



Tema 10. Representación en frecuencia.

- Introducción
- Bode
- Nyquist
- Nichols

Representación en frecuencia



Bibliografía

- Señales y Sistemas. OCW-UC3M.
- Ingeniería de Control Moderna. K. Ogata.
- Automática, OCW-UPV.
- Sistemas realimentados de control. J.J. D'azzo.
- Contemporary Communications Systems with MATLAB. J. Proakis.

Representación en frecuencia

3



Objetivos

- Conocer distintas formas de representación de la información frecuencial
- Analizar el comportamiento de los sistemas a través de su representación de respuesta frecuencial.

Representación en frecuencia



Introducción

- Supongamos un sistema LTI
 - $C(s) = G(s)R(s) \Rightarrow c(t) = g(t) * r(t)$
- Supongamos una entrada sinusoidal:
 - $r(t) = Ae^{j\omega_0 t}$
- Calculando la salida en el t:

•
$$c(t) = g(t) * r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t - \tau)g(\tau)d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{j(\omega_0(t - \tau))}g(\tau)d\tau = Ae^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-j\omega_0 \tau}d\tau$$

- $c(t) = r(t) \cdot G(s)|_{s=j\omega_0} = r(t) \cdot G(j\omega_0)$
- La exponencial (sinusoidales) es una autofunción en sistemas LTI

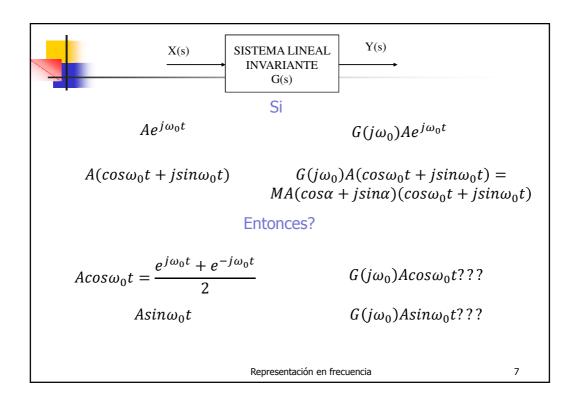
Representación en frecuencia

5



- $G(j\omega_0) = |G(j\omega_0)|e^{jarg(G(j\omega_0))} = Me^{j\alpha}$
- Si $c(t) = r(t) \cdot G(s)|_{s=j\omega_0} = r(t) \cdot G(j\omega_0)$ cuando $r(t) = Ae^{j\omega_0 t} = A(\cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t))$, entonces
 - $|c(t)| = |r(t)||G(j\omega_0)|$
 - $arg(c(t)) = arg(r(t)) + arg(G(j\omega_0))$
- Por tanto:
 - $c(t) = A \cdot |G(j\omega_0)| e^{j(\omega_0 t + \arg(G(j\omega_0)))}$
 - $c(t) = A \cdot |G(j\omega_0)|$
 - $\cdot \left[\cos \left(\omega_0 t + \arg \left(G(j\omega_0) \right) \right) + j \sin \left(\omega_0 t + \arg \left(G(j\omega_0) \right) \right) \right]$
 - Por tanto coseno y seno sufren modificación en amplitud y fase.

Representación en frecuencia





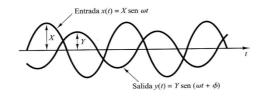
- Si $G(j\omega_0) = Me^{j\alpha}, x(t) = Acos\omega_0 t \Rightarrow y(t)? = Me^{j\alpha}Acos(\omega_0 t)$
- OJO:
- Si entrada es $x(t) = Ae^{j\omega_0 t}$
 - Coincide $\frac{y(t)}{x(t)} = G(j\omega_0) = \frac{Y(s)}{X(s)}\Big|_{s=j\omega_0}$
- Pero si entrada es $x(t) = Acos(\omega_0 t)$ o cualquier otra
- YA NO:





$$x(t) = Xsen \omega t$$

$$y(t) = Ysen(\omega t + \phi)$$



$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$
 $G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \right|$$

$$\underline{/G(j\omega)} = \underline{/\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}}$$

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi}$$

9



Ante entrada sinusoidal, FT (módulo y fase) en s=jω

•
$$M(s) = \frac{k(s-z_1)(s-z_2)...(s-z_n)}{(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_m)}\Big|_{s=j\omega}$$

$$x_1(t) = X_1 \sin \omega t$$

$$x_1(t) = X_1 \sin \omega t$$
 $x_2(t) = X_2 \sin(\omega t + \alpha)$

$$M = \left| \frac{\mathbf{X}_2(j\omega)}{\mathbf{X}_1(j\omega)} \right| = \left| \frac{\mathbf{P}(j\omega)}{\mathbf{Q}(j\omega)} \right| = \left| \frac{K(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \cdot \cdot \cdot}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \cdot \cdot \cdot} \right|$$

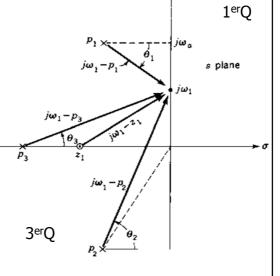
$$\alpha = \underline{/P(j\omega)} - \underline{/Q(j\omega)}$$

$$= \frac{\sqrt{K} + \sqrt{j\omega - z_1} + \sqrt{j\omega - z_2} + \cdots - \sqrt{j\omega - p_1} - \sqrt{j\omega - p_2} - \cdots}{\sqrt{j\omega - p_1} + \sqrt{j\omega - p_2} - \cdots}$$

Representación en frecuencia



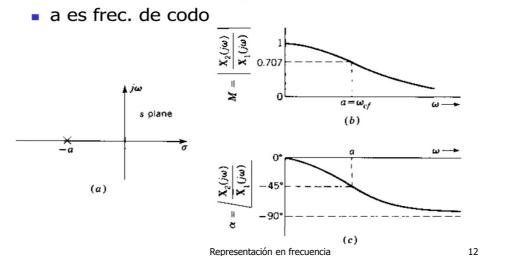
- Observar efecto en M (módulo) y α (fase) para $j\omega_1$ cualquiera (desde $\omega_1 = 0$ hasta ∞) de:
 - Polo real
 - Polo complejo en 3er cuadrante
 - Polo complejo en 2º cuadrante (pico en ω_a)
- Ceros:
 - Al contrario



11

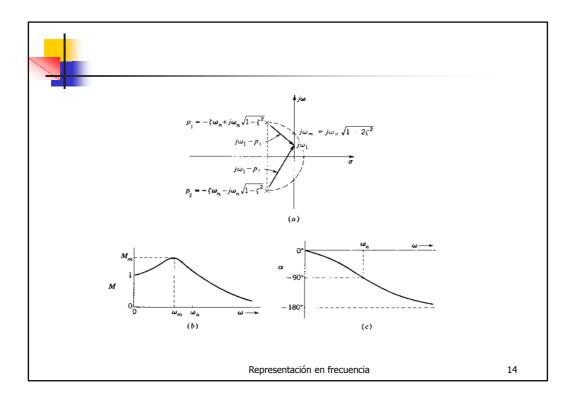


• $G(s) = \frac{a}{s+a}$; $G(j\omega) = \frac{a}{j\omega+a}$





- $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s p_1)(s p_1^*)}$
- En s=jω y derivando respecto de ω
 - Máximo de módulo: $M_m = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$
 - ullet En pulsación de resonancia $\omega_m=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$
 - Se puede demostrar que hay pico si $\xi < \sqrt{0.5} = 0.707$





2. Diagramas logarítmicos. Diagramas de Bode.

- El diagrama de Bode se representa mediante dos gráficas:
 - Gráfica del logaritmo de la magnitud en función de ω .
 - Gráfica del ángulo de fase en grados en función de ω.

La representación de una magnitud logarítmica expresada en decibelios es:

$$G(j\omega)\big|_{dB} = 20\log|G(j\omega)|$$

Ventajas de utilizar el diagrama de Bode:

- La multiplicación de magnitudes se convierte en suma.
- Representación mediante aproximaciones asintóticas.
- Mediante el uso de escala logarítmica permite ampliar el rango de bajas frecuencias.

Representación en frecuencia

15



2. Diagramas logarítmicos. Diagramas de Bode.

De forma genérica:

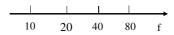
$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{A_1(j\omega)A_2(j\omega)}{B_1(j\omega)B_2(j\omega)}$$

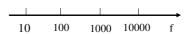
 $|G(j\omega)H(j\omega)| = 20\log|A_1(j\omega)| + 20\log|A_2(j\omega)| - 20\log|B_1(j\omega)| - 20\log|B_2(j\omega)|$

$$/ G(j\omega)H(j\omega) = \angle A_1(j\omega) + \angle A_2(j\omega) - \angle B_1(j\omega) - \angle B_2(j\omega)$$

- Unidades logarítmicas para expresar las bandas de frecuencia (pulsación): $log_2 \frac{\omega}{1}$ (octavas), $log_{10} \frac{\omega}{1}$ (décadas)
 - Octava:

Década:





Representación en frecuencia



2. Diagramas de Bode. Factores básicos de *G*(*jω*) *H*(*j*ω)

- La ganancia K.
- Módulo

$$20 \log(K) \rightarrow Cte$$

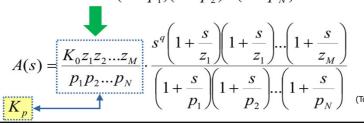
$$20 \log(10 \text{ K}) - 20 \log(\text{ K}) + 20$$

$$20 \log(10\,\mathrm{K}\,) = 20 \log(\mathrm{K}\,) + 20$$

$$20\log(10^n \,\mathrm{K}) = 20\log(\,\mathrm{K}) + 20n$$

$$20\log(10 \text{ K}) = 20\log(\text{K}) + 20\log(\text{K}) + 20\log(\text{K}) = -20\log(\frac{1}{K})$$

$$A(s) = K_0 \frac{s^q(s+z_1)(s+z_1)...(s+z_M)}{(s+p_1)(s+p_2)...(s+p_N)}$$





2. Diagramas de Bode. Factores básicos de *G*(*jω*) *H*(*j*ω)

- Factores integrales y derivativos $(j\omega)^{\pm 1}$.
- Módulo

$$20\log\left|\frac{1}{j\omega}\right| = -20\log\omega.dB$$

$$\varphi = \pm 90^{\circ}$$

Fase

 $\varphi = 0^{\circ} \delta$

 $\varphi = 180^{\circ}$

$$20\log|j\omega| = 20\log\omega.dB$$

$$20\log\left|\frac{1}{(j\omega)^n}\right| = -20n\log|j\omega| = -20n\log\omega.dB$$

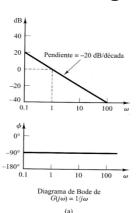
$$20\log\left|(j\omega)^n\right| = 20n\log\omega.dB$$

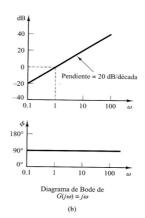
Representación en frecuencia



2. Diagramas de Bode. Factores básicos de *G*(*jω*) *H*(*j*ω)

Factores integrales y derivativos (jω)^{±1}.





Representación en frecuencia

19



2. Diagramas de Bode. Factores básicos de $G(j\omega)$ $H(j\omega)$

- Factores de primer orden (1+jωT)^{±1}.
- Módulo de (1+jωT)⁻¹:

$$20\log\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right| = -20\log\sqrt{1+\omega^2T^2}dB\begin{cases} \omega << 1/T \rightarrow -20\log\sqrt{1+\omega^2T^2} \cong -20\log1 = 0dB\\ \omega_c = 1/T \rightarrow -20\log\sqrt{1+\omega^2T^2} = -20\log\sqrt{2} = -3dB\\ \omega >> 1/T \rightarrow -20\log\sqrt{1+\omega^2T^2} \cong -20\log\omega T.dB\\ extinct pendiente : -20dB/decada \end{cases}$$

Fase de (1+jωT)⁻¹:

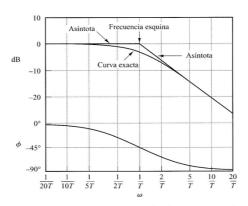
$$\varphi = -tag^{-1}\omega T \begin{cases} \omega < 0.1\omega_c \rightarrow \varphi = -tag^{-1}(0) = 0^{\circ} \\ \omega_c = 1/T \rightarrow \varphi = -tag^{-1}(1) = -45^{\circ} \\ \omega > 10\omega_c \rightarrow \varphi = -90^{\circ} \end{cases}$$

Representación en frecuencia



2. Diagramas de Bode. Factores básicos de $G(j\omega)$ $H(j\omega)$

Factores de primer orden (1+jωT)-1:



Curva de magnitud logarítmica, junto con las asíntotas y la curva de ángulo de fase de 1/(1 + $j\omega$ T).

Representación en frecuencia

21



2. Diagramas de Bode. Factores básicos de $G(j\omega)$ $H(j\omega)$

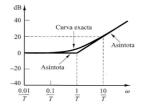
Módulo de (1+jωT)⁺¹:

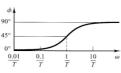
$$20 \log |1 + j\omega T| = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} dB \begin{cases} \omega = \omega_C \\ \omega > 0 \end{cases}$$

 $\begin{cases} \omega << 1/T \to 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \cong 20 \log 1 = 0 dB \\ \omega = \omega_C = 1/T \to 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \cong 20 \log \sqrt{2} = 3 dB \\ \omega >> 1/T \to 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \cong 20 \log \omega T . dB \end{cases}$ recta = pendiente : +20 dB / decada

Fase de (1+jωT)⁺¹:

$$\varphi = tag^{-1}\omega T \begin{cases} \omega < \omega_C / 10 \rightarrow \varphi = tag^{-1}(0) = 0^{\circ} \\ \omega = \omega_C = 1/T \rightarrow \varphi = tag^{-1}(1) = 45^{\circ} \\ \omega > 10\omega_C \rightarrow \varphi = 90^{\circ} \end{cases}$$





Representación en frecuencia



2. Diagramas de Bode. Factores básicos de *G*(*jω*) *H*(*j*ω)

- Factores cuadráticos $[1+2\xi(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2]^{\pm 1}$.
- Módulo :

$$20 \log \left| \frac{1}{1 + 2\xi \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right| = -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega << \omega_n \to -20 \log(1) = 0 dB \\ \omega >> \omega_n \to -40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \to recta \quad pte.: -40 dB \mid década \\ \omega = \omega_c = \omega_n \to -20 \log(2 \cdot \xi) = -6 - 20 \log(\xi) dB \end{cases}$$

Fase

$$\varphi = -\tan^{-1} \left[\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right] \rightarrow \begin{cases} \omega < \omega_n / 10 \rightarrow \varphi = -tag^{-1}(0) = 0^{\circ} \\ \omega = \omega_n \rightarrow \varphi = -tag^{-1}(\frac{2\xi}{0}) = -tag^{-1}(\infty) = -90^{\circ} \\ \omega > 10 \omega_n \rightarrow \varphi = -180^{\circ} \end{cases}$$

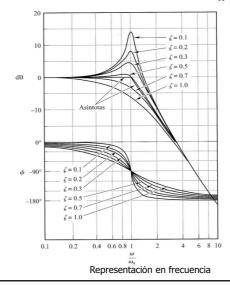
Representación en frecuencia

23



2. Diagramas de Bode. Factores básicos de $G(j\omega)$ $H(j\omega)$

• Factores cuadráticos $[1+2\xi(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2]^{\pm 1}$.





- Ej:
- Obtener diagramas de Bode de:

• GH(s)=
$$\frac{256(s+1)}{(s+4)(s^2+8s+64)}$$

•
$$GH(s)|_{s=j\omega} = \frac{256(1+j\omega)}{4\cdot64(1+j\omega\frac{1}{4})(1-\frac{\omega^2}{8^2}+j\frac{\omega}{8})}$$

25



2.1 Diagramas de Bode con Matlab

[mag,fase,w]=bode(num,den,w)

- mag → Matriz con los valores para representar la magnitud.
- fase → Matriz con los valores para representar la fase.
- w → Matriz con los valores de la frecuencia. (Opcional).
- num → Numerador de la función de transferencia.
- den → Denominador de la función de transferencia.

w=logspace(a,b,n)

Genera logarítmicamente una matriz de n puntos espaciados de forma equitativa entre 10^a y 10^b .

Representación en frecuencia



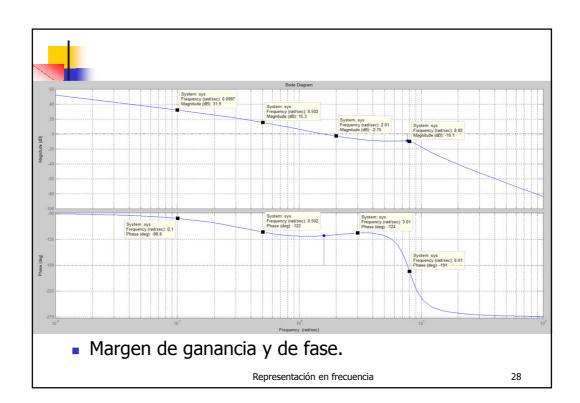
2.1 Diagramas de Bode con Matlab. Ejemplo1

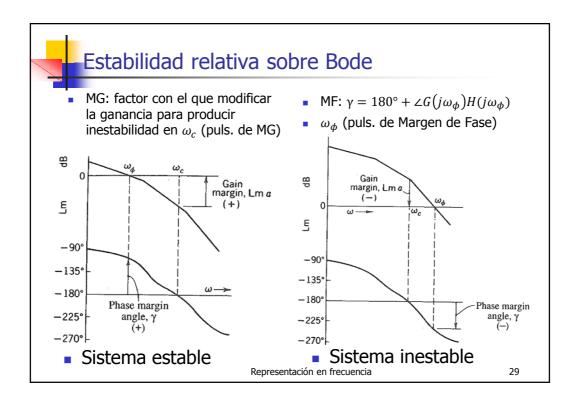
 Representar los diagramas logarítmicos de magnitud y de fase (diagramas de Bode) de un sistema que tiene la siguiente función de trasferencia en lazo abierto:

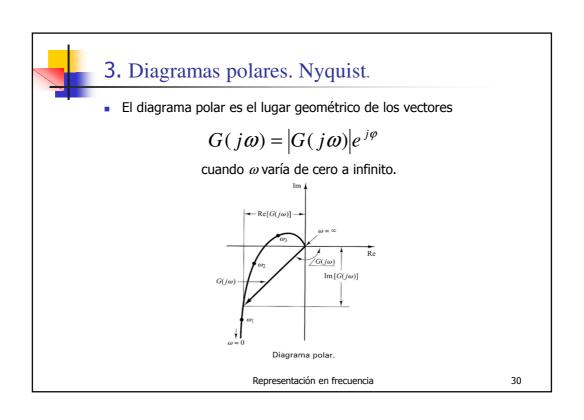
$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{4(1+0.5j\omega)}{j\omega(1+2j\omega)(1+0.05j\omega - \frac{\omega^2}{8^2})}$$

```
%--- Ejemplo 1: RESPUESTA EN FRECUENCIA ---
nG=4*[0.5 1];
dG=conv(conv([1 0],[2 1]),[0.015625 0.05 1]);
bode(nG,dG)
title('Diagrama de Bode')
ylabel('Fase(grados) Amplitud(dB)')
xlabel('Frecuencia (rad/seg)')
```

Representación en frecuencia









3. Diagramas polares. Nyquist.

- Factores integrales o derivativos $(j\omega T)^{\pm 1}$.

• $G(j\omega)=\frac{1}{j\omega}=-j\frac{1}{\omega}=\frac{1}{\omega}\lfloor^{\pi}/_{2}$ Es el eje imaginario negativo • $G(j\omega)=j\omega$ Es el eje imaginario positivo

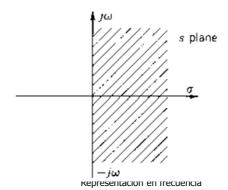
Representación en frecuencia

31



3. Diagramas polares. Nyquist.

- $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega} \angle \pi/2$. Eje imaginario negativo recorrido desde $|G(j0)| = -\infty$ a $|G(j\infty)| = -0$ cuando $\omega = 0$: ∞
- $G(j\omega) = j\omega$. Eje imaginario positivo.





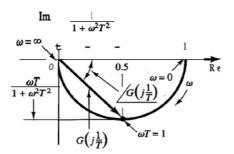
3. Diagramas polares. Nyquist.

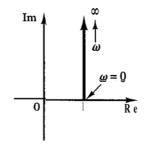
Factores de primer orden $(1+j\omega T)^{\pm 1}$.

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + jwT} = \frac{1}{\sqrt{1 + w^2 T^2}} \angle - \tan^{-1} wT$$

$$G(j0) = 1 \angle 0^{\circ}$$

$$G(j\infty) = 0 \angle -90^{\circ}$$





Representación en frecuencia

33



3. Diagramas polares. Nyquist.

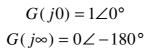
Factores cuadráticos [1+2 ξ ($j\omega/\omega_n$)+ ($j\omega/\omega_n$)²] ·1.

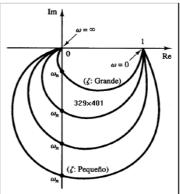
$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta \left(j\frac{w}{w_n}\right) + \left(j\frac{w}{w_n}\right)^2},$$

Im
$$\omega = \infty$$

$$0$$

$$\omega_n$$
(ζ : Grande)



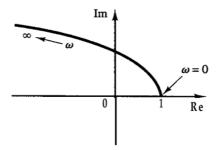


Representación en frecuencia



• Factores cuadráticos $[1+2\xi(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2]^{+1}$.

$$G(j\omega) = 1 + 2\zeta \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \qquad \lim_{\omega \to 0} G(j\omega) = 1 \ \underline{/0^{\circ}}$$
$$= \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right) \qquad \lim_{\omega \to \infty} G(j\omega) = \infty \ \underline{/180^{\circ}}$$



35



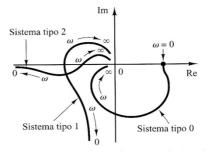
3. Diagramas polares. Nyquist.

Formas generales de los diagramas polares:

$$G(j\omega) = \frac{K(1+j\omega T_a)(1+j\omega T_b)...}{(j\omega)^{\lambda}(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)...} = \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + ...}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + ...}$$

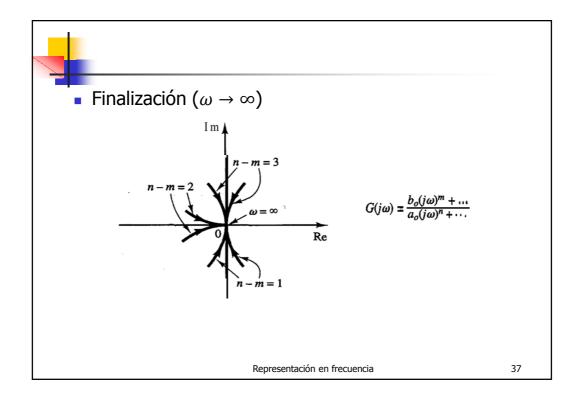
n > m

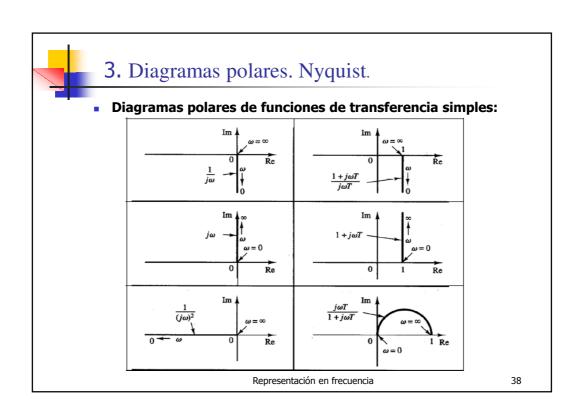
- Comienzo:
- Para λ=0 o sistema de tipo 0.
- Para λ=1 o sistema de tipo 1.
- Para $\lambda = 2$ o sistema de tipo 2.



Diagramas polares de sistemas de tipo 0, tipo 1 y tipo 2.

Representación en frecuencia

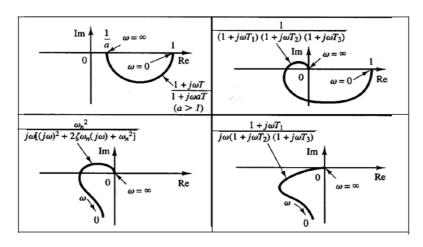






3. Diagramas polares. Nyquist.

Diagramas polares de funciones de transferencia simples:



Representación en frecuencia

39



3.1 Diagramas de Nyquist con Matlab

nyquist(num,den)

- num → Numerador de la función de transferencia.
- *Den* → Denominador de la función de transferencia.

Representación en frecuencia



3.1 Diagramas de Nyquist con Matlab. Ejemplo2

 Representa el diagrama polar del sistema cuya función de transferencia es el siguiente:

$$G(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)(1+2j\omega)(1+3j\omega)}$$

```
%--- Ejemplo 2: RESPUESTA EN FRECUENCIA ---
nG=1;
dG=conv(conv([1 1],[2 1]),[3 1]);
Nyquist(nG,dG)
title('Diagrama de Nyquist')
ylabel('Eje imaginario')
xlabel('Eje real')
```

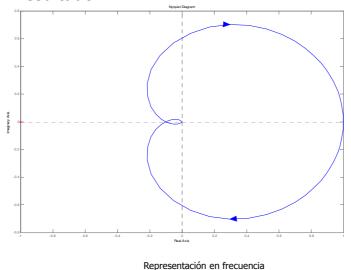
Representación en frecuencia

41



3.1 Diagramas de Nyquist con Matlab. Ejemplo2

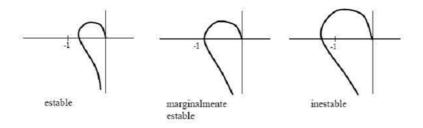
Resultado





Estabilidad relativa sobre Nyquist

• Se observa el diagrama de Nyquist de $G(j\omega)H(j\omega)$ y su distancia del punto (-1,0).

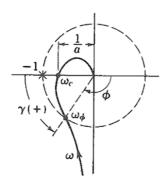


Representación en frecuencia

43

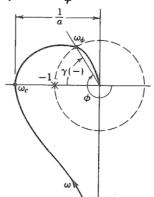


■ MG: $|G(j\omega_c)H(j\omega_c)| \cdot a$ ⇒inestable



Sistema estable

• MF: si desplazamos fase γ en ω_{ϕ} \Rightarrow inestable

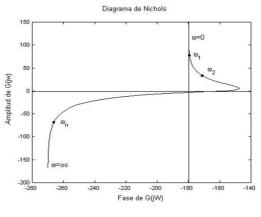


Sistema inestable

Representación en frecuencia



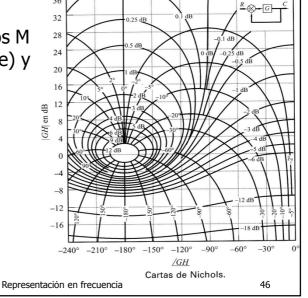
- Las dos gráficas de Bode se combinan en una única gráfica.
 En el eje imaginario se representa la amplitud y en el real la fase para cada valor de frecuencia.
- Aumentar o disminuir la ganancia ⇒ desplazamiento vertical hacia arriba o hacia abajo.



45

5.Respuesta en frecuencia en lazo cerrado de sistemas con realimentación unitaria

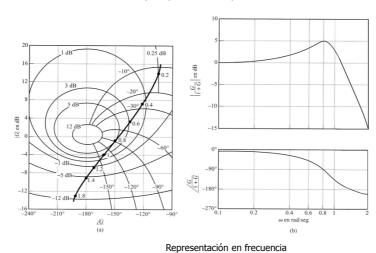
- Carta de Nichols.
- Lugares geométricos M (Magnitud constante) y N (fase constante)
- Sobre la carta se representa la FT en lazo abierto G(jω)





5. Respuesta en frecuencia en lazo cerrado de sistemas con realimentación unitaria. Ejemplo

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)(0.5j\omega+1)}$$





5.1 Diagramas de Nichols con Matlab

[mag,fase,w]=nichols(num,den,w)

- num → Numerador de la función de transferencia en lazo abierto.
- Den → Denominador de la función de transferencia en lazo abierto.
- $W \rightarrow$ Matriz con los valores de frecuencia. (Opcional)
- mag → Matriz para representar la magnitud en lazo cerrado.
- fase → Matriz para representar la fase en lazo cerrado.

Los parámetros: **[mag,fase,w]**, nos calculan la magnitud y la fase para una representación en lazo cerrado con realimentación unitaria.

Ngrid('new')

Representa los círculos de magnitud y fase constantes: M y N.

Representación en frecuencia

48



5.1 Diagramas de Nichols con Matlab. Ejemplo

 Representa el diagrama Nichols del sistema cuya función de transferencia e L. A. es el siguiente:

$$G(s) = \frac{1}{0.2s^3 + 1.2s^2 + s}$$

```
%--- Ejemplo 5: RESPUESTA EN FRECUENCIA ---

nG=1;
dG=[0.2 1.2 1 0];
w=logspace(-1,1,100);
Ngrid('new')
Nichols(nG,dG,w)
title('Diagrama de Nichols')
ylabel('Amplitud de G(jw)')
xlabel('Fase de G(jW)')
```

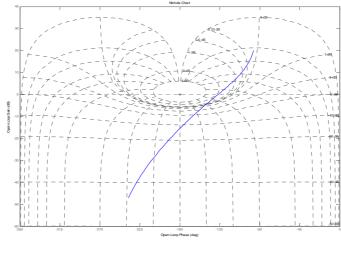
Representación en frecuencia

49



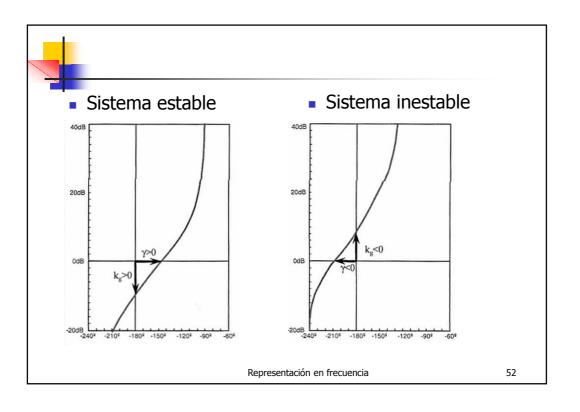
5.1 Diagramas de Nichols con Matlab. Ejemplo

Resultado



Representación en frecuencia

Estabilidad relativa sobre Nichols • MG: $|G(j\omega_c)H(j\omega_c)| \cdot a \Rightarrow \text{inestable}$ • MF: si desplazamos fase γ en $\omega_{\phi} \Rightarrow \text{inestable}$ • MF: $\frac{g}{g}$ Phase margin angle $\frac{g}{g}$ Phase margin frequency $\frac{g}{g}$ Phase margin frequency $\frac{g}{g}$ Phase margin frequency





Estabilidad relativa

- Estudia la lejanía de un sistema a la situación de inestabilidad
- Márgenes de ganancia o fase representan cuánto se puede aumentar la ganancia o fase del sistema en bucle abierto sin que el sistema en bucle cerrado se haga inestable

Representación en frecuencia

53



Bode

Estable

