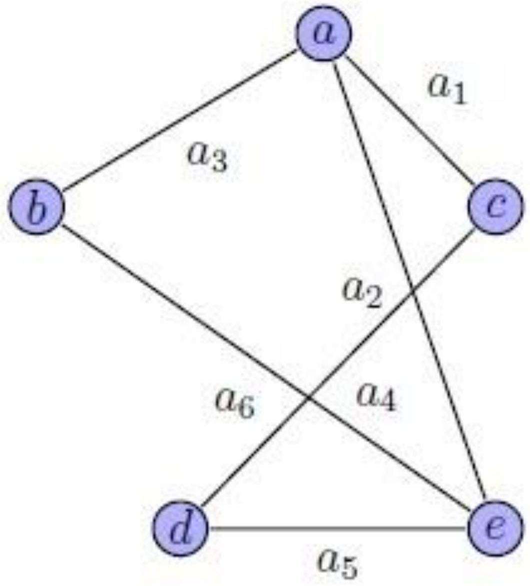
UNIVERSIDAD
FRANCISCO DE VITORIA

Tema 1

MATRICES

- Ejemplo: matriz de adyacencia



$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tipos de matrices

Matriz triangular superior

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & \pi \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & \pi & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Matriz nula

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

Matriz identidad

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz escalar

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Matriz escalonada

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Otros tipos

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE VITORIA

- Matriz regular: una matriz cuadrada que tiene inversa
- Matriz singular: no tiene matriz inversa
- Matriz idempotente: $A^2 = A$
- Matriz involutiva: $A^2 = I$

Operaciones básicas con matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & 0+0 & 1+1 \\ 3+1 & 0+2 & 0+1 \\ 5+1 & 1+1 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-1 & 0-0 & 1-1 \\ 3-1 & 0-2 & 0-1 \\ 5-1 & 1-1 & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicación de matrices

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 & 2\cdot 0 + 0\cdot 2 + 1\cdot 1 & 2\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 3\cdot 1 + 0\cdot 1 + 0\cdot 1 & 3\cdot 0 + 0\cdot 2 + 0\cdot 1 & 3\cdot 1 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 5\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 5\cdot 0 + 1\cdot 2 + 0\cdot 1 & 5\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Multiplación de matrices de diferente tamaño

1) Se trabaja con la primera columna de la matriz B

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2 + 2.1 + 1.3 & 3.1 + 2.0 + 1.2 \\ 1.2 + 1.1 + 3.3 & 1.1 + 1.0 + 3.2 \\ 0.2 + 2.1 + 1.3 & 0.1 + 2.0 + 1.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 12 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Se trabaja con la segunda columna de la matriz B

Determinante de una matriz

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE VITORIA

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$(a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32}) - (a_{13}.a_{22}.a_{31} + a_{12}.a_{21}.a_{33} + a_{11}.a_{23}.a_{32})$$

Pero también...

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & -4 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 4(-1) + 1(15) + 5(-12) = -4 + 15 - 60 = -49$$

Esto, ¿sirve para algo? Contesta sabia Wikipedia

Primeros ejemplos: áreas y volúmenes [editar]

El cálculo de áreas y volúmenes bajo forma de determinantes en espacios euclídeos aparecen como casos particulares de una noción más general de determinante. La letra mayúscula D (Det) se reserva a veces para distinguirlos.

Determinante de dos vectores en el plano euclídeo [editar]

Sea *P* el plano euclídeo. El determinante de los vectores *X* y *X'* se obtiene con la expresión analítica

$$\det(X, X') = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

o, de manera equivalente, por la expresión geométrica

$$\det(X, X') = \|X\| \cdot \|X'\| \cdot \sin\theta$$

en la cual θ es el ángulo orientado formado por los vectores *X* y *X'*.

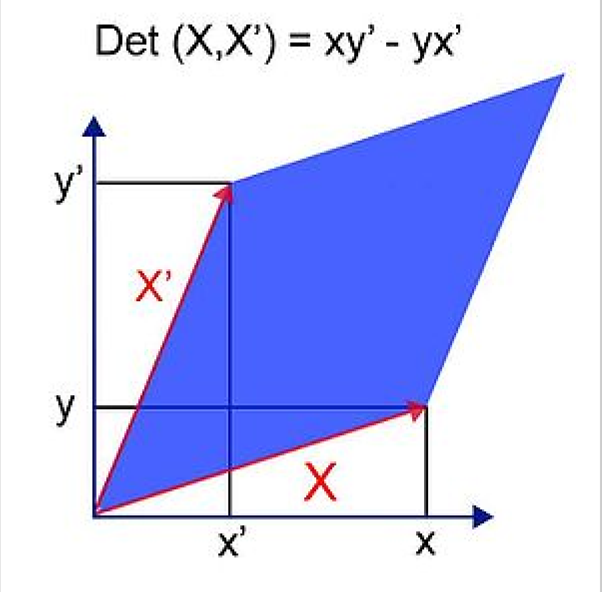


Fig. 1. El determinante es el área azul orientada.

Propiedades [editar]

- El valor absoluto del determinante es igual a la superficie del paralelogramo definido por *X* y *X'* ($X \sin\theta$ es en efecto la altura del paralelogramo, por lo que A = Base × Altura).
- El determinante es nulo si y sólo si los dos vectores son colineales (el paralelogramo se convierte en una línea).
- Su signo es estrictamente positivo si y sólo si la medida del ángulo *(X, X ')* se encuentra en $]0,\pi[$.
- La aplicación del determinante es bilineal: la linearidad respecto al primer vector se escribe

$$\det(aX + bY, X') = a\det(X, X') + b\det(Y, X')$$

y respecto al segundo

$$\det(X, aX' + bY') = a\det(X, X') + b\det(X, Y')$$

Pero además...

- Necesario para fijar el rango de una matriz o la matriz inversa
- Rango de una matriz: número de filas o columnas linealmente independientes (no se pueden poner como combinación lineal de las restantes)

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 5 \end{vmatrix} \qquad rg(A) = 3$$

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \qquad rg(B) = 2$$

La matriz **A** tiene ***rango*** **3** puesto que ninguna fila o columna se puede poner como combinación lineal de las restantes. En cambio, la matriz **B** tiene ***rango*** **2**, ya que las dos primeras filas no son proporcionales, pero la tercera fila es igual a la segunda fila menos el doble de la primera fila, por lo que no puede tener ***rango*** **3**, ya que la tercera fila es combinación lineal de las otras dos.

- EJERCICIO: ***calcula del determinante de B***

Determante: formalmente

<u>**Definición :**</u> Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. Definimos el determinante de A y se denota $|A|$ o $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ *de la siguiente forma:*

Si $n = 1$ entonces $|A| = |a_{11}| = a_{11}$.

Si $n = 2$ entonces $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Supongamos que tenemos definidos los determinantes de las matrices de orden $n - 1$.

Entonces definimos $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \ddots & \ddots & \vdots & \ddots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$

$$(-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

Como caso particular, para el caso de $n = 3$ se tiene la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Propiedades de los determinantes

1. $|I|=1$.

Sea A una matriz cuadrada con n filas. Entonces

Operaciones elementales de filas

2. Si dos filas de A se intercambian para producir B entonces $|B| = -|A|$.
3. Si una fila de A se multiplica por $\lambda \neq 0$ para obtener B, entonces $|B| = \lambda |A|$.
4. Si un múltiplo de una fila de A se suma a otra fila de A para producir una matriz B, entonces $|B| = |A|$.

Propiedades de los determinantes II

Otras operaciones

5. Si A tiene dos filas iguales o proporcionales, entonces $|A| = 0$.
6. Si A tiene una fila de ceros, entonces $|A| = 0$.
7. Si A es triangular, entonces $|A| = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.
8. A es invertible si y sólo si $|A| \neq 0$.
9. $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.
10. $|\lambda A| = \lambda^n |A|$.
11. $|AB| = |A||B|$.
12. $|A| = |A^T|$.

Inversa de una matriz

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

La matriz inversa de A es :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^T$$

- $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$
- $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I}$
- Necessary for matrix to be square to have *unique* inverse.
- If an inverse exists for a square matrix, it is unique
- $(\mathbf{A}')^{-1}=(\mathbf{A}^{-1})'$
- Solution to $\mathbf{A}\,x = d$
- $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\,x^* = \mathbf{A}^{-1}\,d$
- $\mathbf{I}\,x^* = \mathbf{A}^{-1}\,d \Rightarrow x^* = \mathbf{A}^{-1}\,d$ (solution depends on A^{-1})
  - Linear independence a problem to get x*

Condiciones

- Debe ser una matriz cuadrada
- Con determinante distinto de 0

Matriz adjunta

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -17 \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{13} = + \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -11 \quad A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 7 \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} -17 & -11 & 1 \\ 4 & 7 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Cálculo de la inversa de una matriz

1. Comprobar que el determinante es distinto de 0
2. Calcular la matriz adjunta
3. Calcular la transpuesta de la matriz adjunta
4. La matriz inversa es igual al inverso del valor de su determinante por la matriz traspuesta de la adjunta
5. Comprobar el resultado

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A^{*} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^{*}\right)^{t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora tú…

- Pon tú mismo el enunciado siendo la matriz de tamaño 3x3

Ejercicio 1: Calcular los siguientes productos de matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & \sqrt{37} & 429\pi & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Encontrar una matriz K tal que $AKB = C$ dadas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -6 \\ 6 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Crea tú mismo algunas matrices de tamaño 3 x 3 y calcula el determinante