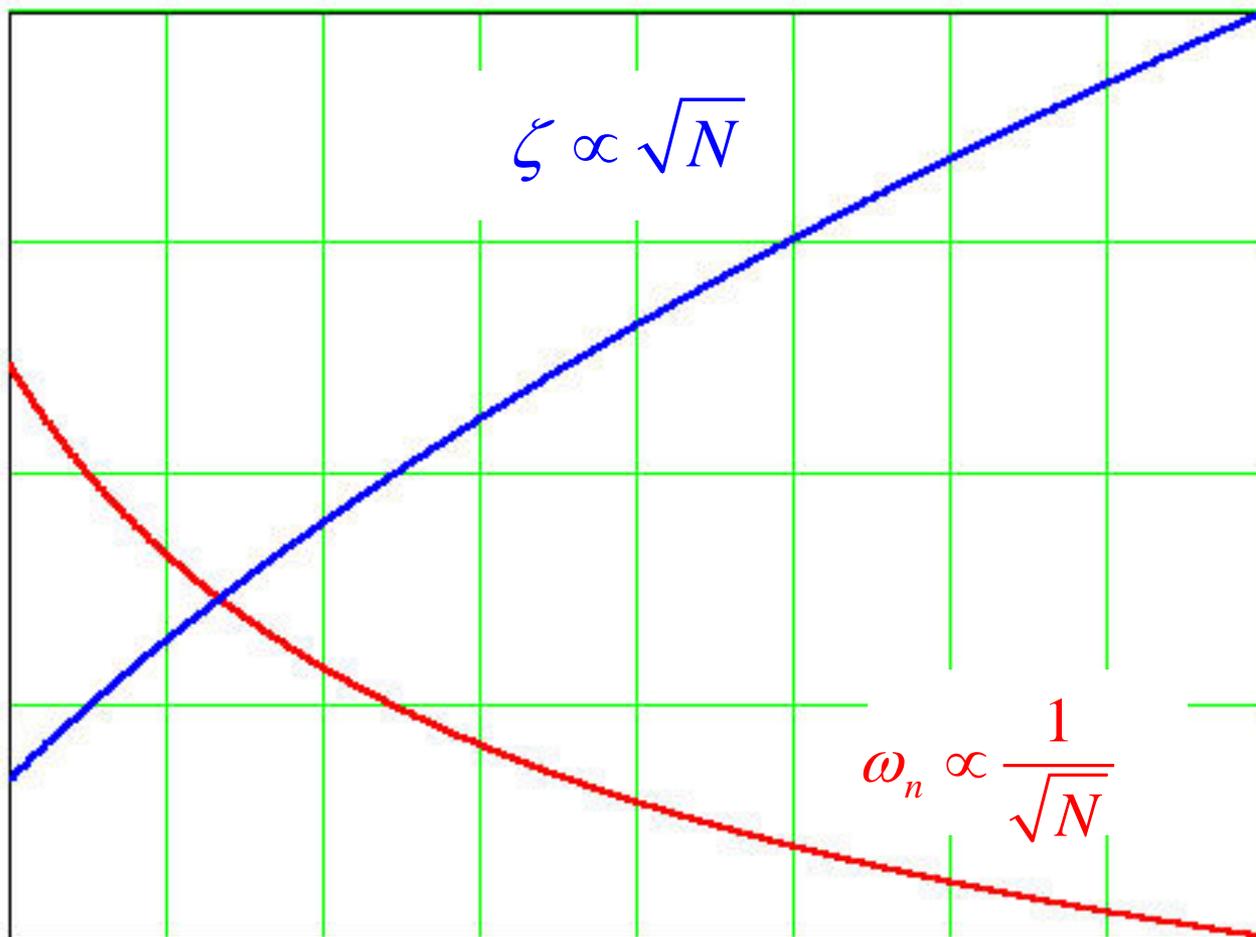
$$H(s) = \frac{\frac{K}{\tau}}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \Rightarrow \text{identificando: } \left\{ \begin{array}{l} \omega_n = \sqrt{\frac{K}{N \cdot \tau}} = \sqrt{\frac{K \cdot \omega_c}{N}} \text{ (rad/s)} \\ \zeta = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{K}{N} \cdot \tau}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{N \cdot \omega_c}{K}} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{N \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}} \Rightarrow \boxed{E(s) = 1 - \frac{H(s)}{N} = \frac{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}}$$

- La pulsación natural no-amortiguada y el factor de amortiguamiento cambian al cambiar de canal N.

# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (17)

Sintetizador con Filtro Paso Bajo Pasivo "Phase – lag": Tipo 1 – Orden 2 (2)

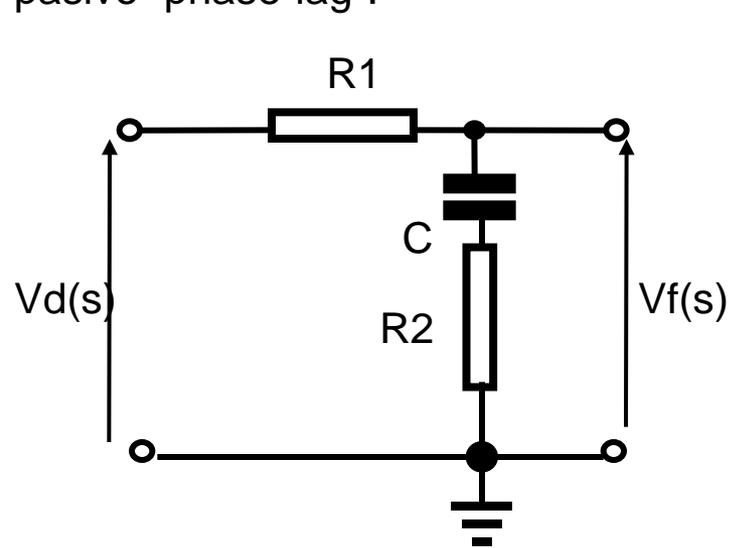


Valor del divisor programable  $N$   $\longrightarrow$

# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (18)

## PLL con Filtro Paso Bajo Pasivo “Lead – lag”: Tipo 1 – Orden 2 (1)

- Se utiliza para conseguir mayor flexibilidad en el diseño y mejor estabilidad que con el filtro pasivo “phase-lag”.



$$F(s) = \frac{V_f(s)}{V_d(s)} = \frac{\frac{1}{s \cdot C} + R_2}{R_1 + \frac{1}{s \cdot C} + R_2} = \frac{1 + s \cdot C \cdot R_2}{1 + s \cdot C \cdot (R_1 + R_2)} \Rightarrow$$

$$\text{Llamando: } \tau_1 = (R_1 + R_2) \cdot C \text{ y } \tau_2 = R_2 \cdot C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1 + s \cdot \tau_2}{1 + s \cdot \tau_1} = \frac{1 + \frac{s}{s_0}}{1 + \frac{s}{s_p}} \Rightarrow \text{Filtro de Orden 1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  1 polo en  $\omega_p$  y un cero en  $\omega_0$ . Con  $\omega_p < \omega_0$

- El módulo y fase de la respuesta del filtro son:

$$|F(j\omega)| = \sqrt{\frac{1 + (\omega \cdot R_2 \cdot C)^2}{1 + (\omega \cdot [R_2 + R_1] \cdot C)^2}}$$

$$\varphi(j\omega) = \text{atan}(\omega \cdot R_2 \cdot C) - \text{atan}(\omega \cdot [R_2 + R_1] \cdot C)$$

Debido al efecto de adelanto de fase debido al cero y al retraso debido al polo, a este filtro también se le llama de “compensación de fase”.

# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (19)

## PLL con Filtro Paso Bajo Pasivo "Lead – lag": Tipo 1 – Orden 2 (2)

Ejemplo:

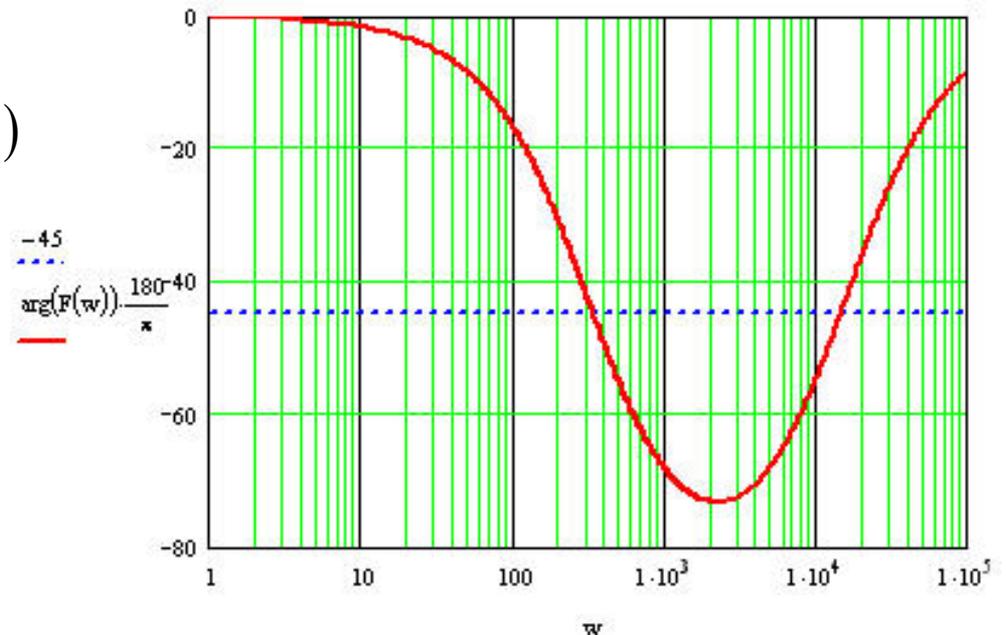
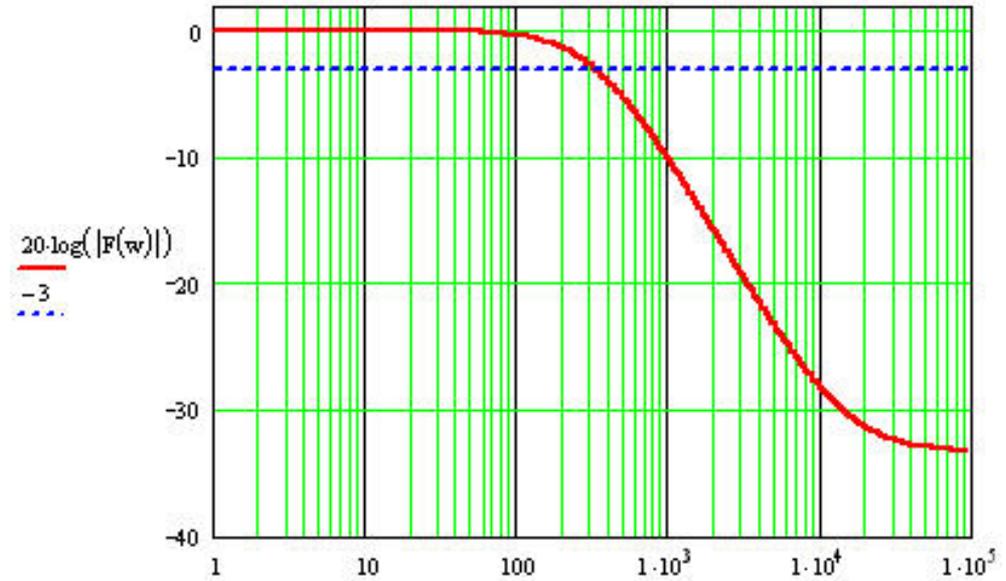
$$C = 300 \text{ nF};$$

$$R_1 = 20 \text{ K}\Omega; \quad R_2 = 220 \text{ }\Omega$$

↓

$$\omega_p = 326,158 \text{ (rad/s)} \equiv 51,9 \text{ (Hz)}$$

$$\omega_0 = 15.151 \text{ (rad/s)} \equiv 2.411,3 \text{ (Hz)}$$



# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (20)

## PLL con Filtro Paso Bajo Pasivo "Lead – lag": Tipo 1 – Orden 2 (3)

- Llevando esta F(s) a la función de transferencia del PLL genérico, tendremos:

$$H(s) = \frac{\theta_0(s)}{\theta_r(s)} = \frac{K \cdot F(s)}{s + K \cdot F(s)} = \frac{K \cdot \left[ \frac{1 + s \cdot \tau_2}{1 + s \cdot \tau_1} \right]}{s + K \cdot \left[ \frac{1 + s \cdot \tau_2}{1 + s \cdot \tau_1} \right]} = \frac{\frac{K}{\tau_1} \cdot (1 + s \cdot \tau_2)}{s^2 + s \cdot \frac{(1 + K \cdot \tau_2)}{\tau_1} + \frac{K}{\tau_1}} \Rightarrow \begin{cases} \text{PLL de Orden 2} \\ GLA(s) = \frac{K}{s} \cdot \left( \frac{1 + s \cdot \tau_2}{1 + s \cdot \tau_1} \right) \\ \Rightarrow \text{PLL de Tipo 1} \end{cases}$$

- Para analizar su comportamiento, escribimos el denominador de H(s) en la forma estándar de los sistemas dinámicos lineales de 2º orden:

$$H(s) = \frac{\theta_0(s)}{\theta_r(s)} = \frac{\frac{K}{\tau_1} \cdot (1 + s \cdot \tau_2)}{s^2 + s \cdot \frac{(1 + K \cdot \tau_2)}{\tau_1} + \frac{K}{\tau_1}} = \frac{\frac{K}{\tau_1} \cdot (1 + s \cdot \tau_2)}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{K}{\tau_1}} = \sqrt{K \cdot \omega_p} \text{ (rad/s)} \\ \zeta = \frac{(1 + K \cdot \tau_2)}{2 \cdot \sqrt{K \cdot \tau_1}} = \frac{\left(1 + \frac{K}{\omega_0}\right)}{2 \cdot \sqrt{\frac{K}{\omega_p}}} \end{cases}$$

⇒ Operando con el numerador, se puede escribir H(s) en forma estándar:

$$\underline{H(s)} = \frac{s \cdot \omega_n \cdot \left( 2 \cdot \zeta - \frac{\omega_n}{K} \right) + \omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \Rightarrow \underline{E(s)} = 1 - H(s) = \frac{s^2 + s \cdot \left( \frac{\omega_n^2}{K} \right)}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (21)

## PLL con Filtro Paso Bajo Pasivo "Lead – lag": Tipo 1 – Orden 2 (4)

- Como se observa, tanto el comportamiento de  $H(s)$  como de  $E(s)$ , dependen de la relación que exista entre los valores numéricos de la pulsación natural no-amortiguada y la ganancia del lazo.

- Para representar estas funciones, utilizamos la estrategia seguida anteriormente. Ahora sin embargo, aparece el efecto de un nuevo parámetro a tener en cuenta: la relación  $\omega_n / K$

$$H(s) = \frac{s \cdot \omega_n \cdot \left(2 \cdot \zeta - \frac{\omega_n}{K}\right) + \omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{j\omega \cdot \omega_n \cdot \left(2 \cdot \zeta - \frac{\omega_n}{K}\right) + \omega_n^2}{-\omega^2 + 2j \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot \omega + \omega_n^2} \Rightarrow$$

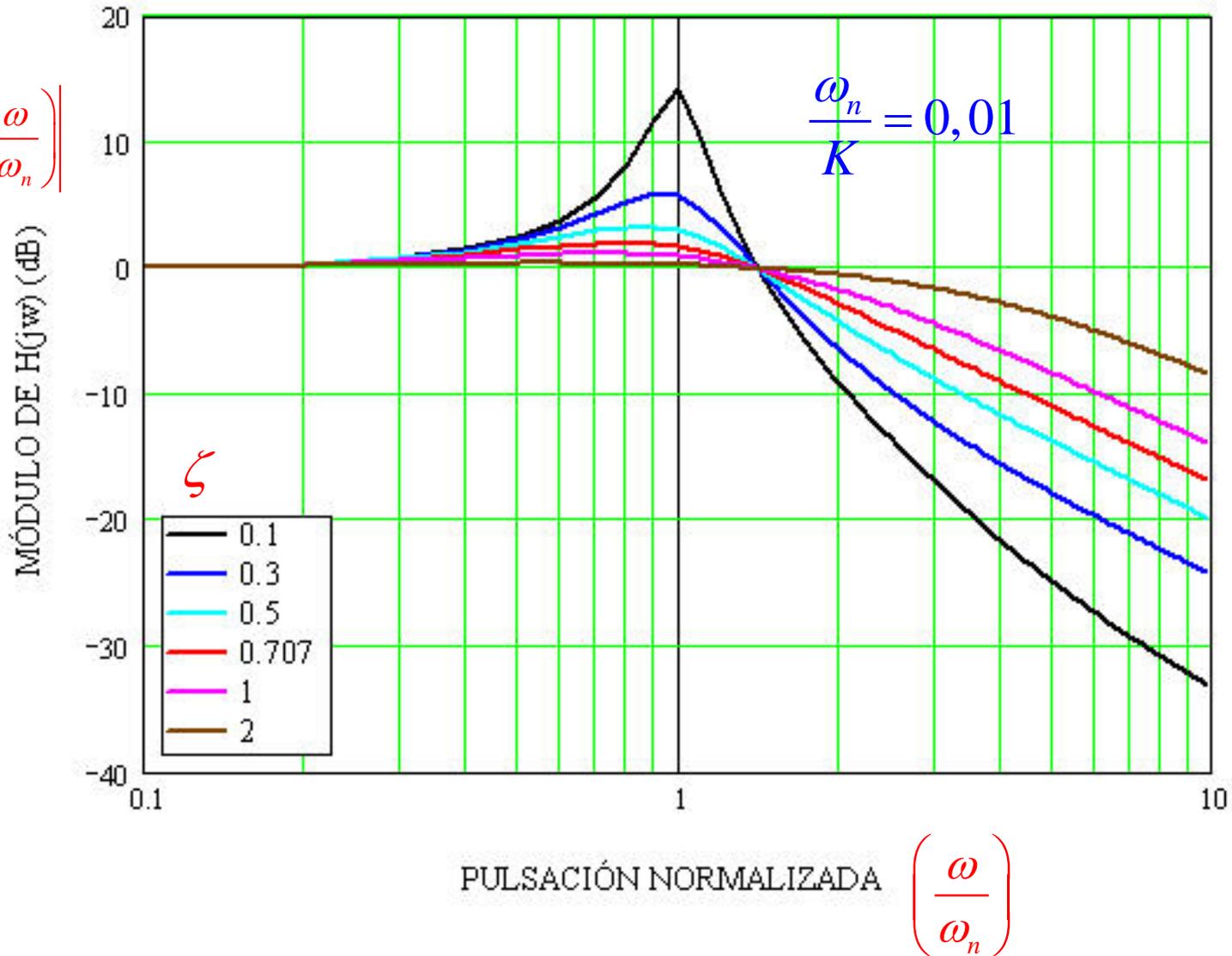
$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + \left[\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \cdot \left(2 \cdot \zeta - \frac{\omega_n}{K}\right)\right]^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2 \cdot \zeta \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}} \Rightarrow |E(j\omega)| = \frac{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4 + \left[\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \cdot \left(\frac{\omega_n}{K}\right)\right]^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2 \cdot \zeta \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}}$$

-Obtenemos varias familias de representaciones en función de cómo elijamos los parámetros de los que dependen las curvas a estudiar.

# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (22)

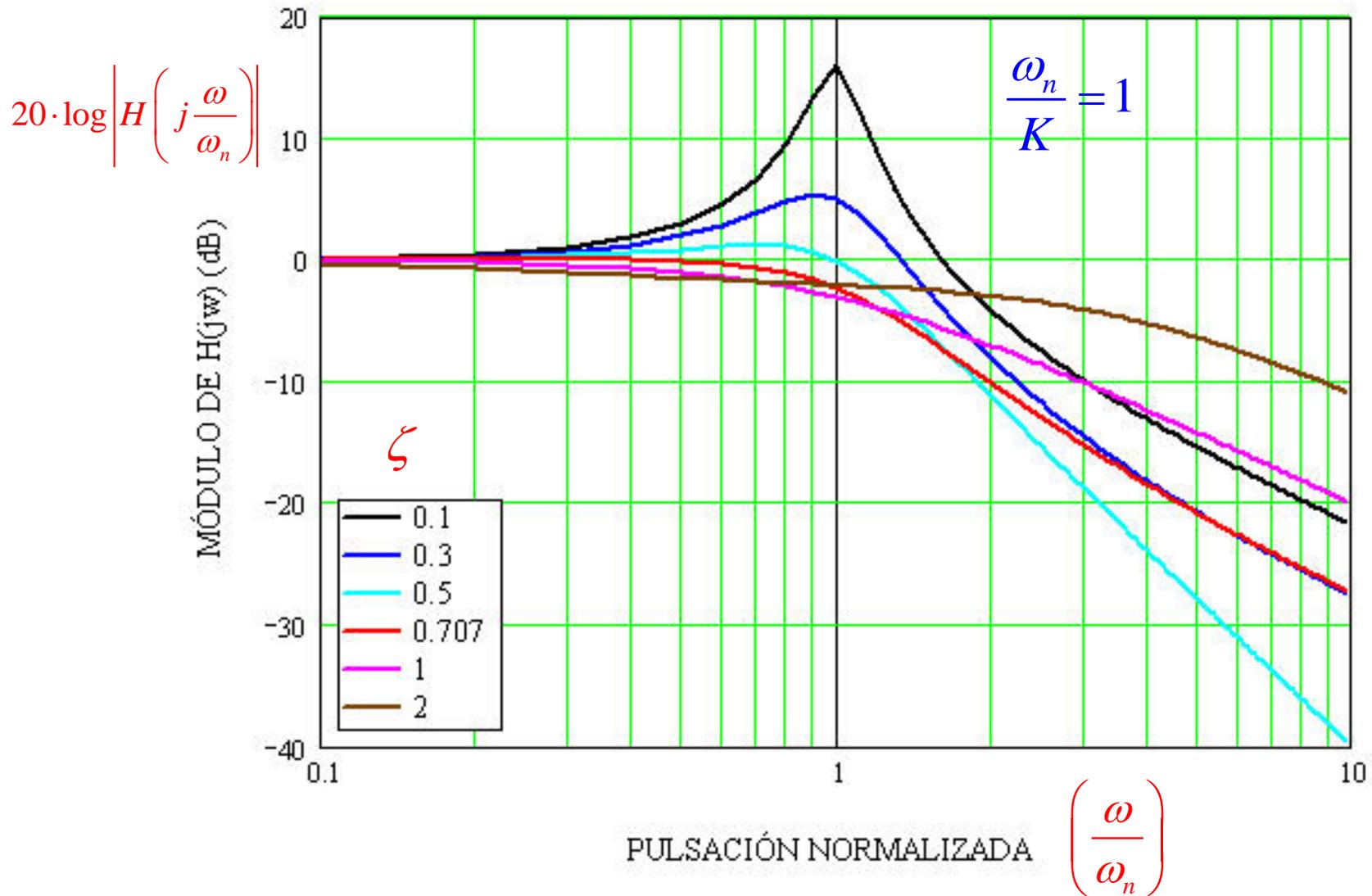
PLL con Filtro Paso Bajo Pasivo "Lead - lag": Tipo 1 - Orden 2 (5)

$$20 \cdot \log \left| H \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right) \right|$$



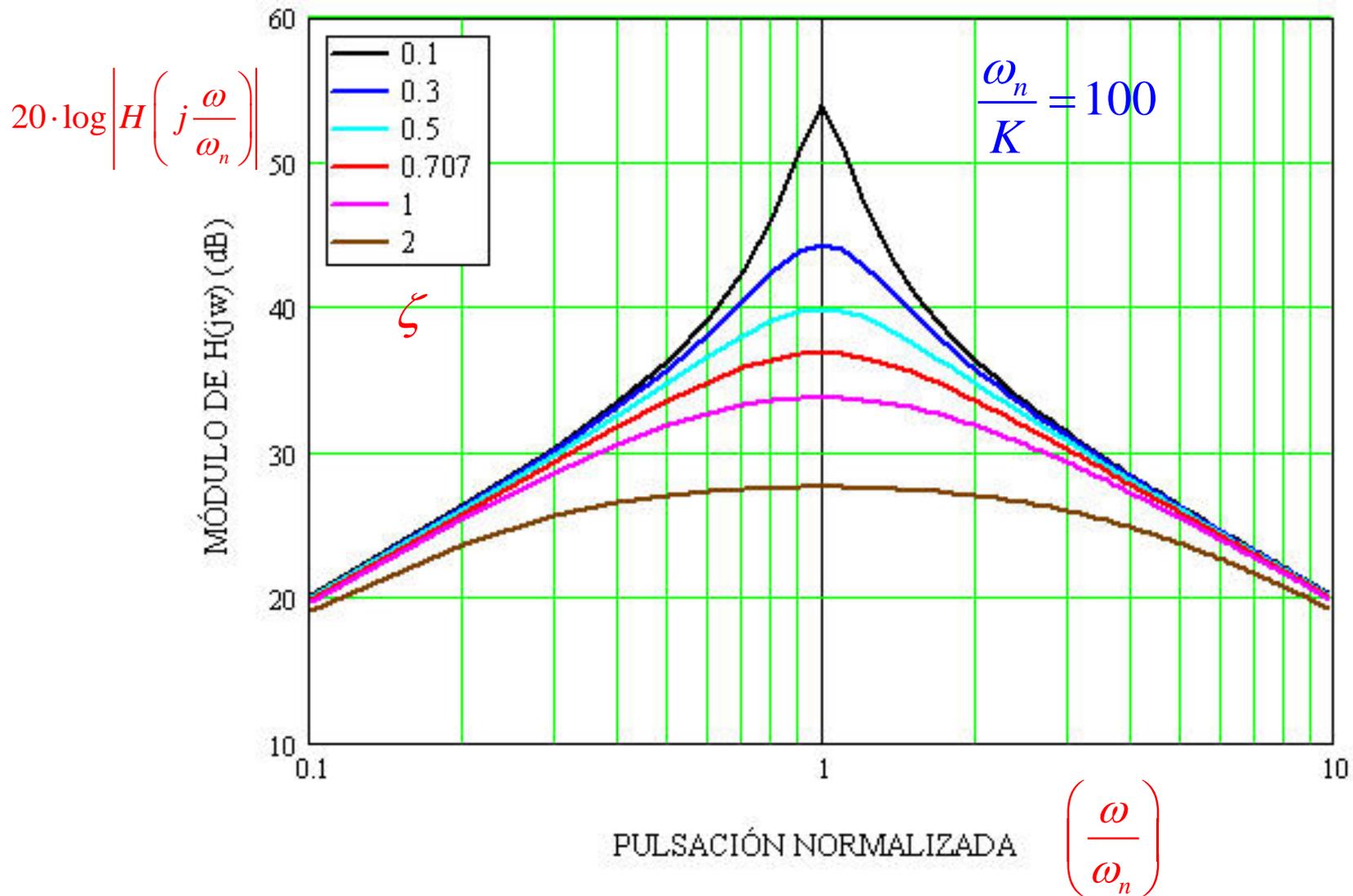
# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (23)

PLL con Filtro Paso Bajo Pasivo "Lead - lag": Tipo 1 - Orden 2 (6)



# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (24)

PLL con Filtro Paso Bajo Pasivo "Lead - lag": Tipo 1 - Orden 2 (7)



# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (25)

## PLL con Filtro Paso Bajo Pasivo “Lead – lag”: Tipo 1 – Orden 2 (8)

- A la vista de las gráficas precedentes, es lógico advertir que en la práctica se ha de diseñar el PLL que emplea el filtro “lead-lag” de forma que se verifique que:  $K \gg \omega_n$  y a esto de le denomina “**PLL de Alta Ganancia**”.

- Bajo esta hipótesis, las funciones H(s) y E(s) quedan simplificadas como:

$$\underline{H(s)} \approx \frac{2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \Rightarrow \underline{E(s)} = 1 - H(s) \approx \frac{s^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

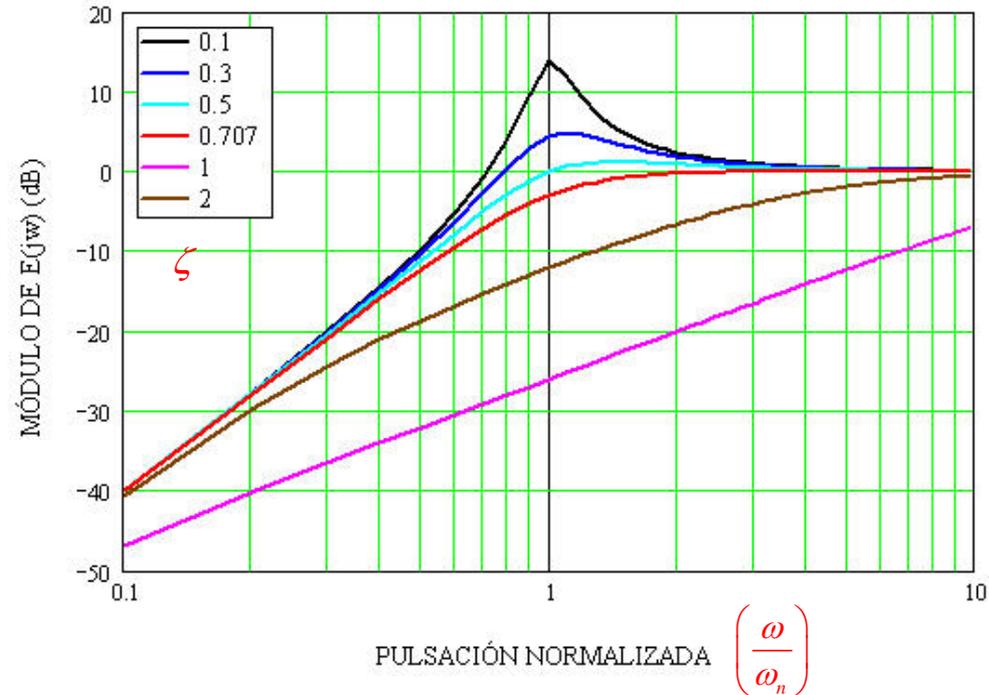
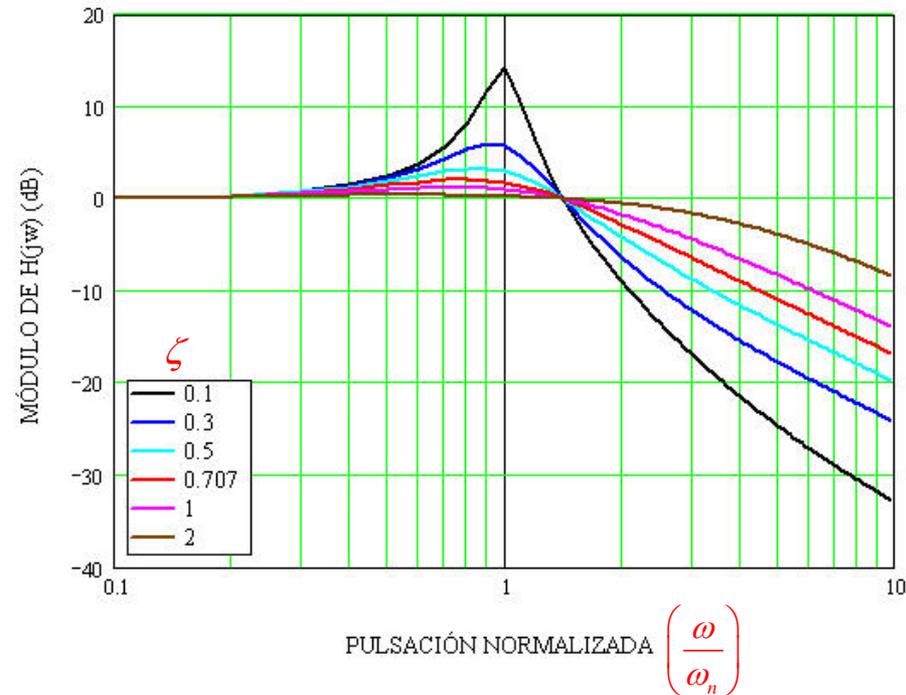
- Y los respectivos módulos corresponderían a:

$$|H(j\omega)| \approx \frac{\sqrt{1 + \left[ \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right) \cdot 2\zeta \right]^2}}{\sqrt{\left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left[ 2 \cdot \zeta \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right) \right]^2}} \Rightarrow |E(j\omega)| \approx \frac{\left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}{\sqrt{\left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left[ 2 \cdot \zeta \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right) \right]^2}}$$

- Que quedarían representadas como:

# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (26)

## PLL con Filtro Paso Bajo Pasivo "Lead – lag": Tipo 1 – Orden 2 (9)



## Ancho de Banda del PLL (1)

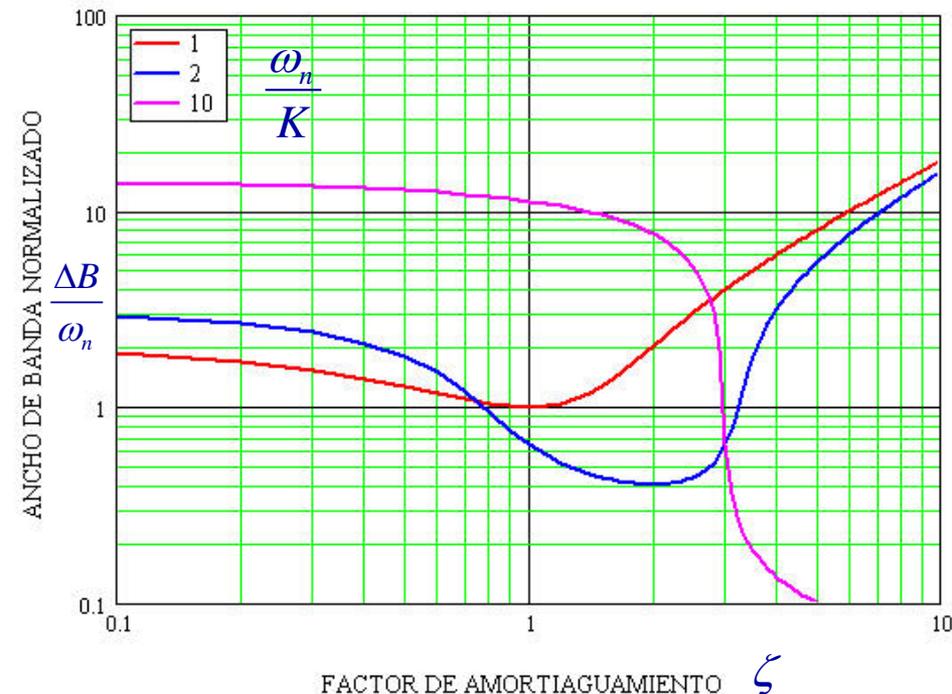
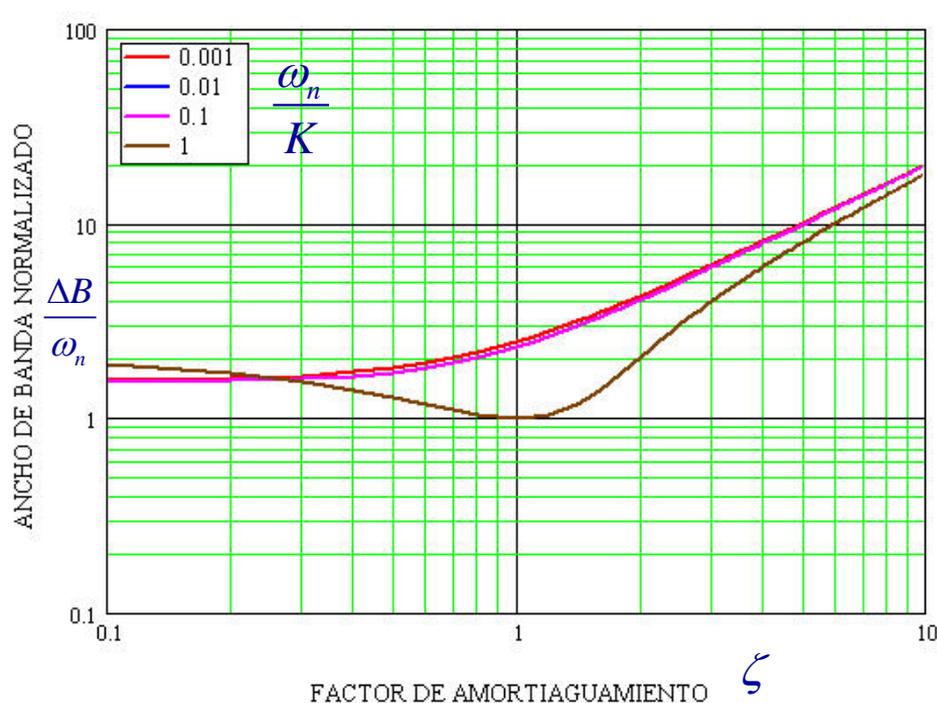
- Podemos calcular la ecuación que nos proporciona el valor del ancho de banda a  $-3\text{dB}$  respecto a la respuesta  $H(0)$  (donde no hay variación alguna de la señal de referencia al PLL), y nos quedará:

# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (27)

## PLL con Filtro Paso Bajo Pasivo "Lead - lag": Tipo 1 - Orden 2 (10)

$$H(0) = 1 \equiv 0 \text{ dB} \Rightarrow \Delta B(-3\text{dB}) \Rightarrow |H(j\Delta B)|^2 = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1 + \left[ \left( \frac{\Delta B}{\omega_n} \right) \cdot \left( 2 \cdot \zeta - \frac{\omega_n}{K} \right) \right]^2}}{\sqrt{\left[ 1 - \left( \frac{\Delta B}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left[ 2 \cdot \zeta \cdot \left( \frac{\Delta B}{\omega_n} \right) \right]^2}} \Rightarrow \text{Operando:}$$

$$\Delta B \text{ (rad/s)} = \omega_n \cdot \sqrt{\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2}} \quad \text{donde} \quad \alpha = 2 \cdot \zeta^2 + 1 - \frac{\omega_n}{K} \cdot \left( 4 \cdot \zeta - \frac{\omega_n}{K} \right)$$



# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (28)

## Sintetizador con Filtro Paso Bajo Pasivo “Lead – lag”: Tipo 1 – Orden 2 (1)

$$H(s) = \frac{\theta_0(s)}{\theta_r(s)} = \frac{K \cdot F(s)}{s + \frac{K \cdot F(s)}{N}} = \frac{K \cdot \left[ \frac{1 + s \cdot \tau_2}{1 + s \cdot \tau_1} \right]}{s + \frac{K \cdot \left[ \frac{1 + s \cdot \tau_2}{1 + s \cdot \tau_1} \right]}{N}} = \frac{\frac{K}{\tau_1} \cdot (1 + s \cdot \tau_2)}{s^2 + s \cdot \left( \frac{1}{\tau_1} + \frac{K \cdot \tau_2}{N \cdot \tau_1} \right) + \frac{K}{N \cdot \tau_1}} \text{ identificando } \Rightarrow$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{N \cdot \tau_1}} \text{ (rad/s) y } \zeta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{N}{K \cdot \tau_1}} \cdot \left( 1 + \frac{K \cdot \tau_2}{N} \right) \Rightarrow H(s) = \frac{N \cdot \left[ s \cdot \omega_n \cdot \left( 2 \cdot \zeta - \frac{N \cdot \omega_n}{K} \right) + \omega_n^2 \right]}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

-Tal como se aprecia en la última fórmula, la verificación de la condición de “Alta Ganancia” va a depender del canal sintetizado (a través del valor del divisor N). Por tanto, se prevé un comportamiento que puede ser muy diferente de unos canales a otros.

- También podemos observar que el factor de amortiguamiento no tienen un comportamiento monótonamente creciente o decreciente con el canal generado, sino que pasa por un punto donde alcanza su mínimo valor (que puede corresponder o no con uno de los canales reales que se desee sintetizar), para crecer después a la izquierda y derecha de dicho canal:

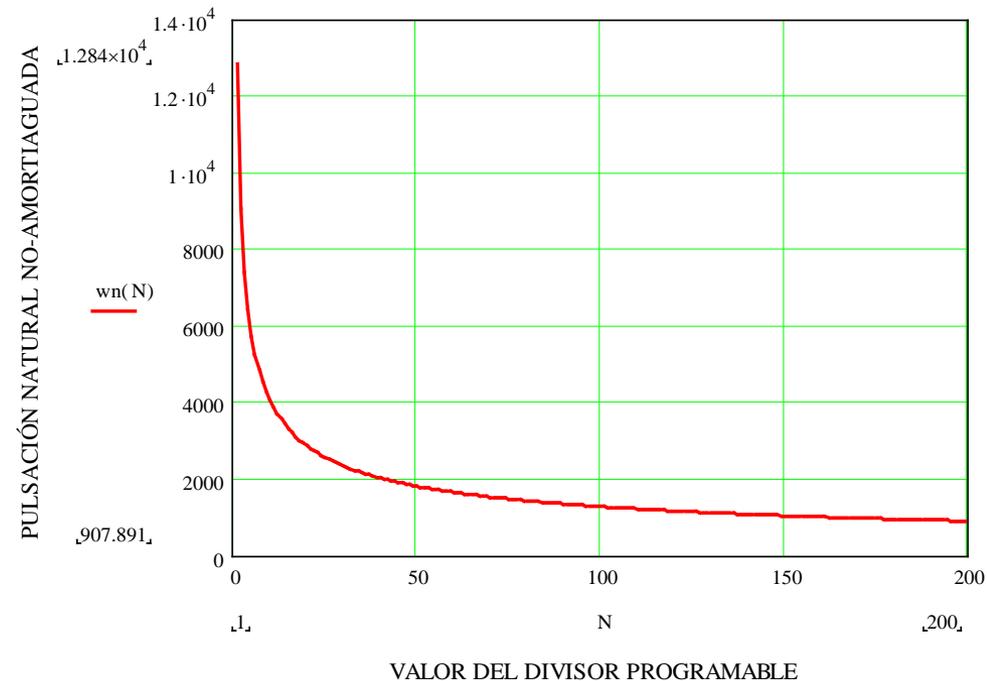
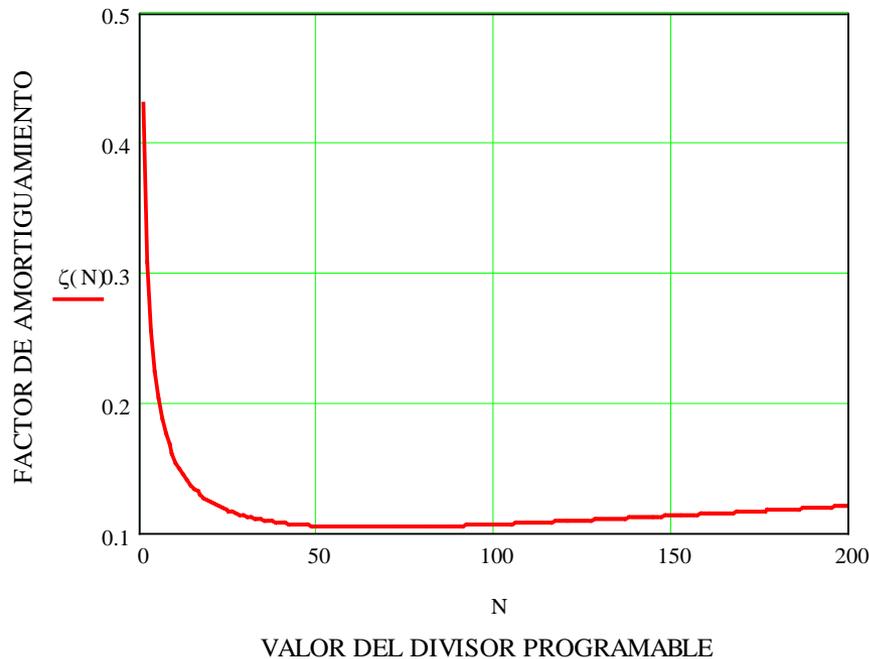
# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (29)

## Sintetizador con Filtro Paso Bajo Pasivo "Lead – lag": Tipo 1 – Orden 2 (2)

$$\frac{d\zeta(N)}{dN} = 0 = \frac{d \left\{ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{N}{K \cdot \tau_1}} \cdot \left( 1 + \frac{K \cdot \tau_2}{N} \right) \right\}}{dN} = \frac{1}{4 \cdot N} \cdot \frac{N - K \cdot \tau_2}{\sqrt{N \cdot K \cdot \tau_1}} = 0 \Rightarrow \boxed{N_{\zeta_{\min}} = K \cdot \tau_2} \Rightarrow \boxed{\zeta_{\min} = \sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}}$$

Ejemplo:

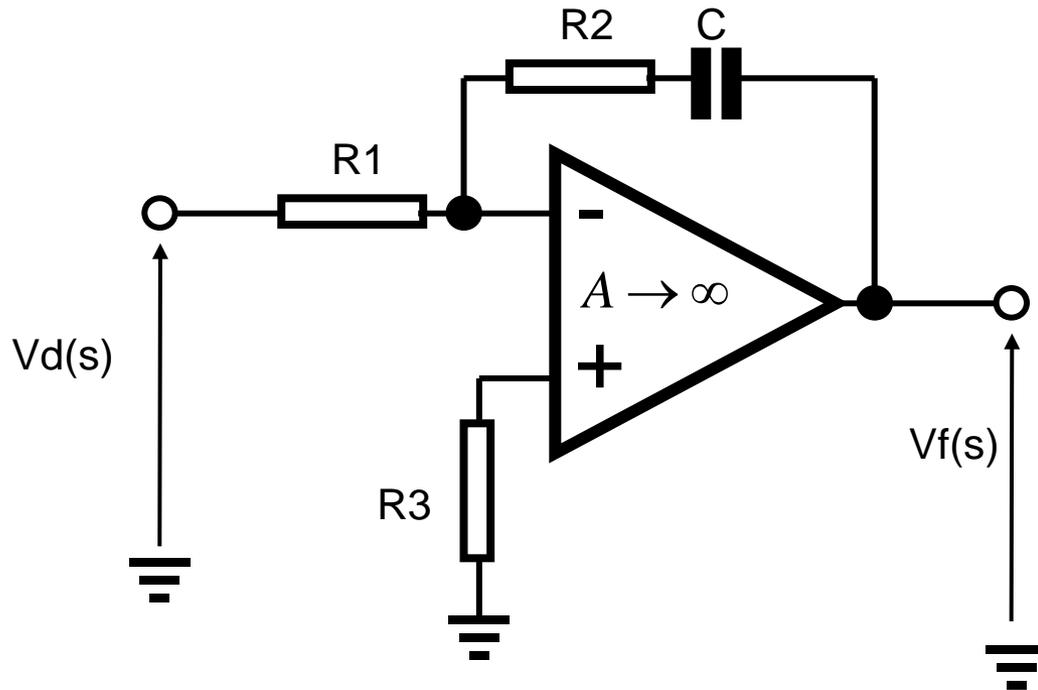
$$C=300 \text{ nF}; R_1 = 20 \text{ K}\Omega; R_2 = 220 \text{ }\Omega \Rightarrow \tau_1 = 6,066 \cdot 10^{-3} ; \tau_2 = 6,6 \cdot 10^{-5} ; N_{\zeta_{\min}} = 66; \zeta_{\min} = 0,104$$



# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (30)

## PLL con Filtro Paso Bajo Activo "Phase - lag": Tipo 2 – Orden 2 (1)

- En este caso, empleamos un amplificador operacional para realizar el filtro paso-bajo activo:



- La resistencia  $R_3$  (de valor aproximadamente  $R_1 // R_2$ ) se emplea para compensar las posibles corrientes de offset de la entrada.

- Supuesto que la ganancia en lazo abierto es lo suficientemente elevada, se verificará que podemos calcular la respuesta del circuito como si se tratase de un simple amplificador inversor:

$$F(s) = -\frac{R_2 + \frac{1}{s \cdot C}}{R_1} = -\frac{1 + s \cdot R_2 \cdot C}{s \cdot R_1 \cdot C} \Bigg|_{\substack{\tau_2 = R_2 \cdot C \\ \tau_1 = R_1 \cdot C}} = -\frac{1 + s \cdot \tau_2}{s \cdot \tau_1}$$

- Prescindiendo del signo negativo que únicamente significa un desfase adicional de  $180^\circ$  y que puede compensarse con una ganancia del comparador de fases o del VCO de valor negativo:

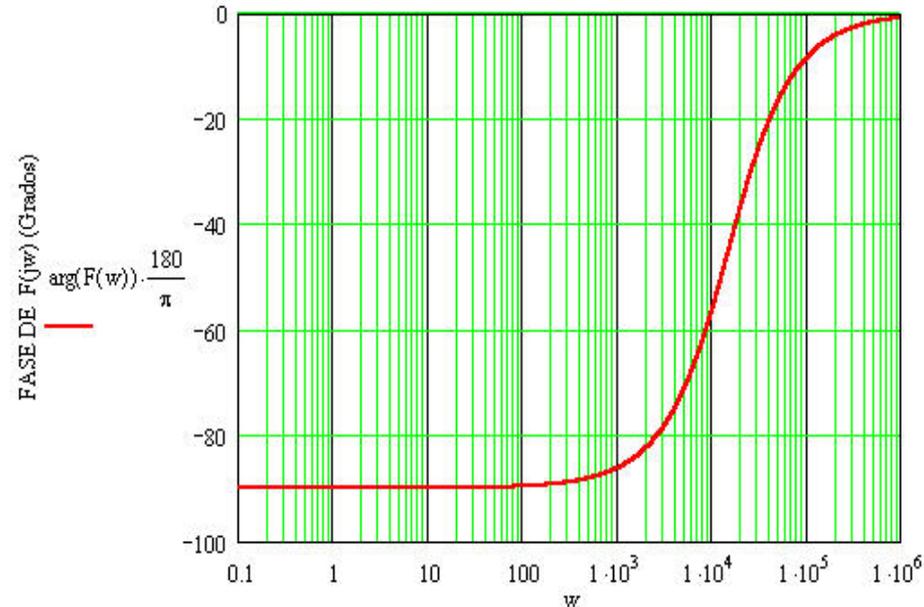
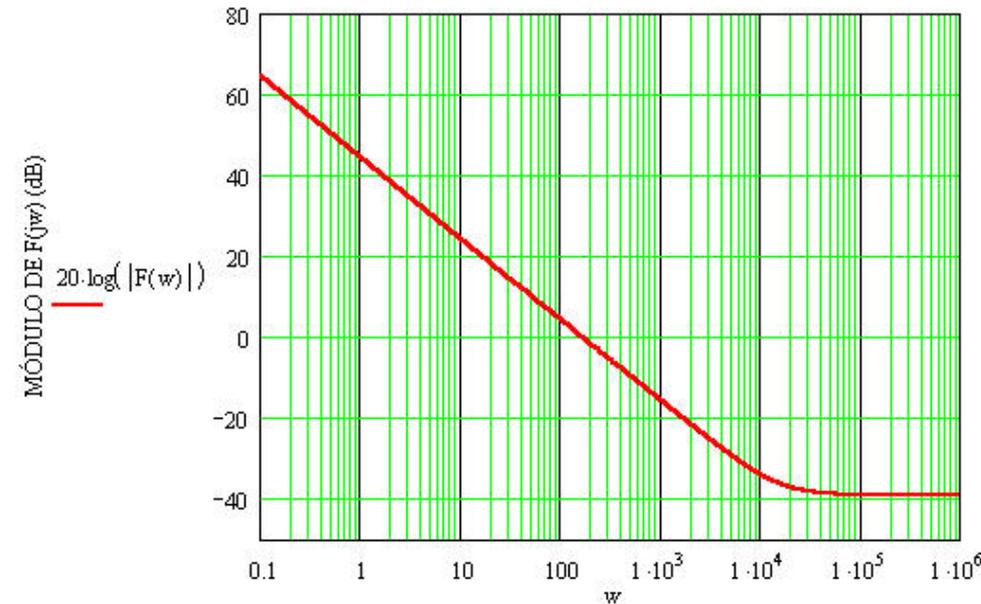
# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (31)

PLL con Filtro Paso Bajo Activo "Phase - lag": Tipo 2 - Orden 2 (2)

$$F(s) = \frac{1 + s \cdot \tau_2}{s \cdot \tau_1} = \frac{1 + \frac{s}{s_0}}{\frac{s}{s_p}} \Rightarrow \text{Cero en } s_0 = \frac{1}{\tau_2} \text{ y polo en } s=0 \Rightarrow \begin{cases} |F(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + (\omega \cdot \tau_2)^2}}{\omega \cdot \tau_1} \\ \varphi(j\omega) = \text{atan}(\omega \cdot \tau_2) - 90^\circ \end{cases}$$

Ejemplo:

$$C=300 \text{ nF}; R_1 = 20 \text{ K}\Omega; R_2 = 220 \Omega \Rightarrow \omega_0 = 15.151 \text{ (rad/s)} \equiv 2.411,3 \text{ (Hz)}$$



# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (32)

## PLL con Filtro Paso Bajo Activo "Phase – lag": Tipo 2 – Orden 2 (3)

- Llevando este filtro a la H(s) del PLL general, tendremos:

$$H(s) = \frac{\theta_0(s)}{\theta_r(s)} = \frac{K \cdot F(s)}{s + K \cdot F(s)} = \frac{K \cdot \left[ \frac{1 + s \cdot \tau_2}{s \cdot \tau_1} \right]}{s + K \cdot \left[ \frac{1 + s \cdot \tau_2}{s \cdot \tau_1} \right]} = \frac{\frac{K}{\tau_1} \cdot (1 + s \cdot \tau_2)}{s^2 + s \cdot \frac{K \cdot \tau_2}{\tau_1} + \frac{K}{\tau_1}} \Rightarrow \begin{cases} \text{PLL de Orden 2} \\ GLA(s) = \frac{K}{s} \cdot \left( \frac{1 + s \cdot \tau_2}{s \cdot \tau_1} \right) \\ \Rightarrow \text{PLL de Tipo 2} \end{cases}$$

- Identificando el denominador con el polinomio característico de los sistemas de 2º orden:

$$H(s) = \frac{\theta_0(s)}{\theta_r(s)} = \frac{\frac{K}{\tau_1} \cdot (1 + s \cdot \tau_2)}{s^2 + s \cdot \frac{K \cdot \tau_2}{\tau_1} + \frac{K}{\tau_1}} = \frac{\frac{K}{\tau_1} \cdot (1 + s \cdot \tau_2)}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{K}{\tau_1}} \text{ (rad/s)} \\ \zeta = \frac{\tau_2}{2} \cdot \sqrt{\frac{K}{\tau_1}} \end{cases}$$

⇒ Operando con el numerador, se puede escribir H(s) en forma estándar:

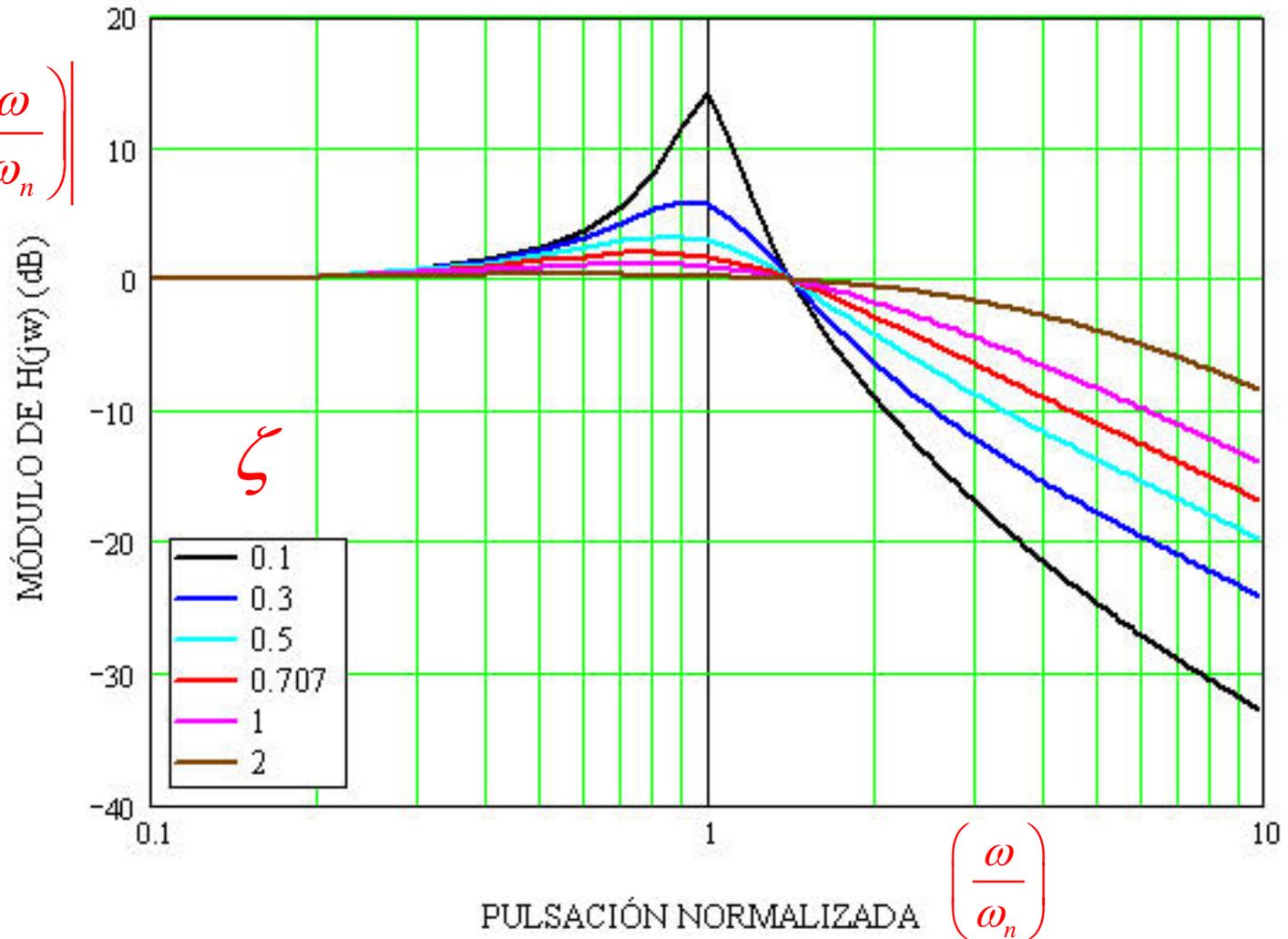
$$\underline{H(s)} = \frac{2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \Rightarrow \underline{E(s)} = 1 - H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (33)

## PLL con Filtro Paso Bajo Activo "Phase – lag": Tipo 2 – Orden 2 (4)

- Como se observa, estas funciones  $H(s)$  y  $E(s)$  coinciden exactamente con la que obtuvimos anteriormente para el caso del PLL con Filtro pasivo "lead – lag" de Alta Ganancia.

$$20 \cdot \log \left| H \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right) \right|$$



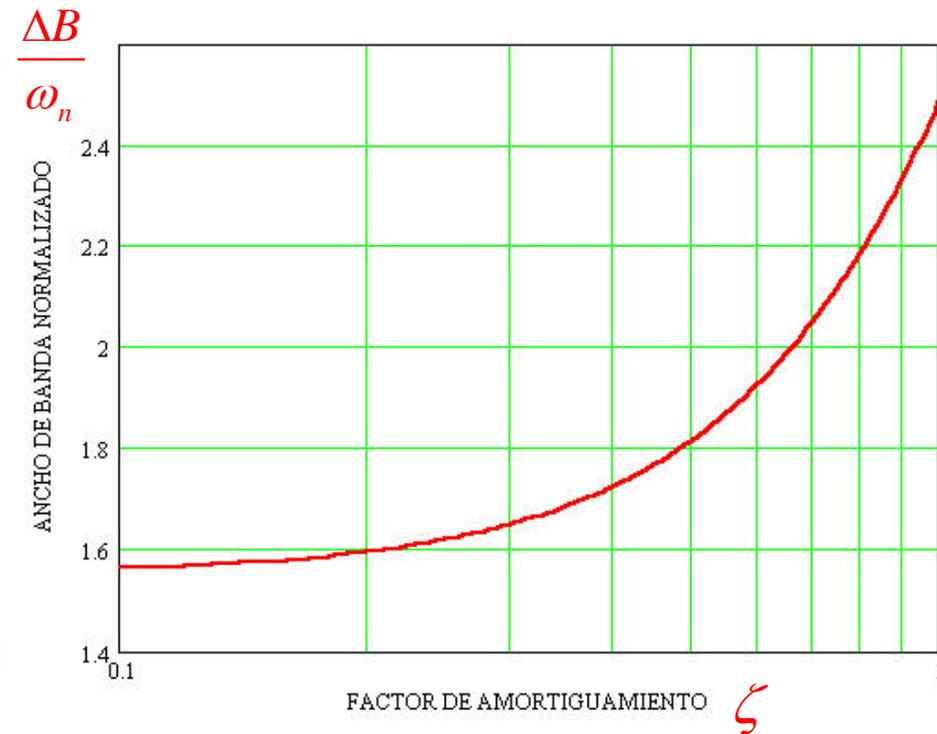
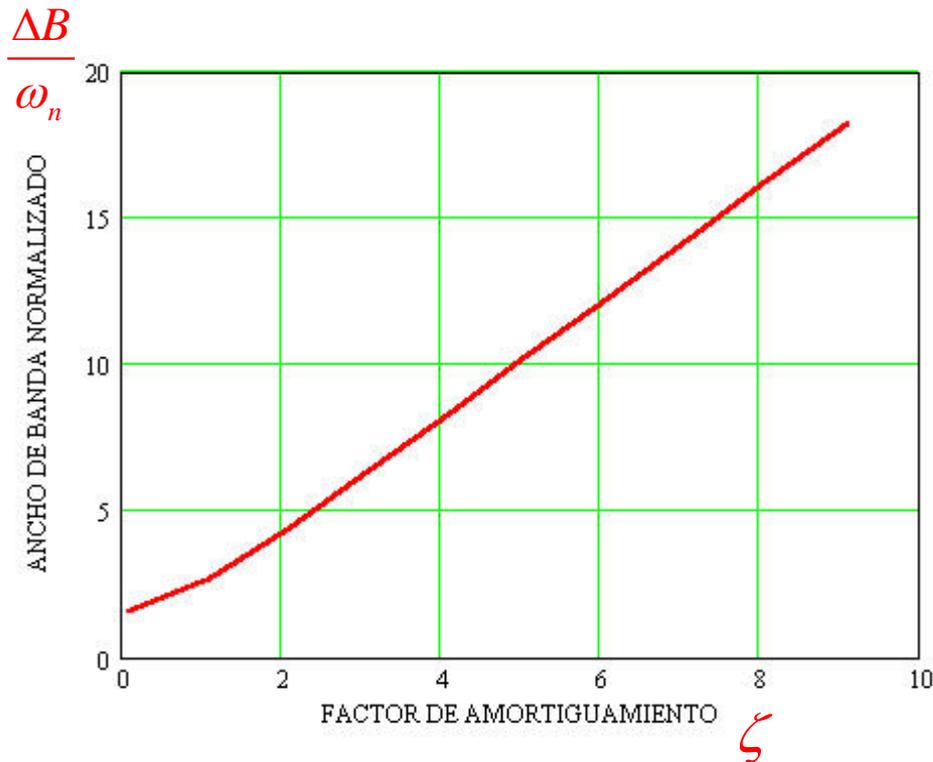
# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (34)

PLL con Filtro Paso Bajo Activo "Phase – lag": Tipo 2 – Orden 2 (5)

## Ancho de Banda del PLL (1)

- Podemos calcular la ecuación que nos proporciona el valor del ancho de banda a – 3dB respecto a la respuesta  $H(0)$  (donde no hay variación alguna de la señal de referencia al PLL), y nos quedará:

$$\Delta B \text{ (rad/s)} = \omega_n \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \zeta^2 + \sqrt{2 + 4 \cdot \zeta^2 + 4 \cdot \zeta^4}}$$



# Clasificación de los Lazos Enganchados en Fase (35)

## Sintetizador con Filtro Paso Bajo Activo "Phase - lag": Tipo 2 - Orden 2 (1)

- Procediendo como hemos hecho en anteriores ocasiones, tendremos:

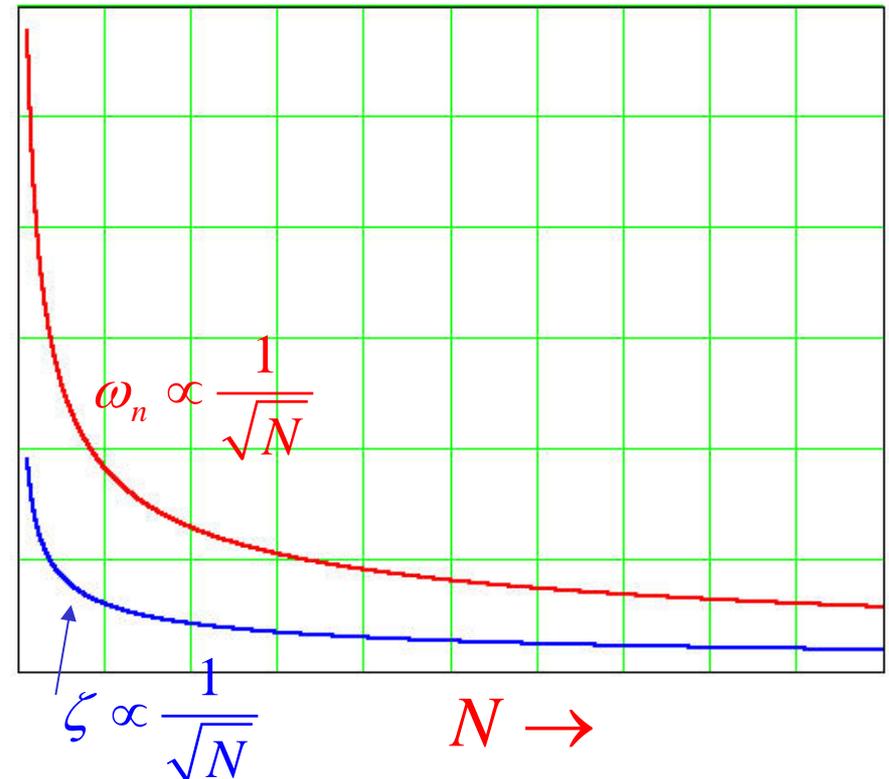
$$H(s) = \frac{\theta_0(s)}{\theta_r(s)} = \frac{K \cdot F(s)}{s + \frac{K \cdot F(s)}{N}} = \frac{K \cdot \left[ \frac{1 + s \cdot \tau_2}{s \cdot \tau_1} \right]}{s + \frac{K \cdot \left[ \frac{1 + s \cdot \tau_2}{s \cdot \tau_1} \right]}{N}} = \frac{\frac{K}{\tau_1} \cdot (1 + s \cdot \tau_2)}{s^2 + s \cdot \frac{K \cdot \tau_2}{N \cdot \tau_1} + \frac{K}{N \cdot \tau_1}} \text{ identificando } \Rightarrow$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{N \cdot \tau_1}} \text{ (rad/s) y } \zeta = \frac{\tau_2}{2} \cdot \sqrt{\frac{K}{N \cdot \tau_1}} \Rightarrow$$

$$H(s) = \frac{N \cdot \left[ 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2 \right]}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{E(s)} = 1 - \frac{H(s)}{N} = \frac{s^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

- En este caso vemos que, tanto la pulsación natural no-amortiguada como el factor de amortiguamiento, decrecen conforme se incrementa el valor del divisor programable del lazo de realimentación (y por tanto se sube el canal sintetizado).



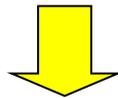
# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Permanente (1)

## Introducción (1)

- Llamamos Respuesta Dinámica del PLL a la evolución que experimenta en sus distintas variables cuando se produce un cambio en la fase y / o frecuencia de la señal de referencia (o en general, un cambio en cualquier punto del sistema en lazo cerrado).
- Podemos estar interesados en conocer la forma en que evoluciona cualquier variable de interés y en todo instante de tiempo desde que aconteció dicho cambio: Estudio del Régimen Transitorio, o bien únicamente el estado final que alcanzará el sistema conforme vaya avanzando el tiempo y se hayan extinguido todos los fenómenos transitorios: Estudio del Régimen Permanente.
- Para hacer el estudio en cualquier caso supondremos las siguientes:

### HIPÓTESIS DE TRABAJO:

A) El sistema se comporta de forma lineal e invariante temporal en cualquier instante de tiempo: Sistema LTI .



Respuesta a  $\sum$  cambios de entrada =  $\sum$  Respuesta a cada cambio individual

B) El sistema se encuentra inicialmente en estado de enganche y el cambio se produce en  $t = 0$ .

C) Se considera que no existe ninguna fuente de ruido interna o externa en el sistema.

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Permanente (2)

## Introducción (2)

- Aunque se pueden estudiar una infinidad de posibles cambios de la señal de referencia y cómo afectan a la evolución del sistema, para el caso de su aplicación en Sintetizadores Indirectos de frecuencia, es común analizar únicamente tres casos bien definidos:

- A) Cambio instantáneo de la fase de la señal de referencia (Escalón de Fase).**
- B) Cambio instantáneo de la frecuencia de la señal de referencia (Escalón de Frecuencia).**
- C) Variación lineal de la frecuencia de la señal de referencia (Rampa de Frecuencia)**

- El análisis del Régimen Permanente puede realizarse de forma particular para cada PLL o Sintetizador a partir de sus funciones de transferencia  $H(s)$  o de error  $E(s)$  concreta teniendo en cuenta el filtro específico que se esté empleando, o bien efectuarlo de forma genérica e implícita dependiendo sólo de la clasificación según el Tipo de PLL o Sintetizador de que se trate.

- De la misma forma, el estudio del Régimen Permanente puede abordarse íntegramente trabajando en el Dominio del Tiempo (a partir de la resolución de la EDO correspondiente), o bien utilizando el Dominio transformado de Laplace.

- Si se estudia el Régimen Permanente o Transitorio, los resultados obtenidos son extrapolables al PLL que lo origina sin más que particularizar  $N$  por el valor unidad. ( $N = 1$ ).

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Permanente (3)

## Introducción (3) – Pasos del desarrollo:

### A) Análisis en el Dominio Temporal.

- 1º.- Escribir el cambio experimentado en la señal de referencia (fase o frecuencia) en el dominio del tiempo.
- 2º.- Determinar la expresión de la EDO de la variable que interese conocer como respuesta del sistema, a partir de la  $H(s)$ ,  $E(s)$  o de otra función de transferencia específica de interés.
- 3º.- Resolver la EDO (solución homogénea y solución particular).
- 4º.- Calcular el límite de la solución conforme  $t$  tiende a infinito
- 5º.- Analizar los resultados obtenidos.

### B) Análisis en el Dominio Transformado de Laplace.

- 1º.- Escribir el cambio experimentado en la señal de referencia (fase o frecuencia) en el dominio del tiempo.
- 2º.- Calcular la Transformada de Laplace de dicho cambio,
- 3º.- Aplicar dicha expresión a la Función de Transferencia  $H(s)$  o de Error  $E(s)$  o a cualquier otra de interés en cada caso concreto.
- 4º.- Aplicar el Teorema del Valor Final de las propiedades de la Transformación de Laplace.
- 5º.- Analizar los resultados obtenidos.

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Permanente (4)

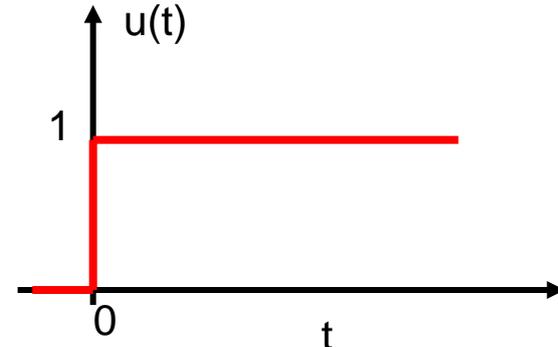
## Escalón de Fase en la referencia (1)

- Por su mayor sencillez y potencia, utilizaremos el método del Dominio Transformado de Laplace.
- Siguiendo los pasos anteriormente indicados tendremos:

1º.-  $\theta_r(t) = \Delta\theta \cdot u(t)$  siendo  $u(t)$  la Función generalizada Escalón:  $u(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ 1 & \forall t \geq 0 \end{cases}$

2º.-  $\theta_r(s) = L\{\theta_r(t)\} = L\{\Delta\theta \cdot u(t)\} = \frac{\Delta\theta}{s}$

3º.-  $\theta_0(s) = H(s) \cdot \theta_r(s) = \left( \frac{K \cdot F(s)}{s + \frac{K \cdot F(s)}{N}} \right) \cdot \frac{\Delta\theta}{s}$



4º.-  $\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_0(t)} = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot \theta_0(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \cdot \left( \frac{K \cdot F(s)}{s + \frac{K \cdot F(s)}{N}} \right) \cdot \frac{\Delta\theta}{s} \right] = \boxed{N \cdot \Delta\theta}$

5º.- Todo Sintetizador y/o PLL es capaz de seguir **sin error** saltos de fase de la señal de referencia y transmitirlos a la salida del VCO en estado estable permanente.

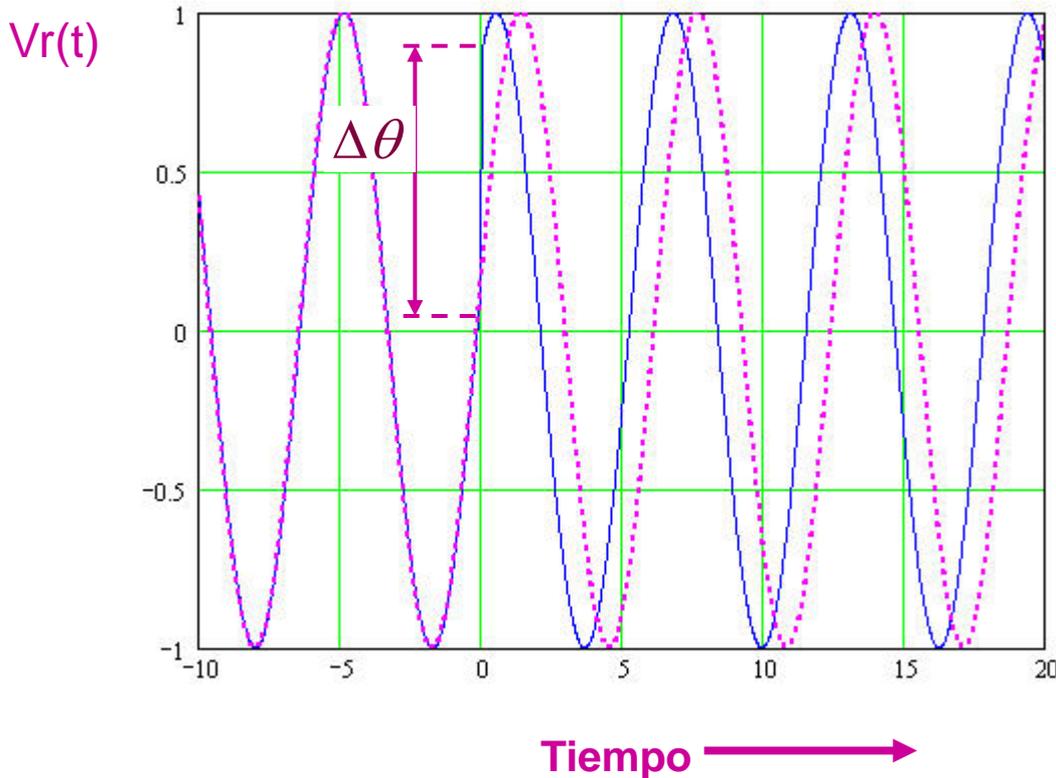
(Independientemente del Tipo y Orden que sea).

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Permanente (5)

## Escalón de Fase en la referencia (2)

- Un salto brusco en la fase de referencia puede ser debido a efectos de ruido o jitter en el propio circuito oscilador, y no lleva asociada ninguna variación en el valor de la frecuencia de referencia:

$$f_r(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\theta_r(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\{\Delta\theta \cdot u(t)\}}{dt} = 0 \Rightarrow \text{y también: } \lim_{t \rightarrow \infty} \{f_0(t)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\theta_0(t)}{dt} \right\} =$$
$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d(N \cdot \Delta\theta)}{dt} \right\} = 0 \text{ c.q.d.} \Rightarrow \text{En R.P.S. el Sintetizador y/o PLL siguen enganchados.}$$



# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Permanente (6)

## Escalón de Fase en la referencia (3)

- Otra forma de llegar al mismo resultado es a través de la función de error de fases,  $E(s)$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{\theta_e(t)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \{s \cdot \theta_e(s)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \{s \cdot E(s) \cdot \theta_r(s)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \left( s \cdot \frac{s}{s + \frac{K \cdot F(s)}{N}} \right) \cdot \frac{\Delta\theta}{s} \right\} = 0 \Rightarrow$$

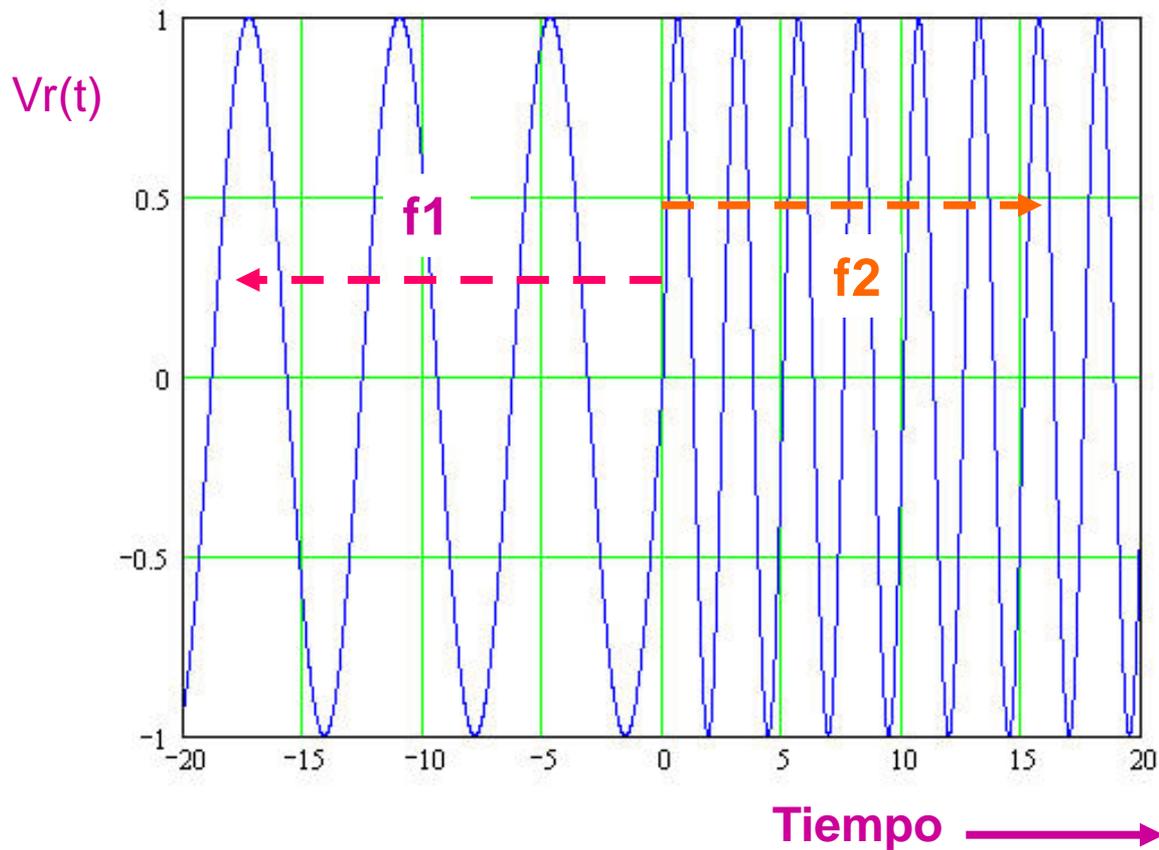
$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \{\theta_r(t) - \theta_0(t)\} = 0 \Rightarrow \boxed{\theta_0(t \rightarrow \infty) = \theta_r(t \rightarrow \infty)} \text{ c.q.d.}$$

- **NOTA PRÁCTICA:** En general aporta mucha más información trabajar con las funciones de Error de Fase o Frecuencia  $E(s)$ , que con la propia función de transferencia  $H(s)$ , ya que pueden aparecer valores infinitos en el paso al límite (especialmente en lo que se refiere al análisis de las fases de entrada y salida del PLL o sintetizador) que son complicados de interpretar. En tanto que operando con los errores resulta mucho más inmediata y clara dicha interpretación de resultados.

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Permanente (7)

## Escalón de Frecuencia en la referencia (1)

- Este supuesto es muy frecuente en la aplicación de Sintetizadores Indirectos de Frecuencia en el momento en que se modifica el valor del divisor programable para cambiar de canal sintetizado.



# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Permanente (8)

## Escalón de Frecuencia en la referencia (2)

$$1^\circ.- f_r(t) = \Delta f \cdot u(t) \text{ siendo } u(t) \text{ la Función generalizada Escalón: } u(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ 1 & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

$$2^\circ.- f_r(s) = L\{f_r(t)\} = L\{\Delta f \cdot u(t)\} = \frac{\Delta f}{s}$$

$$3^\circ.- f_0(s) = H(s) \cdot f_r(s) = \left( \frac{K \cdot F(s)}{s + \frac{K \cdot F(s)}{N}} \right) \cdot \frac{\Delta f}{s}$$

$$4^\circ.- \boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} f_0(t)} = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot f_0(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \cdot \left( \frac{K \cdot F(s)}{s + \frac{K \cdot F(s)}{N}} \right) \cdot \frac{\Delta f}{s} \right] = \boxed{N \cdot \Delta f}$$

5º.- Todo Sintetizador y/o PLL es capaz de seguir **sin error** saltos de frecuencia de la señal de referencia y transmitirlos a la salida del VCO en estado estable permanente.

(Independientemente del Tipo y Orden que sea).

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Permanente (9)

## Sintetizadores y PLL's (1) de Tipo 1. – Escalón de Frecuencia en la referencia (3)

- Sabiendo que para que el VCO cambie su frecuencia de trabajo es necesario que se le aplique una cierta tensión de control, y que ésta debe provenir de la existencia de un cierto error de fase entre las señales a comparar, resulta interesante determinar el valor dicho error necesario para que el Sintetizador (y / o PLL siga el salto de frecuencia en régimen permanente).

$$1^\circ.- \theta_r(t) = 2\pi \int_0^t \Delta f \cdot u(t) \cdot dt = 2\pi \cdot \Delta f \cdot t \cdot u(t) = \Delta\omega \cdot t \cdot u(t) \Leftarrow \text{Rampa de fase}$$

$$2^\circ.- \theta_r(s) = L\{\theta_r(t)\} = L\{\Delta\omega \cdot t \cdot u(t)\} = \frac{\Delta\omega}{s^2}$$

$$3^\circ.- \theta_e(s) = E(s) \cdot \theta_r(s) = \left( \frac{s}{s + \frac{K \cdot F(s)}{N}} \right) \cdot \frac{\Delta\omega}{s^2}$$

$$4^\circ.- \boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_e(t)} = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot \theta_e(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \cdot \left( \frac{s}{s + \frac{K \cdot F(s)}{N}} \right) \cdot \frac{\Delta\omega}{s^2} \right] = \boxed{N \cdot \frac{\Delta\omega}{K \cdot F(0)}} =$$

$$= \boxed{N \cdot \frac{\Delta f}{K_v \cdot K_d \cdot F(0)}} = \boxed{\text{Error de Velocidad} = \text{Error de Fase Estático}}$$

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Permanente (10)

## Sintetizadores y PLL's (1) de Tipo 1. – Escalón de Frecuencia en la referencia (4)

- A este resultado se puede llegar razonando de manera intuitiva en el caso de un PLL:

- Si el VCO ha experimentado un cambio de frecuencia  $\Delta f$ , es porque a su entrada de control se le

ha aplicado una tensión de valor:  $v_f(0) = \frac{\Delta f}{K_v}$  y debe ser necesariamente continua porque de lo

contrario el VCO no se quedaría oscilando a una frecuencia fija.

- La tensión de entrada que debe estar aplicada a la entrada del filtro paso-bajo será entonces:

$v_d(0) = \frac{v_f(0)}{F(0)}$  y nuevamente es fácil ver que también debe ser continua.

- Por último, para que el comparador de fases genere dicha tensión será necesario que exista un

error entre las señales que se comparan de valor:  $\theta_e = \frac{v_d(0)}{K_d} = \frac{v_f(0)}{K_d \cdot F(0)} = \frac{\Delta f}{K_v \cdot K_d \cdot F(0)}$

que es el mismo resultado que antes habíamos obtenido.

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Permanente (11)

## Escalón de Frecuencia en la referencia (5)

- Al término de error de fase remanente

$$\Theta_e = \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_e(t) = N \cdot \frac{\Delta f}{K_v \cdot K_d \cdot F(0)}$$

se le denomina: **ERROR DE FASE ESTÁTICO o de VELOCIDAD**, y como se aprecia depende en gran medida del valor que tenga la respuesta en continua del filtro paso-bajo del sistema.

- Para cualquier filtro pasivo se verifica que  $F(0)=1$ , y por tanto en régimen permanente el Sintetizador y / o PLL estará enganchado con un error que dependerá del salto de frecuencia o canal generado y que será tanto menor cuanto mayor ganancia presenten el comparador de fases y el VCO.

- Si se emplea un filtro paso-bajo activo integrador ideal:  $F(0) \rightarrow \infty \Rightarrow \Theta_e \rightarrow 0$

- Puesto que el valor finito o infinito de  $F(0)$  determina directamente el TIPO de PLL (o sintetizador), en conclusión puede decirse que el Error en Régimen Permanente depende del TIPO de sistema.

- Como corolario de lo anterior: **Todo PLL (o sintetizador) de Tipo 2 (o superior) es capaz de seguir sin error de Fase alguno los saltos de frecuencia de la señal de referencia y transmitirlos (amplificados N veces) al VCO en régimen permanente estable.**

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Permanente (12)

## Escalón de Frecuencia en la referencia (6)

- Analicemos con mayor detalle lo que sucede en el mecanismo de cambio de canal en un sintetizador indirecto.

- Supongamos que en el momento inicial, el divisor programable tiene un valor **N**, entonces la señal a la salida del VCO tendrá una frecuencia:

$$f_0 \Big|_{t=0^-} = N \cdot f_r = f_c + f_{\Delta N}$$

- En el momento en que se cambia el divisor programable de **N** a otro valor **M**, el VCO seguirá trabajando a la misma frecuencia anterior (puesto que el sistema de realimentación no actúa de forma instantánea), y el comparador de fases verá que entre sus señales se ha producido un salto de frecuencia de valor:

$$\Delta f \Big|_{t=0^+} = f_r - \frac{N \cdot f_r}{M} = f_r \cdot \left( \frac{M - N}{M} \right)$$

- El Sintetizador reacciona a este salto y transcurrido un tiempo suficientemente grande para que se extingan los fenómenos transitorios, se llega al régimen permanente estable, donde el VCO adopta (M veces) el cambio producido en la entrada según:

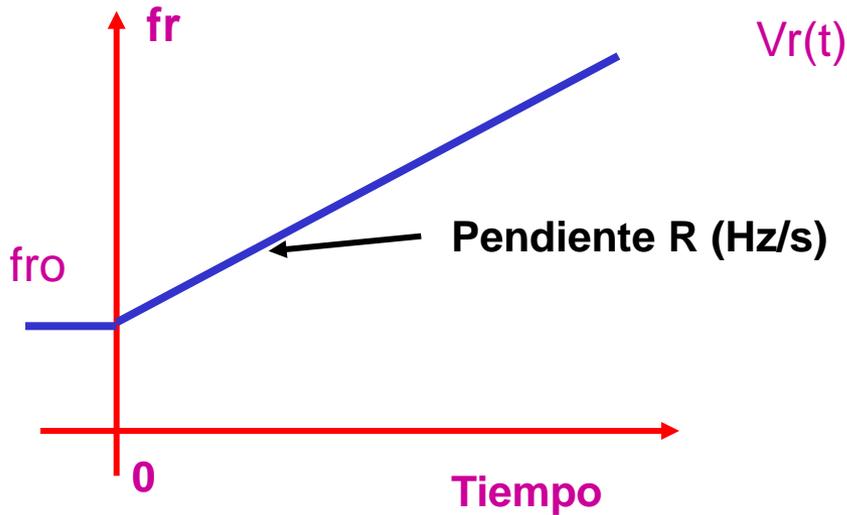
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{ f_0(t) \} = f_0 \Big|_{t=0^-} + \Delta f \Big|_{t=0^+} = N \cdot f_r + M \cdot \left\{ f_r \cdot \left( \frac{M - N}{M} \right) \right\} = \boxed{M \cdot f_r} = f_c + f_{\Delta M}$$

- Que es justamente lo que esperábamos que sucediera.

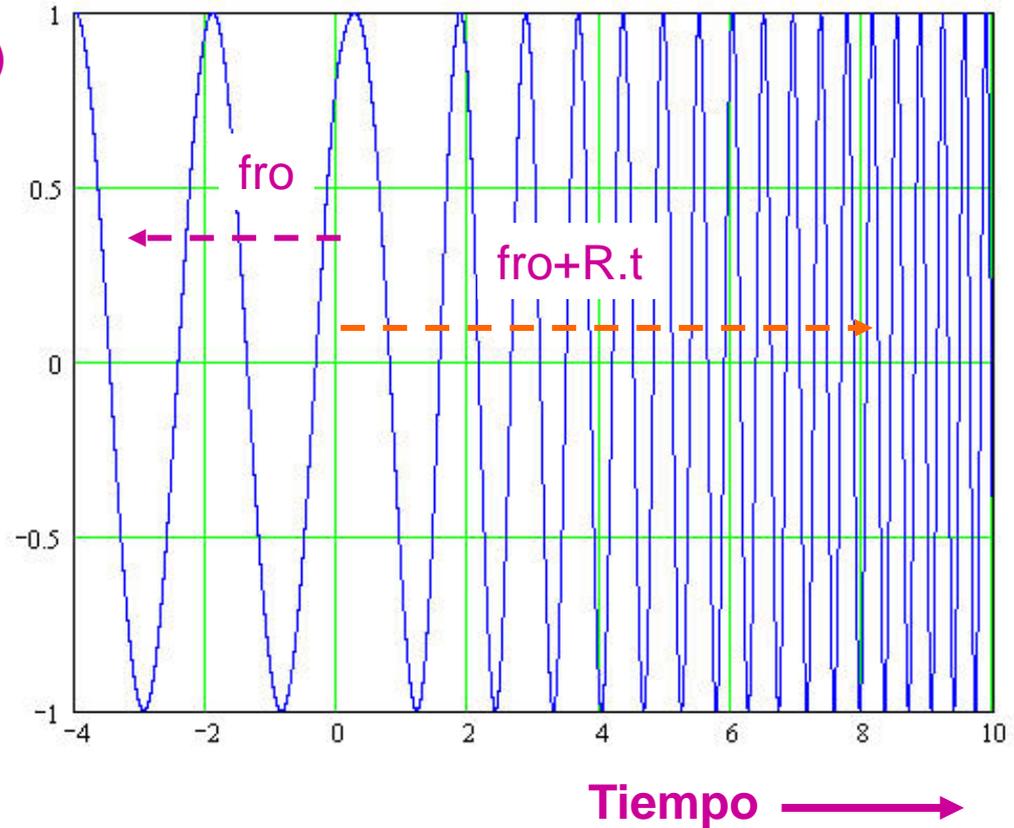
# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Permanente (13)

## Variación lineal (rampa) de Frecuencia en la referencia (1)

- Este tipo de cambio de la señal de referencia al PLL o sintetizador se produce, por ejemplo, cuando sometemos a un barrido lineal el oscilador de referencia o bien cuando existe un efecto Doppler asociado con dicha señal de entrada al sistema. En cualquier caso, el análisis a seguir es el mismo indicado anteriormente:



$$f_r(t) = \begin{cases} f_{r0} & , t < 0 \\ f_{r0} + R \cdot t & , t \geq 0 \end{cases}$$



# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Permanente (14)

Variación lineal (rampa) de Frecuencia en la referencia (2)

$$1^\circ. - f_r(t) = R \cdot t \cdot u(t)$$

$$2^\circ. - f_r(s) = L\{f_r(t)\} = L\{R \cdot t \cdot u(t)\} = \frac{R}{s^2}$$

$$3^\circ. - f_e(s) = E(s) \cdot f_r(s) = \left( \frac{s}{s + \frac{K \cdot F(s)}{N}} \right) \cdot \frac{R}{s^2}$$

$$4^\circ. - \boxed{\Psi_e = \lim_{t \rightarrow \infty} \{f_e(t)\}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \{s \cdot f_e(s)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ s \cdot \left( \frac{s}{s + \frac{K \cdot F(s)}{N}} \right) \cdot \frac{R}{s^2} \right\} = \boxed{\frac{N \cdot R}{K \cdot F(0)}}$$

5°. - El **Error de Aceleración**  $\lim_{t \rightarrow \infty} \{f_e(t)\}$  a una variación lineal de frecuencia de entrada, es nulo para todo PLL (o sintetizador) de Tipo 2 o superior.

- Veamos qué sucede con el error de fase entre los dos osciladores: el de referencia y el VCO en régimen permanente:

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Permanente (15)

Variación lineal (rampa) de Frecuencia en la referencia (3)

$$1^\circ.- f_r(t) = R \cdot t \cdot u(t) \Rightarrow \theta_r(t) = 2\pi \cdot \int_0^t R \cdot t \cdot u(t) \cdot dt = \frac{2\pi \cdot R \cdot t^2}{2} \cdot u(t) = \frac{\Omega \cdot t^2}{2} \cdot u(t)$$

$$2^\circ.- \theta_r(s) = L\{\theta_r(t)\} = L\left\{\frac{\Omega \cdot t^2}{2} \cdot u(t)\right\} = \frac{\Omega}{s^3}$$

$$3^\circ.- \theta_e(s) = E(s) \cdot \theta_r(s) = \left(\frac{s}{s + \frac{K \cdot F(s)}{N}}\right) \cdot \frac{\Omega}{s^3}$$

$$4^\circ.- \boxed{\Theta_e = \lim_{t \rightarrow \infty} \{\theta_e(t)\}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \{s \cdot \theta_e(s)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{s \cdot \left(\frac{s}{s + \frac{K \cdot F(s)}{N}}\right) \cdot \frac{\Omega}{s^3}\right\} \rightarrow \frac{N \cdot \Omega}{K \cdot F(0) \cdot (s \rightarrow 0)}$$

5°.- A) El **ERROR DE FASE DE ACELERACIÓN**  $\lim_{t \rightarrow \infty} \{\theta_e(t)\}$  a una variación parabólica de fase de entrada, es infinito (indeterminado) para todo PLL (o sintetizador) de Tipo 1.

5°.- B) El **ERROR DE FASE DE ACELERACIÓN**  $\lim_{t \rightarrow \infty} \{\theta_e(t)\}$  a una variación parabólica de fase de entrada, es finito y acotado para todo PLL (o sintetizador) de Tipo 2 y es nulo si el Tipo es 3 o superior.

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Permanente (16)

## Algunos ejemplos particulares (1)

- A modo de ejemplo, veamos cómo se aplica lo anterior analizado con las funciones  $H(s)$  y  $E(s)$  genéricas, a algunas de las ecuaciones específicas de los PLL y / o sintetizadores antes vistos:

### Ejemplo 1: Salto de Frecuencia en el PLL con filtro pasivo "phase-lag".

$$1^\circ.- \theta_r(t) = 2\pi \int_0^t \Delta f \cdot u(t) \cdot dt = 2\pi \cdot \Delta f \cdot t \cdot u(t) = \Delta\omega \cdot t \cdot u(t) \leftarrow \text{Rampa de fase}$$

$$2^\circ.- \theta_r(s) = L\{\theta_r(t)\} = L\{\Delta\omega \cdot t \cdot u(t)\} = \frac{\Delta\omega}{s^2}$$

$$3^\circ.- \theta_e(s) = E(s) \cdot \theta_r(s) = \left( \frac{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \right) \cdot \frac{\Delta\omega}{s^2}$$

$$4^\circ.- \boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_e(t)} = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot \theta_e(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \cdot \left( \frac{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \right) \cdot \frac{\Delta\omega}{s^2} \right] = \boxed{\frac{2 \cdot \zeta \cdot \Delta\omega}{\omega_n}} =$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{K} \cdot \tau}}{\sqrt{\frac{K}{\tau}}} \cdot \Delta\omega = \boxed{\frac{\Delta\omega}{K}} \text{ Que coincide con el resultado general y } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} f_e(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_e(t) \right]}{dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\theta_e(t)}{dt} \right\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d \left( \frac{2 \cdot \zeta \cdot \Delta\omega}{\omega_n} \right)}{dt} \right\} = \boxed{0} \text{ c.q.d.}$$

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Permanente (17)

## Algunos ejemplos particulares (2)

**Ejemplo 2: Salto de Frecuencia en el PLL con filtro activo "phase-lag".**

$$1^\circ.- \theta_r(t) = 2\pi \int_0^t \Delta f \cdot u(t) \cdot dt = 2\pi \cdot \Delta f \cdot t \cdot u(t) = \Delta\omega \cdot t \cdot u(t) \Leftrightarrow \text{Rampa de fase}$$

$$2^\circ.- \theta_r(s) = L\{\theta_r(t)\} = L\{\Delta\omega \cdot t \cdot u(t)\} = \frac{\Delta\omega}{s^2}$$

$$3^\circ.- \theta_e(s) = E(s) \cdot \theta_r(s) = \left( \frac{s^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \right) \cdot \frac{\Delta\omega}{s^2}$$

$$4^\circ.- \boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_e(t)} = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot \theta_e(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \cdot \left( \frac{s^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \right) \cdot \frac{\Delta\omega}{s^2} \right] = \boxed{0}$$

y por supuesto:

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} f_e(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_e(t) \right]}{dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\theta_e(t)}{dt} \right\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d(0)}{dt} \right\} = \boxed{0} \text{ c.q.d.} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  Sistema Enganchado.

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Permanente (18)

## Algunos ejemplos particulares (3)

**Ejemplo 3: Rampa de frecuencia en el sintetizador con filtro activo "phase-lag".**

$$1^\circ. - f_r(t) = R \cdot t \cdot u(t) \Rightarrow \theta_r(t) = 2\pi \cdot \int_0^t R \cdot t \cdot u(t) \cdot dt = \frac{2\pi \cdot R \cdot t^2}{2} \cdot u(t) = \frac{\Omega \cdot t^2}{2} \cdot u(t)$$

$$2^\circ. - \theta_r(s) = L\{\theta_r(t)\} = L\left\{\frac{\Omega \cdot t^2}{2} \cdot u(t)\right\} = \frac{\Omega}{s^3}$$

$$3^\circ. - \theta_e(s) = E(s) \cdot \theta_r(s) = \left(\frac{s^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}\right) \cdot \frac{\Omega}{s^3}$$

$$4^\circ. - \boxed{\Theta_e = \lim_{t \rightarrow \infty} \{\theta_e(t)\}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \{s \cdot \theta_e(s)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ s \cdot \left(\frac{s^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}\right) \cdot \frac{\Omega}{s^3} \right\} \rightarrow \boxed{\frac{\Omega}{\omega_n^2}}$$

y por supuesto:

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} f_e(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\left[\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_e(t)\right]}{dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\theta_e(t)}{dt} \right\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\left(\frac{\Omega}{\omega_n^2}\right)}{dt} \right\} = \boxed{0} \text{ c.q.d.} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  Sistema Enganchado.

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Permanente (19)

## Algunos ejemplos particulares (4)

**Ejemplo 3: Rampa de frecuencia en el sintetizador con filtro pasivo "lead-lag".**

$$1^\circ. - f_r(t) = R \cdot t \cdot u(t) \Rightarrow \theta_r(t) = 2\pi \cdot \int_0^t R \cdot t \cdot u(t) \cdot dt = \frac{2\pi \cdot R \cdot t^2}{2} \cdot u(t) = \frac{\Omega \cdot t^2}{2} \cdot u(t)$$

$$2^\circ. - \theta_r(s) = L\{\theta_r(t)\} = L\left\{\frac{\Omega \cdot t^2}{2} \cdot u(t)\right\} = \frac{\Omega}{s^3}$$

$$3^\circ. - \theta_e(s) = E(s) \cdot \theta_r(s) = \left( \frac{s^2 + s \cdot \left(\frac{\omega_n^2}{K}\right)}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \right) \cdot \frac{\Omega}{s^3}$$

$$4^\circ. - \boxed{\Theta_e = \lim_{t \rightarrow \infty} \{\theta_e(t)\}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \{s \cdot \theta_e(s)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ s \cdot \left( \frac{s^2 + s \cdot \left(\frac{\omega_n^2}{K}\right)}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \right) \cdot \frac{\Omega}{s^3} \right\} \rightarrow \boxed{\infty} \text{ y por otra parte:}$$

$$\boxed{\Psi_e = \lim_{t \rightarrow \infty} \{f_e(t)\}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \{s \cdot f_e(s)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ s \cdot \left( \frac{s^2 + s \cdot \left(\frac{\omega_n^2}{K}\right)}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \right) \cdot \frac{R}{s^2} \right\} = \frac{\left(\frac{\omega_n^2}{K}\right)}{\omega_n^2} \cdot R = \boxed{\frac{R}{K}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  Sistema desenganchado.

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Permanente (20)

Tabla Resumen del Comportamiento en Régimen Permanente (1)

Cambio de la señal de referencia	Expresión en el dominio del tiempo	Expresión en el dominio de Laplace
Salto de Fase	$\theta_r(t) = \Delta\theta \cdot u(t)$	$\frac{\Delta\theta}{s}$
Salto de Frecuencia = Rampa de Fase	$f_r(t) = \Delta f \cdot u(t)$ $\theta_r(t) = \Delta\omega \cdot t \cdot u(t)$	$\frac{\Delta f}{s}$ $\frac{\Delta\omega}{s^2}$
Rampa de Frecuencia = Parábola de Fase	$f_r(t) = R \cdot t \cdot u(t)$ $\theta_r(t) = \frac{\Omega}{2} \cdot t^2 \cdot u(t)$	$\frac{R}{s^2}$ $\frac{\Omega}{s^3}$

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Permanente (21)

Tabla Resumen del Comportamiento en Régimen Permanente (2)

F(s) del Filtro	Error al Salto de Fase	Error al Salto de Frecuencia	Error a la Rampa de Frecuencia
$F(s) = 1 ; \forall s$	$\theta_e(t \rightarrow \infty) = 0$ $f_e(t \rightarrow \infty) = 0$	$\theta_e(t \rightarrow \infty) = \frac{\Delta\omega}{K}$ $f_e(t \rightarrow \infty) = 0$	$\theta_e(t \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$ $f_e(t \rightarrow \infty) = \frac{R}{K}$
$F(s) = \frac{1}{1 + s \cdot \tau}$	$\theta_e(t \rightarrow \infty) = 0$ $f_e(t \rightarrow \infty) = 0$	$\theta_e(t \rightarrow \infty) = \frac{2 \cdot \zeta \cdot \Delta\omega}{\omega_n} = \frac{\Delta\omega}{K}$ $f_e(t \rightarrow \infty) = 0$	$\theta_e(t \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$ $f_e(t \rightarrow \infty) = \frac{2 \cdot \zeta \cdot R}{\omega_n} = \frac{R}{K}$
$F(s) = \frac{1 + s \cdot \tau_2}{1 + s \cdot \tau_1}$	$\theta_e(t \rightarrow \infty) = 0$ $f_e(t \rightarrow \infty) = 0$	$\theta_e(t \rightarrow \infty) = \frac{\Delta\omega}{K}$ $f_e(t \rightarrow \infty) = 0$	$\theta_e(t \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$ $f_e(t \rightarrow \infty) = \frac{R}{K}$
$F(s) = \frac{1 + s \cdot \tau_2}{s \cdot \tau_1}$	$\theta_e(t \rightarrow \infty) = 0$ $f_e(t \rightarrow \infty) = 0$	$\theta_e(t \rightarrow \infty) = 0$ $f_e(t \rightarrow \infty) = 0$	$\theta_e(t \rightarrow \infty) = \frac{\Omega}{\omega_n^2}$ $f_e(t \rightarrow \infty) = 0$

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio (1)

## Consideraciones Generales (1)

- El estudio del Régimen Transitorio permite conocer el valor del parámetro de interés en el estudio de PLL's y / o Sintetizadores Indirectos en cada instante de tiempo tras producirse cualquier tipo de cambio en la señal de excitación o referencia al sistema.
- Como ocurría en el caso del análisis del Régimen permanente, puede abordarse el estudio temporal del sistema a través de dos caminos diferentes:
  - Análisis trabajando exclusivamente en el dominio del tiempo resolviendo la ecuación diferencial que corresponda.
  - Análisis mixto combinando trabajo en el dominio del tiempo y en dominio transformado de Laplace.
- En general, el segundo método suele ser más sencillo de utilizar, aunque en algunos casos puede resultar más adecuado el primero si se desea especificar condiciones de contorno iniciales no nulas.
- Notemos que como confirmación de que los resultados obtenidos son correctos, puede utilizarse el hecho de que tomando el límite cuando el tiempo tiende a infinito, debemos obtener los mismos valores o expresiones que conseguimos en el análisis precedente que hicimos del régimen permanente.

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio (2)

## Consideraciones Generales (2) – Pasos del Desarrollo.

### A) Análisis en el Dominio Temporal.

- 1º.- Escribir el cambio experimentado en la señal de referencia (fase o frecuencia) en el dominio del tiempo.
- 2º.- Determinar la expresión de la EDO de la variable que interese conocer como respuesta del sistema, a partir de la  $H(s)$ ,  $E(s)$  o de otra función de transferencia específica de interés.
- 3º.- Resolver la EDO (solución homogénea y solución particular).
- 4º.- Analizar los resultados obtenidos.

### B) Análisis en el Dominio Transformado de Laplace.

- 1º.- Escribir el cambio experimentado en la señal de referencia (fase o frecuencia) en el dominio del tiempo.
- 2º.- Calcular la Transformada de Laplace de dicho cambio,
- 3º.- Aplicar dicha expresión a la Función de Transferencia  $H(s)$  o de Error  $E(s)$  o a cualquier otra de interés en cada caso concreto.
- 4º.- Hallar la Transformada Inversa de Laplace sobre la expresión precedente.
- 5º.- Analizar los resultados obtenidos.

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio (3)

## PLL y Sintetizador sin Filtro Paso Bajo: Tipo 1 – Orden 1 – Salto de Fase (1)

- Analicemos primero la fase de salida y partir de aquí veamos cómo podemos obtener otras variables de interés.

1°.-  $\theta_r(t) = \Delta\theta \cdot u(t)$  siendo  $u(t)$  la Función generalizada Escalón:  $u(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ 1 & \forall t \geq 0 \end{cases}$

2°.-  $\theta_r(s) = L\{\theta_r(t)\} = L\{\Delta\theta \cdot u(t)\} = \frac{\Delta\theta}{s}$

3°.-  $\theta_o(s) = H(s) \cdot \theta_r(s) \Big|_{F(s)=1} = \left( \frac{K}{s + \frac{K}{N}} \right) \cdot \frac{\Delta\theta}{s} = \frac{N \cdot K}{N \cdot s + K} \cdot \frac{\Delta\theta}{s}$

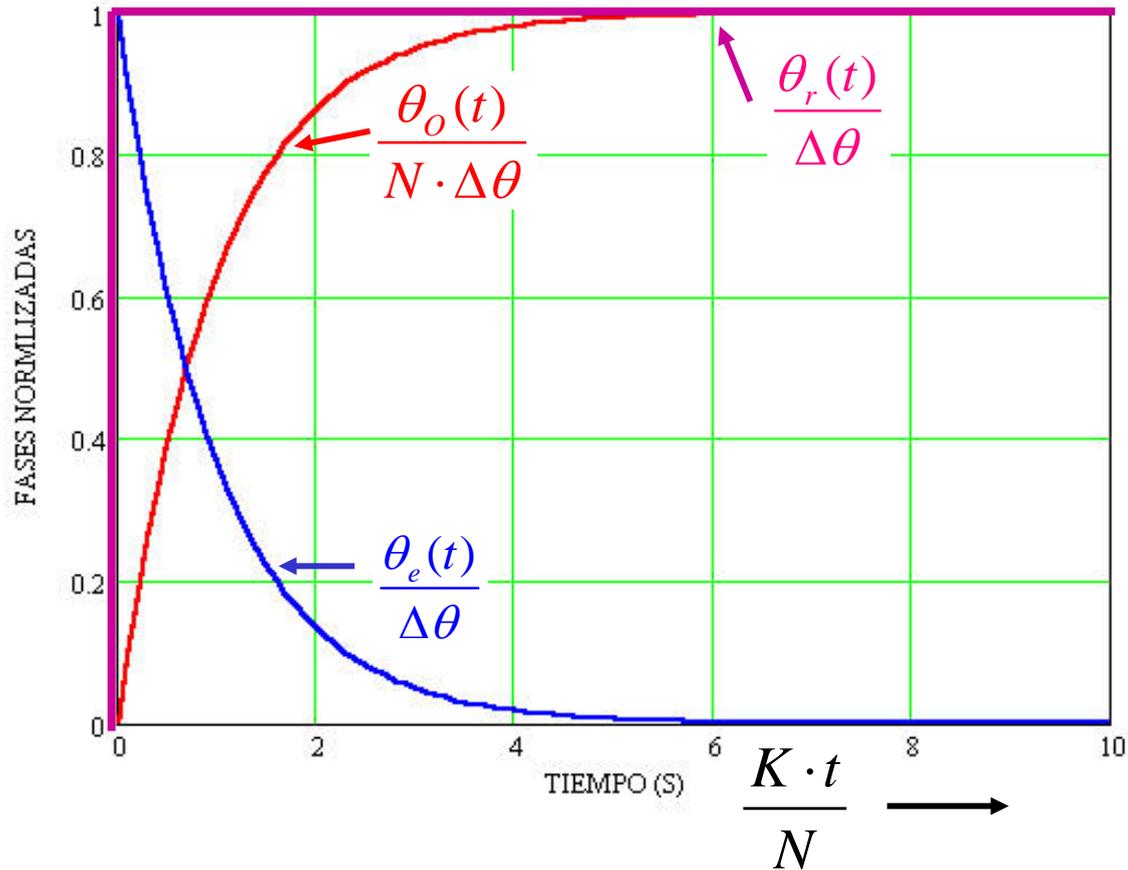
4°.-  $\boxed{\theta_o(t)} = L^{-1} \left\{ \frac{N \cdot K}{N \cdot s + K} \cdot \frac{\Delta\theta}{s} \right\} = \boxed{N \cdot \Delta\theta \cdot \left( 1 - e^{-\frac{K}{N}t} \right)}$

5°.- Como se observa, el límite cuando  $t \rightarrow \infty$ , se llega al resultado que ya conocíamos de antemano. Además, puede verse que el cociente  $N/K$  actúa como constante de tiempo sobre la exponencial.

- La representación gráfica de esta expresión normalizada es:

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio (4)

PLL y Sintetizador sin Filtro Paso Bajo: Tipo 1 – Orden 1 – Salto de Fase (2)



- Podemos aprovechar fácilmente el resultado obtenido para hallar la evolución de error de fases:

$$\boxed{\theta_e(t)} = \theta_r(t) - \frac{\theta_o(t)}{N} \Rightarrow \Delta\theta - \frac{N \cdot \Delta\theta}{N} \cdot \left(1 - e^{-\frac{K}{N} \cdot t}\right) = \boxed{\Delta\theta \cdot e^{-\frac{K}{N} \cdot t}}$$

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio (5)

## PLL y Sintetizador sin Filtro Paso Bajo: Tipo 1 – Orden 1 – Salto de Fase (3)

- Para analizar el efecto de la “constante de tiempo  $N / K$ ” sobre la velocidad de respuesta, observemos que para un tiempo igual a cinco veces dicho parámetro:

$$t = 5 \cdot \left( \frac{N}{K} \right) \Rightarrow \frac{\theta_0(t)}{N \cdot \Delta\theta} = 1 - e^{-5} = 0,993 \equiv 99,3 \% \text{ del valor final.}$$

- A partir de este resultado podemos concluir que el sistema realiza más rápidamente su régimen transitorio cuanto mayor sea el valor de su ganancia del lazo  $K$ . Esto es, cuanto más elevada sea la sensibilidad del comparador de fases empleado, y cuanto mayor sea la pendiente de la curva de sensibilidad del VCO. En la práctica, sin embargo no es muy aconsejable emplear un oscilador con muy alta  $K_v$ , puesto que entonces el sistema sería muy sensible a cualquier ruido presente en la señal de control del VCO, lo que incrementaría el ruido de fase de la salida total generada.

- También parece evidente que la velocidad de extinción del estado transitorio resulta diferente de unos canales sintetizados a otros. En concreto, el Sintetizador sin filtro resulta más lento operando en los canales más altos.

- Para darnos una idea del orden de valores razonables de la velocidad de respuesta, calculemos el tiempo que tardaría un PLL en alcanzar el 99,3 % de su valor final en un salto instantáneo de fase en la entrada, que podemos considerar como un criterio razonable para estimar el plazo que dura el régimen transitorio, en un sistema típico con un comparador de fases de  $K_d = 5 / \pi$  (v/rad), y un VCO de sensibilidad  $K_v = 1 \text{ MHz} / \text{V}$ . Tendremos:

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio (6)

## PLL y Sintetizador sin Filtro Paso Bajo: Tipo 1 – Orden 1 – Salto de Fase (4)

$$K = 2\pi \cdot K_d \cdot K_v = 2\pi \cdot \frac{5}{\pi} \cdot 10^6 = 10^7 (s^{-1}) \Rightarrow \frac{5}{K} = 0,5 (\mu s)$$

-Calculemos ahora lo concerniente al comportamiento de la frecuencia de salida y del error de frecuencia. Para obtener las expresiones correspondientes tenemos varios caminos alternativos, pero quizás el más rápido y sencillo es recordar la relación existente entre la fase y frecuencia de una señal:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} \Leftrightarrow f(s) = \frac{s \cdot \theta(s)}{2\pi}$$

- De aquí:

$$\boxed{f_o(t)} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\theta_o(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d \left\{ N \cdot \Delta\theta \cdot \left( 1 - e^{-\frac{K}{N}t} \right) \right\}}{dt} = \frac{\Delta\theta \cdot K \cdot e^{-\frac{K}{N}t}}{2\pi}$$

$$\boxed{f_e(t)} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\theta_e(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d \left\{ \Delta\theta \cdot e^{-\frac{K}{N}t} \right\}}{dt} = \frac{\Delta\theta \cdot K \cdot e^{-\frac{K}{N}t}}{2\pi \cdot N}$$

-Es evidente que en régimen permanente no quedará error remanente alguno de frecuencia, como ya sabíamos de antemano.

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio (7)

## PLL y Sintetizador sin Filtro Paso Bajo: Tipo 1 – Orden 1 – Salto de Frecuencia (1)

- Una forma rápida de trabajar, es siguiendo la misma ruta que hemos realizado en el caso anterior:

$$1^\circ, 2^\circ \text{ y } 3^\circ: \theta_o(s) = H(s) \cdot \theta_r(s) \Big|_{F(s)=1} = \Big|_{\Delta\omega=2\pi \cdot \Delta f} = \left( \frac{K}{s + \frac{K}{N}} \right) \cdot \frac{\Delta\omega}{s^2} = \frac{N \cdot K}{N \cdot s + K} \cdot \frac{\Delta\omega}{s^2} \Rightarrow$$

$$4^\circ. - \boxed{\theta_o(t)} = L^{-1} \left\{ \frac{N \cdot K}{N \cdot s + K} \cdot \frac{\Delta\omega}{s^2} \right\} = \frac{N^2 \cdot \Delta\omega}{K} \cdot \left( e^{-\frac{K}{N} \cdot t} - 1 \right) + N \cdot \Delta\omega \cdot t$$

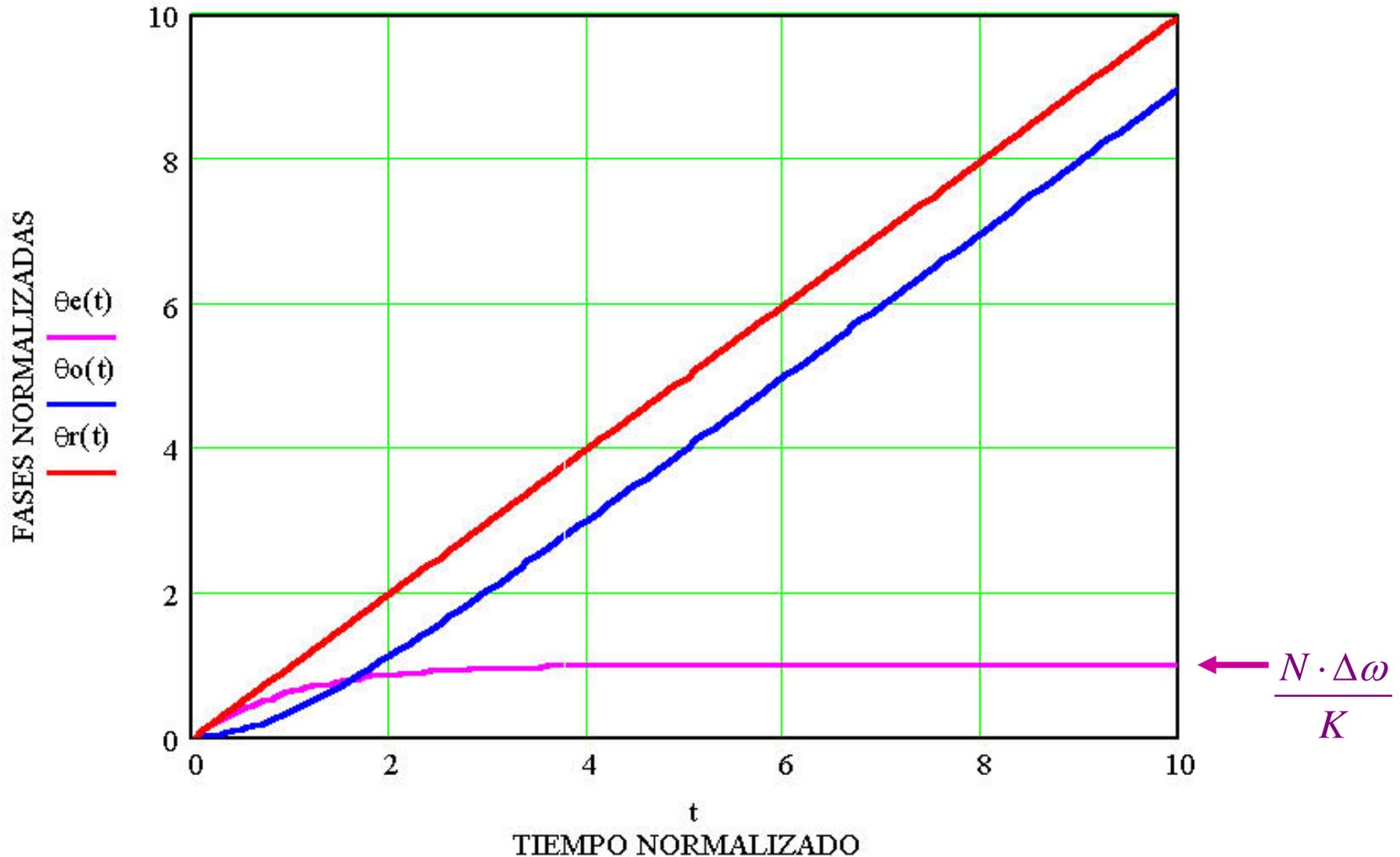
y respecto al error de fase:

$$1^\circ, 2^\circ \text{ y } 3^\circ: \theta_e(s) = E(s) \cdot \theta_r(s) \Big|_{F(s)=1} = \Big|_{\Delta\omega=2\pi \cdot \Delta f} = \left( \frac{s}{s + \frac{K}{N}} \right) \cdot \frac{\Delta\omega}{s^2} = \frac{N \cdot s}{N \cdot s + K} \cdot \frac{\Delta\omega}{s^2} \Rightarrow$$

$$4^\circ. - \boxed{\theta_e(t)} = L^{-1} \left\{ \frac{N \cdot s}{N \cdot s + K} \cdot \frac{\Delta\omega}{s^2} \right\} = \frac{N \cdot \Delta\omega}{K} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{K}{N} \cdot t} \right)$$

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio (8)

PLL y Sintetizador sin Filtro Paso Bajo: Tipo 1 – Orden 1 – Salto de Frecuencia (2)



# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio (9)

## PLL y Sintetizador sin Filtro Paso Bajo: Tipo 1 – Orden 1 – Salto de Frecuencia (3)

- Es claro que se verifica (como debería ser) que:

$$\begin{aligned}\theta_e(t) &= \theta_r(t) - \frac{\theta_o(t)}{N} = \Delta\omega \cdot t - \frac{1}{N} \cdot \left\{ \frac{N^2 \cdot \Delta\omega}{K} \cdot \left( e^{-\frac{K}{N}t} - 1 \right) + N \cdot \Delta\omega \cdot t \right\} = \\ &= \frac{N \cdot \Delta\omega}{K} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{K}{N}t} \right) \text{ y que: } \lim_{t \rightarrow \infty} [\theta_e(t)] = \frac{N \cdot \Delta\omega}{K} \text{ como ya sabíamos.}\end{aligned}$$

- Y en lo que respecta a las frecuencias:

$$\boxed{f_o(t)} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\theta_o(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d \left\{ \frac{N^2 \cdot \Delta\omega}{K} \cdot \left( e^{-\frac{K}{N}t} - 1 \right) + N \cdot \Delta\omega \cdot t \right\}}{dt} = \boxed{\frac{N \cdot \Delta\omega}{2\pi} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{K}{N}t} \right)}$$

$$\boxed{f_e(t)} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\theta_e(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d \left\{ \frac{N \cdot \Delta\omega}{K} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{K}{N}t} \right) \right\}}{dt} = \boxed{\frac{\Delta\omega}{2\pi} \cdot \left( e^{-\frac{K}{N}t} \right)}$$

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio (10)

## PLL y Sintetizador sin Filtro Paso Bajo: Tipo 1 – Orden 1 – Salto de Frecuencia (4)

- Notemos que el error de frecuencia va desapareciendo paulatinamente conforme va avanzando el tiempo, hasta anularse por completo en el régimen permanente.

- Por lo que se refiere a la evolución del término variable de la frecuencia de salida observamos que tiende a un valor asintótico dado por:

$$f_o(t) = \frac{N \cdot \Delta\omega}{2\pi} = \frac{N \cdot 2\pi \cdot \Delta f}{2\pi} = N \cdot \Delta f$$

- que es justamente el resultado que esperábamos: el incremento de la frecuencia de entrada se ha incrementado **N veces** en la salida. Por lo tanto el sistema queda perfectamente “enganchado”.

- Una última observación es importante de resaltar: las expresiones de las variaciones temporales del incremento de frecuencia de salida y del error de frecuencia en el caso de un incremento brusco de la frecuencia de entrada, son – salvo factor de escala – totalmente similares a las del incremento de fase y error de fase, respectivamente, en el supuesto de un salto instantáneo de fase de la señal de referencia. Esto es consecuencia de la similitud de las expresiones correspondientes a las funciones de transferencia de frecuencias y de fases, así como de las que gobiernan los errores de frecuencia y de fase.

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio (11)

## PLL y Sintetizador sin Filtro Paso Bajo: Tipo 1 – Orden 1 – Rampa de Frecuencia (1)

- Nuevamente seguimos el procedimiento estándar:

$$1^\circ, 2^\circ \text{ y } 3^\circ: \theta_o(s) = H(s) \cdot \theta_r(s) \Big|_{F(s)=1} = \Big|_{\substack{f_r(t)=R \cdot t \cdot u(t) \\ \Omega=2\pi \cdot R}} = \left( \frac{K}{s + \frac{K}{N}} \right) \cdot \frac{\Omega}{s^3} = \frac{N \cdot K}{N \cdot s + K} \cdot \frac{\Omega}{s^3} \Rightarrow$$

$$4^\circ. - \boxed{\theta_o(t)} = L^{-1} \left\{ \frac{N \cdot K}{N \cdot s + K} \cdot \frac{\Omega}{s^3} \right\} = \boxed{\frac{\Omega \cdot N^3}{K^2} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{K}{N}t} \right) + \frac{\Omega \cdot N}{2} \cdot t^2 - \frac{\Omega \cdot N^2}{K} \cdot t}$$

siendo el error de fase:

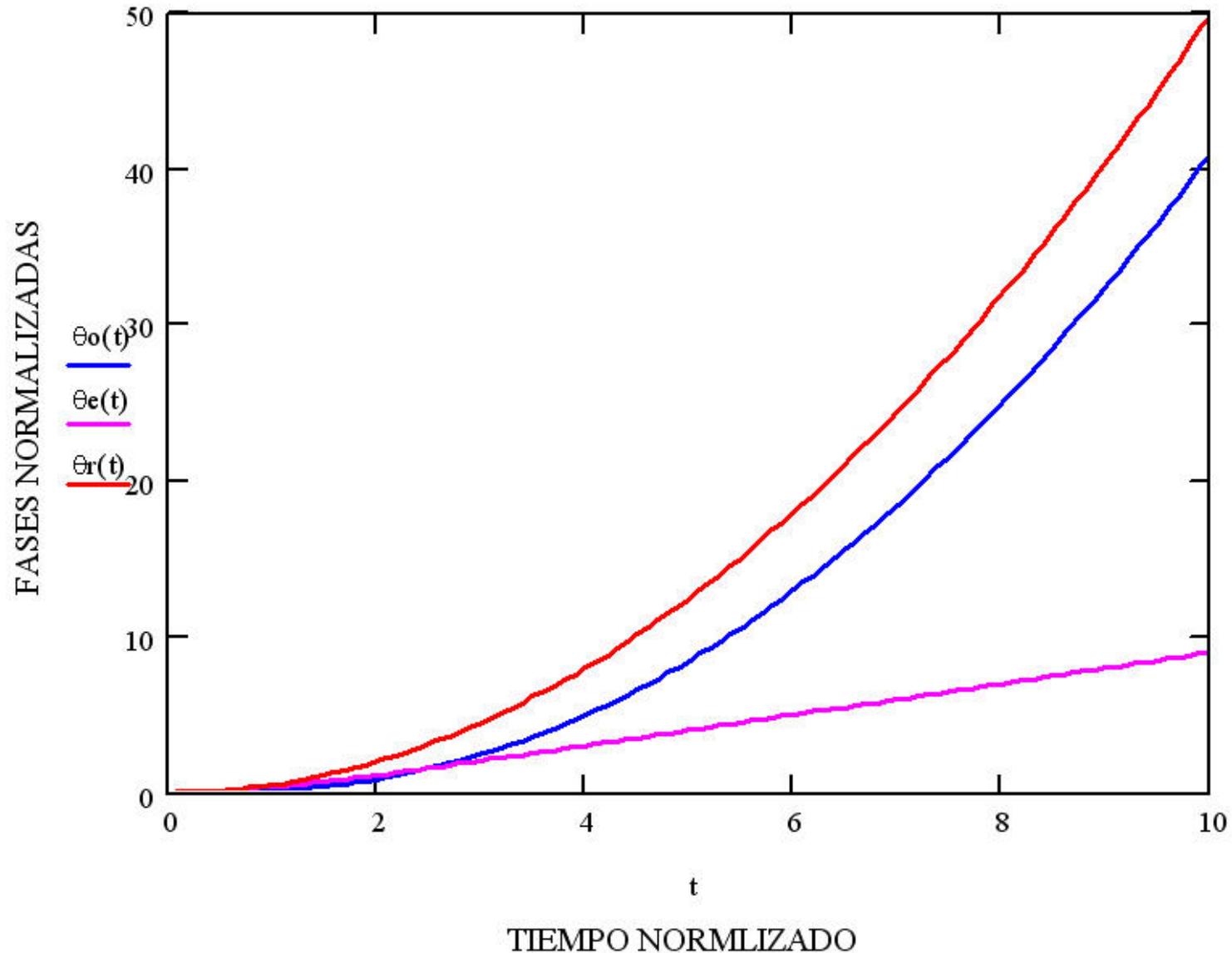
$$1^\circ, 2^\circ \text{ y } 3^\circ: \theta_e(s) = E(s) \cdot \theta_r(s) \Big|_{F(s)=1} = \Big|_{\substack{f_r(t)=R \cdot t \cdot u(t) \\ \Omega=2\pi \cdot R}} = \left( \frac{s}{s + \frac{K}{N}} \right) \cdot \frac{\Omega}{s^3} = \frac{N \cdot s}{N \cdot s + K} \cdot \frac{\Omega}{s^3} \Rightarrow$$

$$4^\circ. - \boxed{\theta_e(t)} = L^{-1} \left\{ \frac{N \cdot s}{N \cdot s + K} \cdot \frac{\Omega}{s^3} \right\} = \boxed{\frac{\Omega \cdot N^2}{K^2} \cdot \left( e^{-\frac{K}{N}t} - 1 \right) + \frac{\Omega \cdot N}{K} \cdot t}$$

cuyas representaciones son:

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio (12)

PLL y Sintetizador sin Filtro Paso Bajo: Tipo 1 – Orden 1 – Rampa de Frecuencia (2)



# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio (13)

## PLL y Sintetizador sin Filtro Paso Bajo: Tipo 1 – Orden 1 – Rampa de Frecuencia (3)

- A la vista de las gráficas precedentes es fácil apreciar que el error de fase del sistema se va incrementando ilimitadamente conforme aumenta el tiempo, por lo que no se llegará a ninguna situación estable en régimen permanente.
- Aunque matemáticamente el error tiende a infinito, en la práctica lo que ocurre es que cuando el mismo supere el margen no-ambiguo del comparador de fases utilizado, el PLL o Sintetizador prácticamente se desenganchará pudiendo entrar incluso en un régimen no-lineal de trabajo.
- A partir de estas conclusiones se entiende que este sistema no deba utilizarse en aquellas situaciones en las que la excitación de entrada puede variar en la forma de **rampa de frecuencia** (o lo que es equivalente: **variación cuadrática o parabólica de fase**).
- Esto ocurre, tal como ya sabíamos del estudio del régimen permanente cuando el sistema es de Tipo 1, incluya o no filtro paso-bajo entre el comparador de fases y el VCO.
- En cuanto al comportamiento de las frecuencias implicadas en el proceso transitorio, podemos intuir que, gracias al paralelismo anteriormente comentado, el comportamiento de las frecuencias en este sistema frente a una variación lineal de la frecuencia de entrada, deberá ser homólogo al que correspondía al que mostraban las fases cuando la excitación de entrada variaba en forma de rampa de fase, que es lo que se tiene con un salto en escalón de frecuencia. En efecto:

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio (14)

PLL y Sintetizador sin Filtro Paso Bajo: Tipo 1 – Orden 1 – Rampa de Frecuencia (4)

$$\boxed{f_o(t)} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\theta_o(t)}{dt} = L^{-1}[f_o(s)] = L^{-1}[H(s) \cdot f_r(s)] = L^{-1} \left[ \frac{K}{s + \frac{K}{N}} \cdot \frac{R}{s^2} \right] = \frac{R \cdot N^2}{K} \cdot \left( e^{-\frac{K}{N}t} - 1 \right) + R \cdot N \cdot t$$

y también:

$$\boxed{f_e(t)} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\theta_e(t)}{dt} = L^{-1}[f_e(s)] = L^{-1}[E(s) \cdot f_r(s)] = L^{-1} \left[ \frac{s}{s + \frac{K}{N}} \cdot \frac{R}{s^2} \right] = \frac{R \cdot N}{K} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{K}{N}t} \right)$$

que, como preveíamos, formalmente tienen el mismo aspecto que las fases frente a una rampa de fase en la referencia. Con lo que las gráficas de entonces son perfectamente utilizables sin más que **cambiar en el eje de ordenadas las fases normalizadas por las frecuencias normalizadas para el caso presente.**

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio (15)

## PLL y Sintetizador con Filtro Paso Bajo pasivo "phase-lag": Tipo 1 – Orden 2 – Salto de Fase (1)

- Como el sistema que ahora nos ocupa sigue siendo del mismo Tipo que el previamente estudiado, ya sabemos que su comportamiento en Régimen Permanente será exactamente el mismo. Sin embargo ahora, como tenemos dos parámetros en juego: factor de amortiguamiento y pulsación natural no-amortiguada y al ser un sistema de Orden 2, es de prever que su comportamiento transitorio será mucho más rico y sofisticado.

- Siguiendo los pasos de cálculo conocidos, tendremos:

$$1^\circ, 2^\circ \text{ y } 3^\circ: \theta_o(s) = H(s) \cdot \theta_r(s) \Big|_{F(s)=\frac{1}{1+s\tau}} = \left( \frac{N \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \right) \cdot \frac{\Delta\theta}{s} \Rightarrow 4^\circ. - \boxed{\theta_o(t)} = L^{-1} [\theta_o(s)] =$$

$$= \begin{cases} N \cdot \Delta\theta \left[ 1 - e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \left\{ \cosh(\omega_n \cdot \sqrt{\zeta^2 - 1} \cdot t) + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \cdot \sinh(\omega_n \cdot \sqrt{\zeta^2 - 1} \cdot t) \right\} \right]; \forall \zeta > 1 \\ N \cdot \Delta\theta \left[ 1 - e^{-\omega_n \cdot t} \cdot (1 + \omega_n \cdot t) \right]; \zeta = 1 \\ N \cdot \Delta\theta \left[ 1 - e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \left\{ \cos(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \cdot t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cdot \sen(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \cdot t) \right\} \right]; \forall \zeta < 1 \end{cases}$$

- Tal como se aprecia, el valor del factor de amortiguamiento hace que el sistema tenga un comportamiento netamente distinto, según se tenga un sistema **SUBAMORTIGUADO ( $\zeta < 1$ )**, con **AMORTIGUAMIENTO CRÍTICO ( $\zeta = 1$ )** o que sea **SOBREAMORTIGUADO ( $\zeta > 1$ )**.

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio (16)

## PLL y Sintetizador con Filtro Paso Bajo pasivo “phase-lag”: Tipo 1 – Orden 2 – Salto de Fase (2)

- Para estudiar los diferentes comportamientos, es preciso recurrir a las correspondientes representaciones gráficas, ahora bien, a la vista de las ecuaciones anteriores, es preciso hacer unas ciertas consideraciones previas.

- Si contabilizamos las diferentes variables independientes que condicionan la evolución de la respuesta, nos encontramos que son: tiempo, factor de amortiguamiento, pulsación natural no-amortiguada, valor del salto de frecuencia y, por último, valor del divisor programable del lazo. Como obviamente, es imposible representar en una gráfica bidimensional todas estas variables, es preciso recurrir a recurrir a alguna estrategia adecuada.

- El procedimiento que vamos a seguir es el siguiente: reuniremos en una nueva variable el producto de la variable tiempo y de la pulsación no-amortiguada, y será la variable del **eje de abcisas**:

$$\omega_n \cdot t \left( \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot \text{s} \right) = \text{TIEMPO ANGULAR (rad)}$$

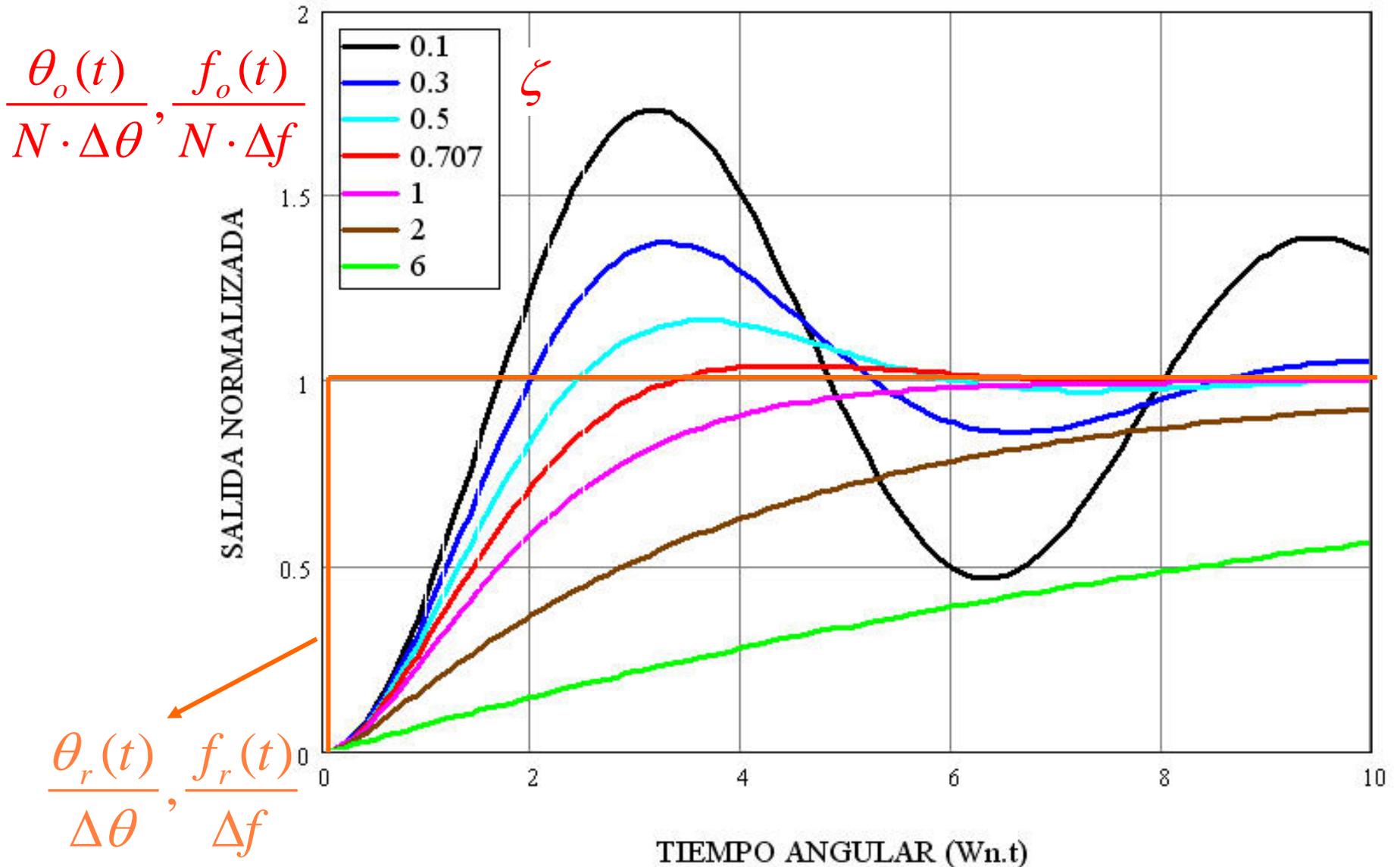
- En el **eje de ordenadas** pondremos el valor de la fase de salida normalizada con respecto al salto de la fase de la entrada multiplicador por el valor del divisor programable:

$$\frac{\theta_o(t)}{N \cdot \Delta\theta}$$

- Por último, los diferentes valores del factor de amortiguamiento nos servirán como parámetro para trazar diferentes curvas, una para cada valor individual de  $\zeta$ , con esto tendremos:

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio (17)

PLL y Sintetizador con Filtro Paso Bajo pasivo "phase-lag": Tipo 1 - Orden 2 - Salto de Fase (3)



# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio (18)

## PLL y Sintetizador con Filtro Paso Bajo pasivo "phase-lag": Tipo 1 – Orden 2 – Salto de Fase (4)

- Observaciones:

- Todas las curvas tienden asintóticamente a la ordenada unidad lo que indica que en régimen permanente, para todo valor de  $\zeta$ , se alcanza una situación de:

$$\theta_o(t \rightarrow \infty) = N \Delta \theta = N \cdot \theta_r(0^+)$$

que es lo que cabía esperar.

-Todas las curvas se encuentran ponderadas por el efecto de una envolvente exponencial decreciente dada por:

$$\exp(-\zeta \cdot \omega_n \cdot t)$$

-Según esto, cuanto mayor sea la pulsación natural no-amortiguada, más rápido se tiende alcanzar la ordenada del régimen permanente.

- El valor del factor de amortiguamiento que sirve de frontera entre comportamiento transitorio oscilatorio o no es  $\zeta = 1$ . (Recordamos que en el estudio de las funciones de transferencia, era un valor de 0,707 el que determinaba si existía o no sobreimpulso en dichas curvas). Además, valores próximos a  $\zeta = 1$  (por encima y por debajo) , parecen indicar velocidades de respuesta más rápidas que  $\zeta$  muy superiores o inferiores a la unidad.

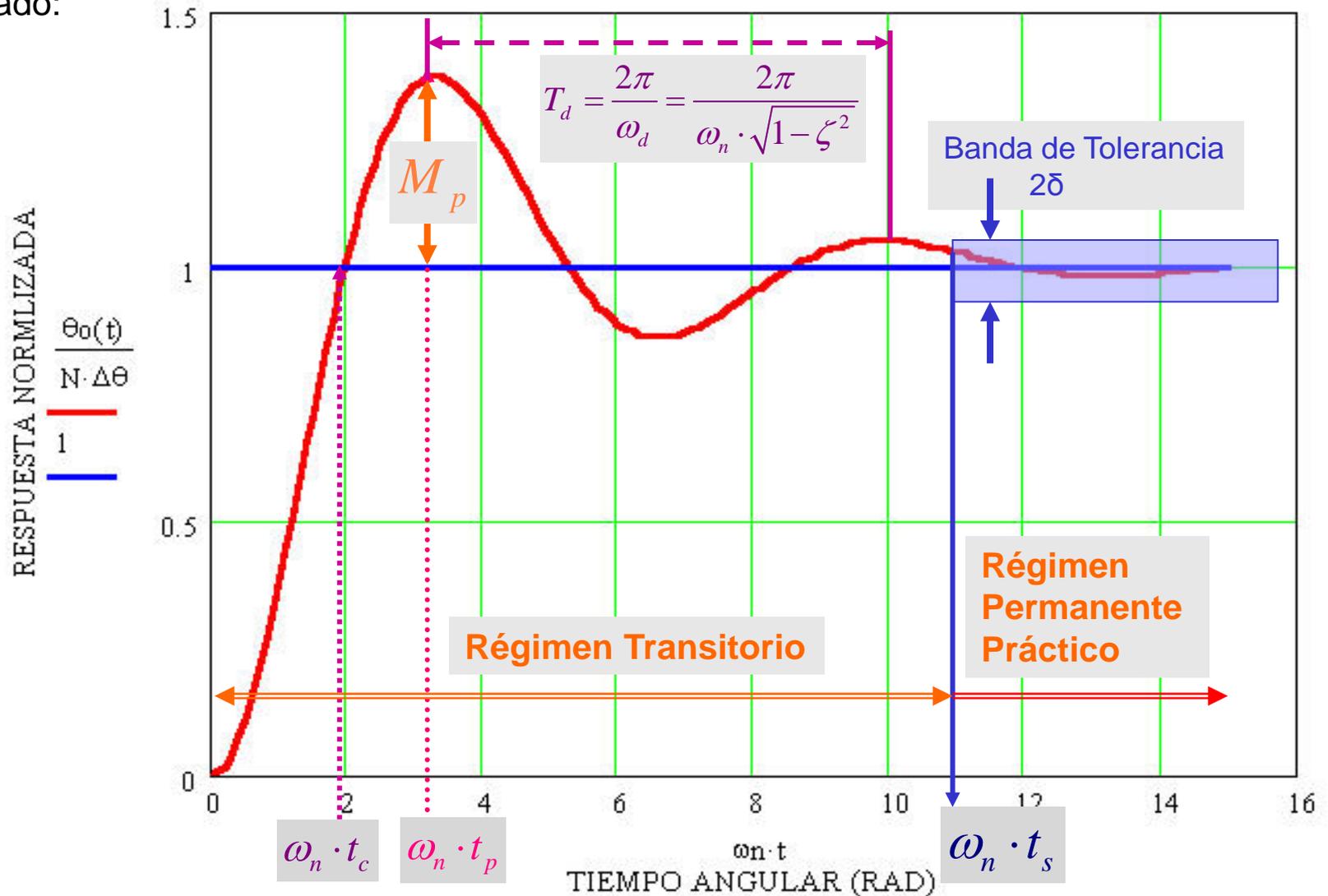
- Como se ha repetido en otras ocasiones, este juego de curvas sirven también para reflejar el estudio de la respuesta de la frecuencia de salida frente a una excitación correspondiente a un salto de frecuencia instantáneo.

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio (19)

PLL y Sintetizador con Filtro Paso Bajo pasivo "phase-lag": Tipo 1 – Orden 2 – Salto de Fase (5)

## Estudio particular de los Sistemas Subamortiguados (1).

- Estudiemos los aspectos reseñables en una curva genérica correspondiente a un sistema subamortiguado:



# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio (20)

PLL y Sintetizador con Filtro Paso Bajo pasivo "phase-lag": Tipo 1 – Orden 2 – Salto de Fase (6)

## Estudio particular de los Sistemas Subamortiguados (2).

- Para estudiar los elementos significativos de esta respuesta transitoria, reescribamos la ecuación correspondiente de la respuesta normalizada, en una forma alternativa más clarificadora (véase Apéndice B):

$$\left. \frac{\theta_o(t)}{N \cdot \Delta\theta} \right|_{\zeta < 1} = 1 - e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \left[ \cos\left(\omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2} \cdot t\right) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \text{sen}\left(\omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2} \cdot t\right) \right] \equiv$$
$$\equiv 1 - \frac{e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \text{sen}\left(\omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2} \cdot t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

- Por consiguiente tenemos una evolución oscilatoria (amortiguada) de período:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2}} ; \text{ Con } \boxed{\omega_d = \text{Pulsación Natural Amortiguada}} ; \text{ Obviamente } \omega_d < \omega_n$$

**-Tiempo angular de Subida (o Cruce):** Es el tiempo necesario para que la respuesta pase del 0% al 100 % de su valor final, por primera vez.

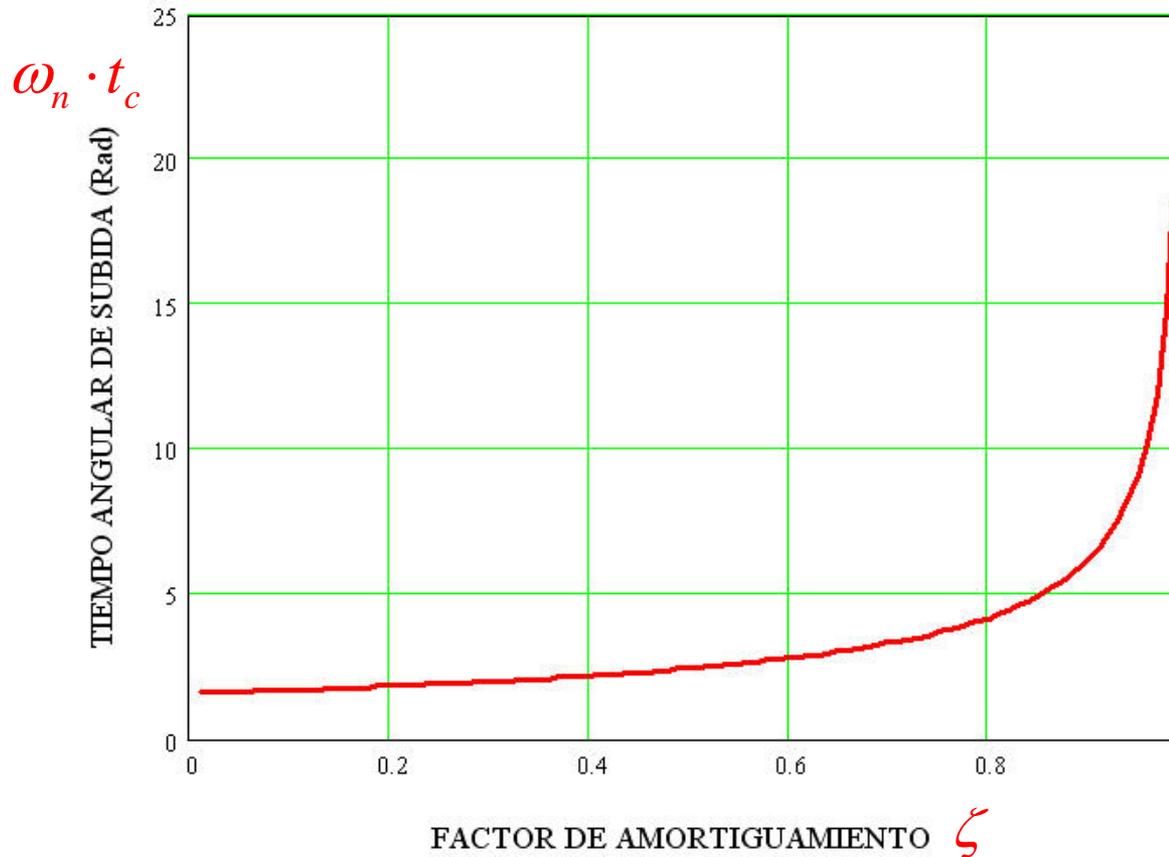
$$\text{Es claro que para } \omega_n \cdot t_c \Rightarrow \frac{\theta_o(\omega_n \cdot t_c)}{N \cdot \Delta\theta} = 1 \Rightarrow \frac{e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \text{sen}\left(\omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2} \cdot t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2} \cdot t_c + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \pi \Rightarrow \boxed{\omega_n \cdot t_c = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right)}$$

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio (21)

PLL y Sintetizador con Filtro Paso Bajo pasivo "phase-lag": Tipo 1 – Orden 2 – Salto de Fase (7)

Estudio particular de los Sistemas Subamortiguados (3).



- A la vista de la figura resulta claro que:
- Cuanto menos amortiguado esté el sistema, más rápido evoluciona los primeros instantes de tiempo.
- Interesa que la pulsación natural no-amortiguada sea lo más alta posible para minimizar el valor del tiempo (en unidades convencionales) de cruce.

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio (22)

PLL y Sintetizador con Filtro Paso Bajo pasivo "phase-lag": Tipo 1 – Orden 2 – Salto de Fase (8)

## Estudio particular de los Sistemas Subamortiguados (4).

**-Tiempo angular de Pico:** *Es el tiempo invertido por la respuesta para alcanzar el primer sobreimpulso (overshoot).*

- Este tiempo es significativo puesto que en él, es donde más se aleja transitoriamente el sistema de su respuesta asintótica final.

- Para hallarlo, buscamos el instante en que se produce un máximo de la respuesta, por lo tanto:

$$\left. \frac{d\theta_o(t)}{d(\omega_n \cdot t)} \right|_{t=t_p} \equiv 0 = \frac{e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \left[ -\zeta \cdot \operatorname{sen} \left( \omega_n \cdot t_p \cdot \sqrt{1-\zeta^2} + \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \right) + \sqrt{1-\zeta^2} \cdot \cos \left( \omega_n \cdot t_p \cdot \sqrt{1-\zeta^2} + \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \right) \right]$$

$$\Rightarrow \zeta \cdot \operatorname{sen} \left( \omega_n \cdot t_p \cdot \sqrt{1-\zeta^2} + \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \right) = \sqrt{1-\zeta^2} \cdot \cos \left( \omega_n \cdot t_p \cdot \sqrt{1-\zeta^2} + \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \right) \Rightarrow$$

$$\tan \left( \omega_n \cdot t_p \cdot \sqrt{1-\zeta^2} + \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \right) = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \Rightarrow \omega_n \cdot t_p \cdot \sqrt{1-\zeta^2} = \pi \Rightarrow \boxed{t_p = \frac{\pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{T_d}{2}}$$

- Es decir, el máximo sobreimpulso se produce transcurrido medio periodo del ciclo de la oscilación amortiguada.

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio (23)

PLL y Sintetizador con Filtro Paso Bajo pasivo "phase-lag": Tipo 1 – Orden 2 – Salto de Fase (9)

## Estudio particular de los Sistemas Subamortiguados (5).

**-Sobreimpulso ("Overshoot"):** Es el máximo valor que la respuesta transitoria excede respecto del valor final en régimen permanente.

- Es claro que este sobreimpulso se produce justo en el instante de pico que acabamos de calcular, por lo tanto:

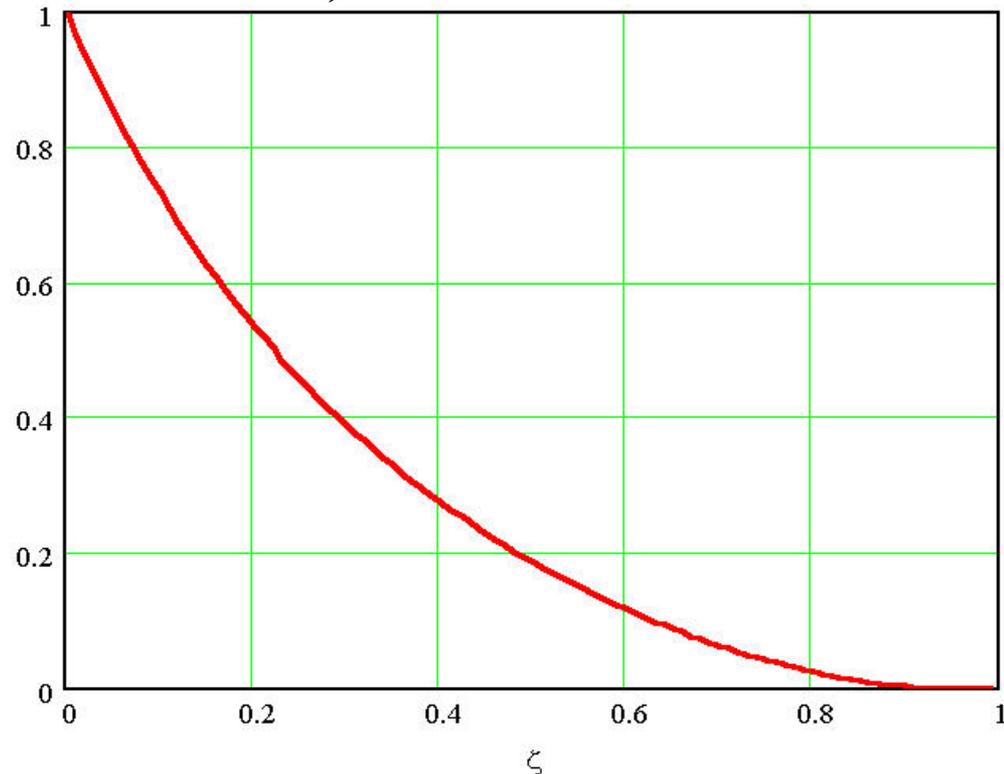
$$M_p = \frac{\theta_o(t)}{N \cdot \Delta\theta} \Big|_{t=t_p} - 1 = -\frac{e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \text{sen} \left( \omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2} \cdot t_p + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) =$$

$$= -\frac{e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \text{sen} \left( \pi + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  Puesto que, por definición, en el tiempo de pico el seno alcanza su máximo valor  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow M_p = \frac{e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{e^{\frac{-\zeta \cdot \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$M_p(\zeta)$



# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio (24)

PLL y Sintetizador con Filtro Paso Bajo pasivo “phase-lag”: Tipo 1 – Orden 2 – Salto de Fase (10)

## Estudio particular de los Sistemas Subamortiguados (6).

-Tiempo de Establecimiento (o de Asentamiento) (“Settling Time”): *Es el tiempo necesario para que la respuesta transitoria, alcance y permanezca dentro de una banda de amplitud determinada alrededor del valor final en régimen permanente.*

- Es el tiempo que de manera “práctica” permite delimitar la frontera en la que termina el régimen transitorio y empieza el régimen permanente.

- La banda que delimita el comienzo del régimen permanente, de anchura  $2\delta$ , se fija de forma “arbitraria” por el diseñador, y suele tener valores típicos del 2 % (0,02), 5% (0,05) o 10% (0,1), según se necesite más o menos rigurosamente que se haya extinguido la respuesta transitoria..

- Dicho en otros términos, el régimen permanente práctico comienza en el punto donde se verifica que:

$$1 - \delta \leq \frac{\theta_o(\omega_n \cdot t_s)}{N \cdot \Delta\theta} \leq 1 + \delta$$

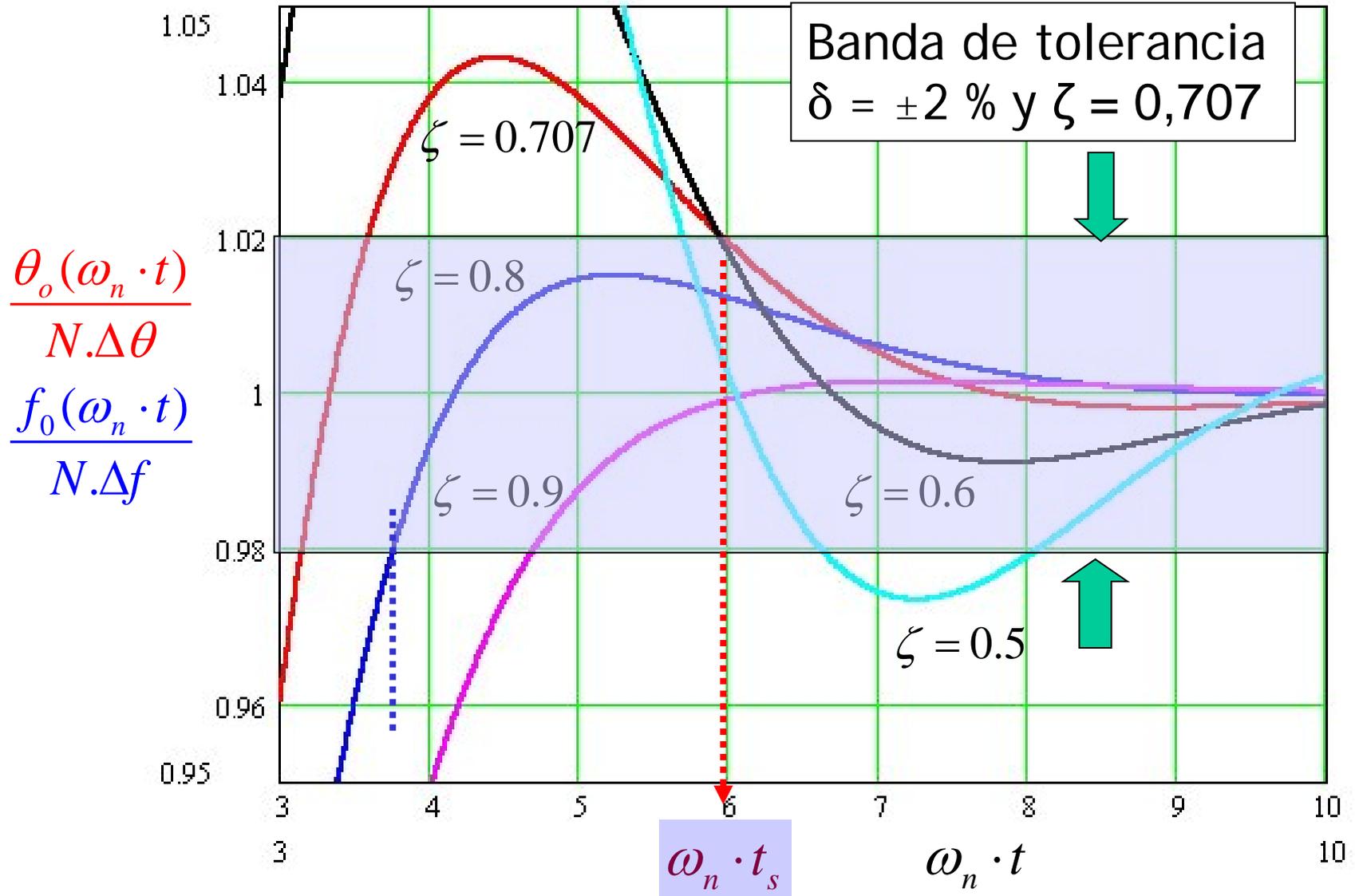
Por consiguiente:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Para } \boxed{\omega_n \cdot t < \omega_n \cdot t_s \Rightarrow \text{Régimen Transitorio}} \\ \text{Para } \boxed{\omega_n \cdot t \geq \omega_n \cdot t_s \Rightarrow \text{Régimen Permanente}} \end{array} \right.$

- El tiempo de establecimiento se puede obtener de manera gráfica o bien calcularlo de forma teórica:

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio (25)

PLL y Sintetizador con Filtro Paso Bajo pasivo "phase-lag": Tipo 1 - Orden 2 - Salto de Fase (11)

Estudio particular de los Sistemas Subamortiguados (7).



# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio (26)

PLL y Sintetizador con Filtro Paso Bajo pasivo "phase-lag": Tipo 1 – Orden 2 – Salto de Fase (12)

## Estudio particular de los Sistemas Subamortiguados (8).

- De forma analítica, podemos razonar que la respuesta transitoria viene acotada por sendas curvas envolventes dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Envolvente Superior: } 1 + \frac{e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1 + \frac{e^{-\left(\frac{t}{T}\right)}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1 + \delta(T, t) \\ \text{Envolvente Inferior: } 1 - \frac{e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1 - \frac{e^{-\left(\frac{t}{T}\right)}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1 - \delta(T, t) \end{array} \right. \quad \text{Con } \boxed{T = \frac{1}{\zeta \cdot \omega_n}}$$

- La nueva variable **T** hace el papel de "constante de tiempo" que determina la velocidad de caída de la respuesta transitoria.

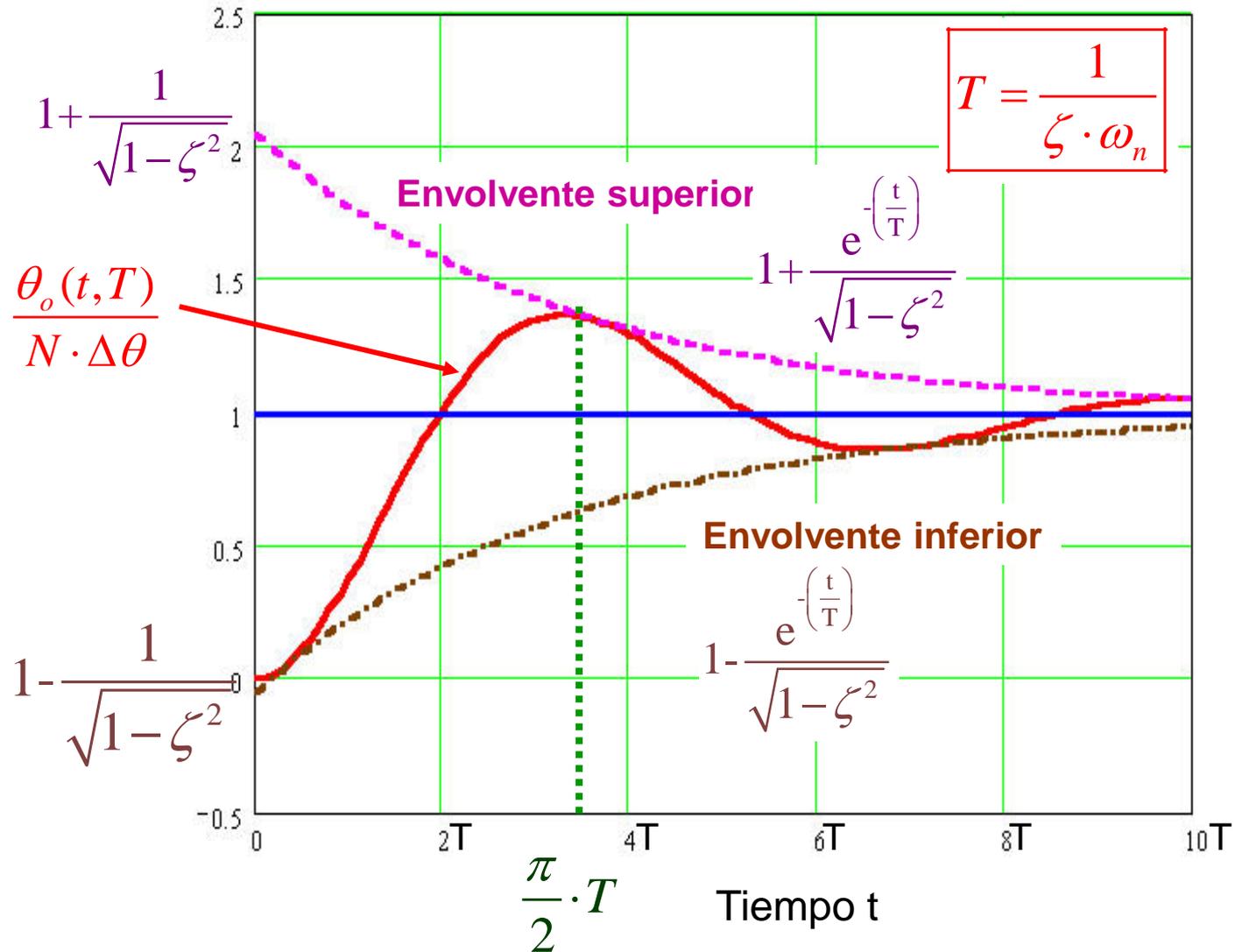
$$\text{De } \delta(T, t) = \frac{e^{-\left(\frac{t}{T}\right)}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \text{Para } t \geq t_s \Rightarrow \boxed{t_s = -T \cdot \ln \left[ \delta(T, t_s) \cdot \sqrt{1-\zeta^2} \right]}$$

- Que representado queda:

# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio (27)

PLL y Sintetizador con Filtro Paso Bajo pasivo "phase-lag": Tipo 1 - Orden 2 - Salto de Fase (13)

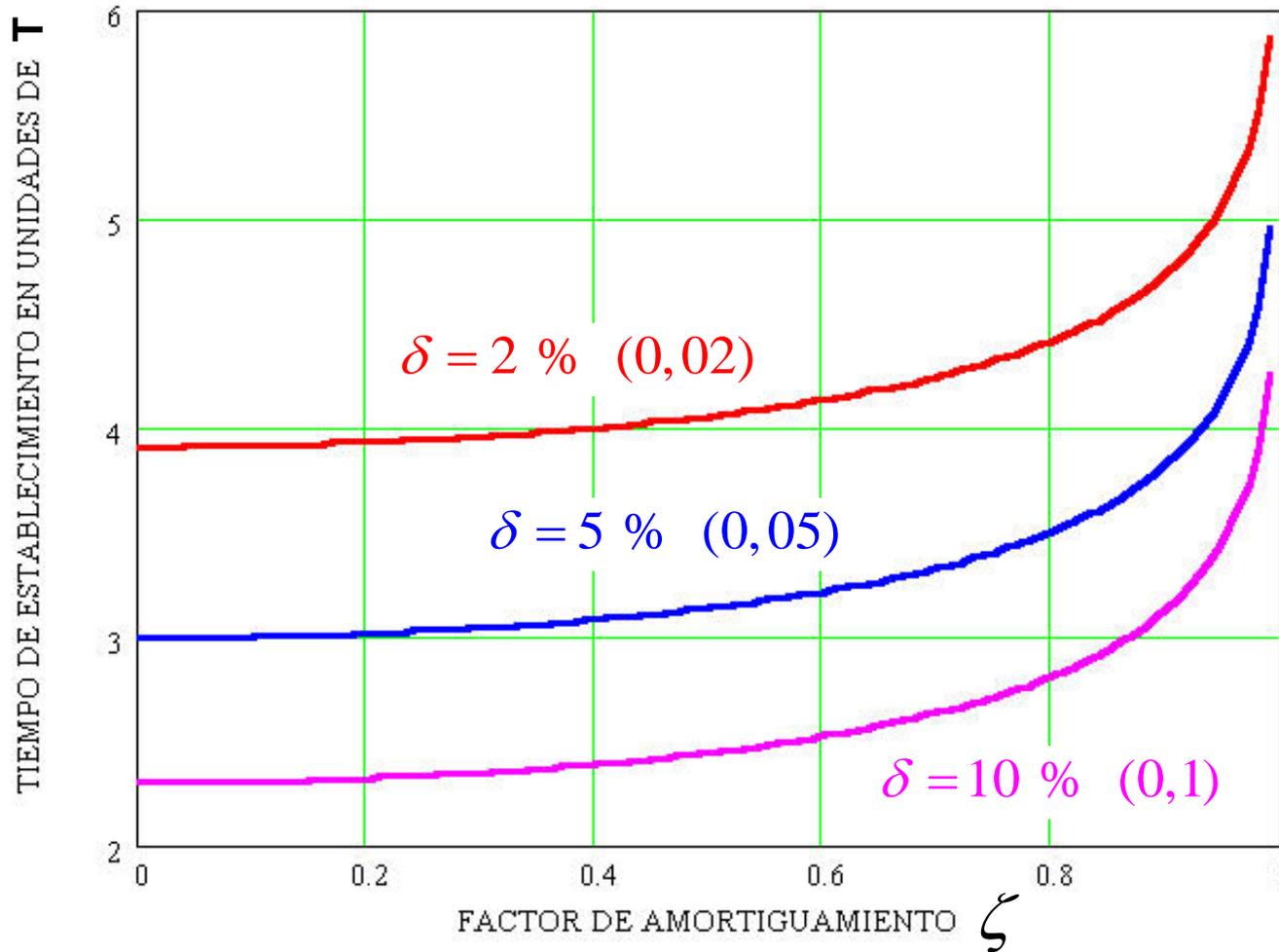
Estudio particular de los Sistemas Subamortiguados (9).



# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio (28)

PLL y Sintetizador con Filtro Paso Bajo pasivo "phase-lag": Tipo 1 – Orden 2 – Salto de Fase (14)

Estudio particular de los Sistemas Subamortiguados (10).



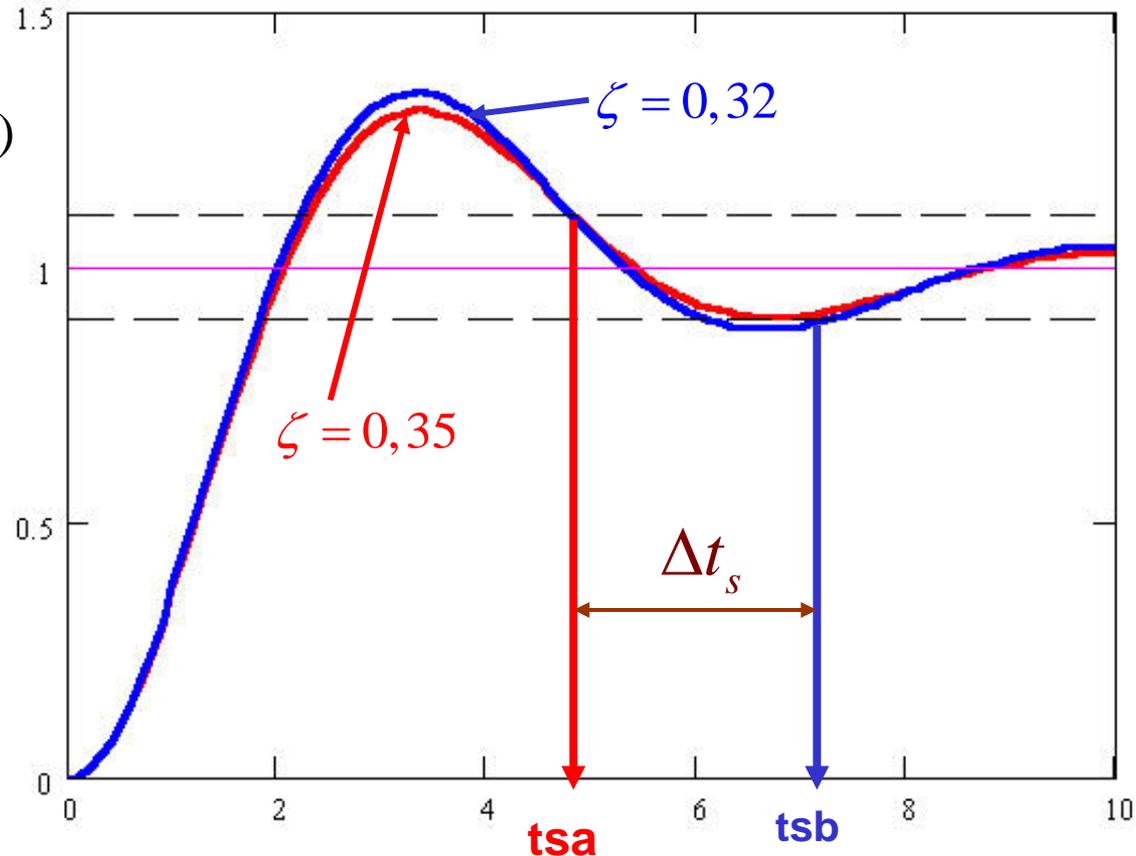
# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio (29)

PLL y Sintetizador con Filtro Paso Bajo pasivo "phase-lag": Tipo 1 – Orden 2 – Salto de Fase (15)

## Estudio particular de los Sistemas Subamortiguados (11).

- Hay que tener precaución a la hora de utilizar los datos y conclusiones extraídos de las gráficas anteriores, puesto que se produce el siguiente fenómeno importante: el efecto de la función seno que no se ha tenido presente en los cálculos anteriores, hace que pequeñas variaciones del factor de amortiguamiento (a igualdad de pulsación natural), de lugar a cambios bruscos del tiempo de establecimiento.

$\delta = 10\% (0,1)$



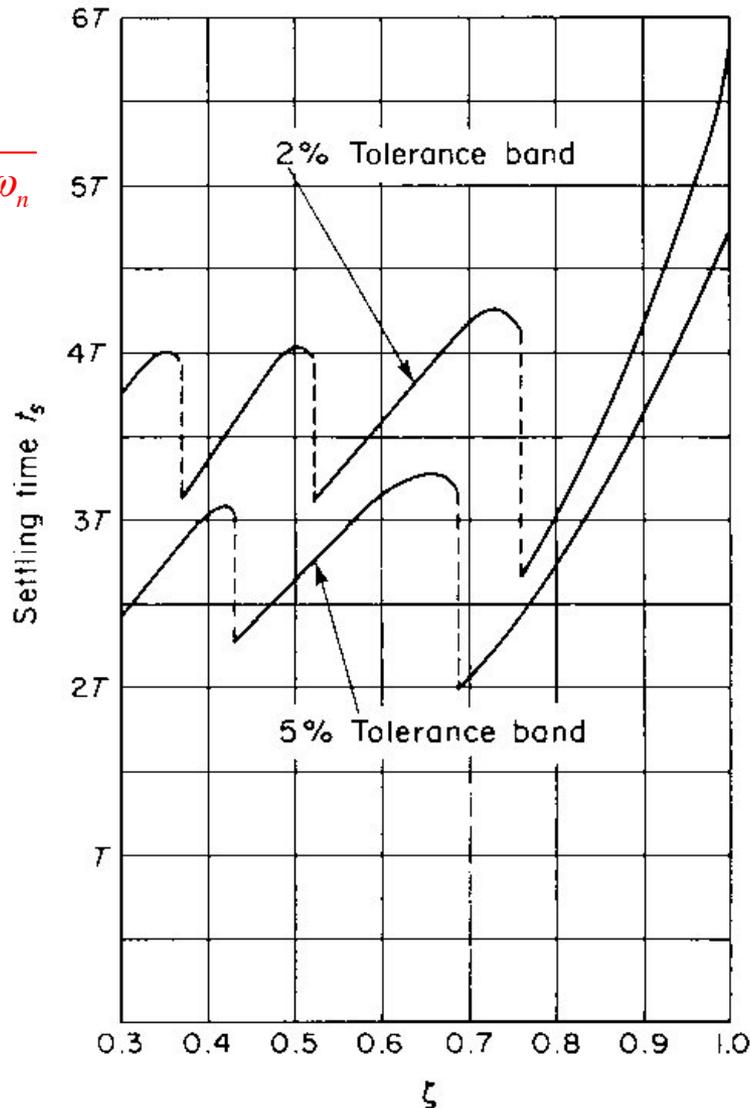
# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio (30)

PLL y Sintetizador con Filtro Paso Bajo pasivo "phase-lag": Tipo 1 – Orden 2 – Salto de Fase (16)

## Estudio particular de los Sistemas Subamortiguados (12).

- Las curvas rectificadas correspondientes a unas bandas de tolerancia del 5 % y 2 % son las siguientes:

$$T = \frac{1}{\zeta \cdot \omega_n}$$

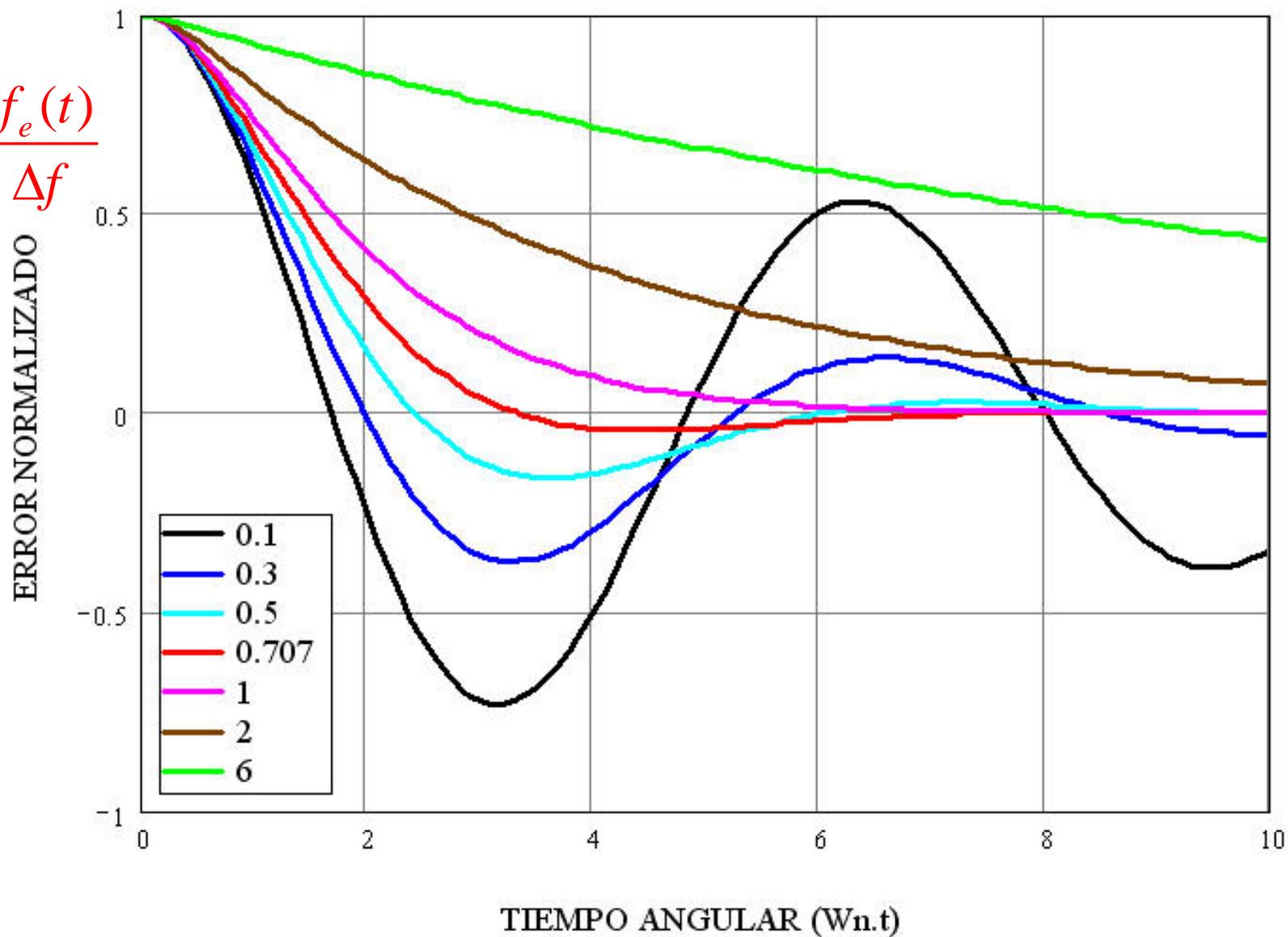


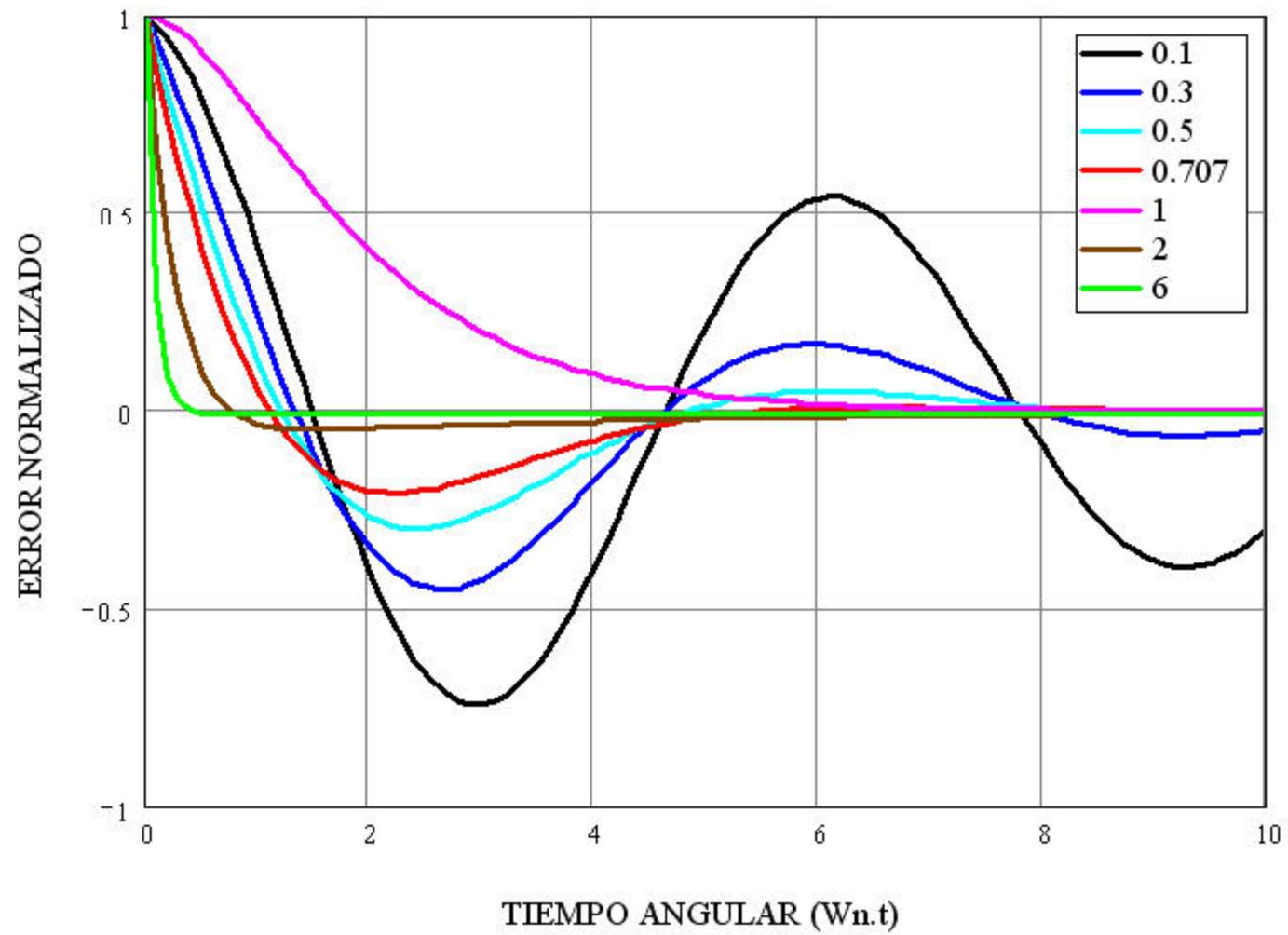
- Regla aproximada simplificada:

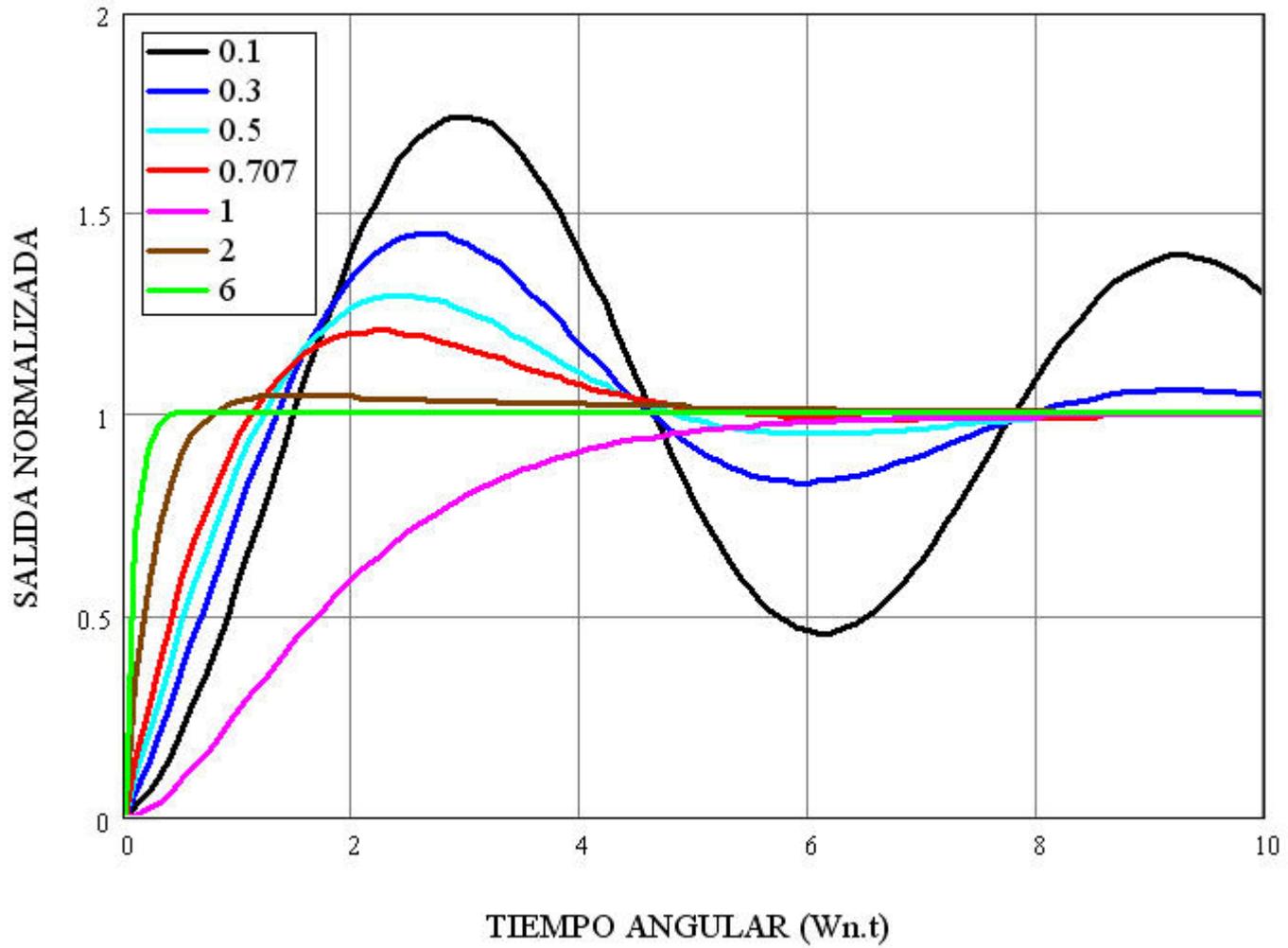
$$\text{Banda 5 \%} \Rightarrow t_s \approx 3 \cdot T = \frac{3}{\zeta \cdot \omega_n}$$

$$\text{Banda 2 \%} \Rightarrow t_s \approx 4 \cdot T = \frac{4}{\zeta \cdot \omega_n}$$

$$\frac{\theta_e(t)}{\Delta\theta}, \frac{f_e(t)}{\Delta f}$$







# Respuesta Dinámica del PLL - Régimen Transitorio ()

## APÉNDICE B

Escribamos:  $\cos(\omega \cdot t) + C \cdot \sin(\omega \cdot t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \Phi)$

desarrollando el seno de la suma de dos ángulos:

$A \cdot \sin(\omega \cdot t + \Phi) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos \Phi + A \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin \Phi \Rightarrow$  identificando:

$$\left. \begin{array}{l} A \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin \Phi \equiv \cos(\omega \cdot t) \\ A \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos \Phi \equiv C \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} A \cdot \sin \Phi = 1 \\ A \cdot \cos \Phi = C \end{cases} \Rightarrow \text{dividiendo entre si ambas expresiones:}$$

$$\tan \Phi = \frac{1}{C} \Rightarrow \boxed{\Phi = \tan^{-1} \frac{1}{C}}$$

Por otra parte si sumamos los cuadrados de ambas ecuaciones:

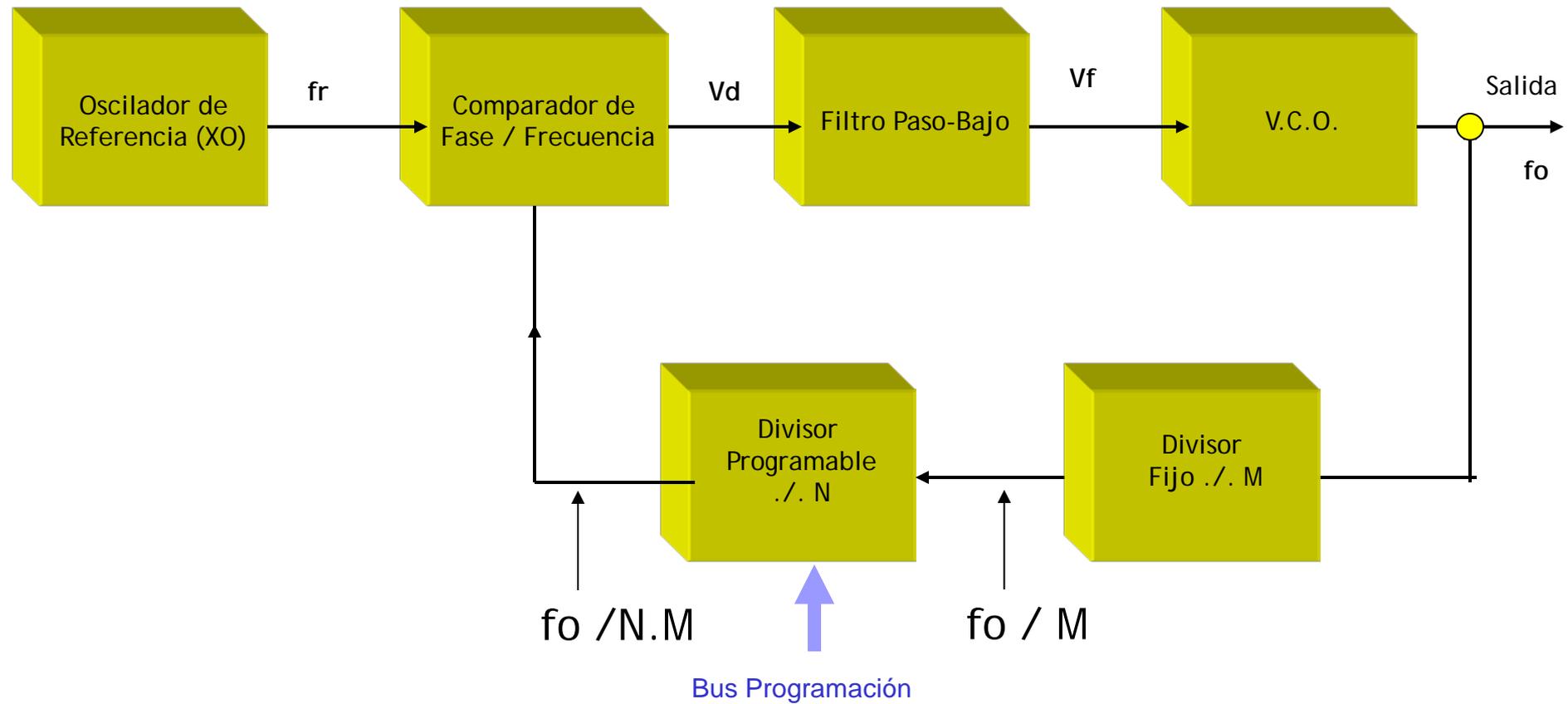
$$A^2 \cdot \sin^2 \Phi + A^2 \cdot \cos^2 \Phi = A^2 \cdot (\sin^2 \Phi + \cos^2 \Phi) = \boxed{A^2 = 1 + C^2} \Rightarrow \boxed{A = \sqrt{1 + C^2}}$$

$$\text{En nuestro caso concreto: } C = \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \Rightarrow \boxed{\Phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}} \text{ y } \boxed{A} = \sqrt{1 + \left( \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right)^2} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}}}$$

por lo tanto, finalmente:

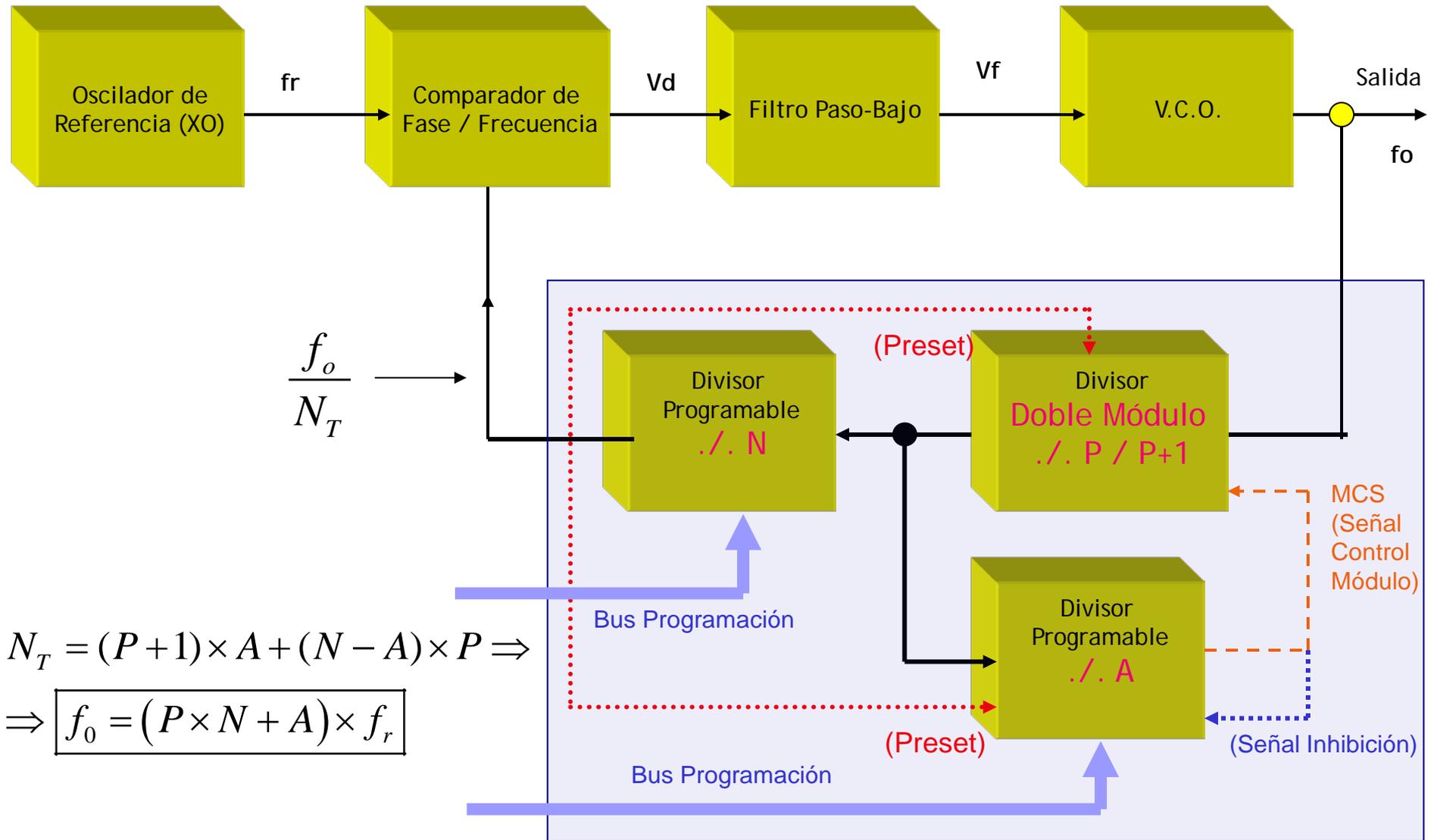
$$\boxed{\cos(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \cdot t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cdot \sin(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \cdot t) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cdot \sin\left(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \cdot t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}\right)}$$

# Sintetizador a PLL con Predivisor ("Preescaler")



$$\Rightarrow f_{ch} = [f_r \times M \times (N + 1)] - [f_r \times M \times N] = f_r \times M$$

# Sintetizador a PLL con Divisor de Doble Módulo - (i)



$$N_T = (P+1) \times A + (N-A) \times P \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f_0 = (P \times N + A) \times f_r}$$

$$f_{ch} = [f_r \times (P \times N + A + 1)] - [f_r \times (P \times N + A)] = f_r$$

# Sintetizador a PLL con Divisor de Doble Módulo - (ii)

$A_{min} = 1$

Número de Canal	(A)	(N)	$N_T = P \cdot N + A$	Salto
1	1	N	$P \cdot N + 1$	-
2	2	N	$P \cdot N + 2$	1
3	3	N	$P \cdot N + 3$	1
.....	.....	.....	.....	.....
P-1	P-1	N	$P \cdot N + P - 1$	1
P	P	N	$P \cdot N + P$	1
P+1	P+1	N	$P \cdot N + P + 1$	1
P+2	P+2	N	$P \cdot N + P + 2$	1
P+3	1	N+1	$P \cdot (N+1) + 1$	-1
P+4	2	N+1	$P \cdot (N+1) + 2$	1
P+5	3	N+1	$P \cdot (N+1) + 3$	1
.....	.....	.....	.....	.....

Diagram illustrating channel repetition and frequency jumps. Green arrows show the sequence of channels. Red and blue arrows indicate 'Canal repetido' (repeated channel) for channels P+3 and P+4 respectively.

$A_{max} = P$

Solución correcta:

# Sintetizador a PLL con Divisor de Doble Módulo - (iii)

$A_{min} = 1$

$A_{max} = P$

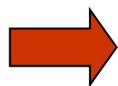
Número de Canal	(A)	(N)	$N_T = P \cdot N + A$	Salto
1	1	N	$P \cdot N + 1$	-
2	2	N	$P \cdot N + 2$	1
3	3	N	$P \cdot N + 3$	1
.....	.....	.....	.....	.....
P-1	P-1	N	$P \cdot N + P - 1$	1
P	P	N	$P \cdot N + P$	1
P+1	1	N+1	$P \cdot (N+1) + 1$	1
P+2	2	N+1	$P \cdot (N+1) + 2$	1
P+3	3	N+1	$P \cdot (N+1) + 3$	1
P+4	4	N+1	$P \cdot (N+1) + 4$	1
P+5	5	N+1	$P \cdot (N+1) + 5$	1
.....	.....	.....	.....	.....

# Sintetizador a PLL con Divisor de Doble Módulo - (iv)

$A_{min} = 2$

Número de Canal	(A)	(N)	$N_T = P \cdot N + A$	Salto
1	2	N	$P \cdot N + 2$	-
2	3	N	$P \cdot N + 3$	1
3	4	N	$P \cdot N + 4$	1
.....	.....	.....	.....	.....
P-2	P-1	N	$P \cdot N + P - 1$	1
P-1	P	N	$P \cdot N + P$	1
P	P+1	N	$P \cdot N + P + 1$	1
P+1	P+2	N	$P \cdot N + P + 2$	1
P+2	2	N+1	$P \cdot (N+1) + 2$	0
P+4	3	N+1	$P \cdot (N+1) + 3$	1
P+5	4	N+1	$P \cdot (N+1) + 4$	1
.....	.....	.....	.....	.....

Canal repetido



$A_{max} = P + 1$



Solución correcta:

# Sintetizador a PLL con Divisor de Doble Módulo - (v)

$$A_{\min} = 2$$

$$A_{\max} = P+1$$

Número de Canal	(A)	(N)	$N_T = P \cdot N + A$	Salto
1	2	N	$P \cdot N + 2$	-
2	3	N	$P \cdot N + 3$	1
3	4	N	$P \cdot N + 4$	1
.....	.....	.....	.....	.....
P-2	P-1	N	$P \cdot N + P - 1$	1
P-1	P	N	$P \cdot N + P$	1
P	P+1	N	$P \cdot N + P + 1$	1
P+1	2	N+1	$P \cdot (N+1) + 2$	1
P+2	3	N+1	$P \cdot (N+1) + 3$	1
P+4	4	N+1	$P \cdot (N+1) + 4$	1
P+5	5	N+1	$P \cdot (N+1) + 5$	1
.....	.....	.....	.....	.....

# Sintetizador a PLL con Divisor de Doble Módulo - (vi)

$A_{min}$

$A_{max} = A_{min} + P - 1$

$N_{min} \geq A_{min} + P$

$N_{max} = \dots$

Ejemplo:

$A_{min} = 15$

$P = 127$

$A_{max} = 15 + 127 - 1 = 141$

$N_{min} \geq 142$

$N_{Tmin} = 18.049$

Número de Canal	(A)	(N)	$N_T = P \cdot N + A$	Salto
1	$A_{min}$	N	$P \cdot N + A_{min}$	-
2	$A_{min} + 1$	N	$P \cdot N + A_{min} + 1$	1
3	$A_{min} + 2$	N	$P \cdot N + A_{min} + 2$	1
.....	.....	.....	.....	.....
P-2	$A_{min} + P - 3$	N	$P \cdot N + A_{min} + P - 3$	1
P-1	$A_{min} + P - 2$	N	$P \cdot N + A_{min} + P - 2$	1
P	$A_{min} + P - 1$	N	$P \cdot N + A_{min} + P - 1$	1
P+1	$A_{min}$	N+1	$P \cdot (N+1) + A_{min}$	1
P+2	$A_{min} + 1$	N+1	$P \cdot (N+1) + A_{min} + 1$	1
P+4	$A_{min} + 2$	N+1	$P \cdot (N+1) + A_{min} + 2$	1
P+5	$A_{min} + 3$	N+1	$P \cdot (N+1) + A_{min} + 3$	1
.....	.....	.....	.....	.....

# Sintetizador de Doble Módulo – Asignación de valores a los divisores - i

Supuesto:  $A_{max} = P+1$ ,  $A_{min} = 0$

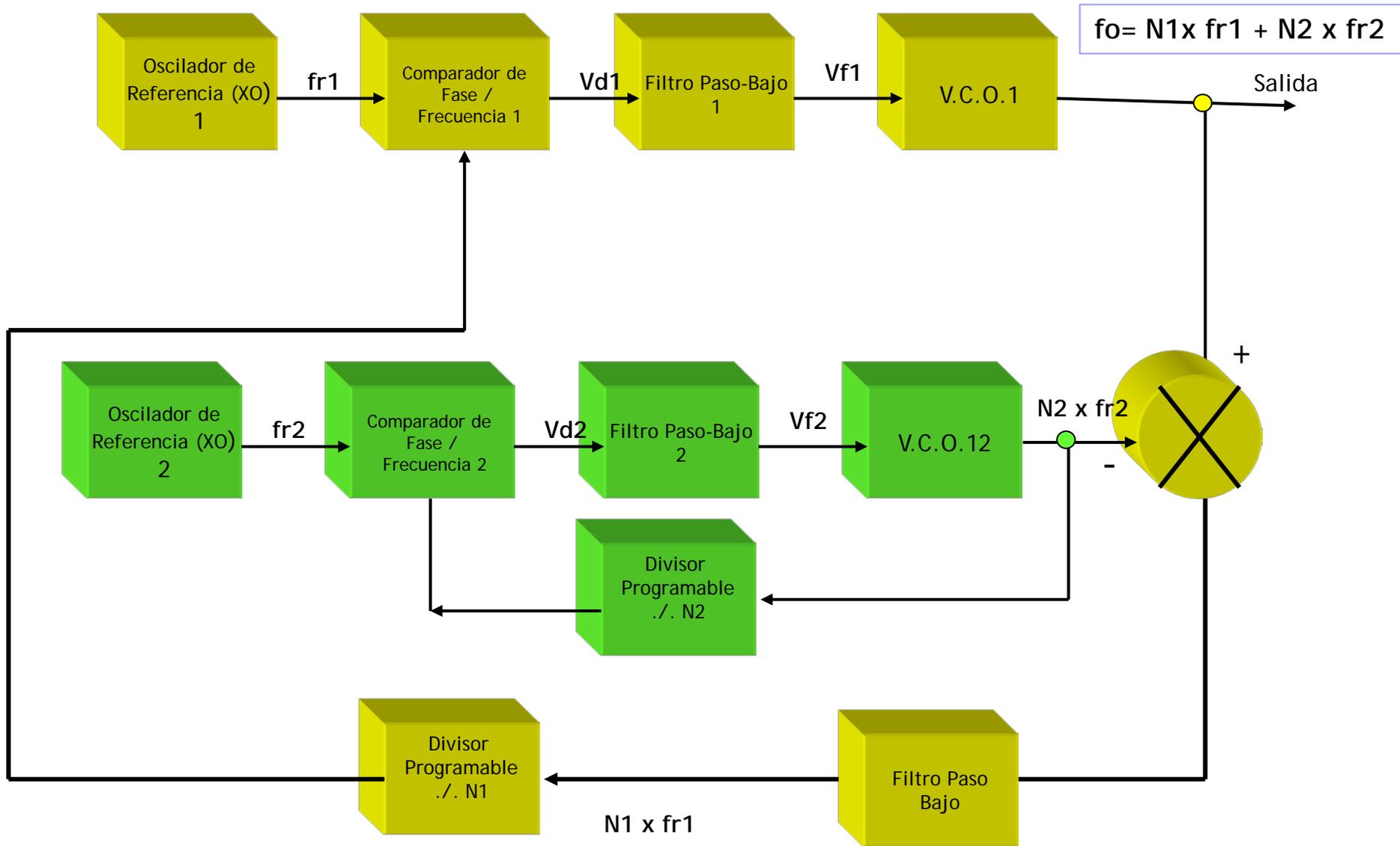
Número de Canal	$N_T = N \cdot P + A$	Valor de A	Valor de N
1	N.P	0	N
2	N.P+1	1	N
3	N.P+2	2	N
...	...	...	...
P-1	N.P+P-2	P-2	N
P	N.P+P-1	P-1	N
P+1	N.P+P	P	N
P+2	N.P+P+1	P+1	N
P+3	$(N+1).P+0=N.P+P$	0	N+1
P+4	$(N+1).P+1=N.P+P+1$	1	N+1

# Sintetizador de Doble Módulo – Asignación de valores a los divisores - ii

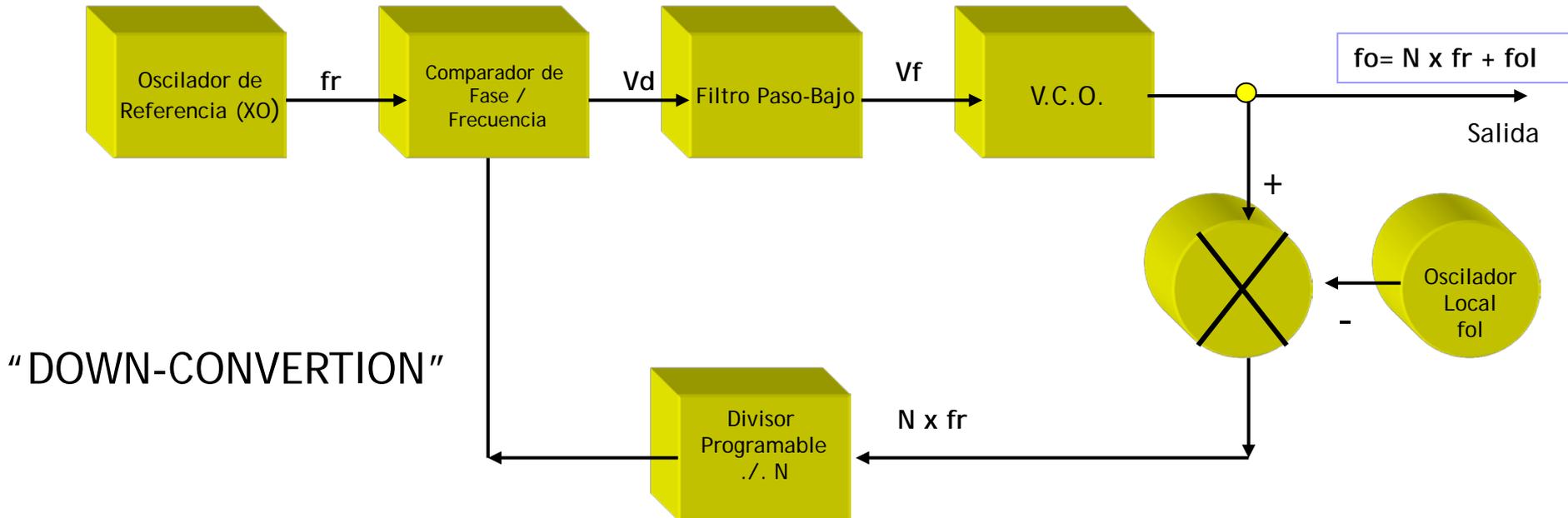
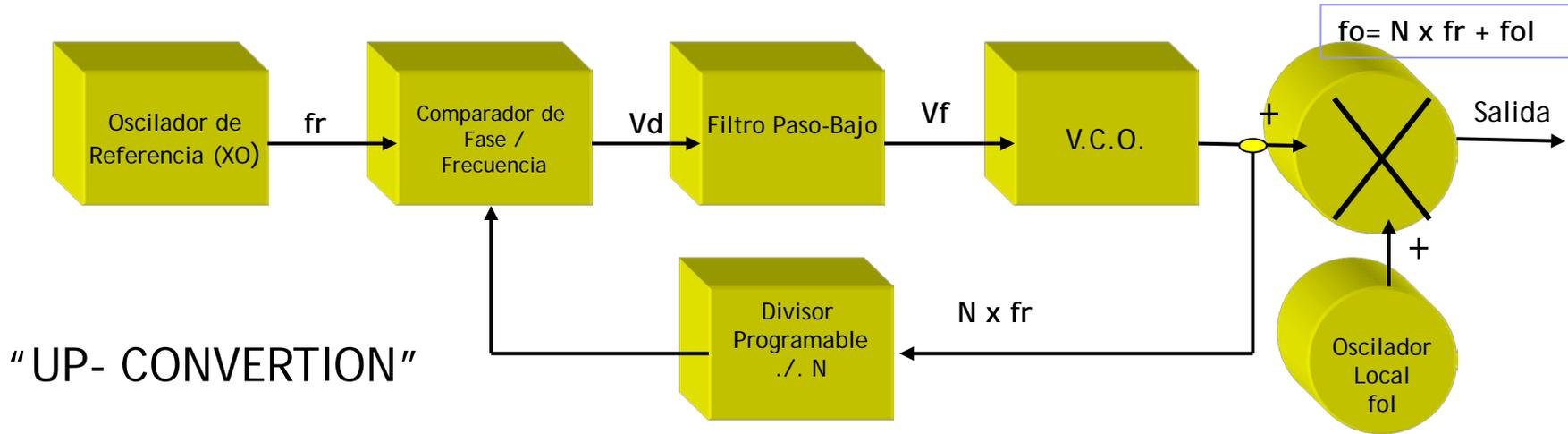
Supuesto:  $A_{max} = P-1$ ,  $A_{min} = 0$

Número de Canal	$N_T = N \cdot P + A$	Valor de A	Valor de N
1	N.P	0	N
2	N.P+1	1	N
3	N.P+2	2	N
...	...	...	...
P-1	N.P+P-2	P-2	N
P	N.P+P-1	P-1	N
P+1	$(N+1).P+0=N.P+P$	0	N+1
P+2	$(N+1).P+1=N.P+P+1$	1	N+1
P+3	$(N+1).P+2=N.P+P+2$	2	N+1
P+4	$(N+1).P+3=N.P+P+3$	3	N+1

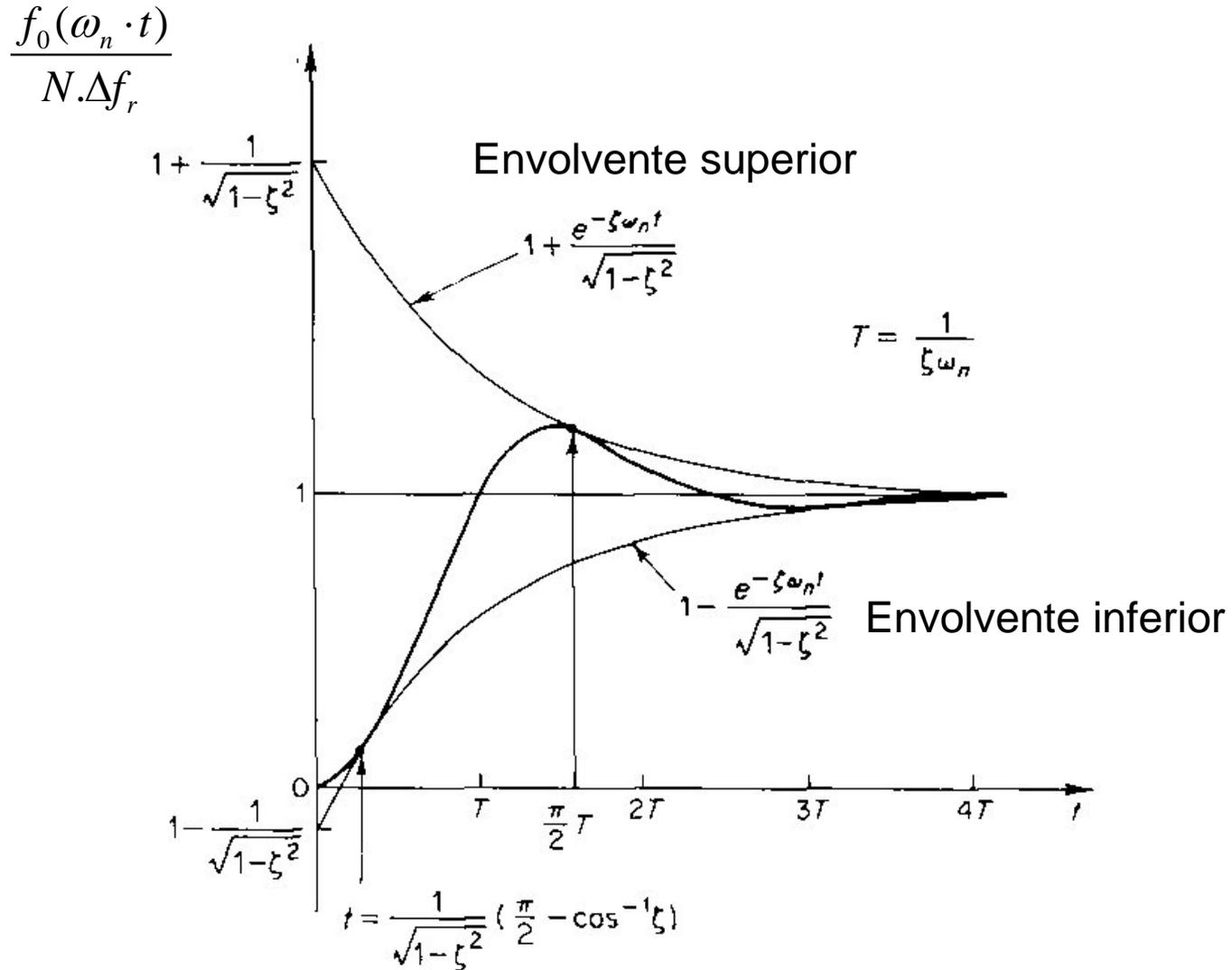
# Sintetizador a PLL de dos Bucles.



# Sintetizador a PLL con Mezcladores.

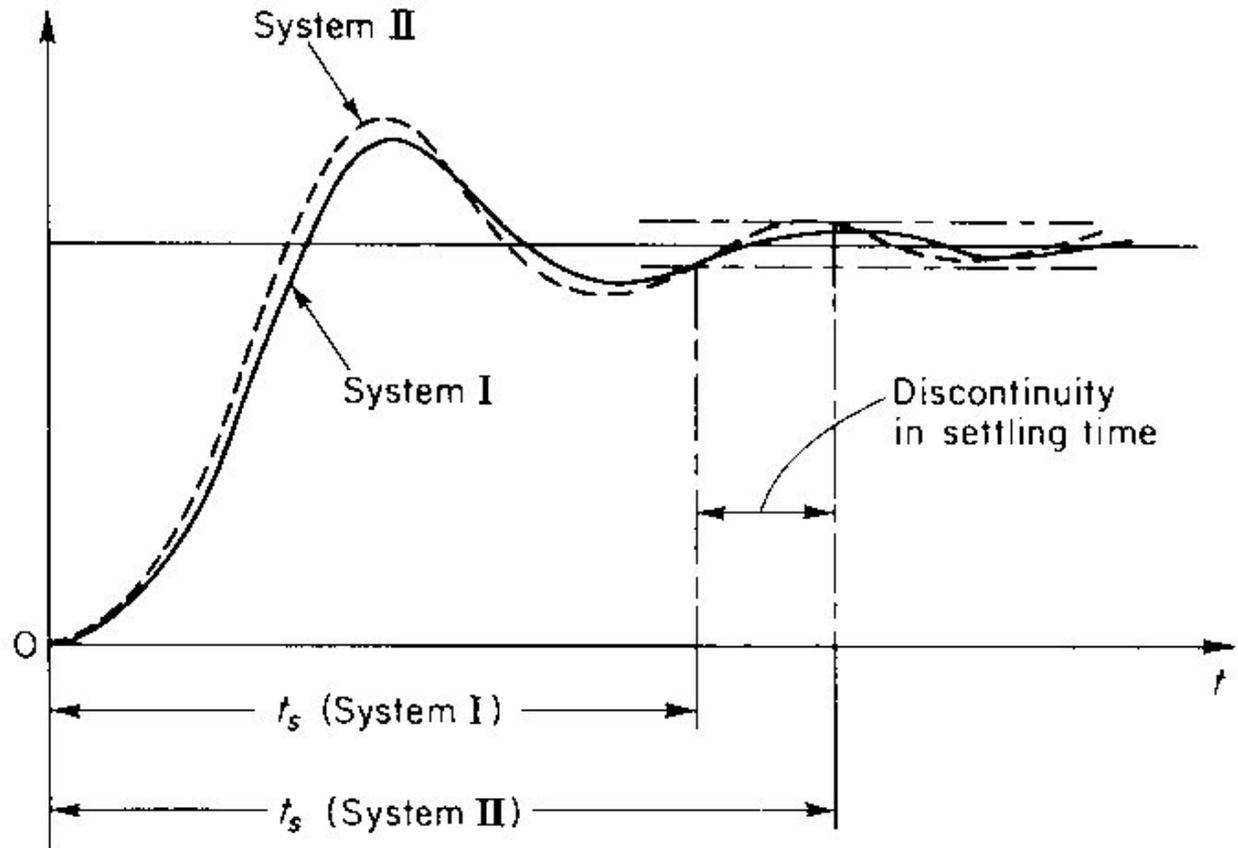


# Respuesta transitoria para un Sintetizador T1 O2 con filtro pasivo "phase-lag"-4



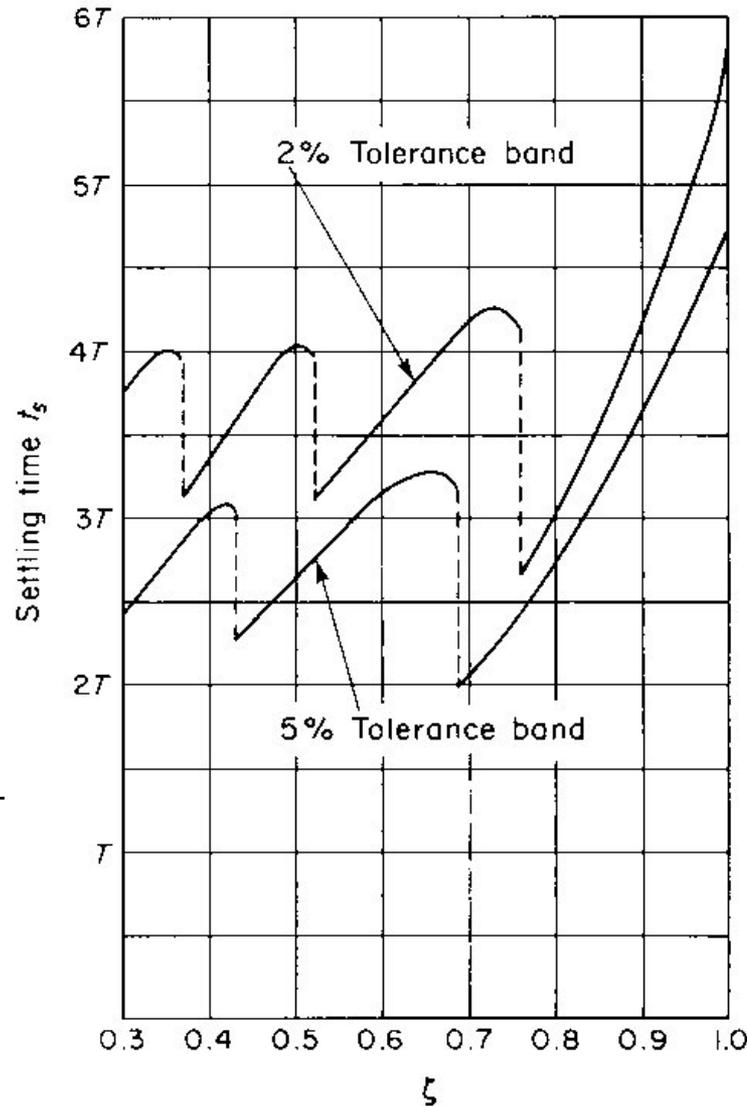
# Respuesta transitoria para un Sintetizador T1 O2 con filtro pasivo "phase-lag"-5

$$\frac{f_0(\omega_n \cdot t)}{N \cdot \Delta f_r}$$



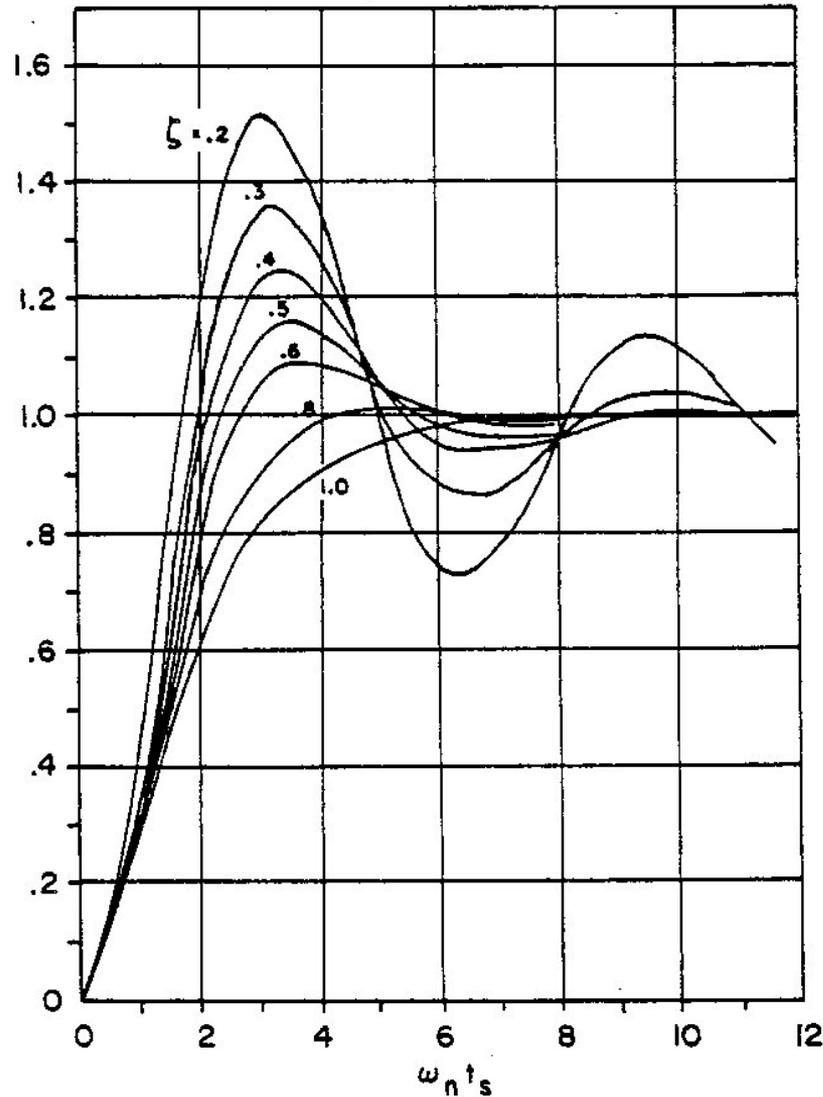
# Respuesta transitoria para un Sintetizador T1 O2 con filtro pasivo "phase-lag"-6

$$T = \frac{1}{\zeta \cdot \omega_n}$$



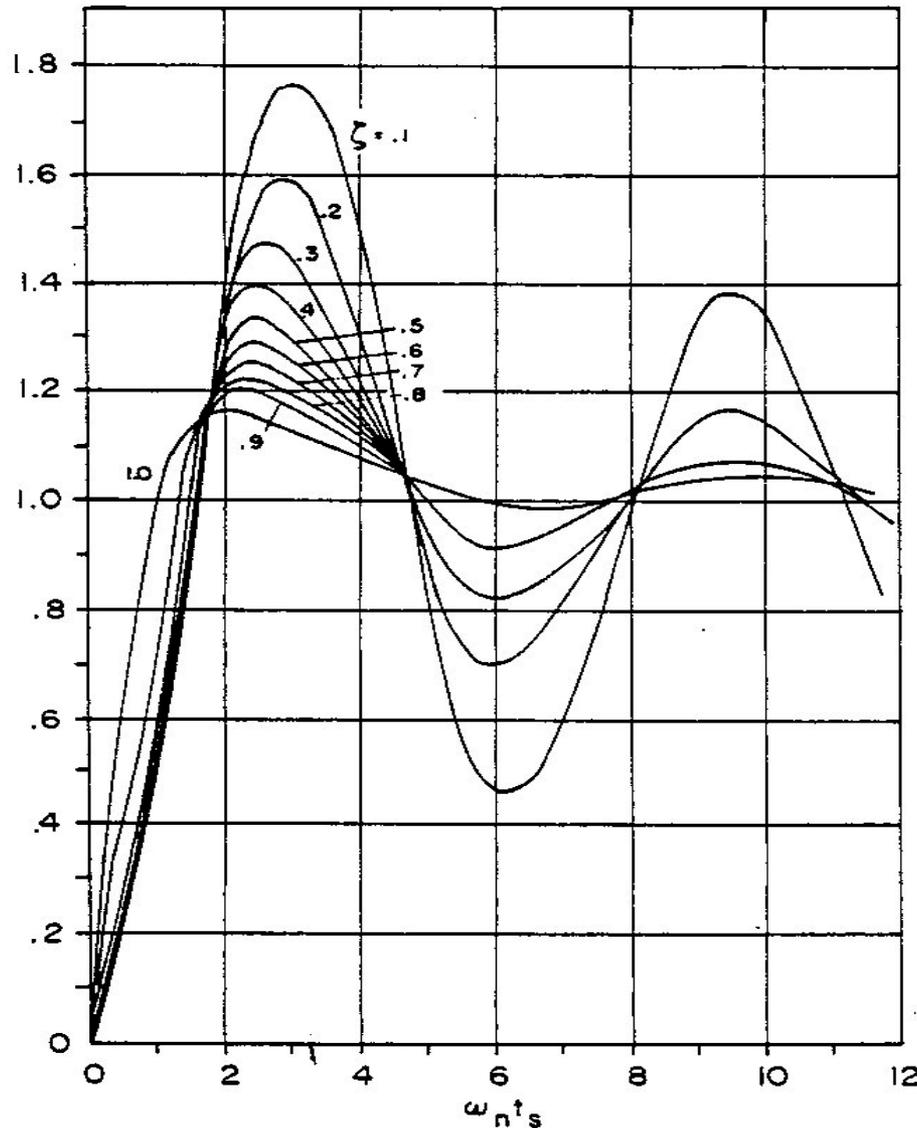
# Respuesta transitoria para un Sintetizador T1 O2 con filtro pasivo "phase-lag"-7

$$\frac{f_0(\omega_n \cdot t_s)}{N \cdot \Delta f_r}$$



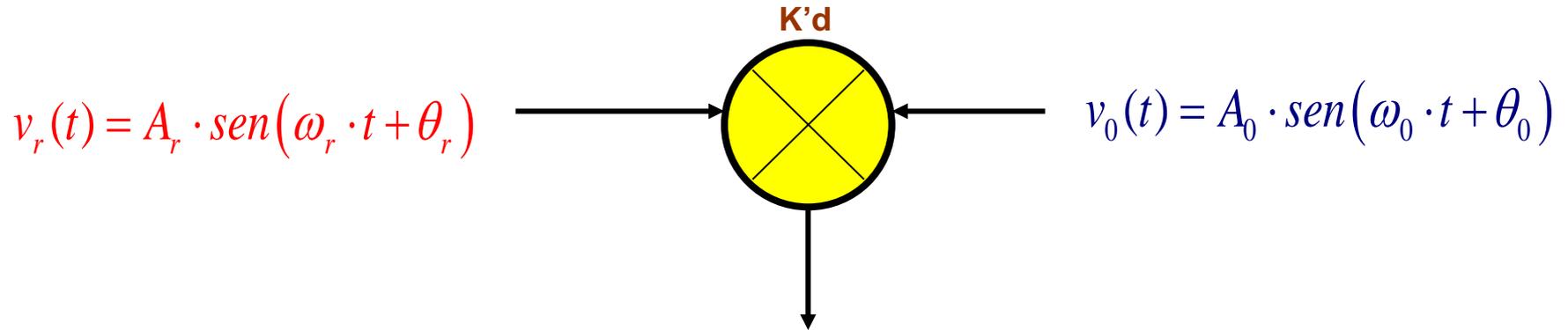
# Respuesta transitoria para un Sintetizador T1 O2 con filtro pasivo "lead-lag" de alta ganancia y T2 O2 con filtro activo "phase-lag"-8

$$\frac{f_0(\omega_n \cdot t_s)}{N \cdot \Delta f_r}$$

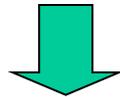


## Comparadores de Fase / Frecuencia – (2)

### Compradores Analógicos - (1)



$$\begin{aligned} v_d(t) &= k'_d \cdot v_r(t) \cdot v_0(t) = k'_d \cdot A_r \cdot \text{sen}(\omega_r \cdot t + \theta_r) \cdot A_0 \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t + \theta_0) = \\ &= \frac{k'_d \cdot A_r \cdot A_0}{2} \cdot \left\{ \cos \left[ (\omega_r - \omega_0)t + \theta_r - \theta_0 \right] - \cos \left[ (\omega_r + \omega_0)t + \theta_r + \theta_0 \right] \right\} \end{aligned}$$



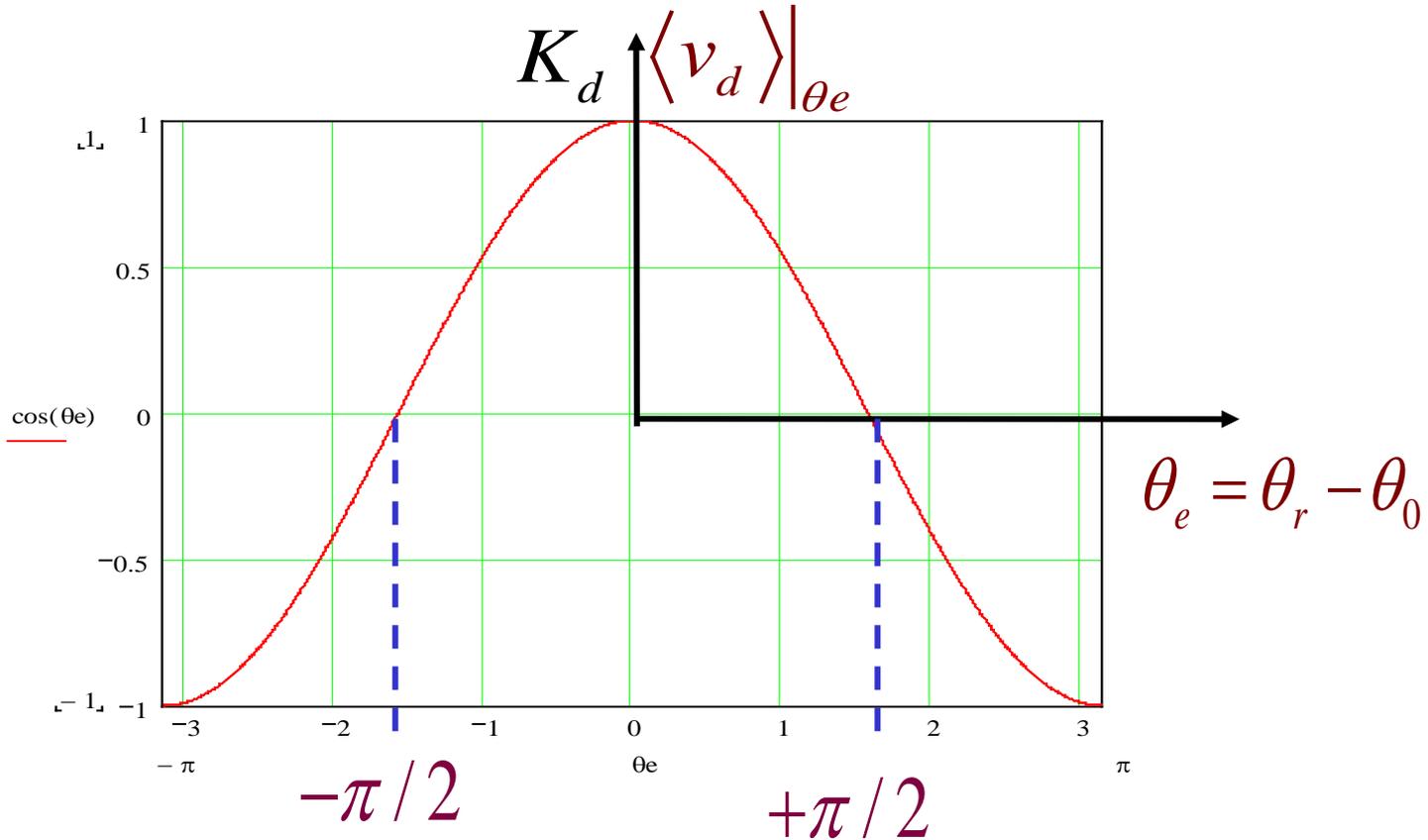
Tras pasar por el filtro paso bajo desaparece (idealmente) la componente de frecuencia suma:



# Comparadores de Fase / Frecuencia en PLL's – (3)

## Compradores Analógicos - (2)

$$\langle v_d(t) \rangle = \langle k'_d \cdot v_r(t) \cdot v_0(t) \rangle = \frac{k'_d \cdot A_r \cdot A_0}{2} \cdot \left\{ \cos \left[ (\omega_r - \omega_0)t + \theta_r - \theta_0 \right] \right\} = k_d \cdot \cos \left[ (\omega_r - \omega_0)t + \theta_r - \theta_0 \right]$$

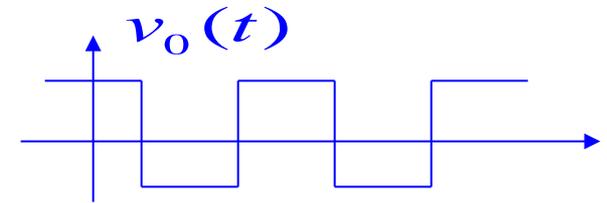
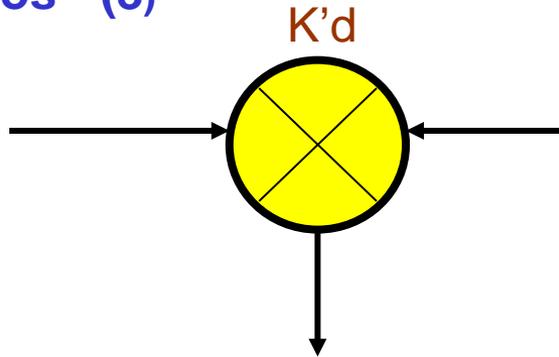


- Conclusión: Usando este comparador de fases, la tensión de error es nula cuando las señales de referencia y del VCO están en cuadratura.

## Comparadores de Fase / Frecuencia – (4)

### Compradores Analógicos - (3)

$$v_r(t) = A_r \cdot \text{sen}(\omega_r \cdot t + \theta_r)$$



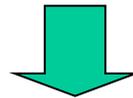
$$v_d(t) = k'_d \cdot v_r(t) \cdot v_o(t) =$$

$$= k'_d \cdot A_r \cdot \text{sen}(\omega_r \cdot t + \theta_r) \cdot \frac{4A_0}{\pi} \left[ \cos(\omega_0(t) + \theta_0) - \frac{1}{3} \cos(3\omega_0(t) + 3\theta_0) + \frac{1}{5} \cos(5\omega_0(t) + 5\theta_0) + \dots \right] =$$

$$= \frac{k'_d \cdot A_r \cdot A_0 \cdot 4}{2\pi} \cdot \left\{ \text{sen}[(\omega_r - \omega_0)t + \theta_r - \theta_0] + \text{terminos en } n(\omega_0 t + \theta_0) \right\}$$



Tras pasar por el filtro paso bajo:

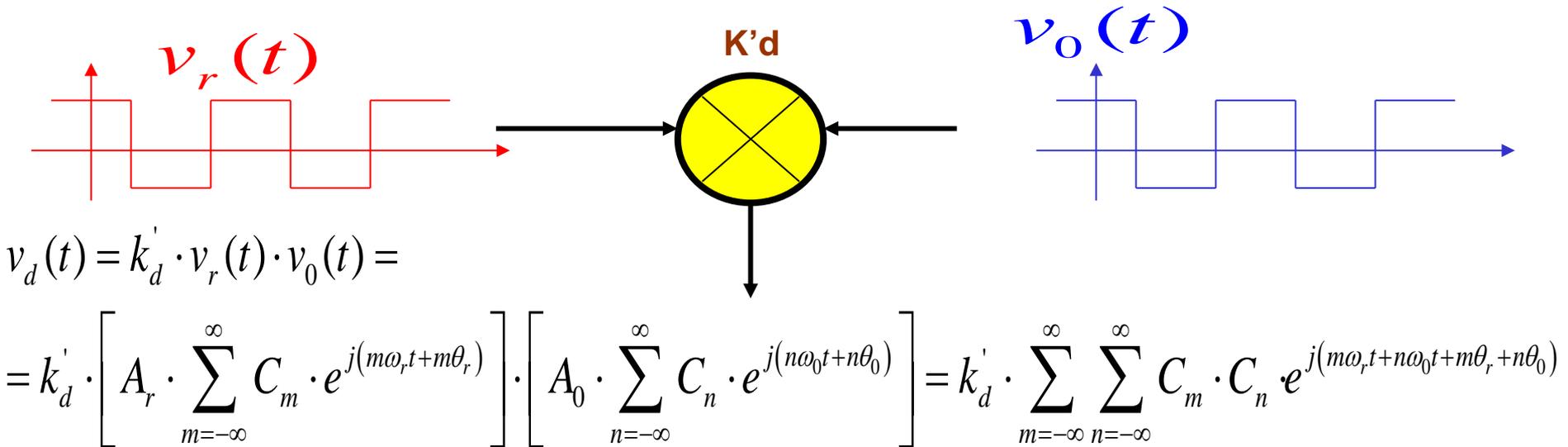


$$\langle v_d(t) \rangle = \langle k'_d \cdot v_r(t) \cdot v_o(t) \rangle = \frac{k'_d \cdot A_r \cdot A_0 \cdot 4}{2\pi} \cdot \left\{ \text{sen}[(\omega_r - \omega_0)t + \theta_r - \theta_0] \right\} =$$

$$= k_d \cdot \text{sen}[(\omega_r - \omega_0)t + \theta_r - \theta_0]$$

## ⌘ Comparadores de Fase / Frecuencia – (5)

### ⌘ Compradores Analógicos (4) - Enganche Armónico y Fraccional (1).



Tras pasar por el filtro paso la salida tendrá una componente continua sólo si existe alguna combinación de índices **m** y **n** que verifiquen:

$$N \cdot \omega_r - M \cdot \omega_0 \equiv 0 \quad ; N, M \in \mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{N}{M} \cdot \omega_r} \Rightarrow$$

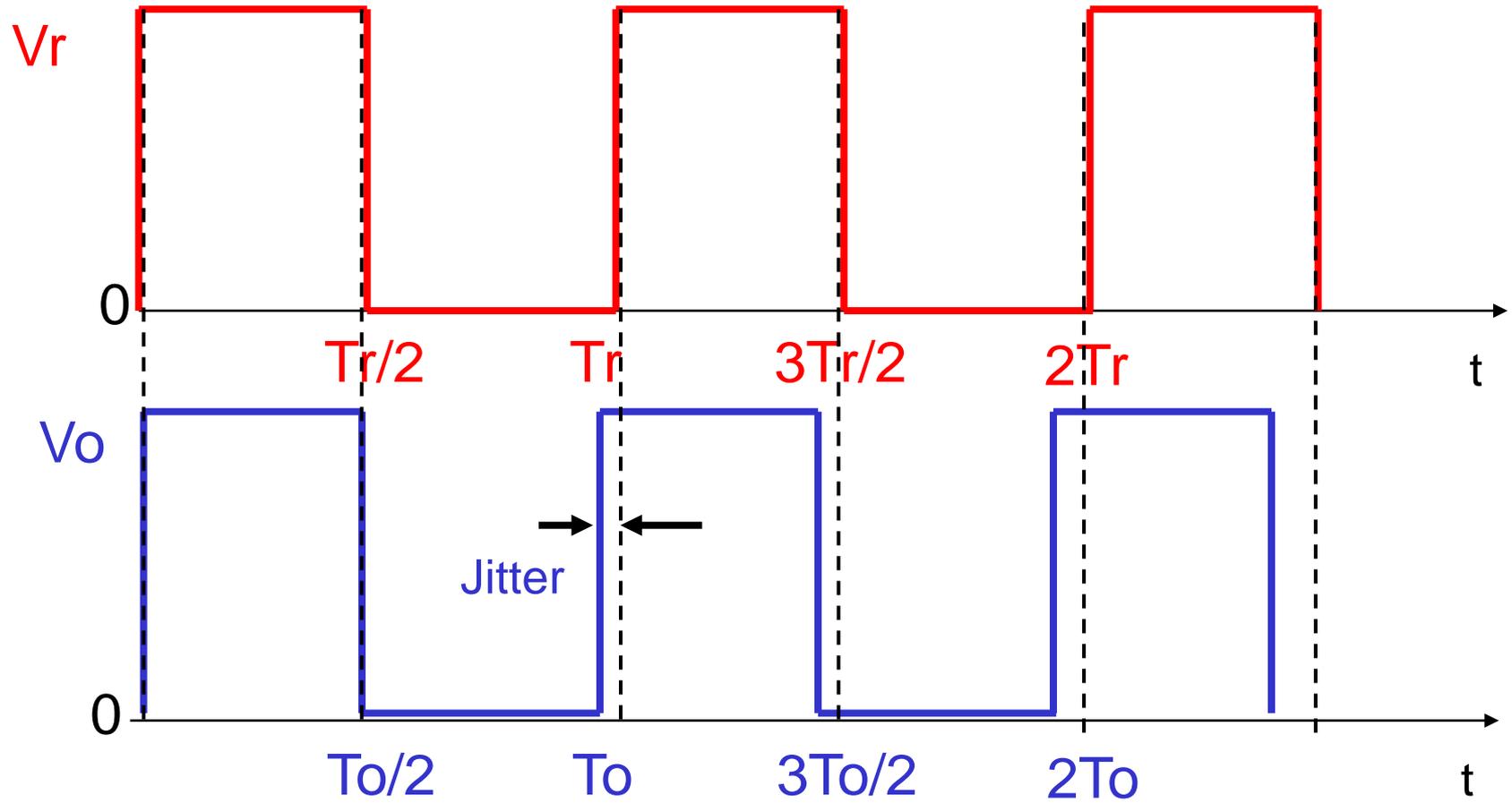
Si  $\frac{N}{M} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  Enganche Armonico

Si  $\frac{N}{M} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$  Enganche Fraccional

## ⌘ Comparadores de Fase / Frecuencia – (6)

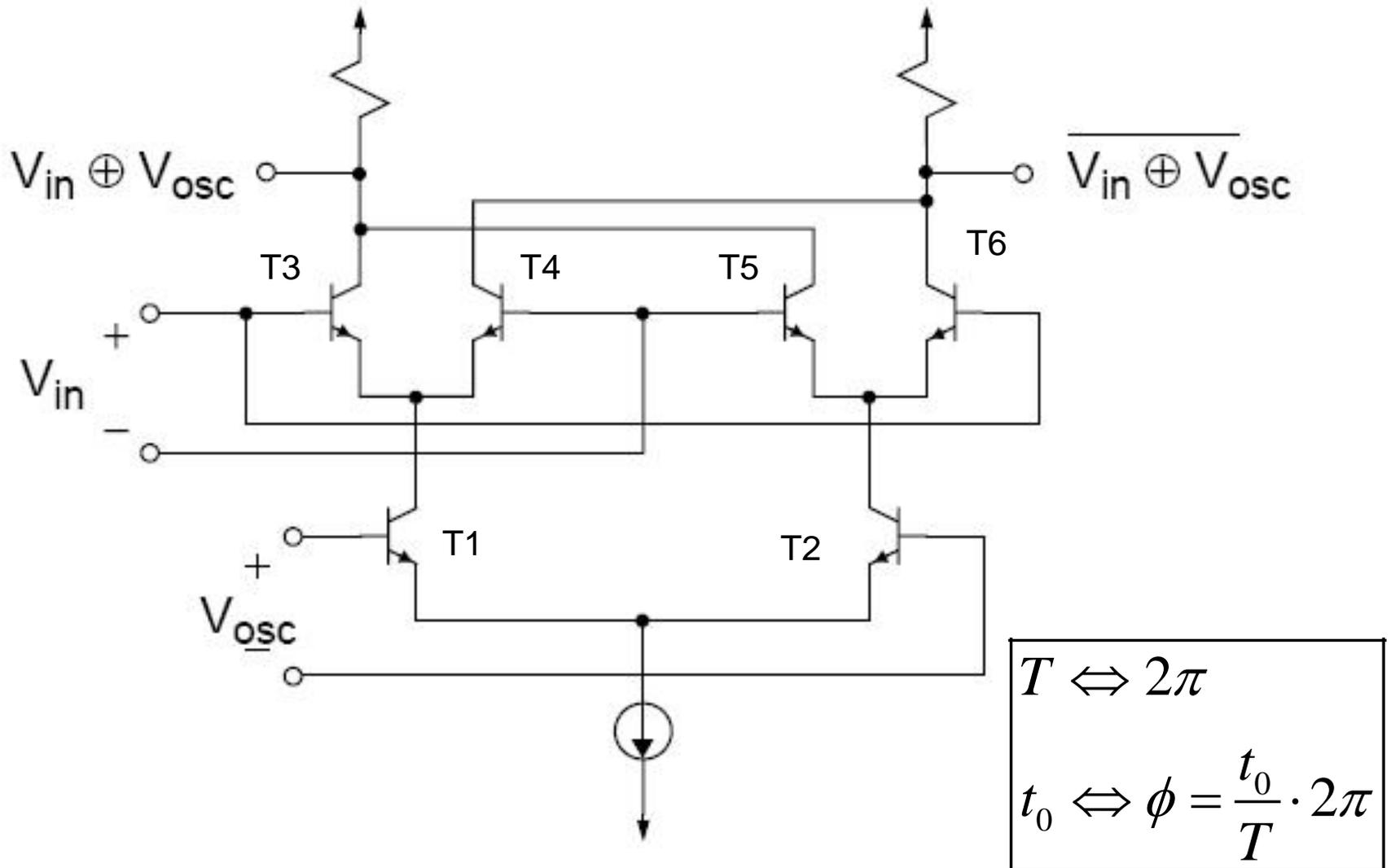
### ˘ Compradores Analógicos (5) - Enganche Armónico y Fraccional (2).

- El enganche fraccional produce “jitter” en la sincronización:



# Comparadores de Fase / Frecuencia – (7)

## Compradores Analógicos (6) – Célula de Gilbert (1)

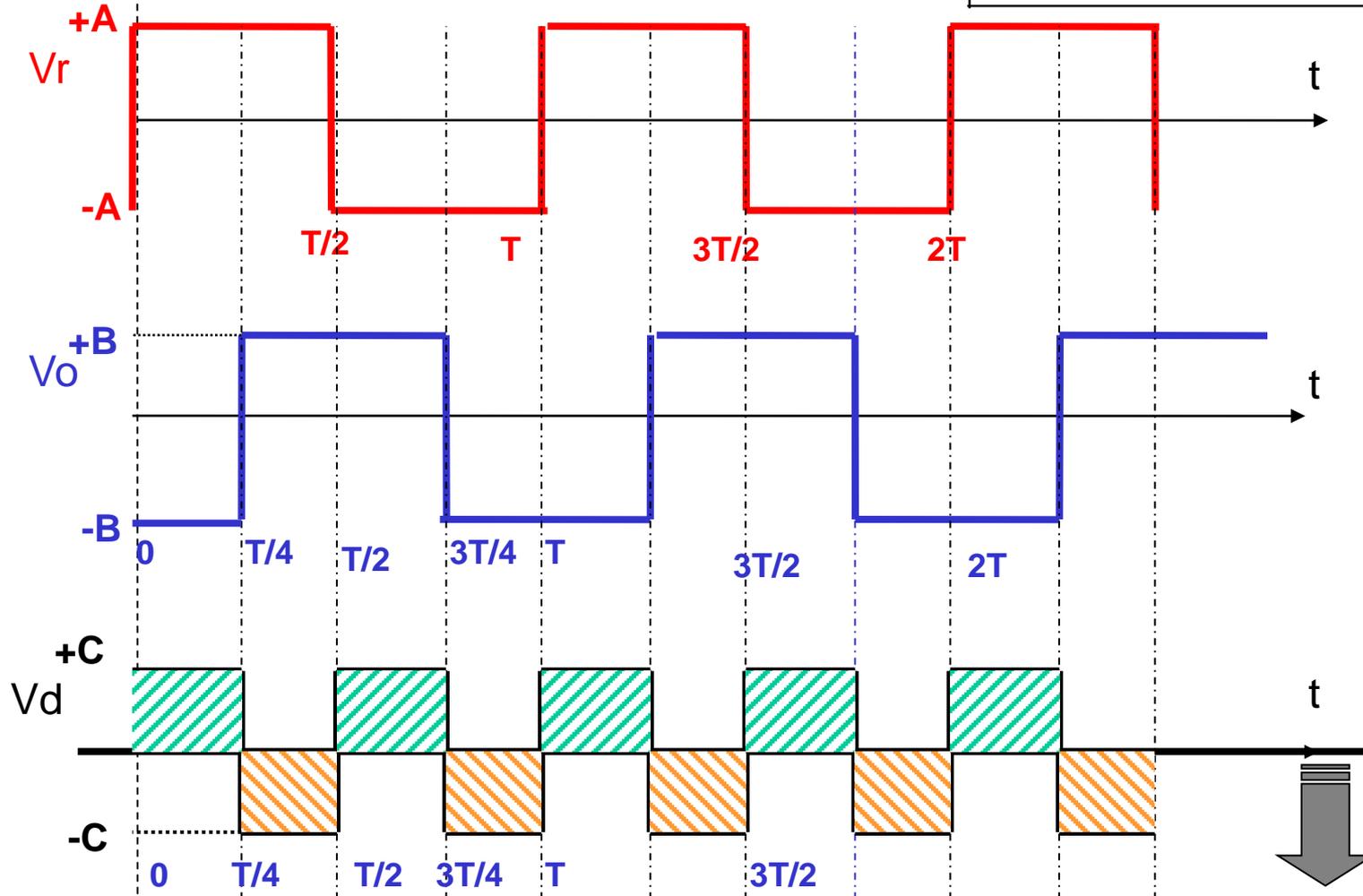


# Comparadores de Fase / Frecuencia – (8)

## Compradores Analógicos (7) – Célula de Gilbert (2)

Caso a)  $f_r = f_o$

$$t_0 = \frac{T}{4} \Leftrightarrow \phi = \frac{t_0}{T} \cdot 2\pi = \frac{T/4}{T} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$$



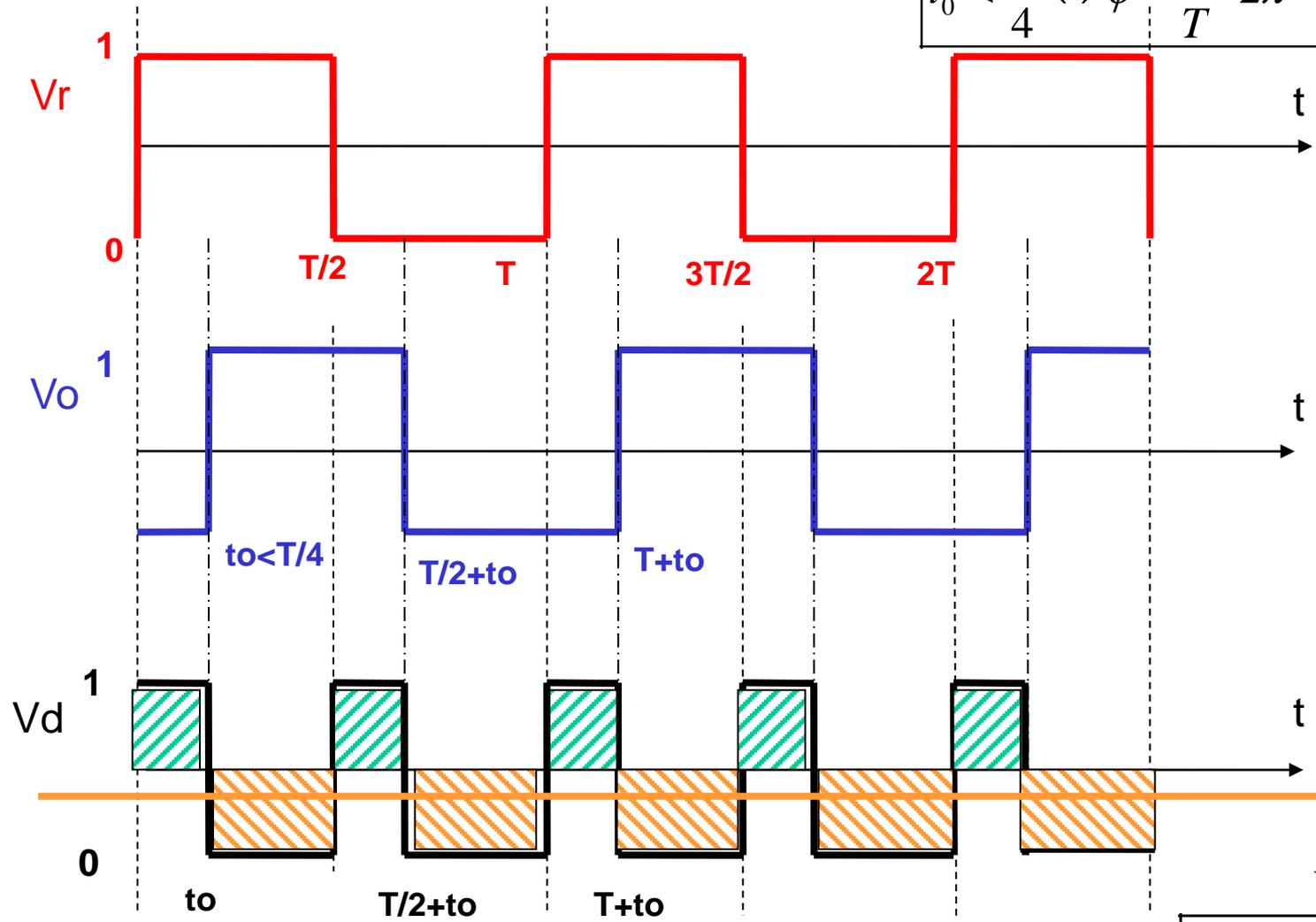
$$\langle V_d \rangle = \overline{V_d} = 0$$

# Comparadores de Fase / Frecuencia – (9)

## Compradores Analógicos (8) – Célula de Gilbert (3)

Caso a)  $f_r = f_o$

$$t_0 < \frac{T}{4} \Leftrightarrow \phi = \frac{t_0}{T} \cdot 2\pi = \frac{T/4}{T} \cdot 2\pi < \frac{\pi}{2}$$



↓

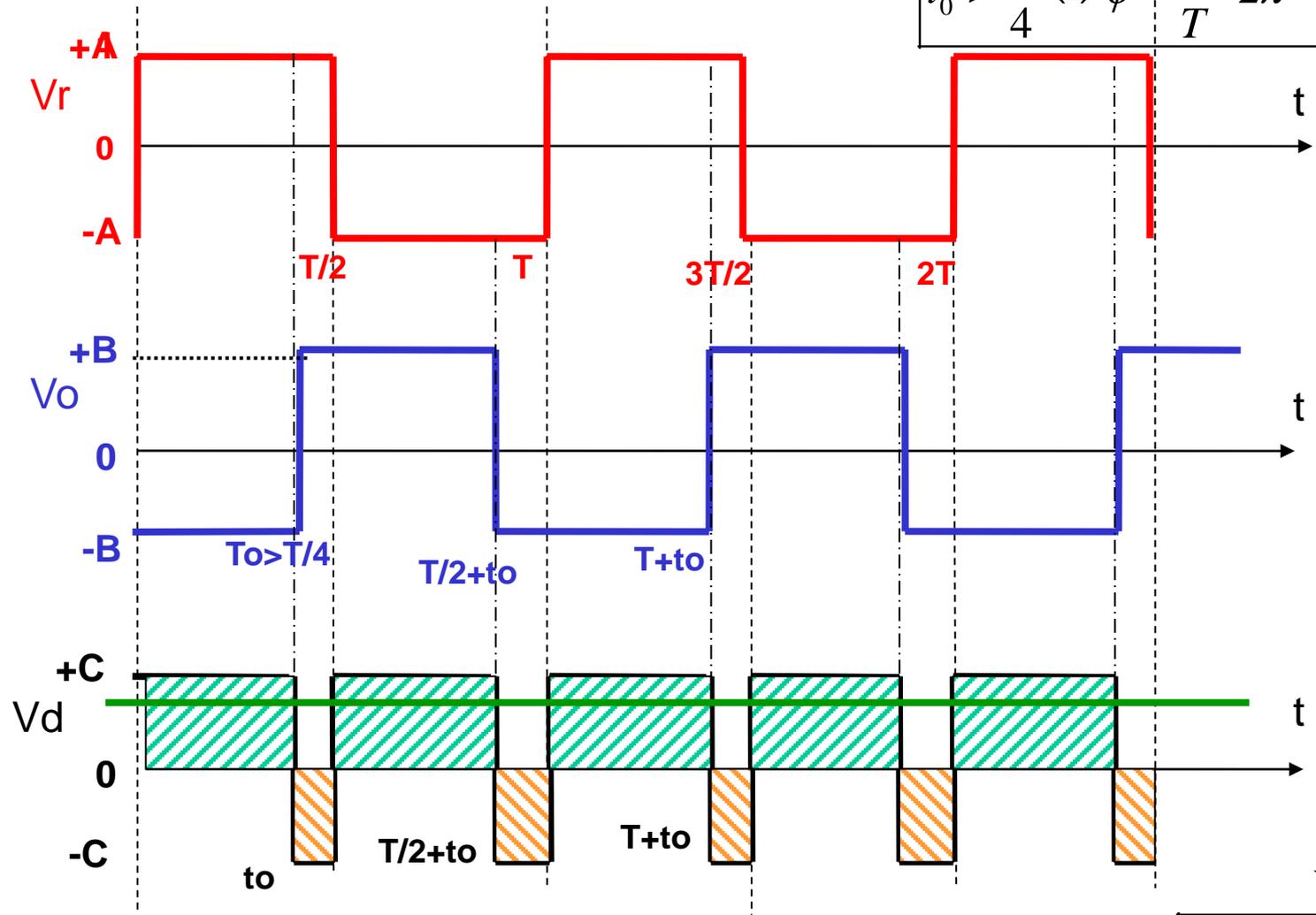
$$\langle V_d \rangle = \bar{V}_d < 0$$

# Comparadores de Fase / Frecuencia – (10)

## Compradores Analógicos (9) – Célula de Gilbert (4)

Caso a)  $f_r = f_o$

$$t_0 > \frac{T}{4} \Leftrightarrow \phi = \frac{t_0}{T} \cdot 2\pi = \frac{T/4}{T} \cdot 2\pi > \frac{\pi}{2}$$

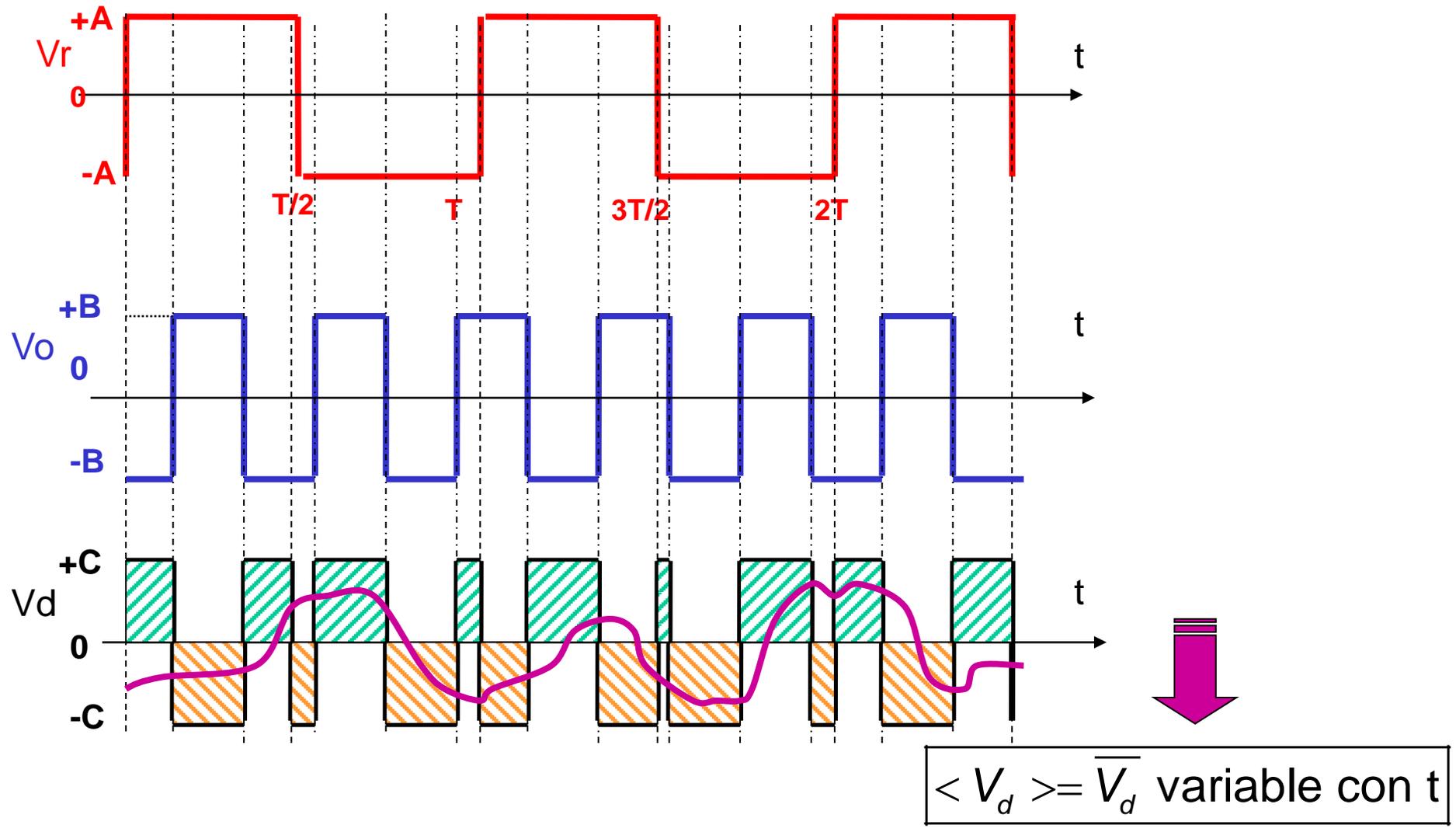


$$\langle V_d \rangle = \overline{V_d} > 0$$

# ⚡ Comparadores de Fase / Frecuencia – (11)

## ~ Compradores Analógicos (10) – Célula de Gilbert (5)

Caso a)  $f_r \neq f_o$



# Comparadores de Fase / Frecuencia - (12)

## Comparador de Fase Or- Exclusiva - (1)

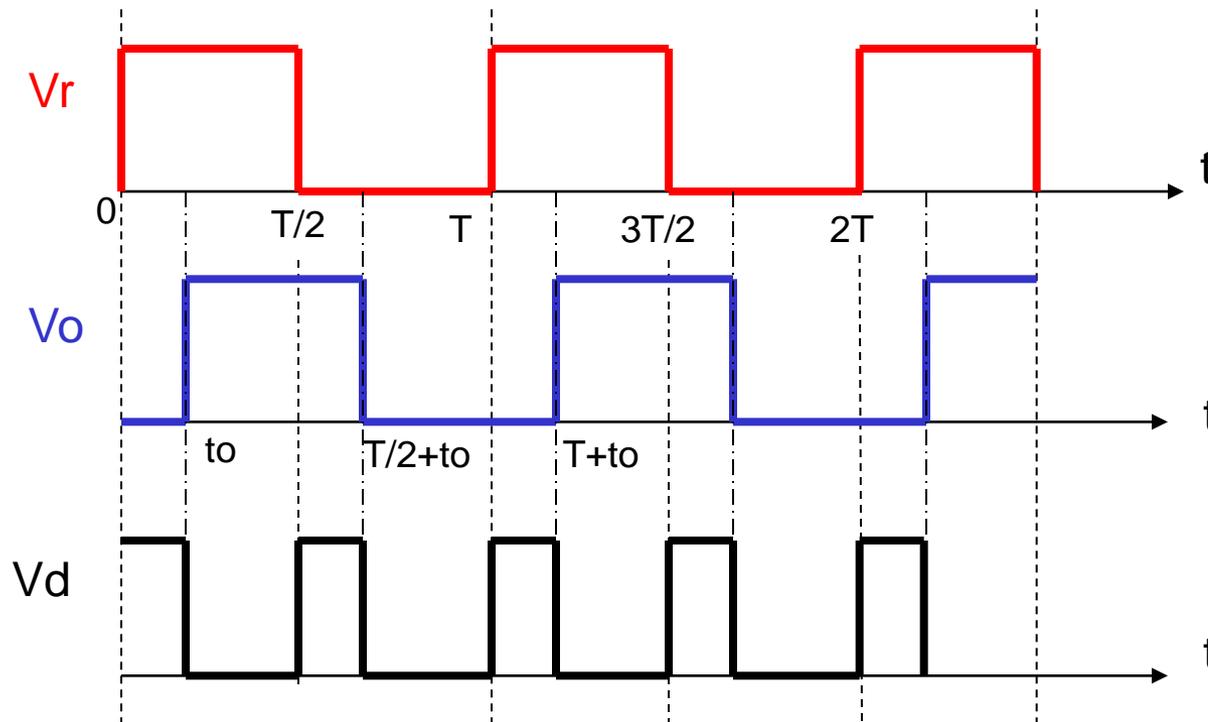
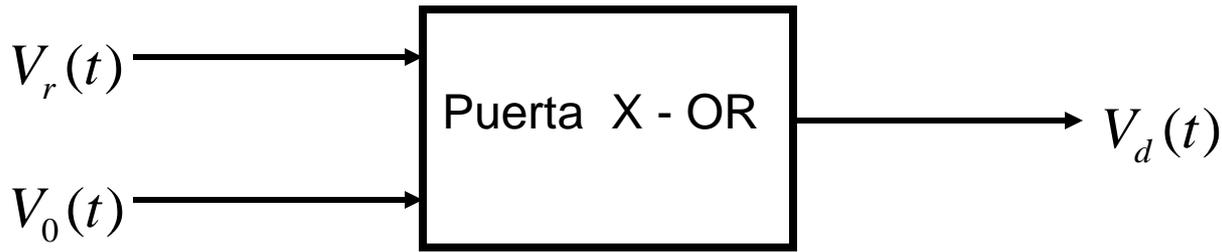


Tabla de la Verdad

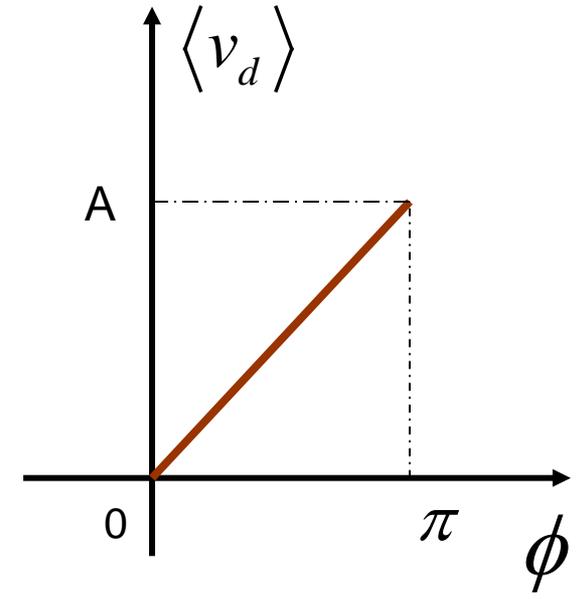
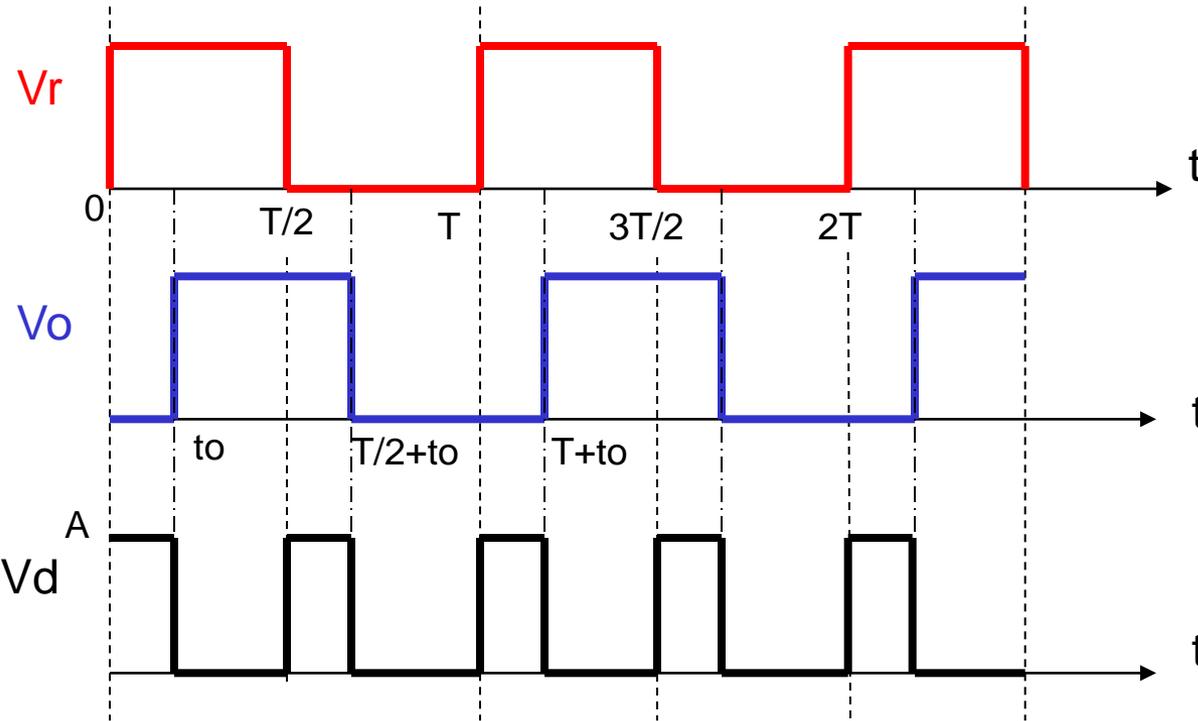
$V_r$	$V_o$	$V_d$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$T \Leftrightarrow 2\pi$$

$$t_o \Leftrightarrow \phi = \frac{t_o}{T} \cdot 2\pi$$

## ⚡ Comparadores de Fase / Frecuencia - (13)

~ Comparador de Fase Or- Exclusiva – (2) - Caso 1a: Vr , Vo de igual frecuencia y ciclo de trabajo 50 %,  $0 \leq t_0 \leq T/2$

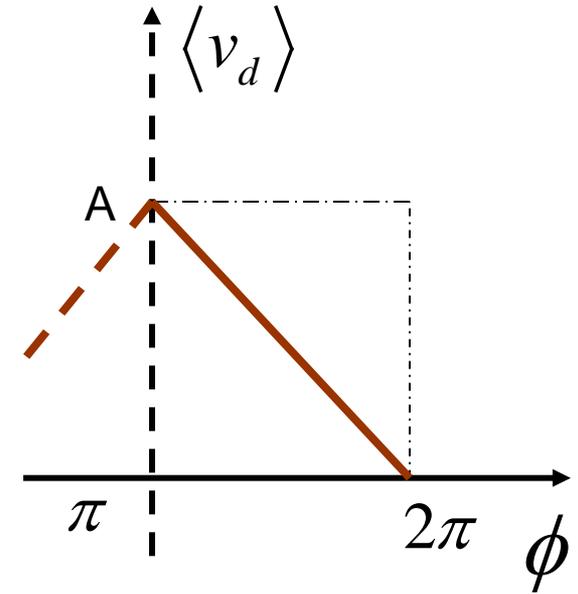
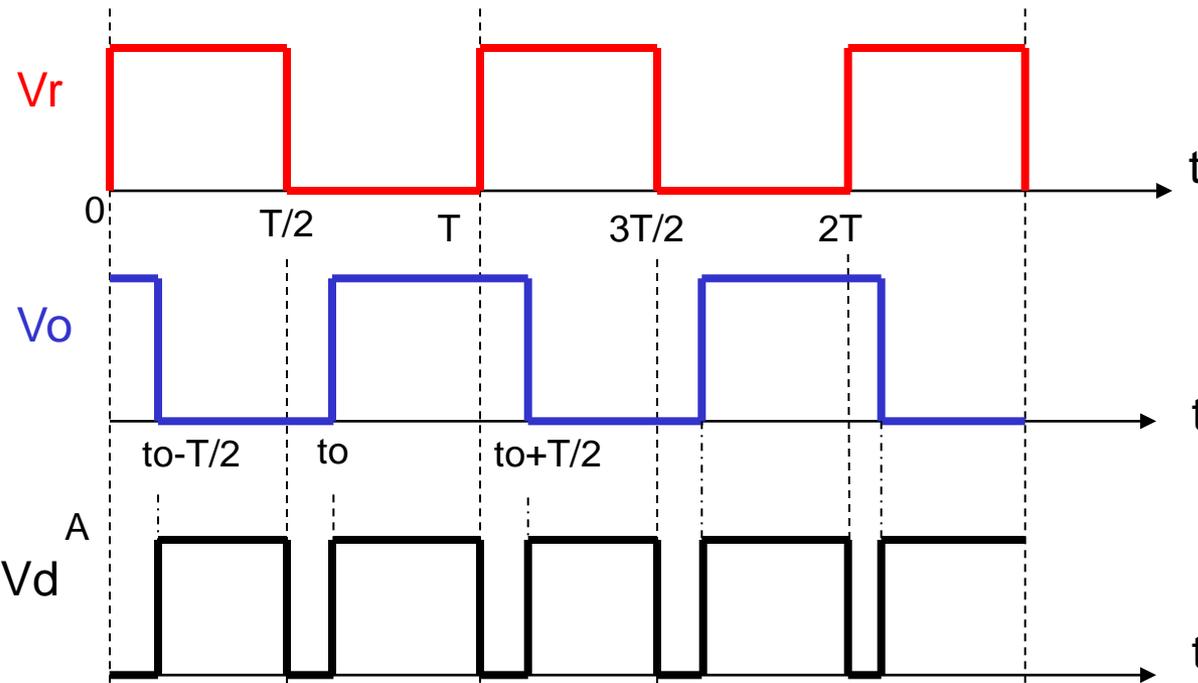


$$\langle v_d(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T v_d(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \left[ \int_0^{t_0} +A \cdot dt + \int_{t_0}^{T/2} 0 \cdot dt + \int_{T/2}^{T/2+t_0} +A \cdot dt + \int_{T/2+t_0}^T 0 \cdot dt \right] =$$

$$\frac{1}{T} A \cdot [t_0 + T/2 + t_0 - T/2] = A \frac{2t_0}{T} = \frac{2A\phi}{2\pi} = \frac{A\phi}{\pi} \quad (\text{V/rad}) \quad \begin{matrix} 0 \leq t_0 \leq T/2 \\ 0 \leq \phi \leq \pi \end{matrix}$$

## : Comparadores de Fase / Frecuencia - (14)

~ Comparador de Fase Or- Exclusiva – (3) - Caso 1b: Vr , Vo de igual frecuencia y ciclo de trabajo 50 %,  $T/2 \leq t_0 \leq T$



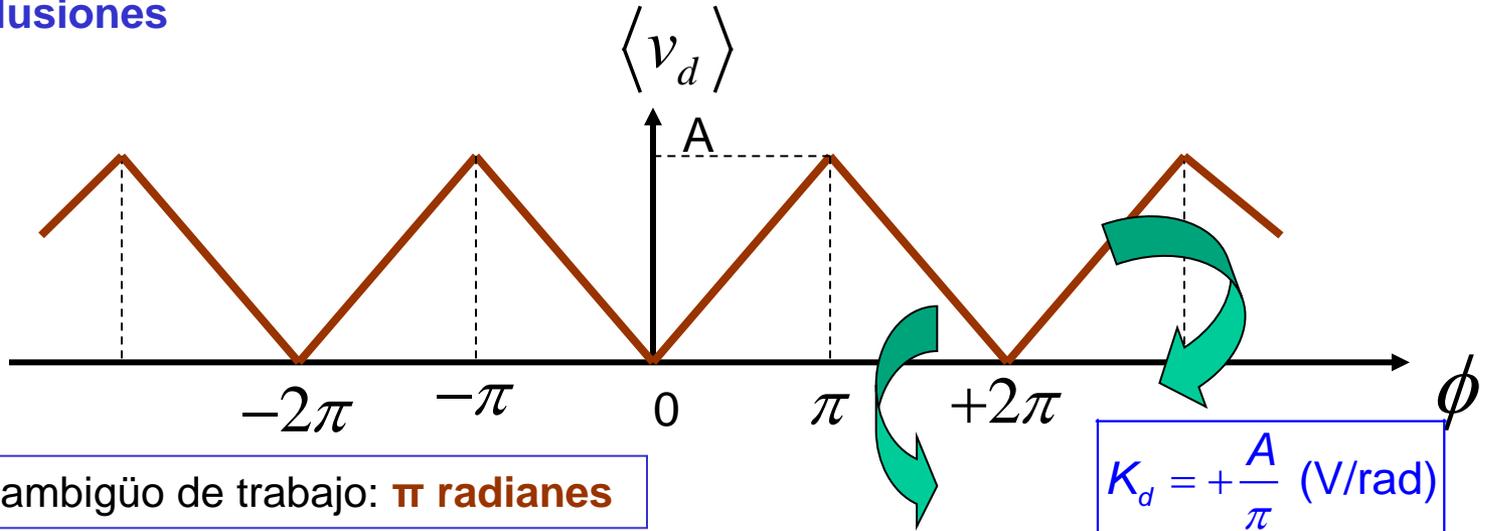
$$\langle v_d(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T v_d(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \left[ \int_0^{t_0-T/2} 0 \cdot dt + \int_{t_0-T/2}^{T/2} +A \cdot dt + \int_{T/2}^{t_0} 0 \cdot dt + \int_{t_0}^T +A \cdot dt \right] =$$

$$\frac{1}{T} A \cdot [T/2 - (t_0 - T/2) + T - t_0] = A \frac{2(T - t_0)}{T} = 2 \cdot A \cdot \left[ 1 - \frac{t_0}{T} \right] = 2 \cdot A \cdot \left[ 1 - \frac{\phi}{2\pi} \right] =$$

$$= 2 \cdot A \cdot \left[ \frac{2\pi - \phi}{2\pi} \right] = A \cdot \left[ \frac{2\pi - \phi}{\pi} \right] \text{ (V/rad)} \quad \begin{array}{l} T/2 \leq t_0 \leq T \\ \pi \leq \phi \leq 2\pi \end{array}$$

## ⚡ Comparadores de Fase / Frecuencia - (15)

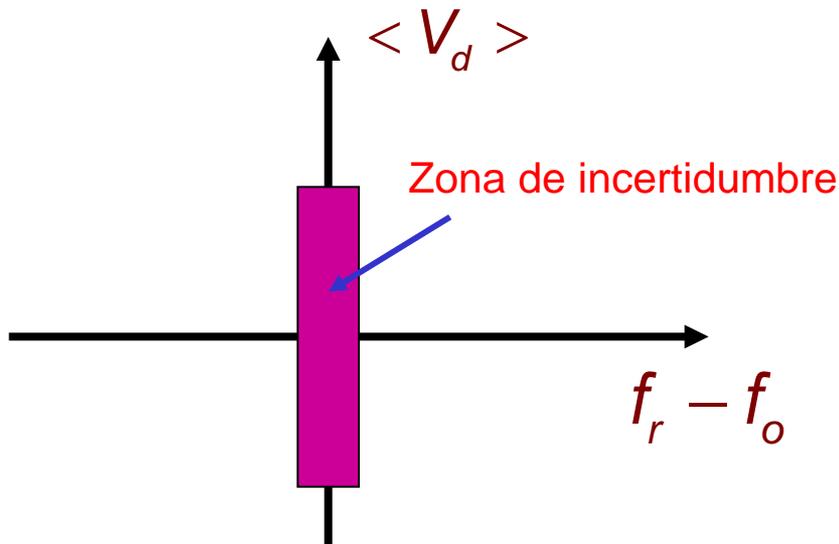
~ Comparador de Fase Or- Exclusiva -(4) -  $V_r$ ,  $V_o$  de igual frecuencia y ciclo de trabajo 50 %, - Conclusiones



- Margen no-ambigüo de trabajo:  $\pi$  radianes

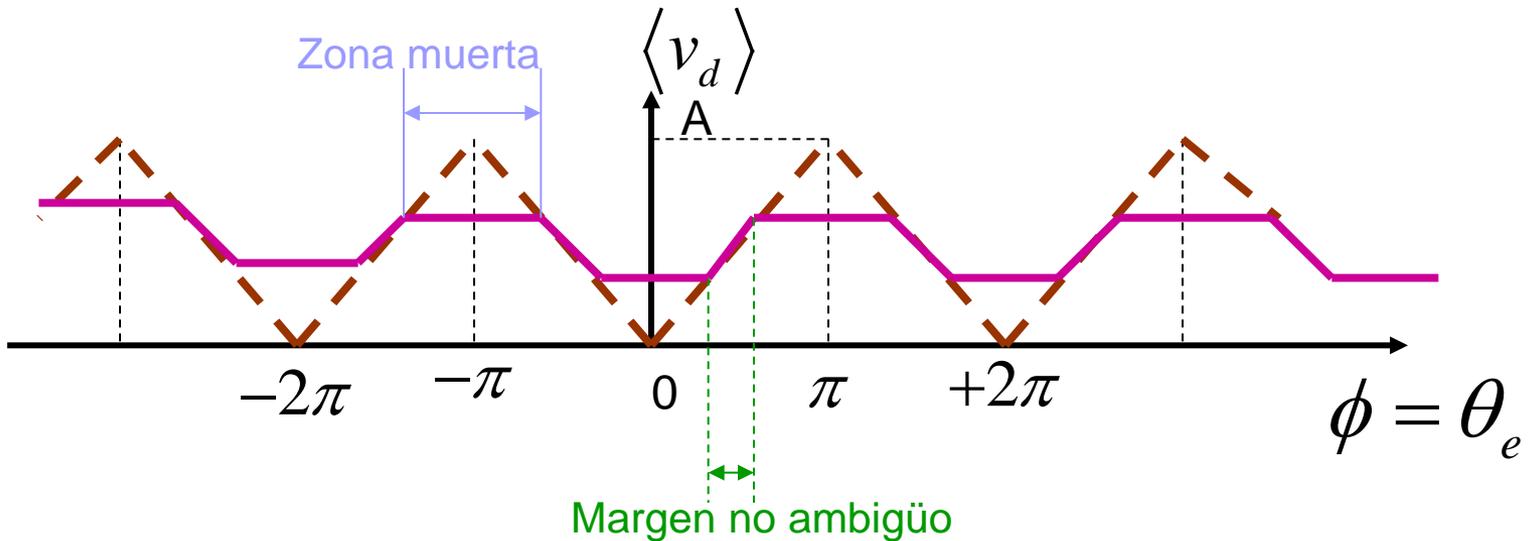
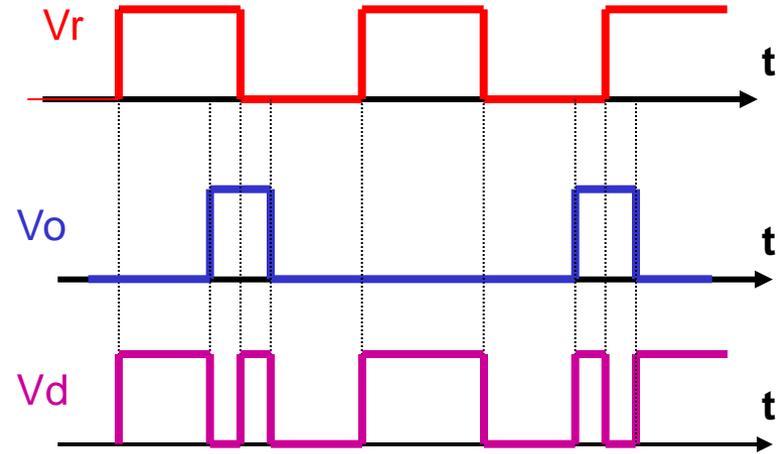
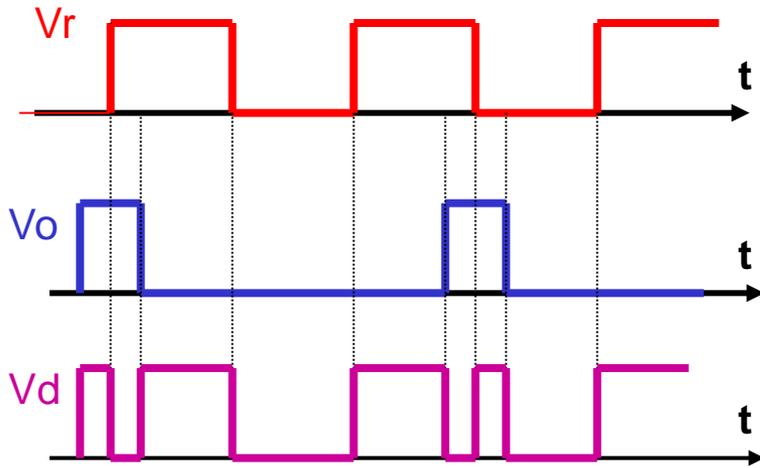
$$K_d = +\frac{A}{\pi} \text{ (V/rad)}$$

$$K_d = -\frac{A}{\pi} \text{ (V/rad)}$$



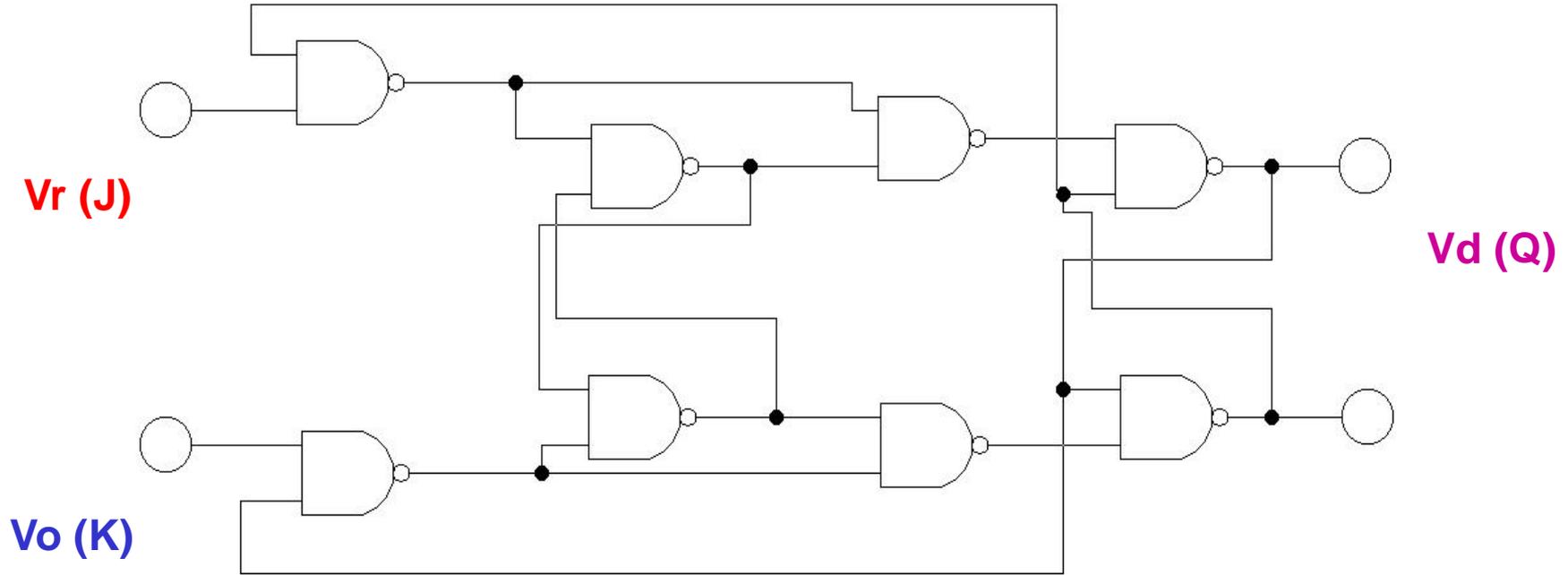
## ⚡ Comparadores de Fase / Frecuencia - (16)

~ Comparador de Fase Or- Exclusiva -(4) -  $V_r$ ,  $V_o$  de diferente frecuencia y /o ciclo de trabajo diferente a 50 %.



# ⌘ Comparadores de Fase / Frecuencia - (17)

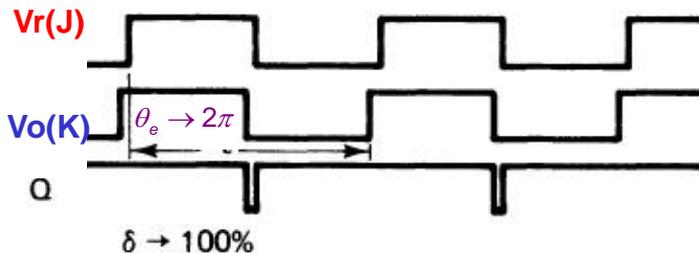
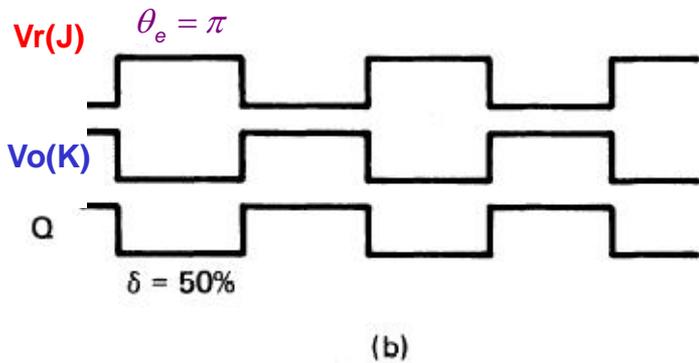
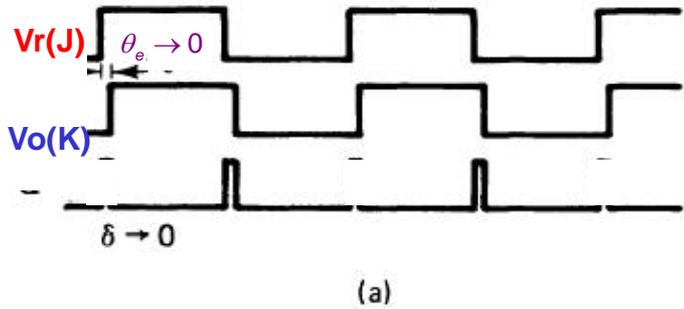
~ Comparador de Fase Biestable J-K (1) -  $f_r = f_o$ , Ciclo trabajo 50 %



<b>Vr(J)</b>	1	1	0	0
<b>Vo(K)</b>	1	0	1	0
<b>Q<sub>n+1</sub></b>	<b>(-)Q<sub>n</sub></b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>Q<sub>n</sub></b>

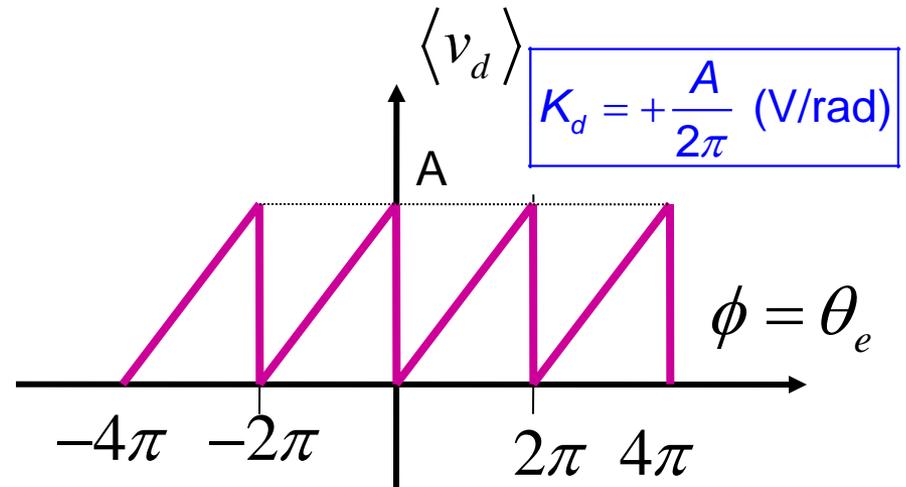
# ∴ Comparadores de Fase / Frecuencia - (18)

~ Comparador de Fase Biestable J-K (2) -  $f_r = f_o$ ,



$$\delta = \text{Ciclo de Trabajo}$$

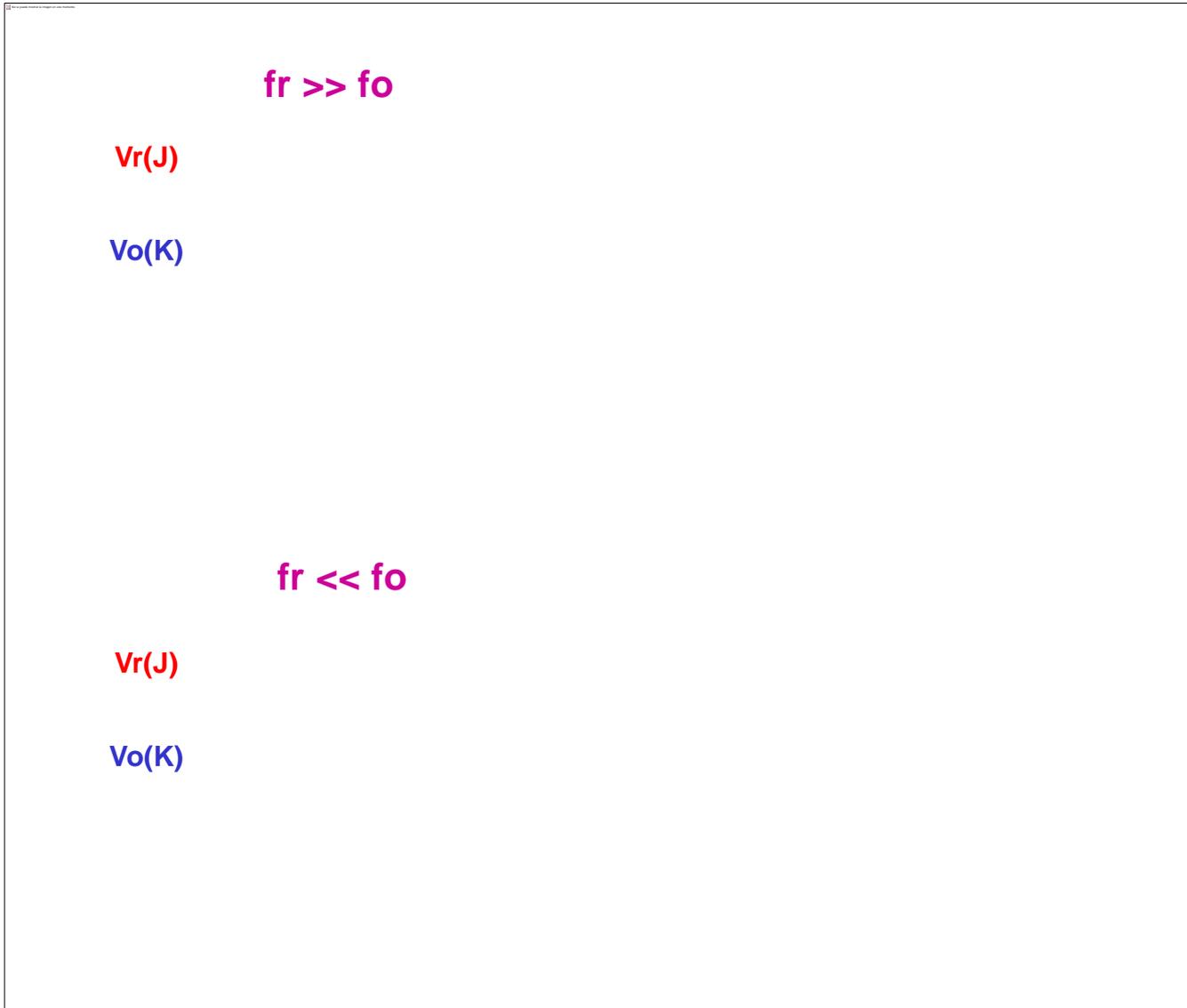
- 😊 Insensible al ciclo de trabajo si es activo por flancos.



- Margen no-ambiguo de trabajo: **2π radianes**

## ⚡ Comparadores de Fase / Frecuencia - (19)

- Comparador de Fase Biestable J-K (3) -  $f_r$  muy diferente de  $f_o$ ,

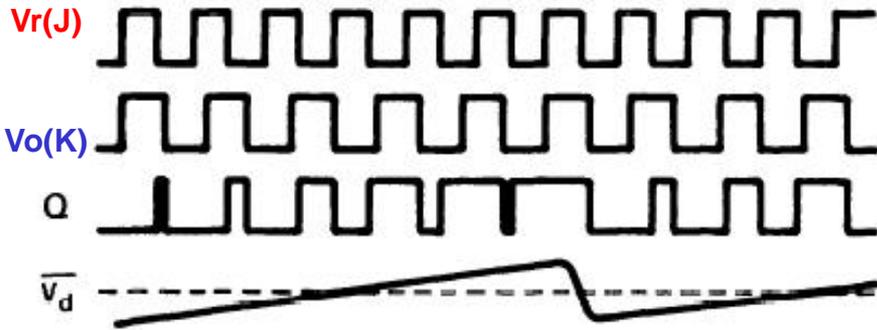


# ⚡ Comparadores de Fase / Frecuencia - (20)

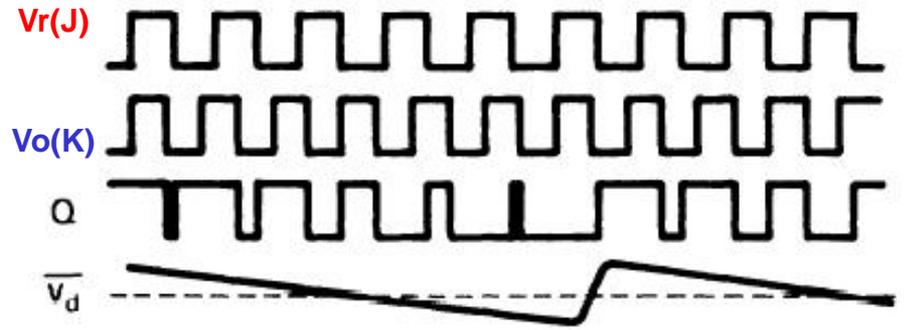
~ Comparador de Fase Biestable J-K (4) -  $f_r$  ligeramente diferente a  $f_o$

$$f_r \approx 1,1 \cdot f_o$$

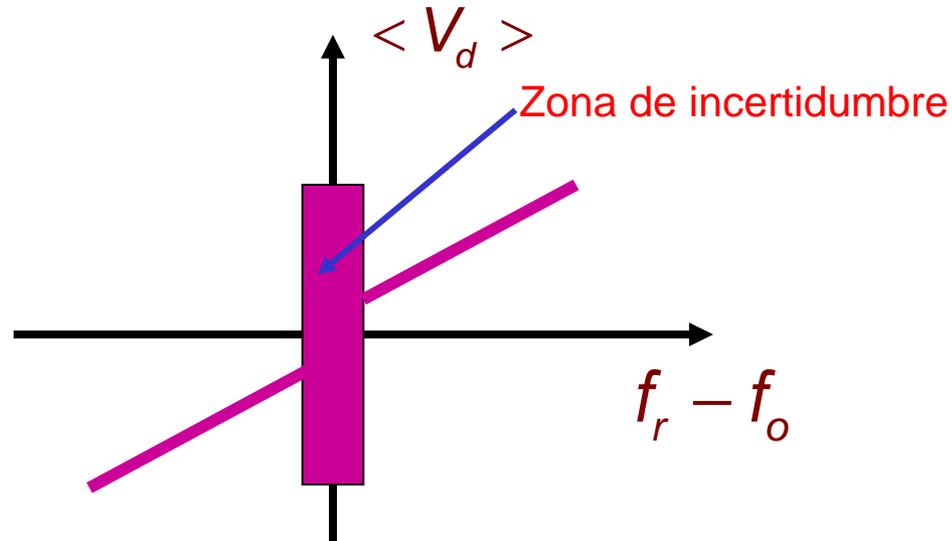
$$f_r \approx 0,9 \cdot f_o$$



(a)

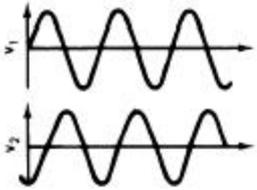
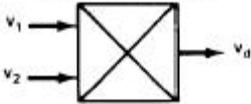
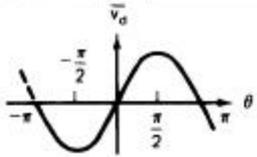
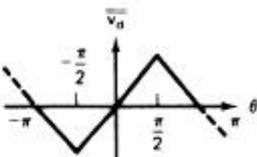
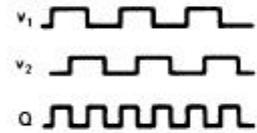
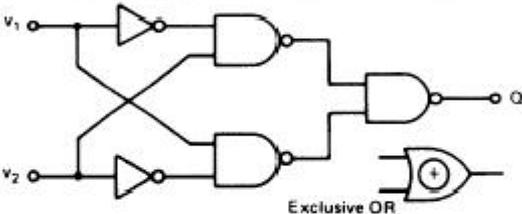
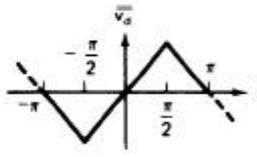
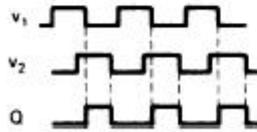
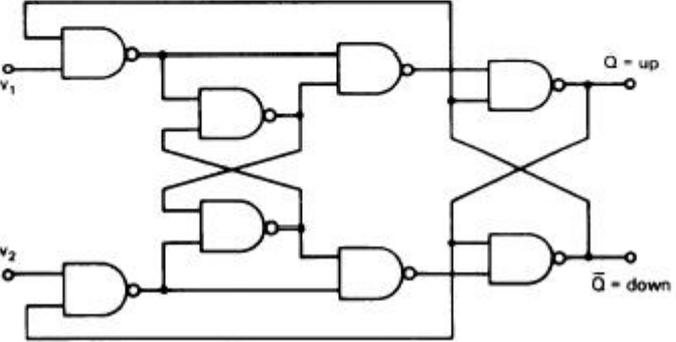
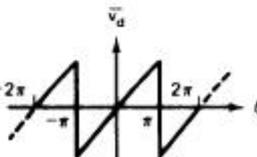


(b)



# ⚡ Comparadores de Fase / Frecuencia - (21)

## ⌋ Tabla resumen

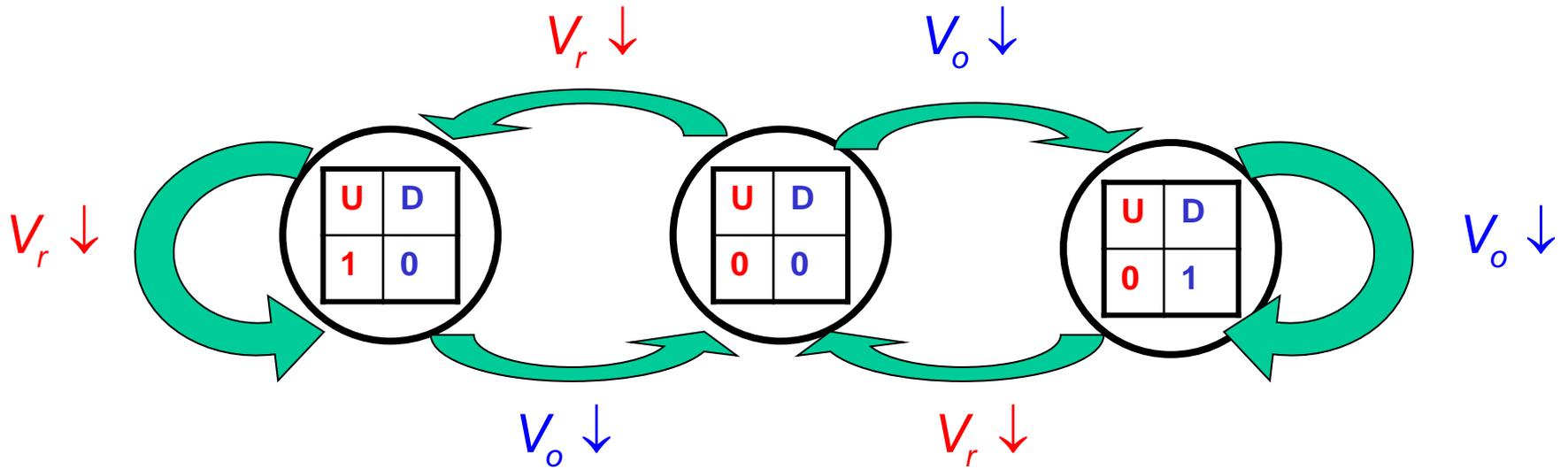
	<p>Four-quadrant-multiplier</p> 	
<p><math>v_1</math> } Square waves <math>v_2</math> }</p>		
	 <p>Exclusive OR</p>	
	 <p>JK master/slave FF</p> <p>Q = up <math>\bar{Q}</math> = down</p>	



# ⚡ Comparadores de Fase / Frecuencia - (23)

~ Comparador de Fase Tri-State (2) -  $f_r = f_o$  ,  $V_r$  adelantada a  $V_o$

## Diagrama de Transición de Estados



## ⚡ Comparadores de Fase / Frecuencia - (24)

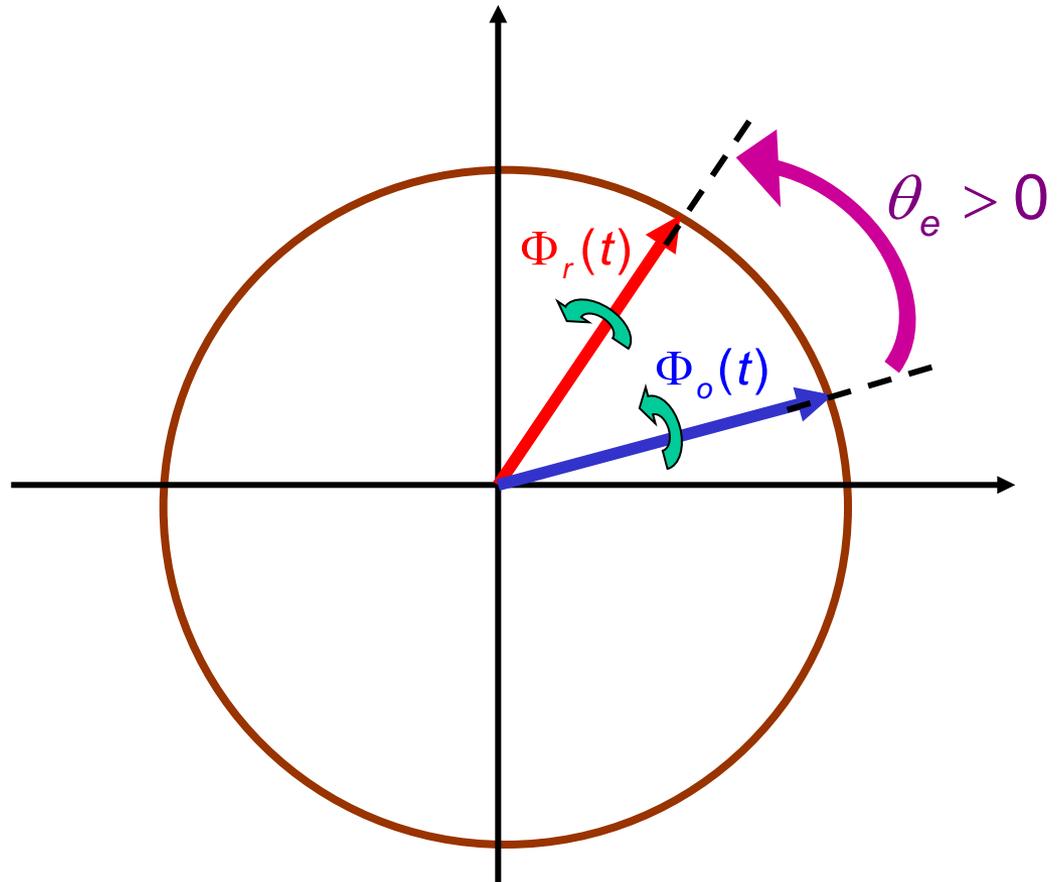
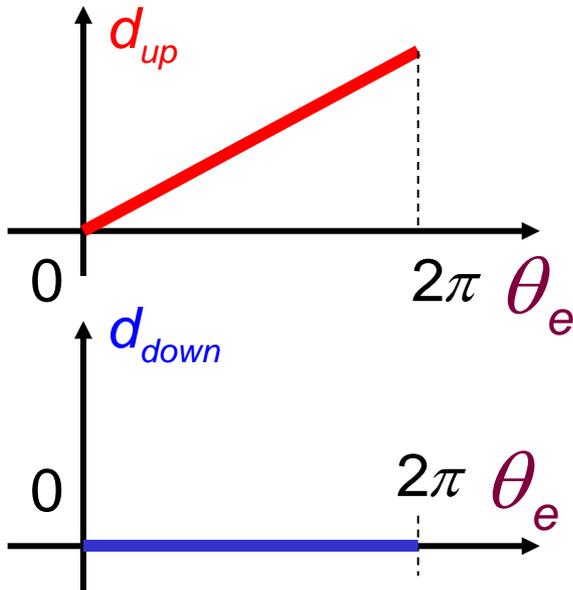
~ Comparador de Fase Tri-State (3) -  $f_r = f_o$  , Vr adelantada a Vo

$$V_r(t) = \text{Re} \left[ e^{j \cdot \Phi_r(t)} \right] = \text{Re} \left[ e^{j \cdot (\omega_r \cdot t + \theta_r)} \right]$$

$$V_o(t) = \text{Re} \left[ e^{j \cdot \Phi_o(t)} \right] = \text{Re} \left[ e^{j \cdot (\omega_o \cdot t + \theta_o)} \right] \Rightarrow \theta_e(t) = \theta_r(t) - \theta_o(t)$$

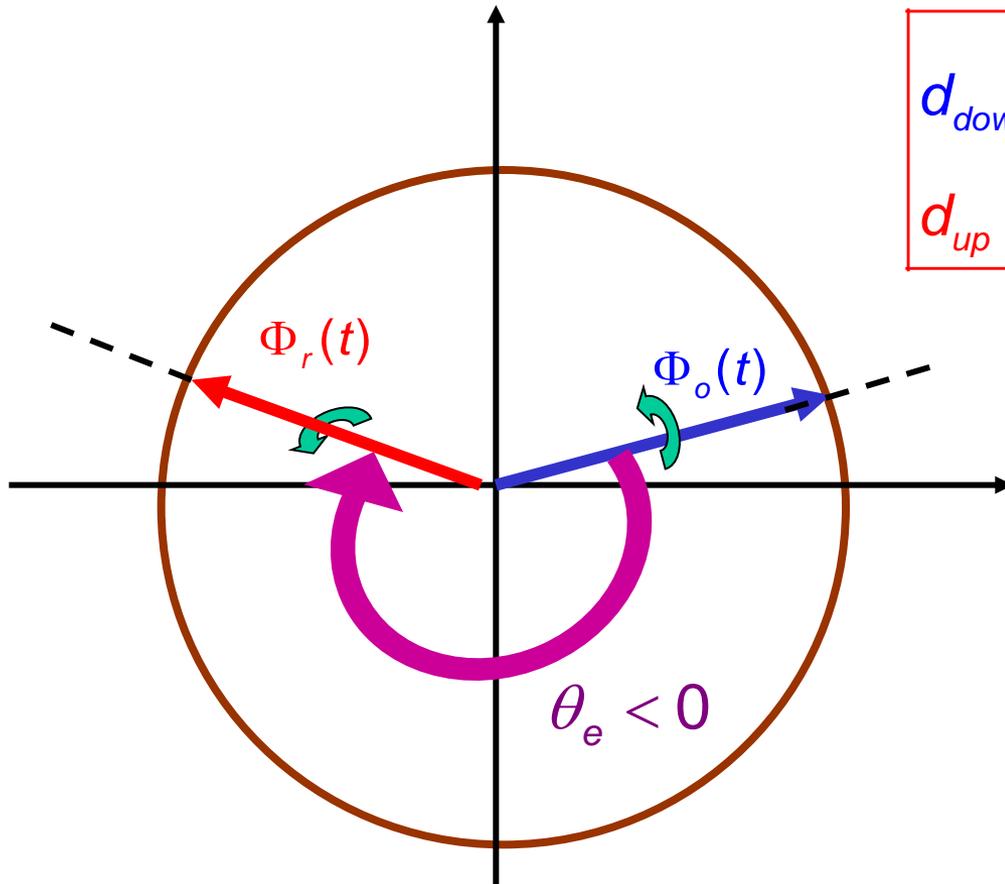
$$d_{up} = \frac{\theta_e}{2\pi}$$

$$d_{down} = 0$$

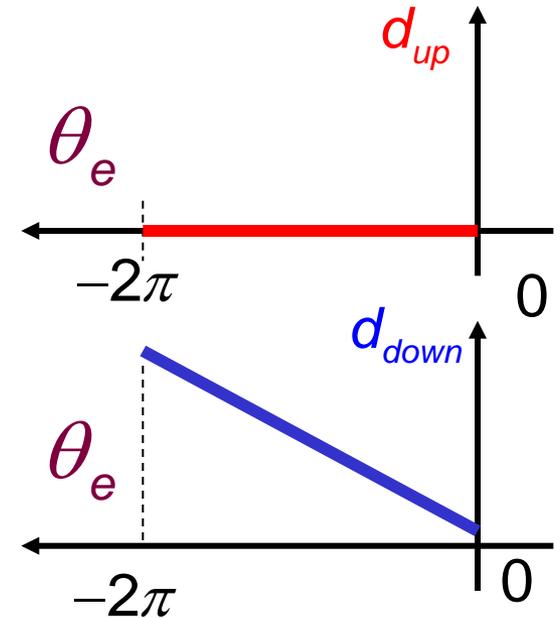


# ⚡ Comparadores de Fase / Frecuencia - (25)

~ Comparador de Fase Tri-State (4) -  $f_r = f_o$ ; Vo adelantada a Vr

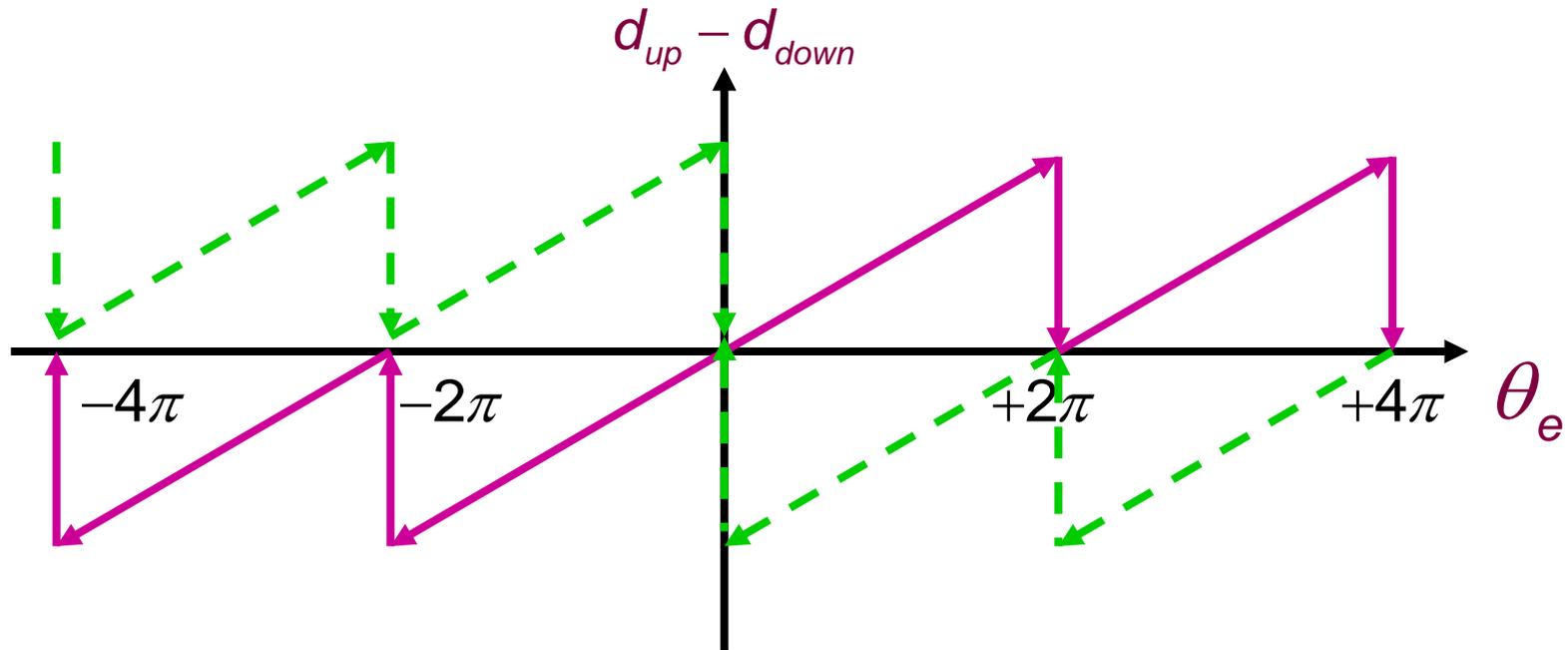


$$d_{down} = \frac{|\theta_e|}{2\pi}$$
$$d_{up} = 0$$



## ⚡ Comparadores de Fase / Frecuencia - (26)

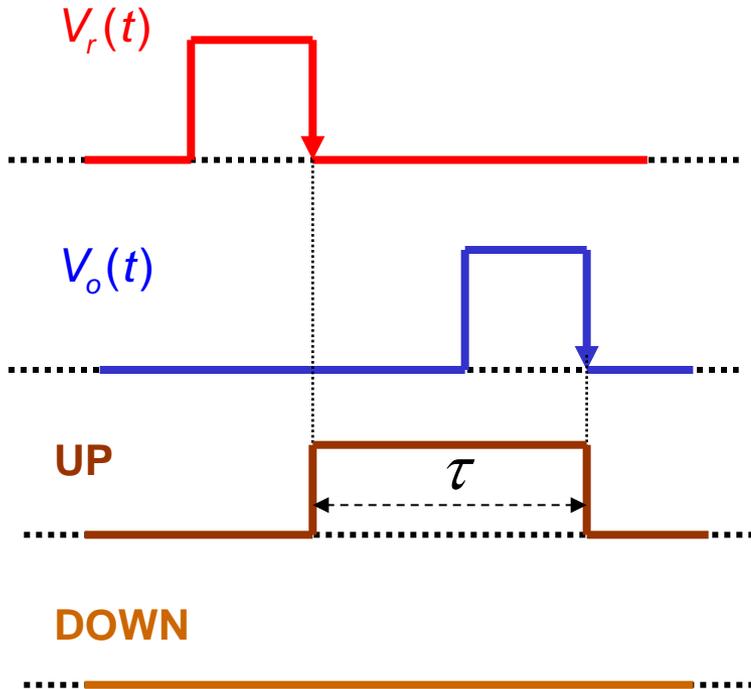
~ Comparador de Fase Tri-State (5) -  $f_r = f_o$ ;



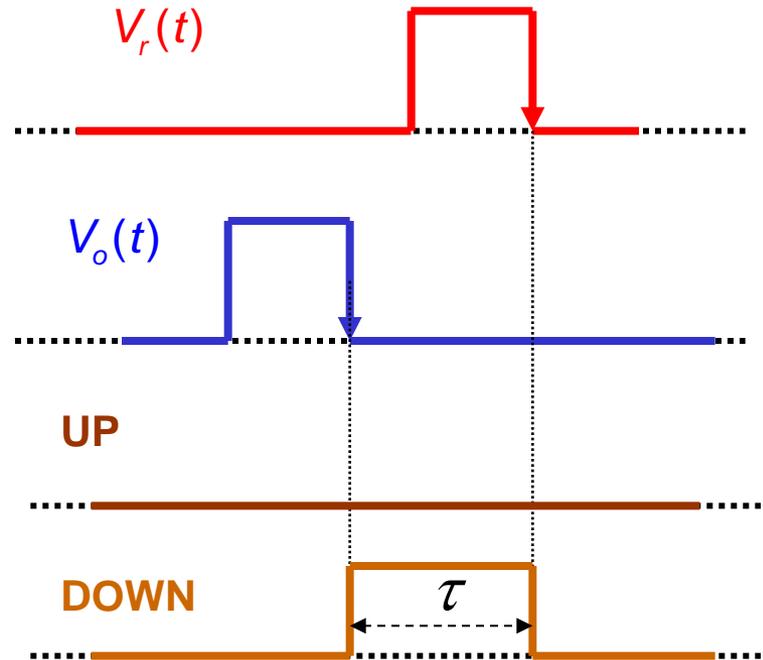
# ∴ Comparadores de Fase / Frecuencia - (27)

~ Comparador de Fase Tri-State (6) -  $f_r = f_o$ ; Bomba de Carga (1)

Vr adelantada a Vo

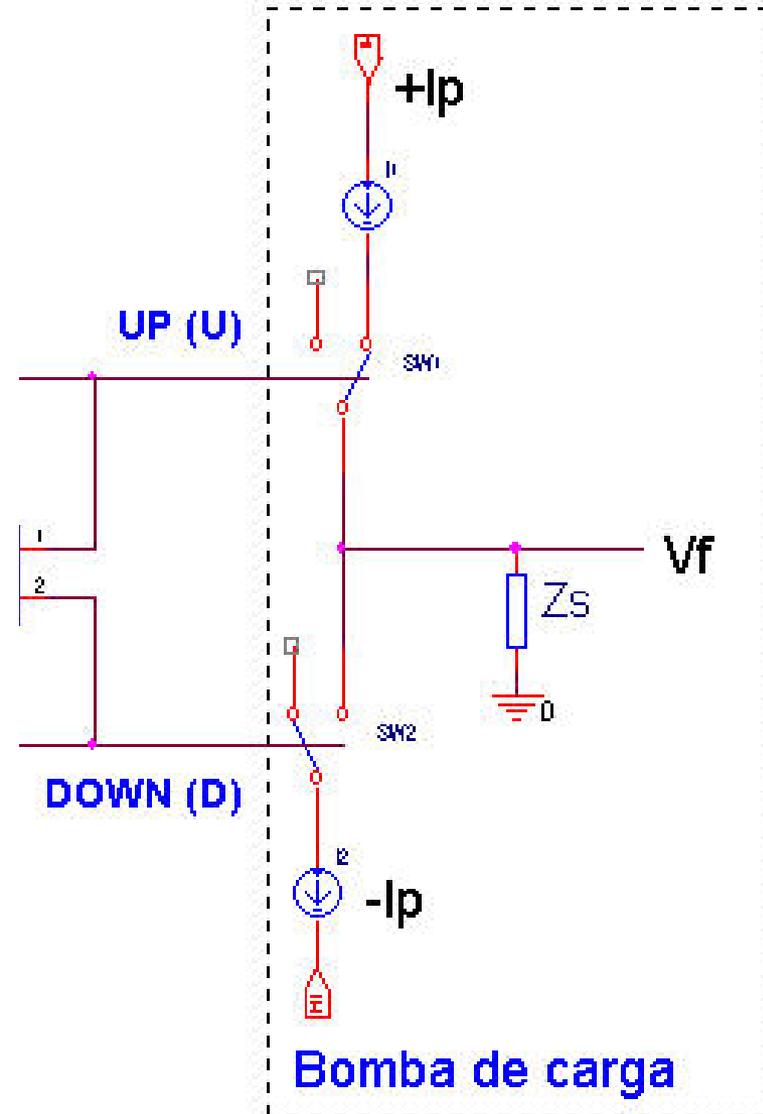
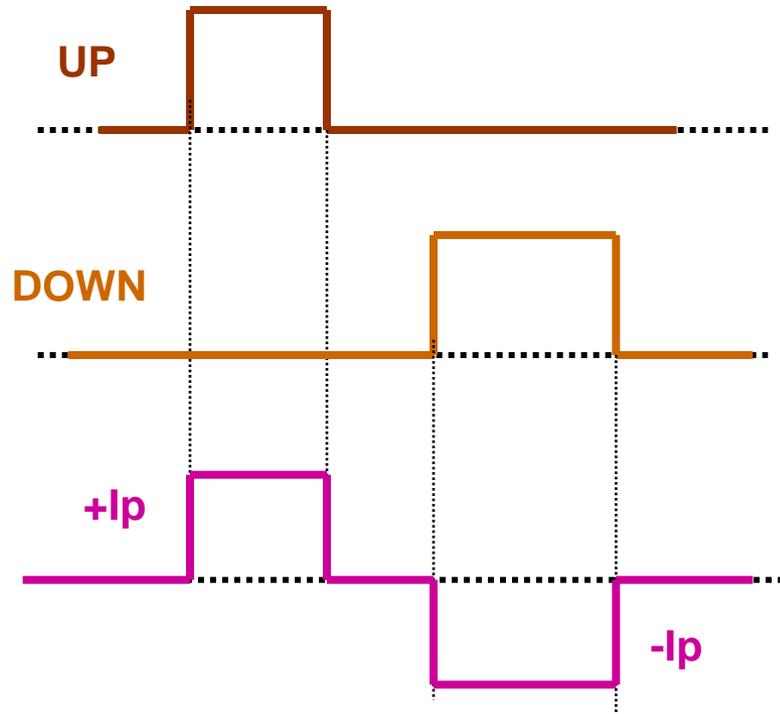


Vo adelantada a Vr



# Comparadores de Fase / Frecuencia - (28)

Comparador de Fase Tri-State (7) -  $f_r = f_o$ ; Bomba de Carga (2)



# ∴ Comparadores de Fase / Frecuencia - (29)

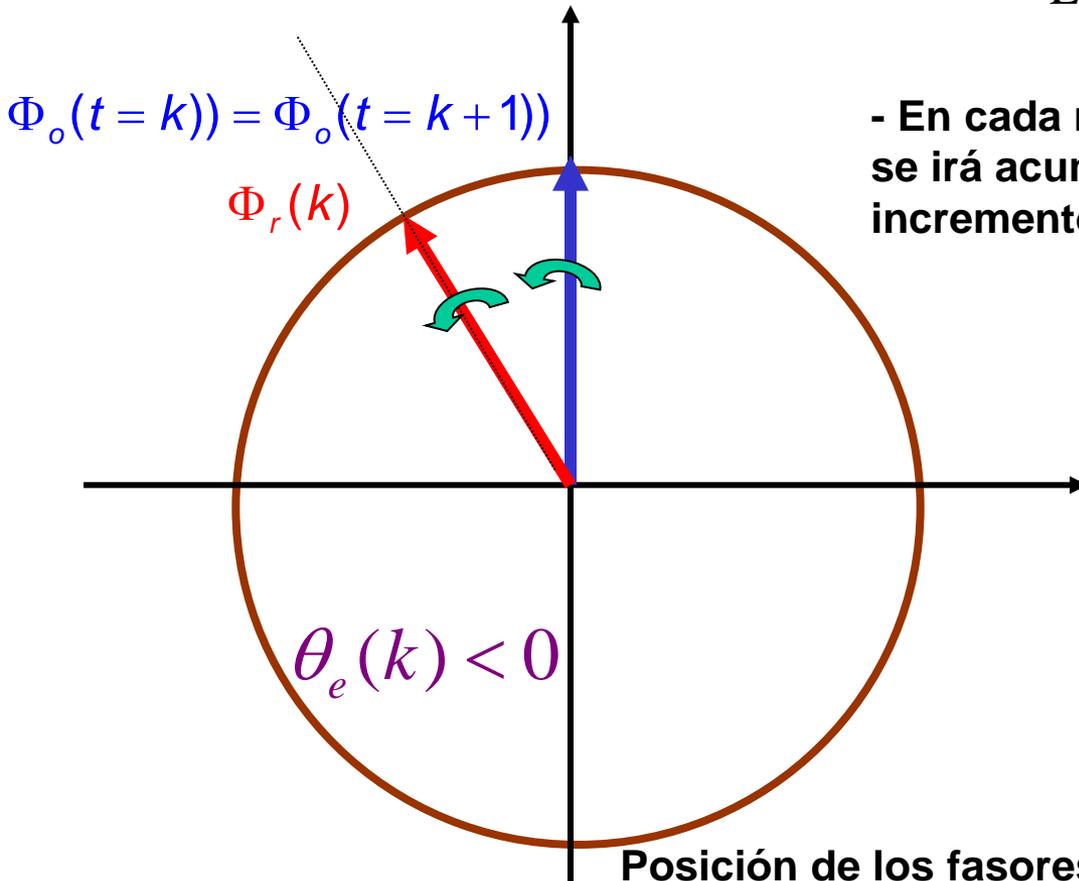
~ Comparador de Fase Tri-State (1) -  $f_r \neq f_o$  , Caso a)  $f_o > f_r$  (1)

$$\Rightarrow \omega_o = \omega_r + \Delta\omega \text{ (con } \Delta\omega > 0)$$

Hay que distinguir dos situaciones diferentes: **SITUACIÓN A**

Tomamos el **fasor más rápido como referencia** y lo dibujamos pasando justamente por el eje imaginario positivo y un período después:

$$\text{Llamamos } V_o(k) = V_o\left(t = k \cdot \frac{2\pi}{\omega_r + \Delta\omega}\right)$$



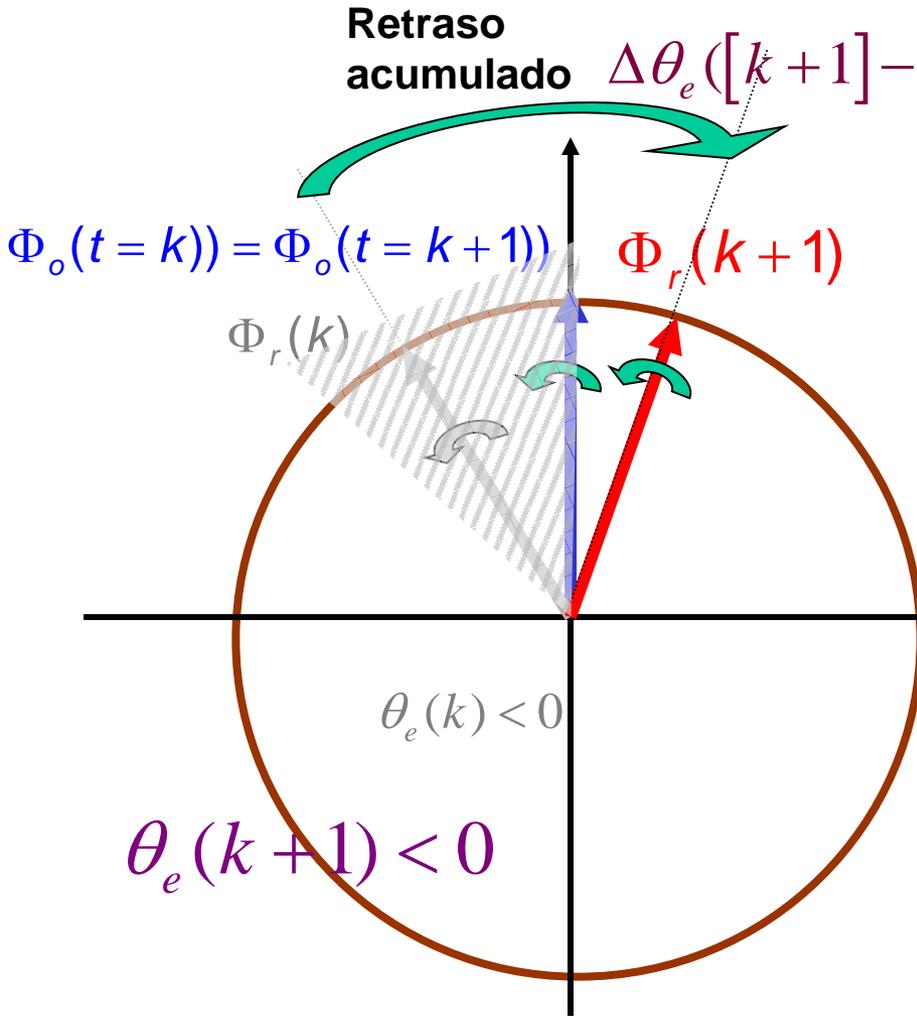
- En cada rotación del fasor de  $V_o$ , el retraso de  $V_r$  se irá acumulando progresivamente. Este incremento adicional valdrá:

$$\Delta\theta_e = -\frac{\Delta\omega}{\omega_r + \Delta\omega}$$

Posición de los fasores en el instante k.

# Comparadores de Fase / Frecuencia - (30)

## Comparador de Fase Tri-State (2) - $f_r \neq f_o$ , Caso a) $f_o > f_r$ (2) SITUACIÓN A



-Mientras el fasor  $V_r(k)$  esté dentro inicialmente de la zona rayada, nunca llegará a cruzar el eje positivo (flanco de bajada activo) en una vuelta completa de  $V_o$ .

-Por lo tanto:

- Señal DOWN estará a "1" durante todo el ciclo y la señal UP nunca llegará a valer "1".

- Es decir:

$$\left. \begin{matrix} d_{up} = 0 \\ d_{down} = 1 \end{matrix} \right\} -2\pi \leq \theta_e(k) \leq -(2\pi - \text{Area rayada}) \Rightarrow$$

$$\text{Area rayada} = \Delta\theta_e(k) \Rightarrow 2\pi - |\Delta\theta_e(k)| = 2\pi \cdot \frac{\omega_r}{\omega_r + \Delta\omega}$$

$$\Rightarrow -2\pi \leq \theta_e(k) \leq -2\pi \cdot \frac{\omega_r}{\omega_r + \Delta\omega}$$

Posición de los fasores en el instante  $k+1$ .

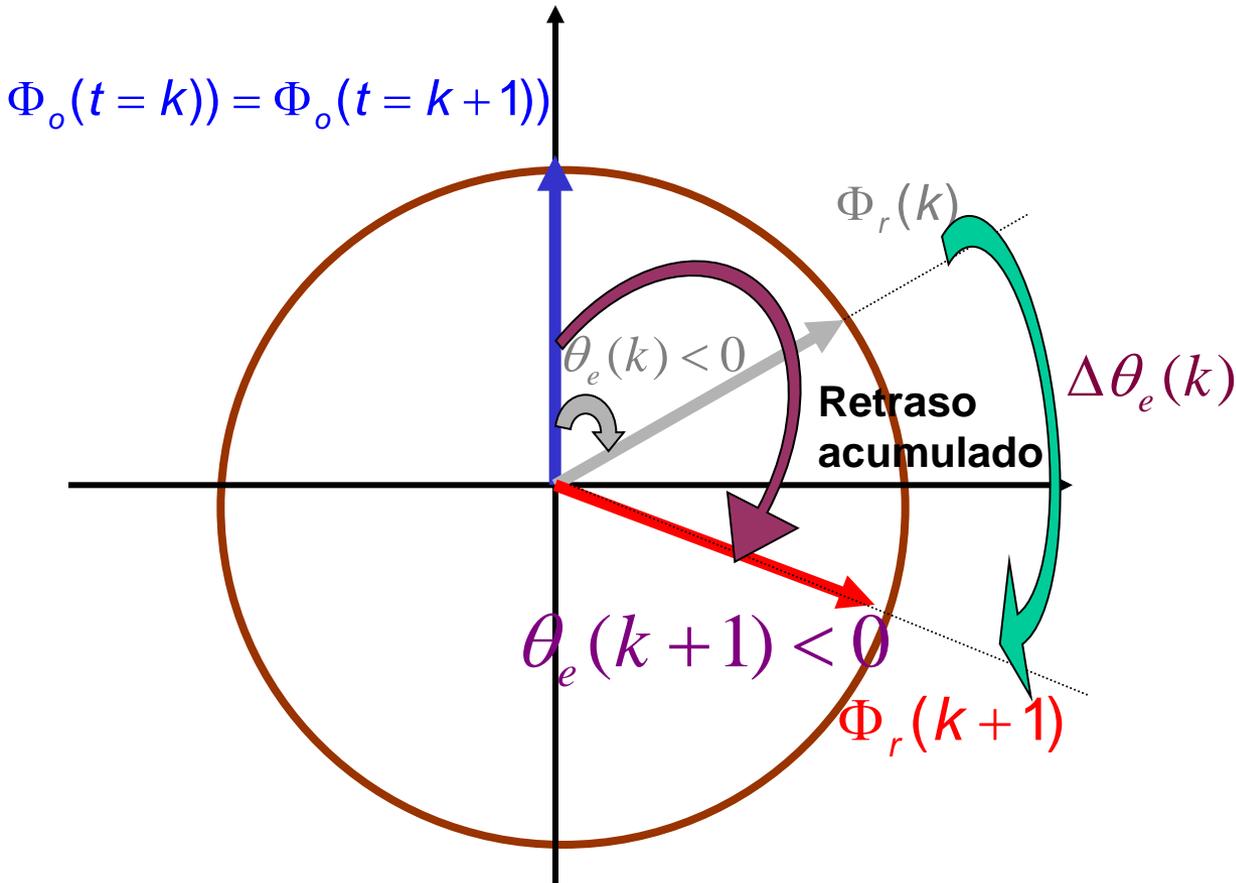
# ∴ Comparadores de Fase / Frecuencia - (31)

~ Comparador de Fase Tri-State (3) -  $f_r \neq f_o$ , Caso a)  $f_o > f_r$  (3) **SITUACIÓN B**

$$\Rightarrow \omega_o = \omega_r + \Delta\omega \text{ (con } \Delta\omega > 0)$$

Por oposición a la situación A ocurrirá cuando:  
y se representa como

$$-2\pi \cdot \frac{\omega_r}{\omega_r + \Delta\omega} \leq \theta_e(k) \leq 0$$



Falta terminarmccccccc

# · Márgenes de Funcionamiento de un PLL (SINTETIZADOR) (1)

## · Margen de Enganche (Lock Range) $2W_L$

Es el margen de frecuencias de entrada al PLL que el VCO es capaz de seguir partiendo que inicialmente el sistema está enganchado. Refleja el comportamiento estático del PLL

- Se supone simétrico alrededor de la frecuencia libre del VCO.

- El comportamiento es prácticamente lineal dentro de este margen.

· Ejemplo: Margen de enganche para un PLL que utiliza un comparador de fase analógico

$$v_d = k_d \cdot \text{sen}(\theta_r - \theta_o) = k_d \cdot \text{sen}\theta_e \Rightarrow \text{sen}\theta_e = \frac{v_d}{k_d} = \frac{v_d}{k / (2\pi \cdot K_v)} = \frac{v_d \cdot 2\pi \cdot K_v}{k} \Rightarrow$$

después de pasar por el filtro paso-bajo  $v_d$  se convierte en  $v_f$  luego:

$$\text{sen}\theta_e = \frac{v_f \cdot 2\pi \cdot K_v}{k} = \frac{\Delta\omega_L}{k} \text{ en los límites del comparador de fase } \theta_e = \pm\pi / 2 \Rightarrow$$

$$\Delta\omega_L = \pm k \text{ (rad / s)}$$

- El margen de enganche no depende del filtro paso-bajo, sino de la máxima tensión de salida que puede entregar el comparador de fases y a la que es capaz de responder el VCO. Esto es debido a que al ser un comportamiento estático, lo que influye en el filtro paso-bajo es el valor de  $F(0)$ .

# ⚡ Mérgenes de Funcionamiento de un PLL (SINTETIZADOR) (2)

## · Margen de Captura (Capture Range) $2W_{cap}$

Se refiere a la gama de frecuencias de entrada que pueden provocar el enganche del PLL a partir de una situación inicial de desenganche. Refleja el comportamiento dinámico del PLL.

-El proceso de adquisición o captura en un PLL o Sintetizador es un fenómeno no-lineal muy complejo de estudiar y de describir analíticamente.

-En general se admite que si la separación entre la frecuencia de entrada y la frecuencia libre es inferior al Ancho de Banda del PLL, entonces se produce antes o después el enganche.

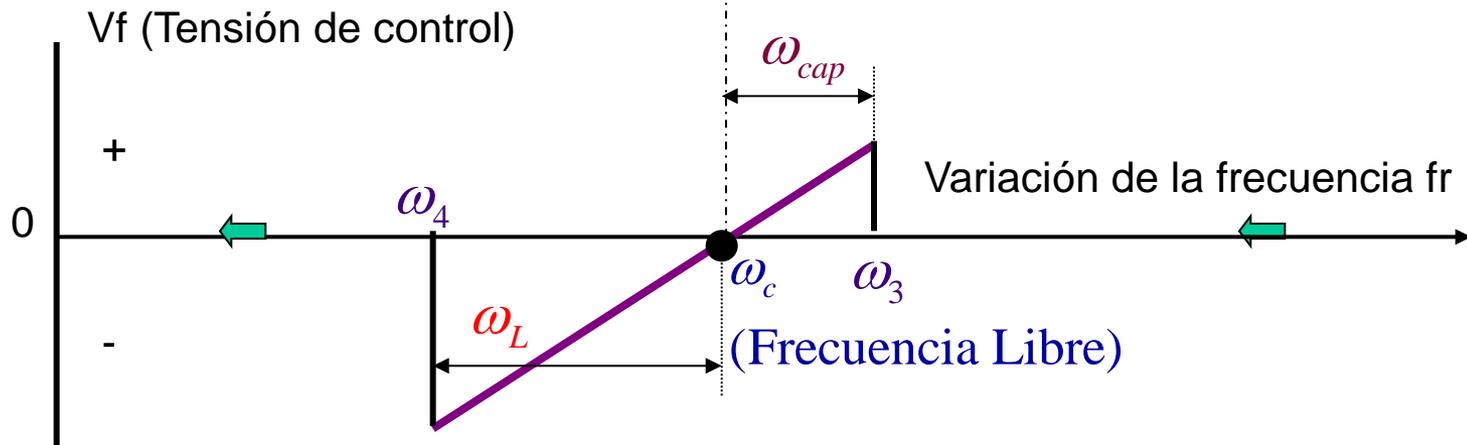
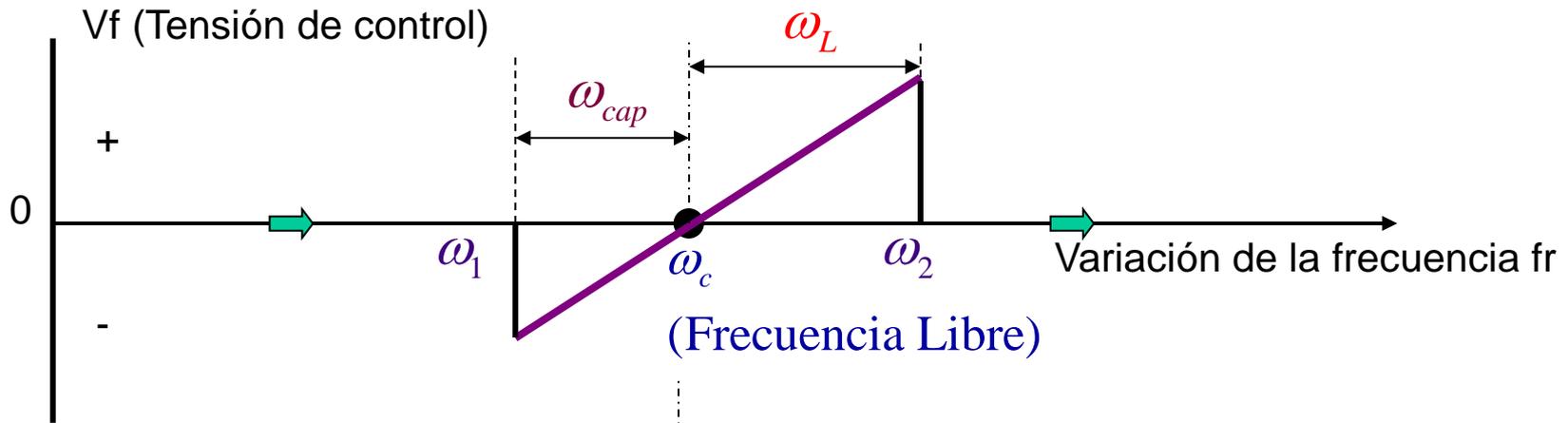
$$\omega_{cap} \leq \Delta B_{3dB}$$

Por lo anterior, es importante el Filtro Paso-Bajo utilizado.

- Como regla general, siempre se verifica que:

**MARGEN DE CAPTURA  $\leq$  MARGEN DE ENGANCHE**

## Mergeres de Funcionamiento de un PLL (SINTETIZADOR) (3)



$$\text{Margen de Enganche} = 2\omega_L = \omega_2 - \omega_4$$

$$\text{Margen de Captura} = 2\omega_{cap} = \omega_3 - \omega_1$$