Departamento de Automática

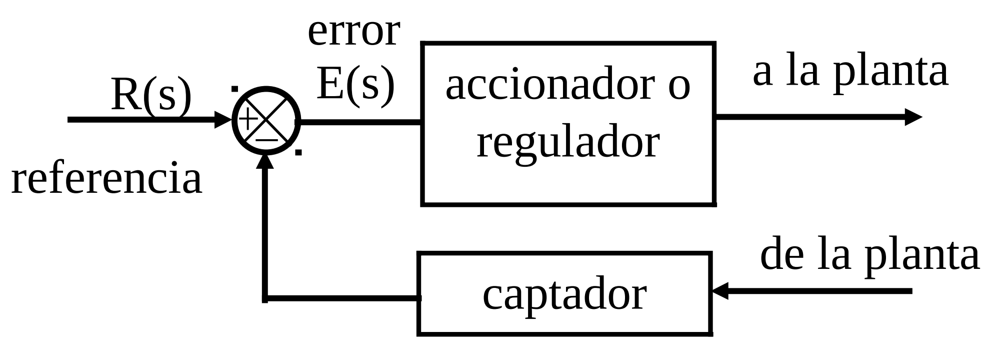
Universidad de Alcalá

Tema 1

Diseño de reguladores en tiempo continuo

1. Introducción.

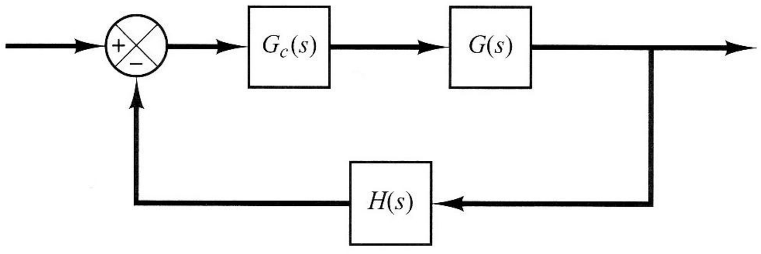
- Objetivo: variar el comportamiento de un sistema para que se ajuste a unas especificaciones determinadas.



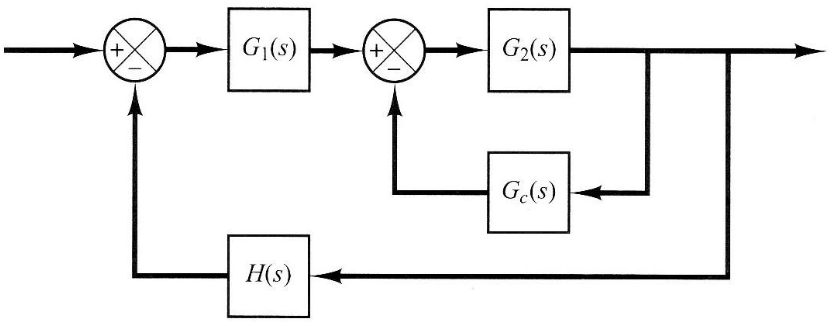
- Introduce polos y/o ceros en la función de transferencia del sistema.
- Diseño con amplificadores operacionales y redes RC.

1. Introducción.

Principales tipos de compensación:



(a)



(b)

- a) *Compensación en serie:*
  - Más sencilla.
  - requiere amplificadores.
  - Se coloca en el punto de mínima energía para evitar disipación
- b) *Compensacón en paralelo:*
  - Se requieren menos componentes.
  - La transferencia de energía va de un nivel más alto a un nivel más bajo.
  - Realimentación tacométrica

2. Diseño de reguladores mediante redes de compensación de fase

- El objetivo principal es utilizar un sistema regulador para mejorar las características de la respuesta transitoria y en régimen permanente del sistema en lazo cerrado-
- Redes de adelanto de fase:
  - Mejoran la respuesta transitoria
  - Mejora menor del error en régimen permanente
- Redes de atraso de fase:
  - Mejora notable del error en régimen permanente
  - Aumenta el tiempo de respuesta transitoria
- Redes de adelanto-atraso de fase:
  - Combina las características de las redes de adelanto y las redes de atraso de fase
- Todos los reguladores de compensación de fase introducen ceros y polos en la respuesta en lazo abierto, con lo que la complejidad del sistema aumenta.

2. 1 Compensación mediante adelanto de fase

- Características en frecuencia del regulador de adelanto de fase.
  - Función de transferencia:

$$G_c(s) = K_c\alpha \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_c \frac{s+\dfrac{1}{T}}{s+\dfrac{1}{\alpha T}} \qquad (0<\alpha<1)$$

  - Tiene un cero en s=-1/T y un polo en s=-1/(αT)

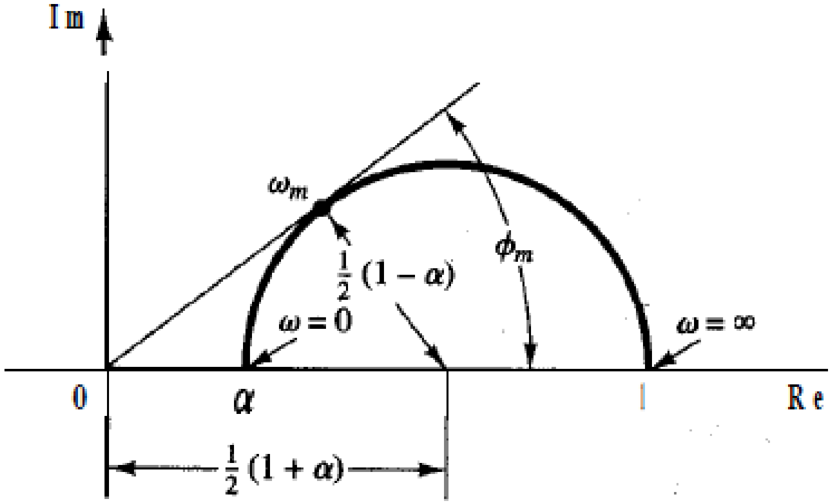
  - El valor mínimo (físicamente recomendable) de α es 0.05, pudiendo adelantar la fase un máximo de 65°

2. 1 Compensación mediante adelanto de fase

- Representación de Nyquist de la función de transferencia:

$$G_c(j\omega) = K_c \alpha \frac{j\omega T + 1}{j\omega \alpha T + 1} = \qquad (0 < \alpha < 1)$$

- Para K_c=1



2. 1 Compensación mediante adelanto de fase

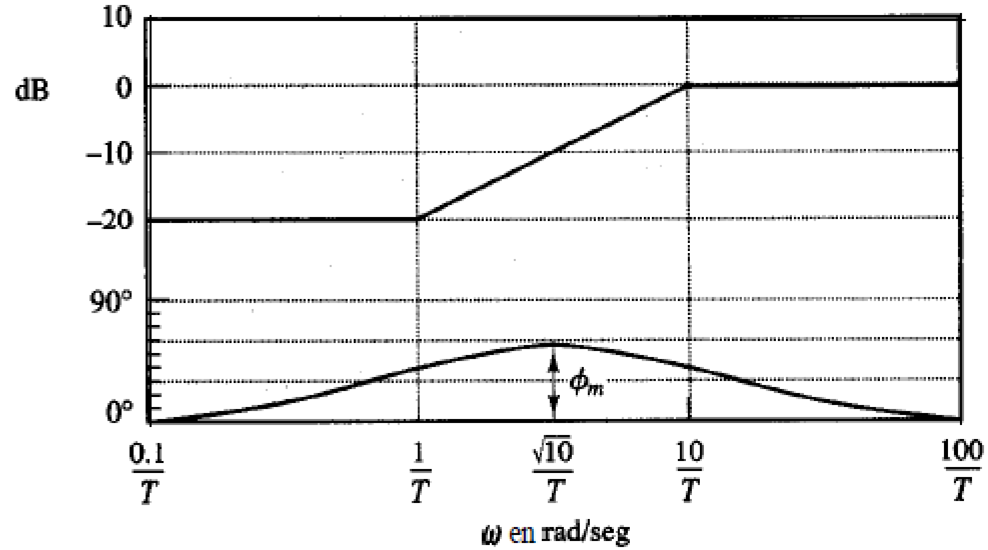
- Máximo adelanto de fase Φ_m:

$$sen\phi_m = \frac{\frac{1-\alpha}{2}}{\frac{1+\alpha}{2}} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

- Respuesta de Bode del compensador para K_c=1 y α=0.1, sabiendo que:

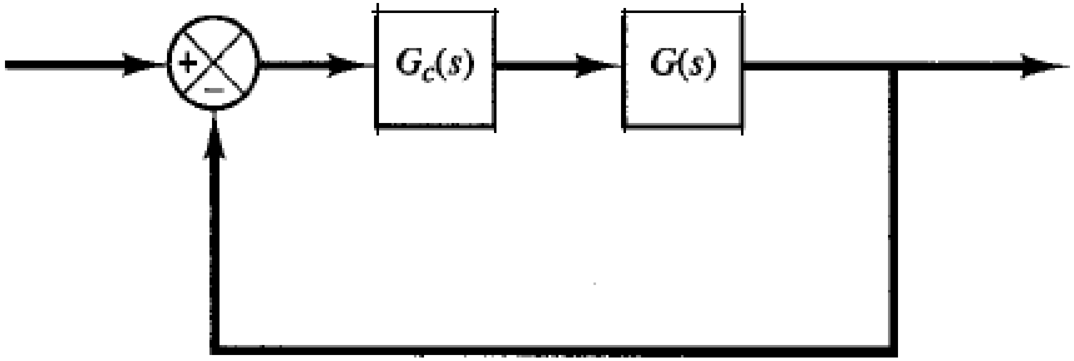
$$\log \omega_m = \frac{1}{2}\left(\log\frac{1}{T} + \log\frac{1}{\alpha T}\right)$$

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{aT}}$$



2. 1 Compensación mediante adelanto de fase

- Reglas de diseño de compensador mediante adelanto de fase:



2. 1 Compensación mediante adelanto de fase

1. Suponga el siguiente compensador de adelanto

$$G_c(s) = K_c\alpha \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}} \qquad (0<\alpha<1)$$

Con $K_c\alpha = K$

Función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado

$$G_c(s)G(s) = K\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}G(s) = \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}G_1(s) \qquad G_1(s) = KG(s)$$

Determine la ganancia K que satisfaga el requerimiento de error en régimen permanente

2. 1 Compensación mediante adelanto de fase

2. Usando la ganancia K dibuje la respuesta de Bode de G_1(jw) y calcule el margen de fase
3. Determine el ángulo de adelanto de fase Φ necesario
4. Determine el factor de atenuación α y establezca la frecuencia a la cual la magnitud del sistema no compensado es igual a:

$$\left|G_1(j\omega)\right| = -20\log\left(1/\sqrt{\alpha}\right)$$

Seleccione esta como la nueva frecuencia de cruce, cuyo valor es:

$$\omega_m = 1/\left(\sqrt{\alpha}T\right)$$

5. Determine las frecuencia de esquina del compensador

$$\omega_{cero} = 1/T$$

$$\omega_{polo} = 1/\alpha T$$

2. 1 Compensación mediante adelanto de fase

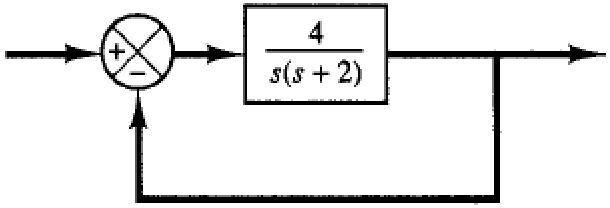
6. Usando el valor de K y de α calcule la constante K_c:

$$K_c = K / \alpha$$

7. Verifique el margen de ganancia del sistema controlado en lazo cerrado. En caso de no resultar satisfactorio repita el proceso de diseño modificando la ubicación de los polos y ceros del compensador hasta obtener un resultado aceptable

2. 1 Compensación mediante adelanto de fase

Ejemplo: Considere el siguiente sistema de control



$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

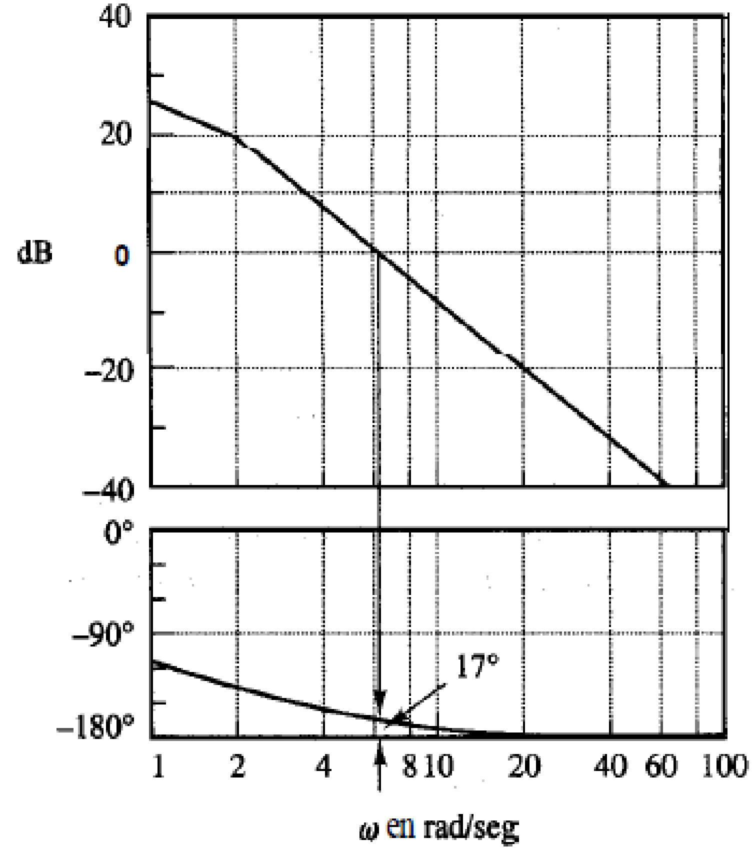
Se quiere diseñar un compensador por adelanto de fase de forma que el error estático de velocidad K_v sea de $20s^{-1}$, el margen de fase sea de al menos de 50° y el margen de ganancia sea al menos de 10dB

2. 1 Compensación mediante adelanto de fase

Solución:

$$K = 10 \quad G_1(s) = \frac{40}{j\omega(j\omega + 2)} = \frac{20}{j\omega(0.5j\omega + 1)}$$

Respuesta de Bode de $G_1(jw)$



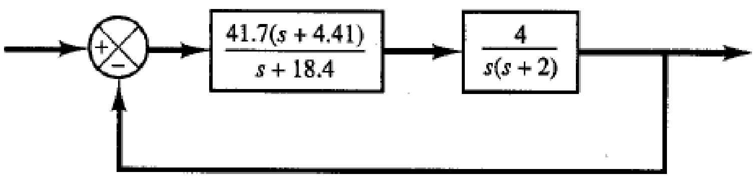
Controlador diseñado:

$$G_c(s) = 10\frac{0.227s + 1}{0.054s + 1} =$$

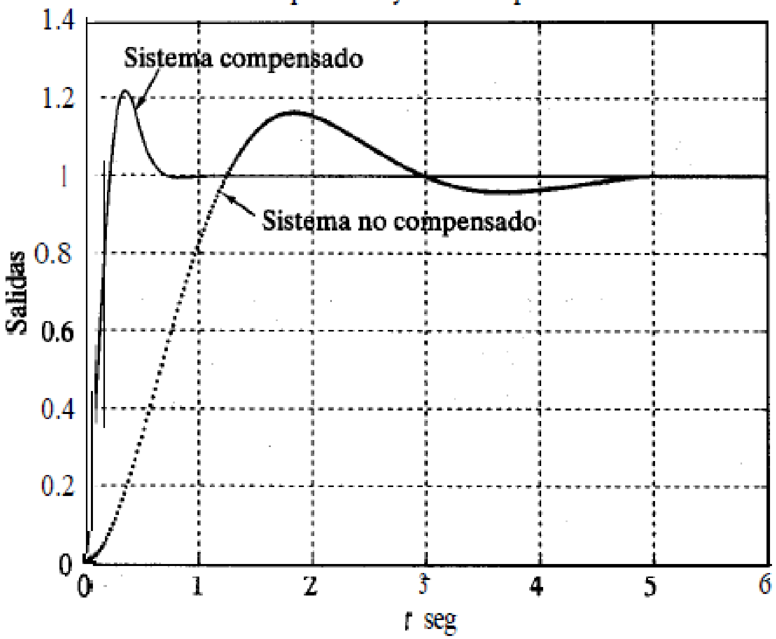
2. 1 Compensación mediante adelanto de fase

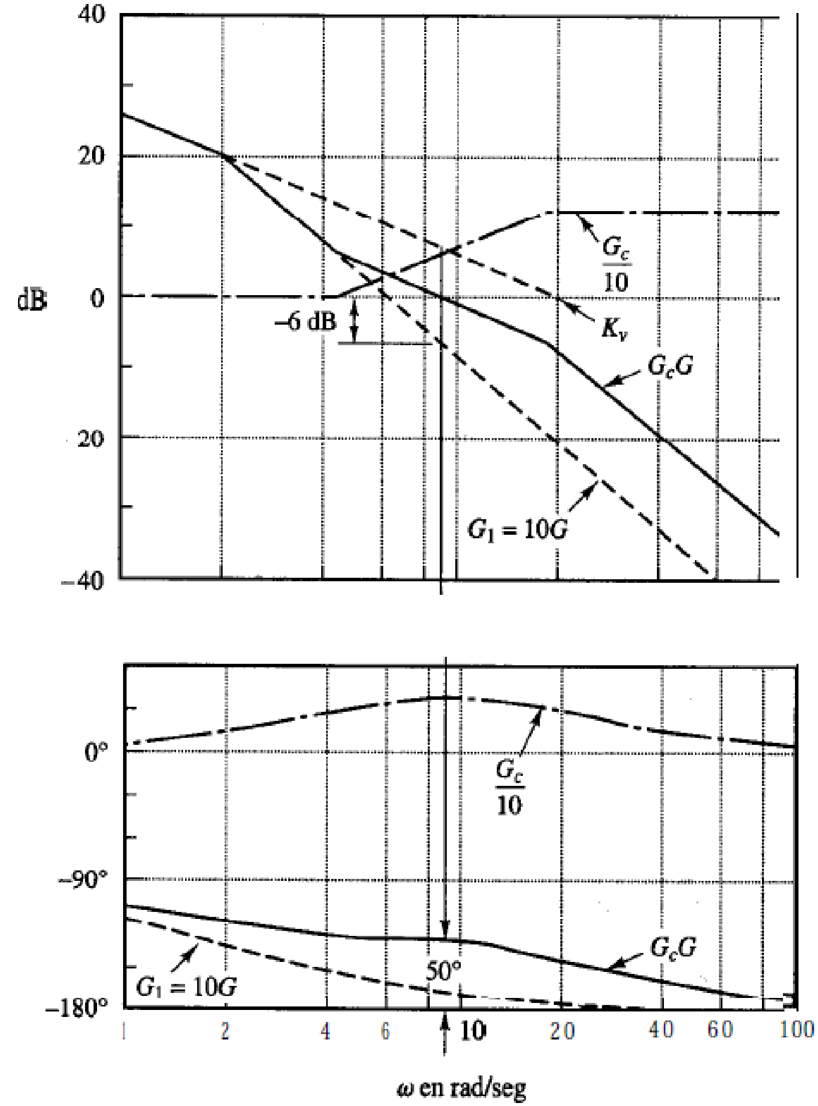
Respuesta de Bode para

el sistema compensado



Respuestas escalón unitario de los sistemas compensado y no compensado





2. 2 Compensación mediante atraso de fase

- Características en frecuencia del regulador de atraso de fase.
  - Función de transferencia:

$$G_c(s) = K_c\beta \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = K_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}} \qquad (\beta > 1)$$

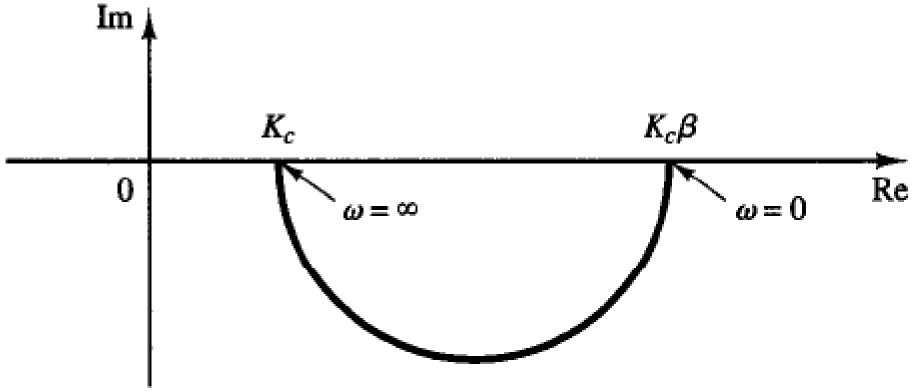
  - Tiene un cero en s=-1/T y un polo en s=-1/(βT)
  - El polo se encuentra a la derecha del cero

2. 2 Compensación mediante atraso de fase

- Representación de Nyquist de la función de transferencia:

$$G_c(j\omega) = K_c \beta \frac{j\omega T + 1}{j\omega\beta T + 1} = \qquad (\beta > 1)$$

- Para K_c=1



2. 2 Compensación mediante atraso de fase

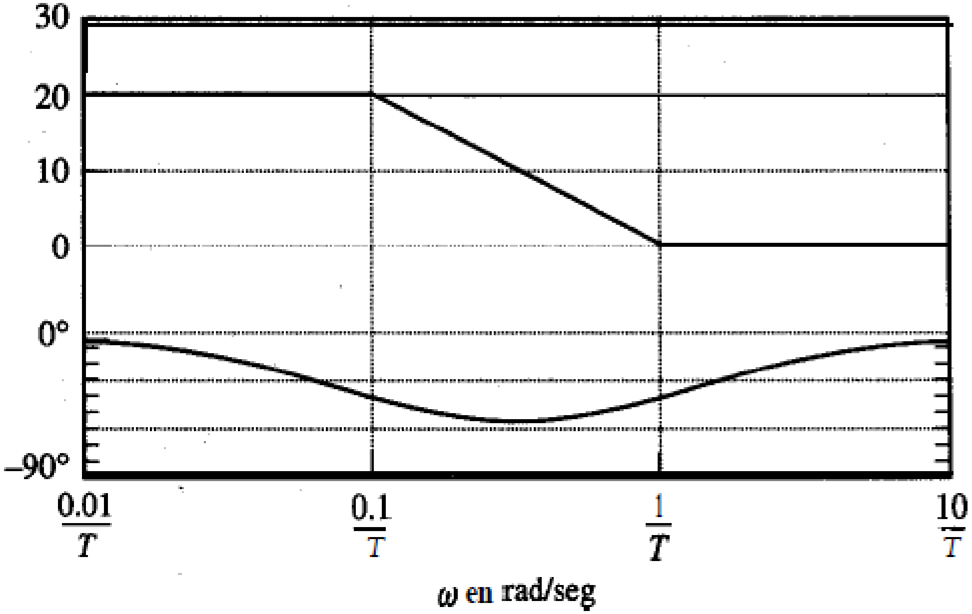
- Máximo atraso de fase Φ_m:

$$sen\phi_m = \frac{\frac{1-\beta}{2}}{\frac{1+\beta}{2}} = \frac{1-\beta}{1+\beta}$$

- Respuesta de Bode del compensador para K_c=1 y β=10, sabiendo que:

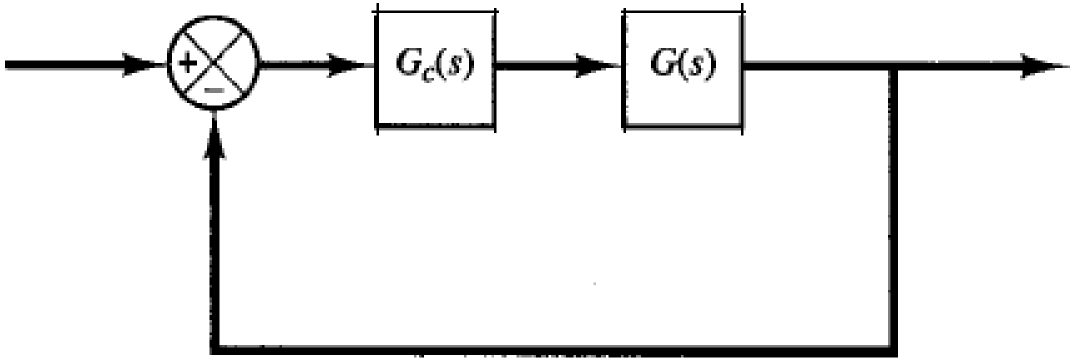
$$\log\omega_m = \frac{1}{2}\left(\log\frac{1}{T} + \log\frac{1}{\beta T}\right)$$

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\beta}T}$$



2. 2 Compensación mediante atraso de fase

- Reglas de diseño de compensador mediante atraso de fase:



2. 2 Compensación mediante atraso de fase

1. Suponga el siguiente compensador de atraso

$$G_c(s) = K_c\beta \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = K_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}} \qquad (\beta > 1)$$

Con $K_c\beta = K$

Función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado

$$G_c(s)G(s) = K\frac{Ts+1}{\beta Ts+1}G(s) = \frac{Ts+1}{\beta Ts+1}G_1(s) \qquad G_1(s) = KG(s)$$

Determine la ganancia K que satisfaga el requerimiento de error en régimen permanente

2. 2 Compensación mediante atraso de fase

2. Si el sistema compensado $G_1(jw)$ no satisface las especificaciones de márgenes de fase y de ganancia, encuentre el punto de frecuencia en el cual el ángulo de fase de la función de transferencia en lazo abierto sea igual a -180° más el margen de fase requerido (teniendo en cuenta un margen adicional de entre 5-12° para compensar el atraso de fase del compensador de atraso). Seleccione ésta como la nueva frecuencia de cruce.

3. Seleccione la frecuencia de esquina del cero (w=1/T) entre una octava y una década por debajo de la nueva frecuencia de cruce para evitar los efectos nocivos del atraso de fase producido por el compensador.

2. 2 Compensación mediante atraso de fase

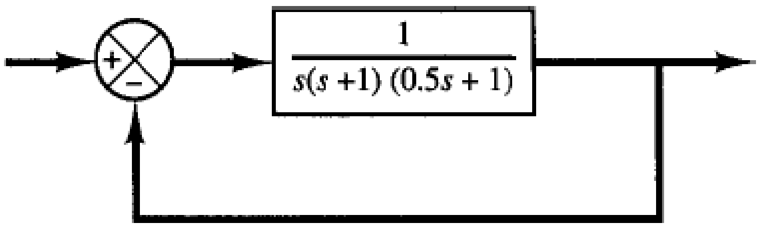
4. Determine la atenuación necesaria para disminuir la curva de magnitud a 0 dB en la nueva frecuencia de cruce y a partir de ahí calcule β (-20log β) y la frecuencia de esquina del polo w=1/(β T).

5. Usando el valor de K y β calcule la constante K_c:

$$K_c = K / \beta$$

2. 2 Compensación mediante atraso de fase

Ejemplo: Considere el siguiente sistema de control



$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

Se quiere diseñar un compensador por atraso de fase de forma que el error estático de velocidad K_v sea de 5 s^{-1}, el margen de fase sea al menos de 40° y el margen de ganancia sea al menos de 10dB

2. 2 Compensación mediante atraso de fase

Solución:

$$K = 5 \quad G_1(j\omega) = \frac{5}{j\omega(j\omega+1)(0.5j\omega+1)}$$

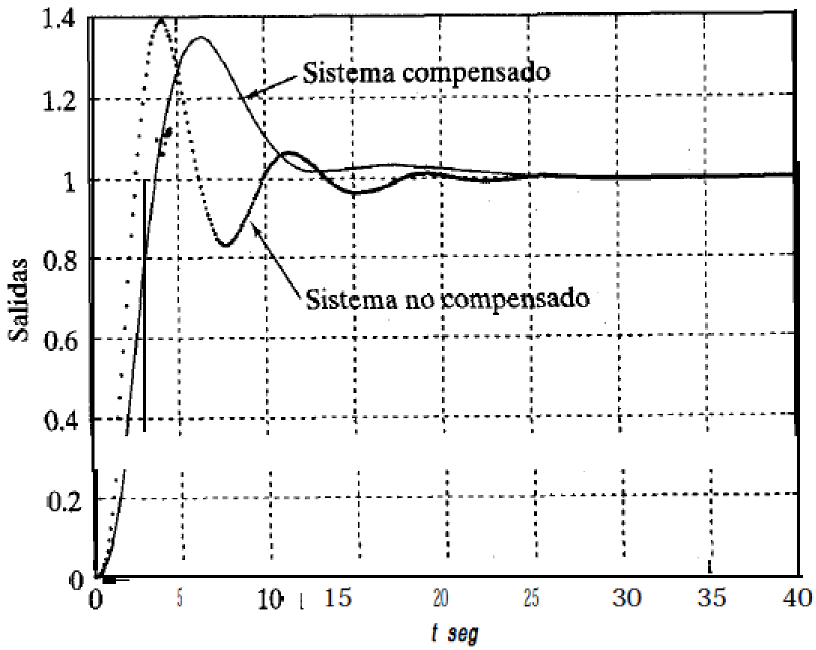
Se agrega un margen de 12° al margen de fase requerido para tener 52°

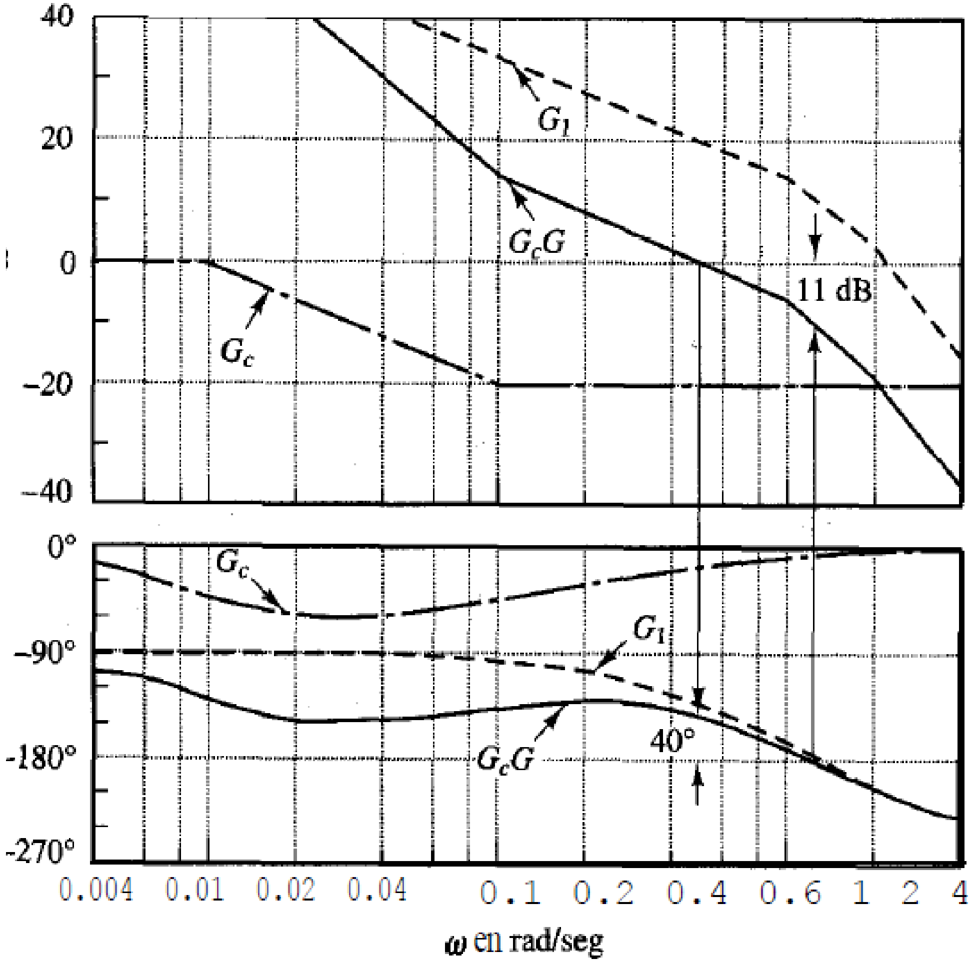
Controlador diseñado:

$$G_c(s) = 5\frac{10s+1}{100s+1}$$

2. 2 Compensación mediante atraso de fase

Respuesta de Bode para el sistema compensado





2. 3 Compensación mediante adelanto-atraso

- Características en frecuencia del regulador de adelanto-atraso de fase.

  - Función de transferencia:

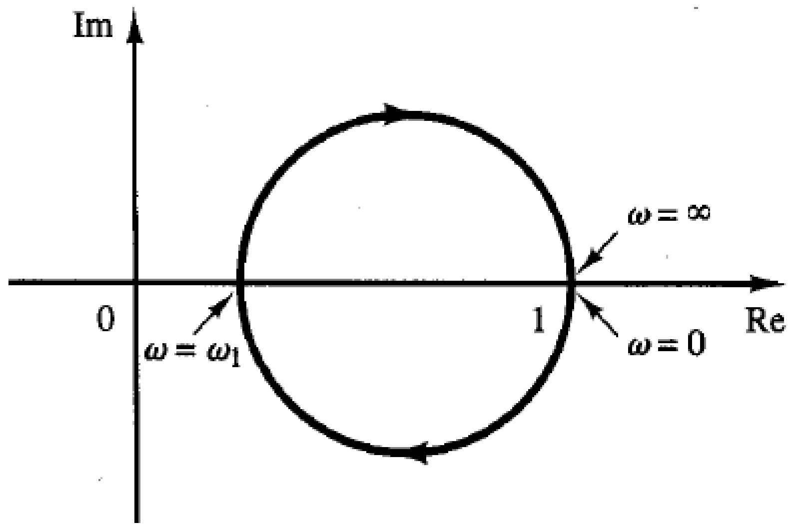
$$G_c(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \qquad \gamma > 1 \qquad \beta > 1$$

  - El término que contiene γ produce el efecto de una red de adelanto y el término que contiene β produce el efecto de una red de atraso

  - Es común seleccionar γ= β

2. 3 Compensación mediante adelanto-atraso

- Representación de Nyquist de la función de transferencia del compensador de adelanto-atraso para K_c=1, γ= β



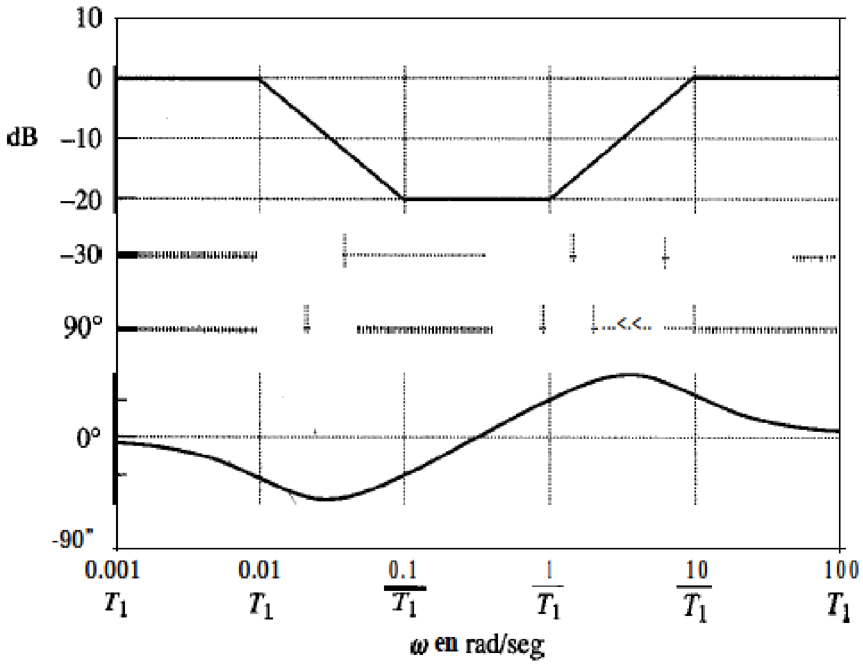
- El compensador funciona como un compensador de atraso para $0<\omega<\omega_1$, y funciona como una red de adelanto entre $\omega_1 < \omega<\infty$

2. 3 Compensación mediante adelanto-atraso

- Frecuencia ω_1 para la cual el ángulo de fase es cero

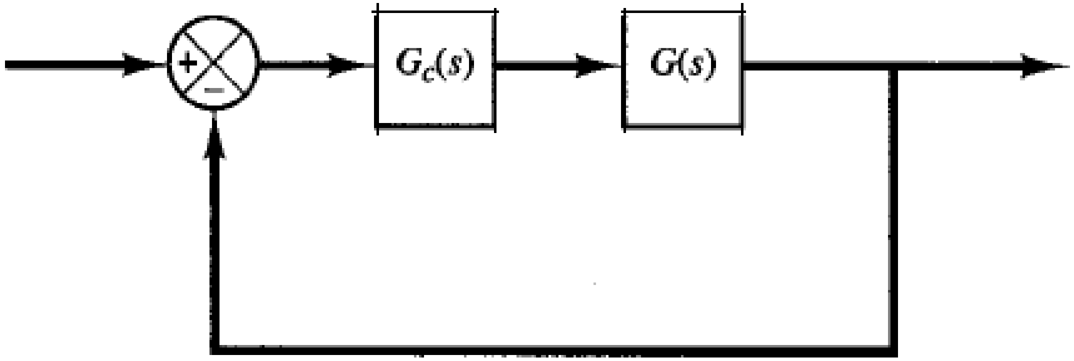
$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$$

- Respuesta de Bode del compensador de adelanto-atraso para $K_c=1$, $\beta=\gamma$ y $T_2=10T_1$:



2. 3 Compensación mediante adelanto-atraso

- Reglas de diseño de compensador mediante adelante-atraso de fase:



2. 3 Compensación mediante adelanto-atraso

Suponga el siguiente compensador de atraso

$$G_c(s) = K_c \frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\gamma}{T_1}} \frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}} \qquad \gamma > 1 \qquad \beta > 1$$

La parte de adelanto de fase altera la curva de respuesta en frecuencia añadiendo un ángulo de adelanto de fase e incrementando el margen de fase en la frecuencia de cruce

La parte de atraso de fase permite una disminución de la ganancia decrementando la frecuencia de cruce y aumentando el margen de fase

2. 3 Compensación mediante adelanto-atraso

Ejemplo: Considere el sistema con realimentación unitaria cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

Se quiere diseñar un compensador de forma que el error estático de velocidad K_v sea de 10 s^{-1}, el margen de fase sea al menos de 50° y el margen de ganancia sea al menos de 10dB

2. 3 Compensación mediante adelanto-atraso

Solución:

K=20

La frecuencia de cruce se elije en el punto de fase 180° del sistema sin compensar

Las frecuencias de esquina de la parte de atraso se diseñan a partir del máximo adelanto de fase conseguible (β)

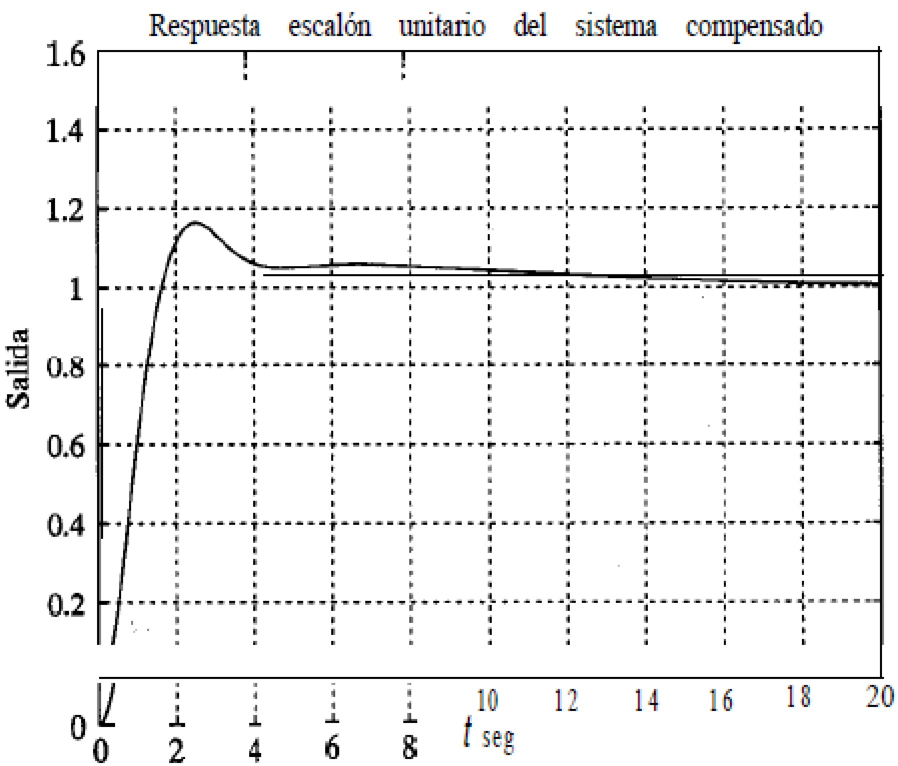
Las frecuencias de esquina de la parte de adelanto se diseñan para para obtener la frecuencia de cruce en el punto deseado

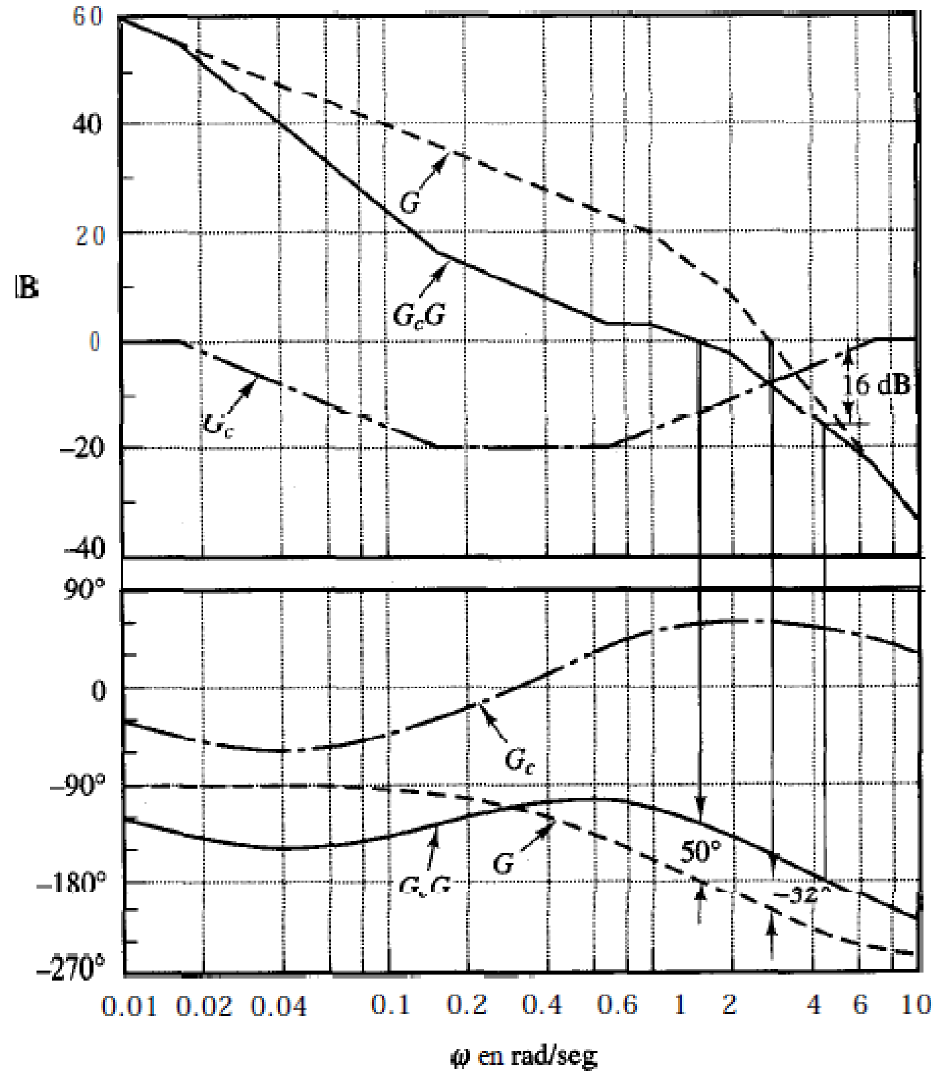
Controlador diseñado:

$$G_c(s) = \frac{s+0.7}{s+7}\,\frac{s+0.15}{s+0.015}$$

2. 3 Compensación mediante adelanto-atraso

Respuesta de Bode para el sistema compensado





3. Diseño de reguladores mediante el método del lugar de las raíces.

- Se utiliza cuando las especificaciones vienen dadas en el dominio del tiempo o en el dominio complejo.
  - $M_p \rightarrow$ Máximo sobreimpulso.
  - $t_r \rightarrow$ Tiempo se subida.
  - $t_s \rightarrow$ Tiempo de establecimiento.
  - K_p, K_v, $K_a \rightarrow$ Coeficientes estáticos de error.

- Especificaciones en el dominio de la frecuencia:
  - MF $\rightarrow$ Margen de Fase.
  - MG $\rightarrow$ Margen de ganancia.
  - BW $\rightarrow$ Ancho de banda.
  - $M_r \rightarrow$ Magnitud de resonancia.
  - $\omega_r \rightarrow$ Frecuencia de resonancia.
  - K_p, K_v, $K_a \rightarrow$ Coeficientes estáticos de error.

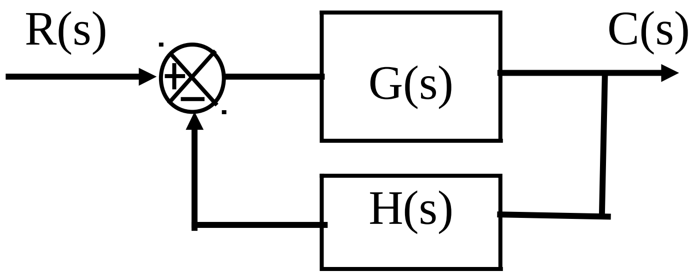
3. Diseño de reguladores mediante el método del lugar de las raíces.

- Efectos de la adición de polos:
  - El lugar de las raíces se desplaza hacia la derecha, haciéndose el sistema más inestable.
  - La respuesta transitoria se ralentiza.
  - La respuesta en régimen permanente mejora.
  - Físicamente, se asocia con la introducción de un control integral.

- Efectos de la adición de ceros:
  - El lugar de las raíces se desplaza hacia la izquierda, haciéndose el sistema más estable.
  - La respuesta transitoria se acelera.
  - La respuesta en régimen permanente empeora.
  - Físicamente, se asocia con la introducción de un control derivativo.

3. 1 Compensación mediante regulador PD

- Mejora la respuesta transitoria mediante un cero adicional en la función en lazo abierto.
- Vamos a verlo mediante el siguiente ejemplo:

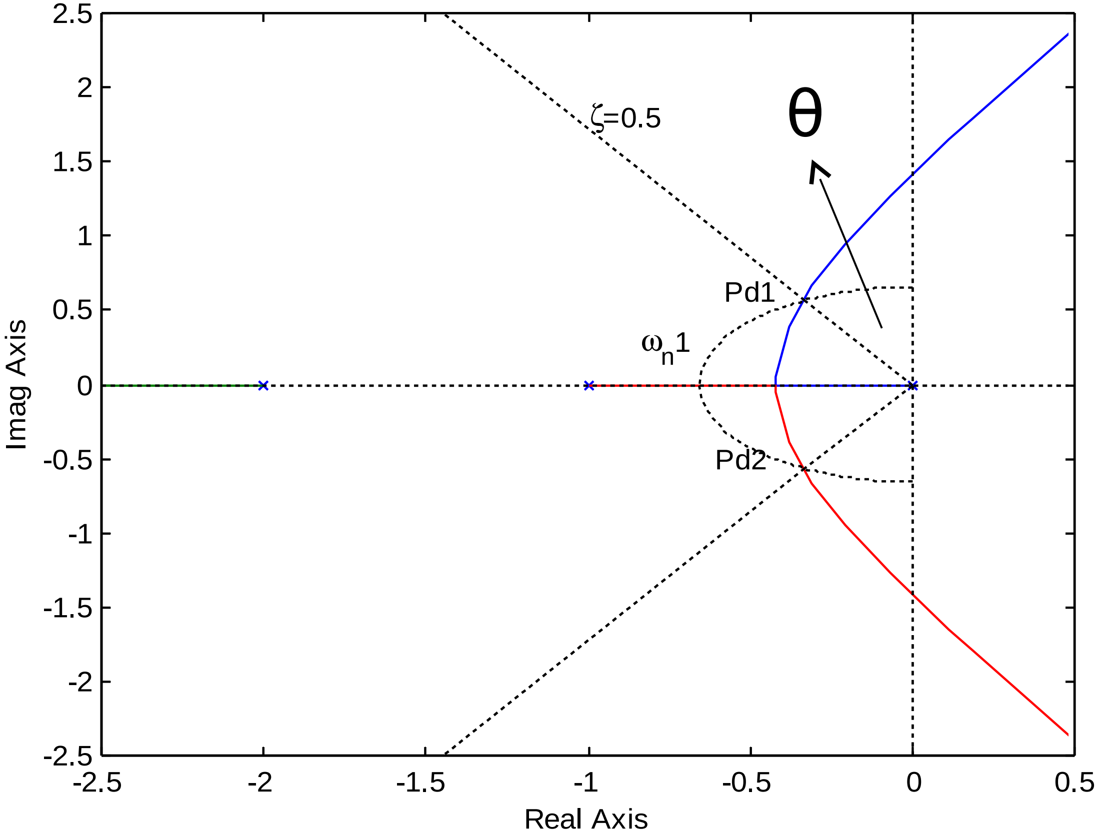


$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+2)} \qquad H(s)=1$$

- Especificaciones:
  - M_p=16% $\rightarrow \xi$ = 0,5
  - $t_s=\frac{\pi}{\xi\omega_n}=\frac{\pi}{\sigma}=t_{s1}$

3. 1 Compensación mediante regulador PD

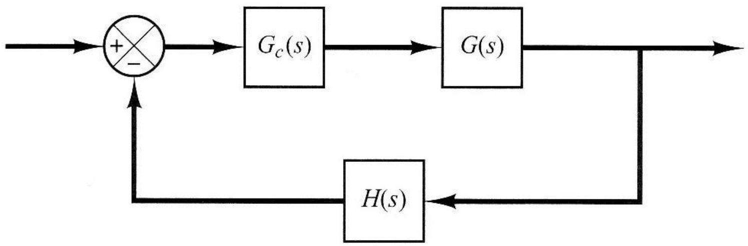
- Representamos el lugar de las raíces del sistema, ajustando K a K_1 para ξ = 0,5 ($\xi=\sin\theta$).



- Obtenemos: wn=wn1 $\rightarrow t_{s1}$

3. 1 Compensación mediante regulador PD

- Si la wn1 obtenida es pequeña, será necesario compensar con un regulador PD, sin modificar el parámetro $\xi = 0{,}5$



- El regulador que se introduce es el PD ideal:

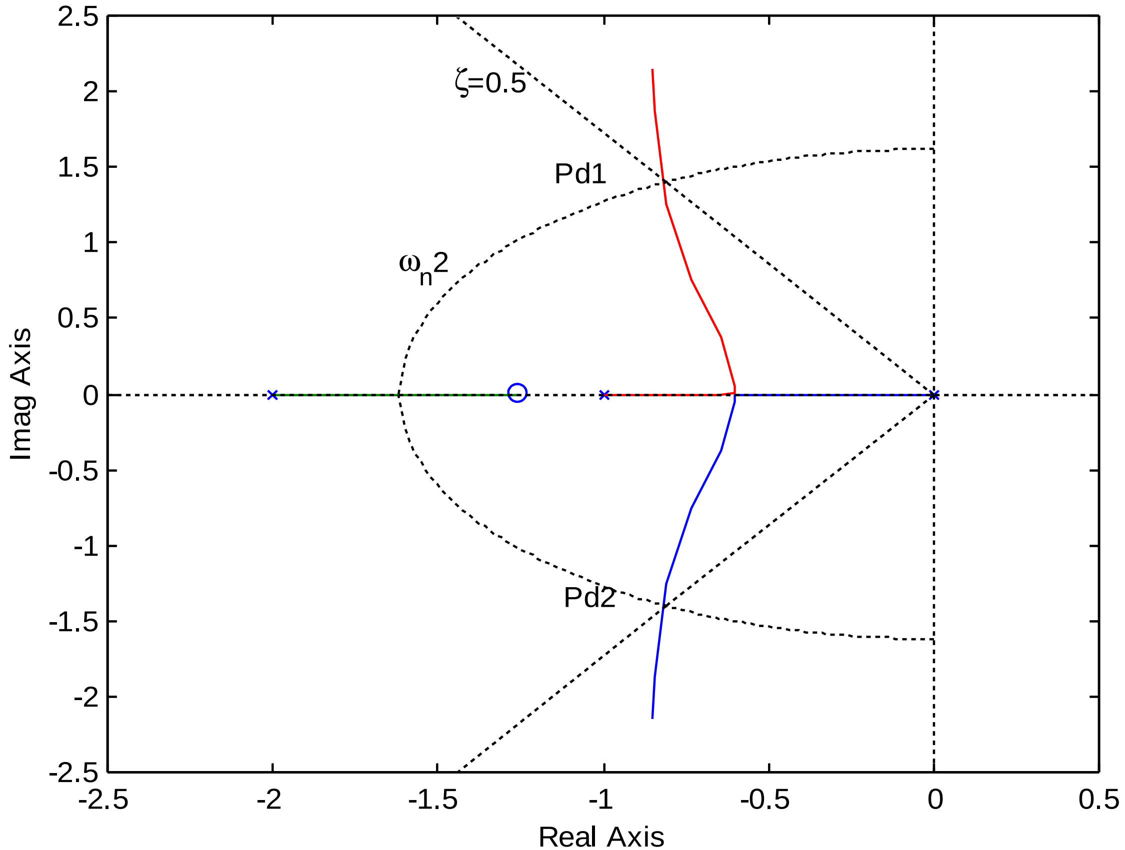
$$G_C(s) = K_D(1+T_D s)$$

- La función en LA del nuevo sistema queda:

$$G_{PD}(s) = \frac{KK_D(1+T_D s)}{s(s+1)(s+2)}$$

3. 1 Compensación mediante regulador PD

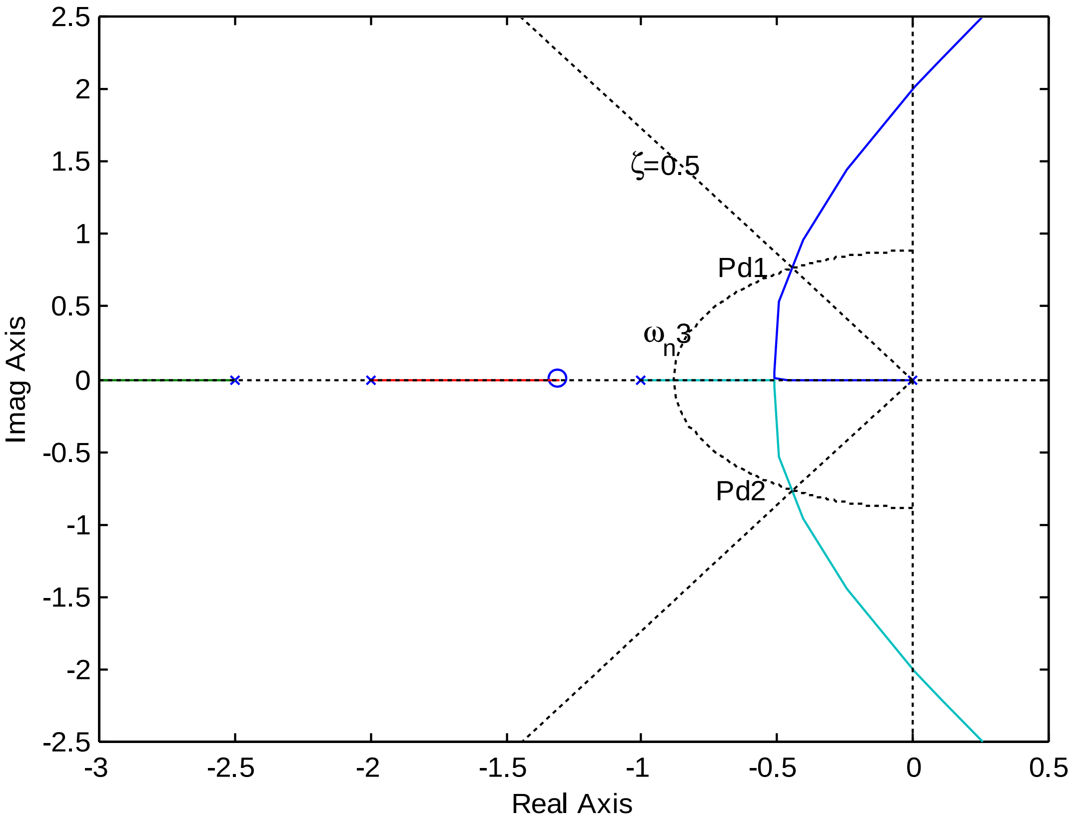
- En el nuevo L. R. Se observa que el sistema es siempre estable.
- wn=wn2>wn1 →ts2<ts1; Se sigue manteniendo ξ = 0,5.



3. 1 Compensación mediante regulador PD

- Regulador PD Real: $$G_C(s) = K_D \frac{(s+z)}{(s+p)}$$

- El polo debe situarse suficientemente lejos del eje imaginario para que su influencia sea muy pequeña.



3. 1 Compensación mediante regulador PD

- **Red de adelanto de fase: Método de la Bisectriz**

1. Determinar la ubicación deseada para los polos dominantes en lazo cerrado a partir de las especificaciones.

2. Determine a partir del lugar de las raíces si el ajuste de la ganancia permite obtener los polos deseados en lazo cerrado. En caso negativo determine la deficiencia de fase necesaria Φ.

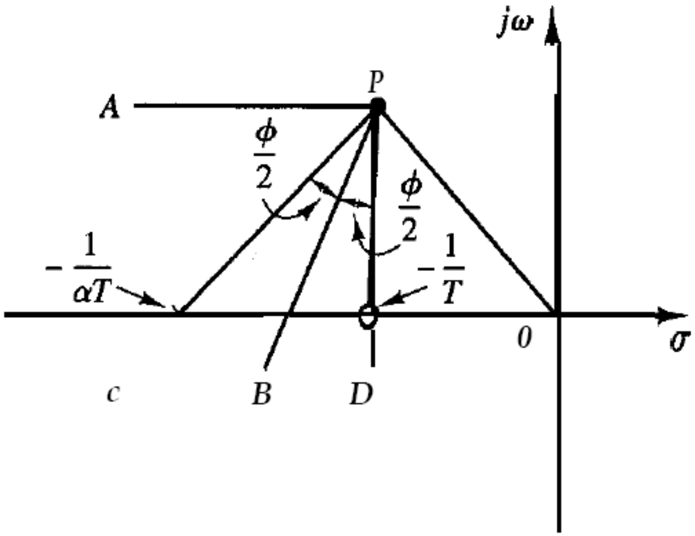
3. Utilice un compensador de adelanto con la siguiente forma:

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}, \qquad (0 < \alpha < 1)$$

3. 1 Compensación mediante regulador PD

- **Red de adelanto de fase: Método de la Bisectriz**

4. Calcule T y α a partir de la condición de fase del lugar de las raíces de modo que el compensador contribuya con el ángulo necesario Φ.



5. Determine el valor de kc a partir de la condición de magnitud del lugar de las raíces.

3. 1 Compensación mediante regulador PD

- **Red de adelanto de fase: Cancelación cero-polo**

1. Calcule T y α a partir de la condición de fase del lugar de las raíces de modo que el cero del compensador se ubica en la misma posición que alguno de los polos de la planta.

2. Determine el valor de kc a partir de la condición de magnitud del lugar de las raíces.

3. 1 Compensación mediante regulador PD

- **Red de adelanto de fase: Método de la vertical**

1. Calcule T y α a partir de la condición de fase del lugar de las raíces de modo que el cero del compensador se ubica sobre el eje real en la misma posición que la parte real de los polos dominantes deseados en lazo cerrado.

2. Determine el valor de kc a partir de la condición de magnitud del lugar de las raíces.

3. 2 Compensación mediante regulador PI

- Mejora la respuesta en régimen permanente (error).
- No empeora respuesta transitoria.
- El objetivo es aumentar los coeficientes estáticos de error:

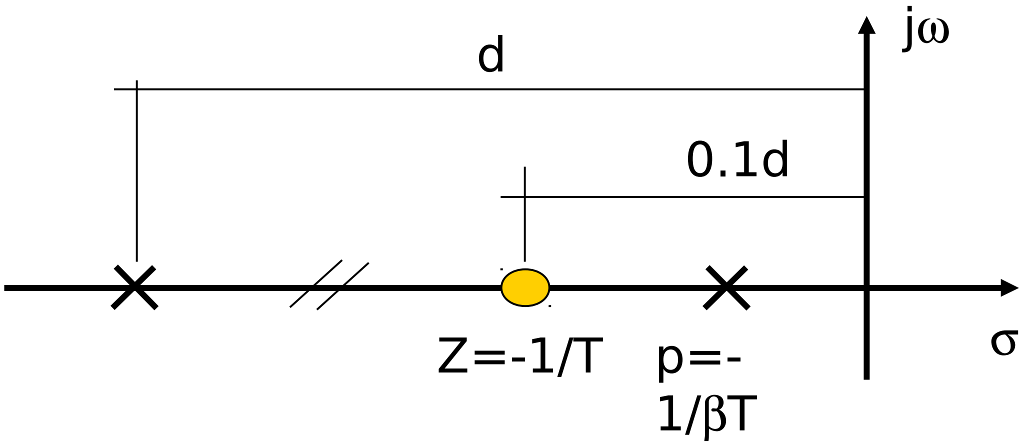
$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) \qquad K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) \qquad K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)$$

- En la práctica no se suele introducir un regulador ideal porque un polo en el origen desestabiliza el sistema.

3. 2 Compensación mediante regulador PI

- Regulador real:

$$G_C(s) = K_I \frac{\left(s + \frac{1}{T}\right)}{\left(s + \frac{1}{\beta T}\right)}$$



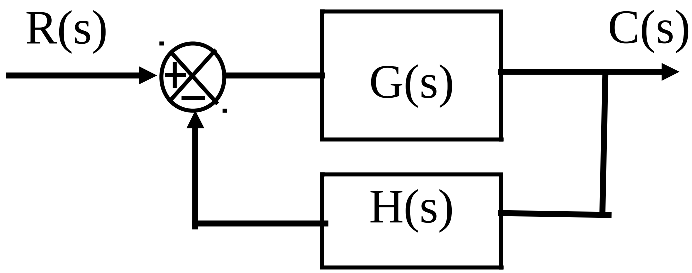
- El cero se coloca a una distancia del 10%, o menor, del primer polo o cero que se encuentre sobre el eje real.

$$\beta = \frac{Kec}{Ke1}$$

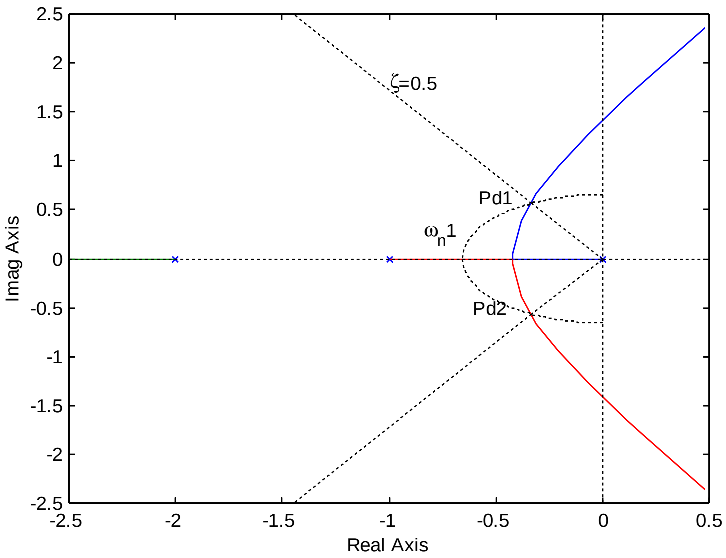
- *Kec* $\rightarrow$ Coeficiente estático requerido
- *Ke1* $\rightarrow$ Coeficiente estático del sistema sin regular
- K_I=1

3. 2 Compensación mediante regulador PI

- Ejemplo: En el ejemplo anterior, se ha ajustado K=K1=1 para obtener un ξ = 0,5



$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \qquad H(s) = 1$$



3. 2 Compensación mediante regulador PI

- En este caso:

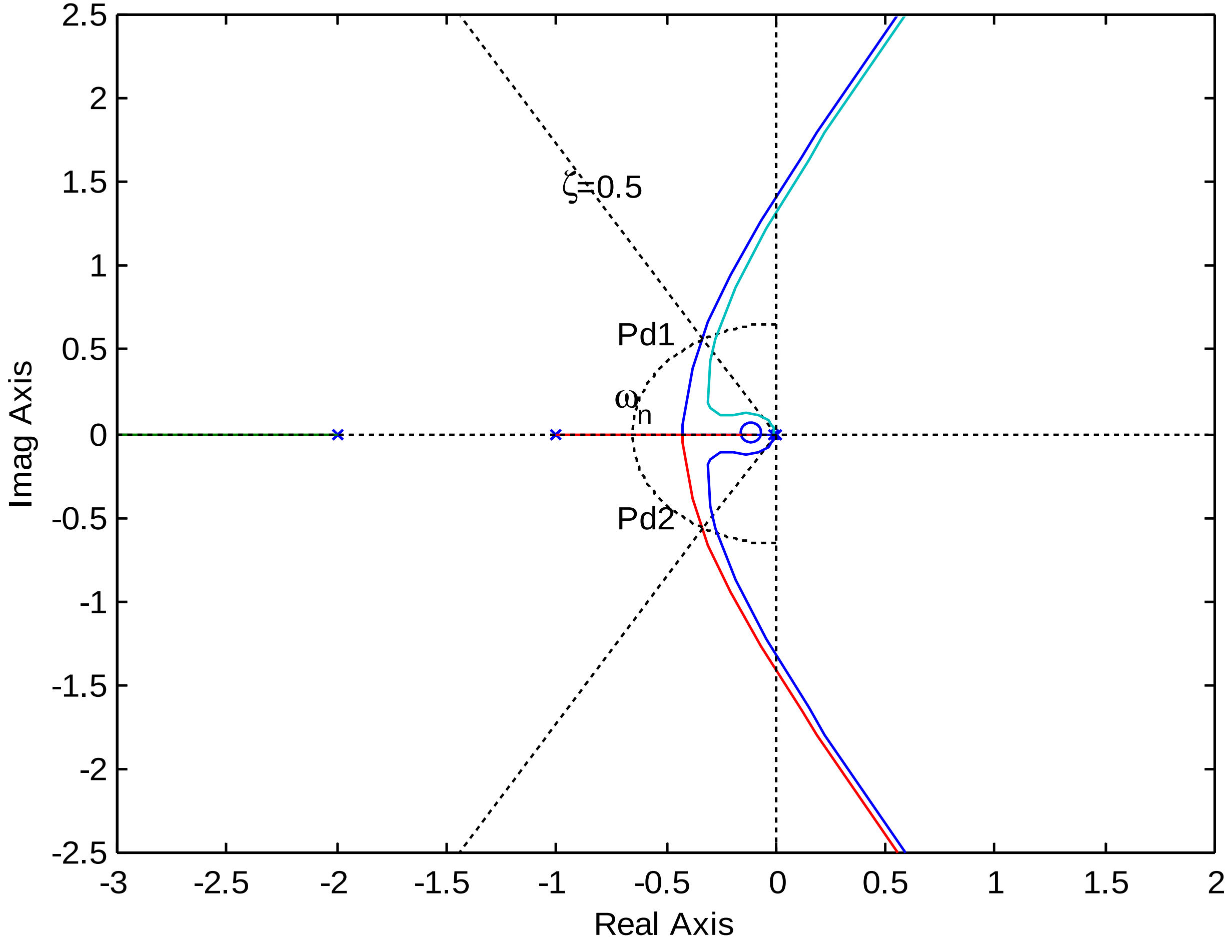
$$Kv1 = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} \frac{K_1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{2}$$

- Diseñar un regulador PI para disminuir el error de velocidad a la mitad.

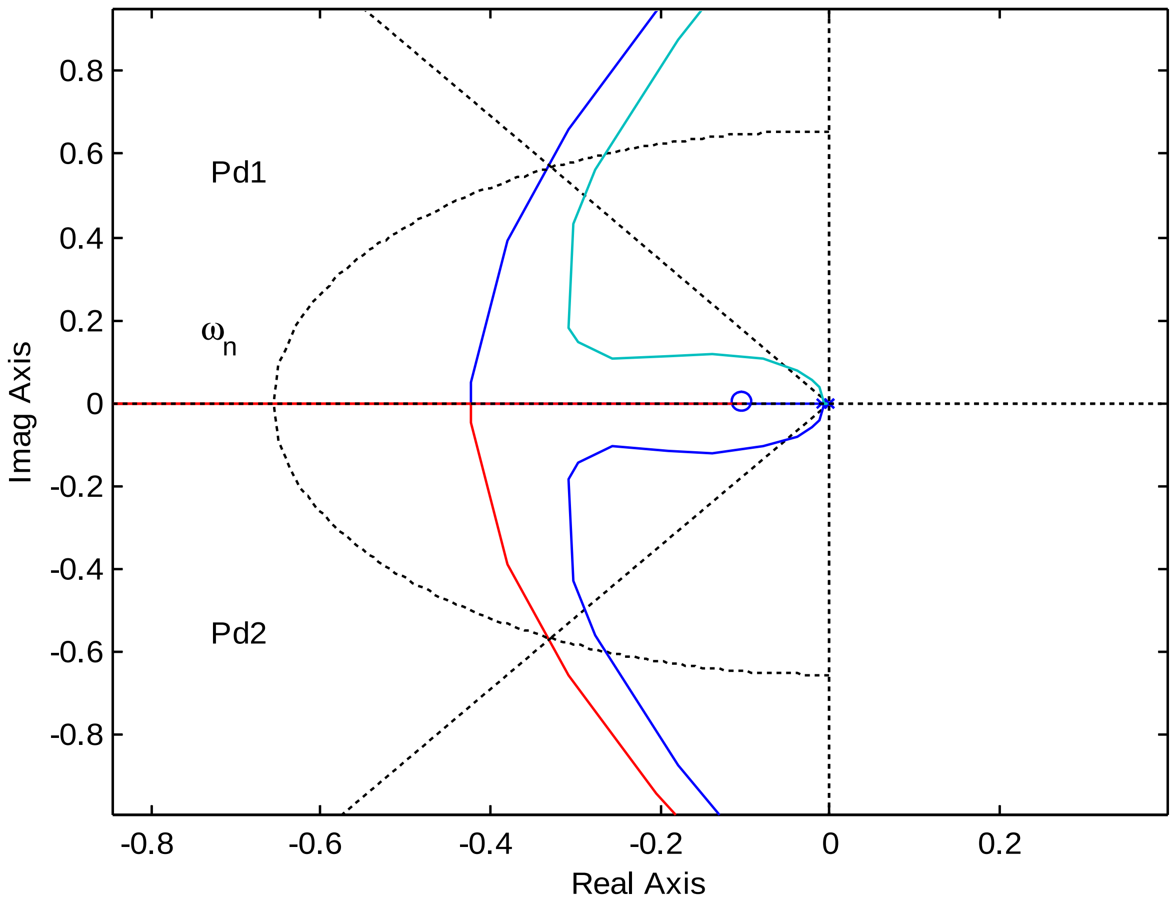
$$G_C(s) = \frac{\left(s+\frac{1}{T}\right)}{\left(s+\frac{1}{\beta T}\right)} \qquad G_T(s) = \frac{K_1\left(s+\frac{1}{T}\right)}{s(s+1)(s+2)\left(s+\frac{1}{\beta T}\right)}$$

$$\beta = \frac{Kvc}{Kv1} = \frac{1}{1/2} = 2 \Rightarrow \begin{cases} z = 0.1 * 1 = 0.1 \\ p = \frac{z}{\beta} = \frac{0.1}{2} = 0.05 \end{cases}$$

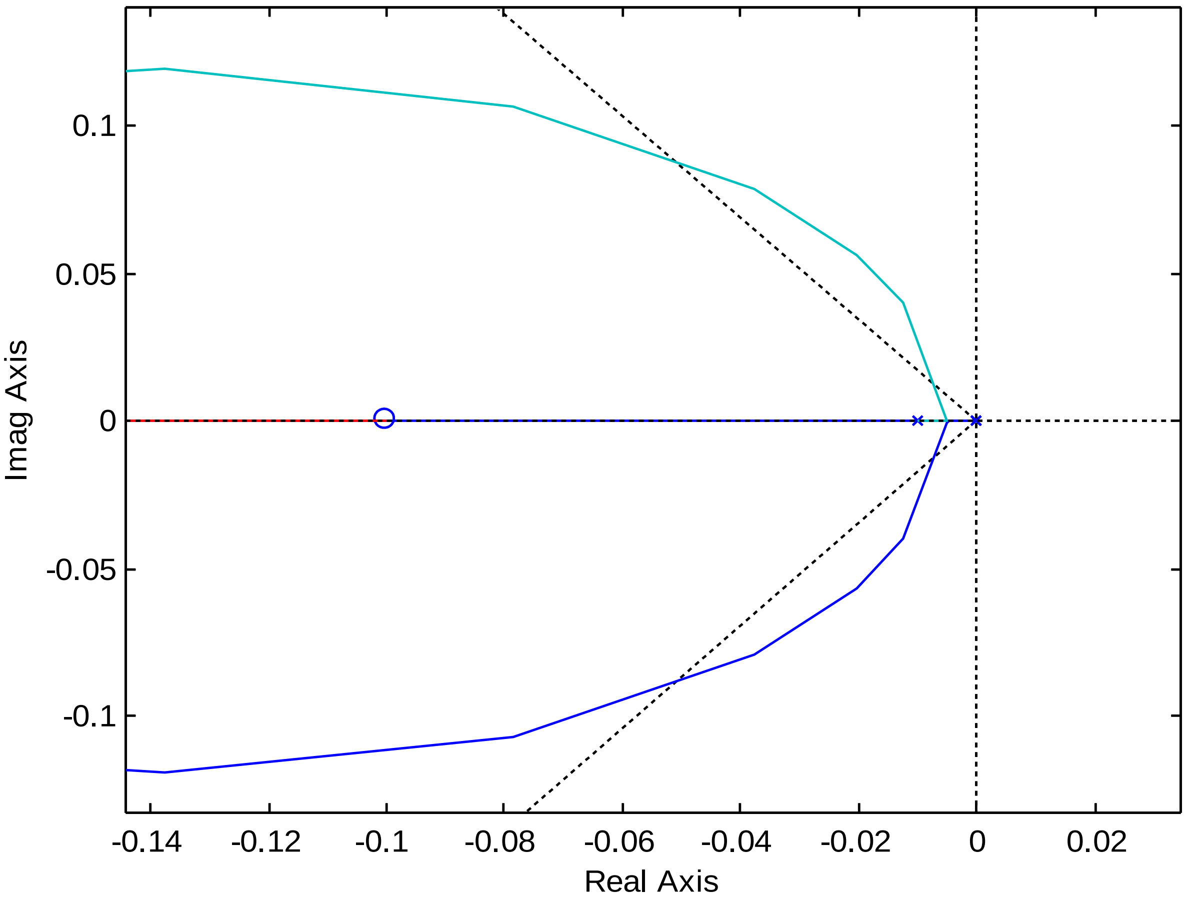
3. 2 Compensación mediante regulador PI



3. 2 Compensación mediante regulador PI



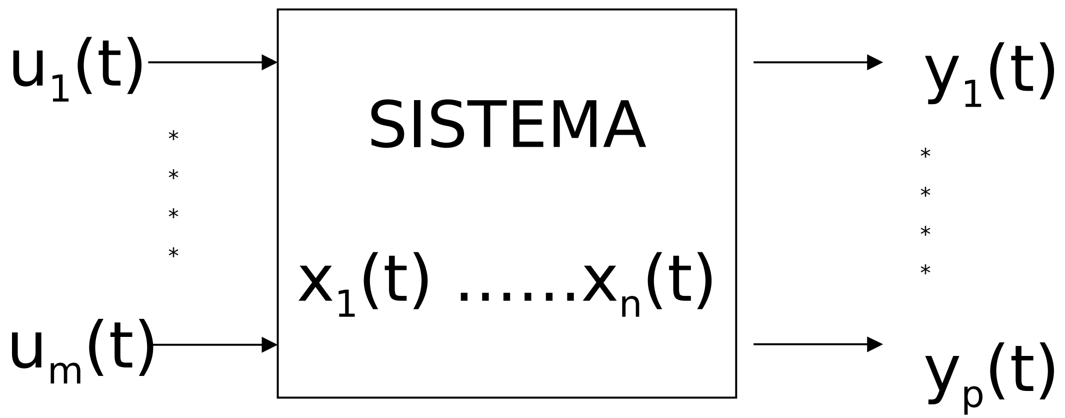
3. 2 Compensación mediante regulador PI



4. Control de Sistemas Multivariable

Sistemas MIMO (Multiple Input Multiple Output)

Son sistemas de varias entradas y salidas en los que una entrada afecta a varias salidas y, recíprocamente, una salida es afectada por varias entradas.



4. Control de Sistemas Multivariable

Definiciones de variables

U(t) → Entradas (m x 1)

Y(t) → Salidas (p x 1)

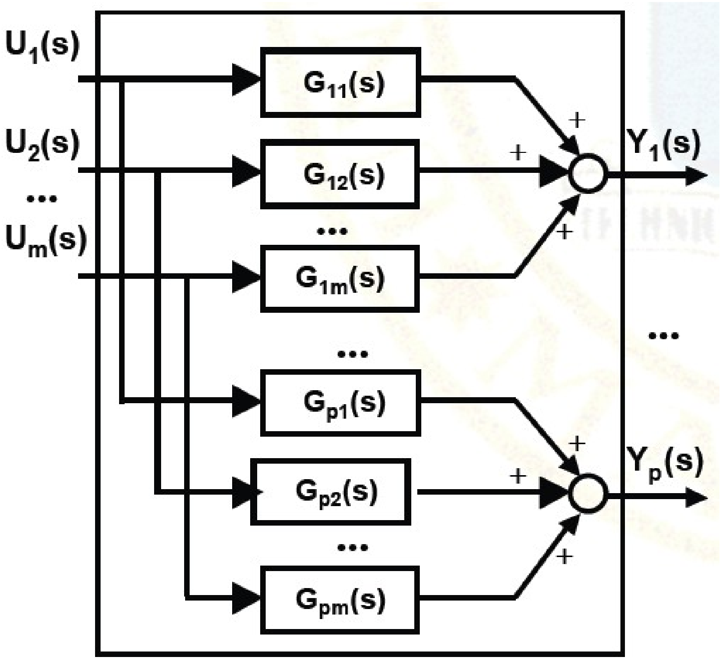
X(t) → Vector de estado (n x 1)

El espacio n_dimensional, cuyos ejes de coordenadas son las componentes del vector de estado se denomina **espacio de estados,** dando lugar al diseño de sistemas de control en el espacio de estados.

En este tema, se considerará solamente el enfoque clásico entrada-salida (U(t) vs Y(t)), dejando de lado el vector de estado.

Sistemas multivariable.

$$Y(S) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ \vdots \\ Y_p(s) \end{bmatrix} \qquad U(S) = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix} \qquad G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & G_{2m}(s) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ G_{p1}(s) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & G_{pm}(s) \end{bmatrix}$$



$$Y(S) = G(s) \cdot U(s)$$

$$Y_1(s) = G_{11}U_1(s) + \cdots + G_{1m}(s)$$
$$\vdots$$
$$Y_p(s) = G_{p1}U_1(s) + \cdots + G_{pm}(s)$$

4. Control de Sistemas Multivariable

Acoplamiento e Interacción

• Idealmente en los sistemas MIMO es deseable que una variable manipulada $\boldsymbol{u_i}$ afecte solo a una variable controlada $\boldsymbol{y_j}$.

• En el caso de que afecte a otras variables controladas se produce **acoplamiento.**

• Si además del acoplamiento del primer lazo con el segundo, existe acoplamiento del segundo con el primero, se dice que existe **interacción.**

• Esta interacción puede ser causa de oscilaciones e incluso inestabilidad.

4. Control de Sistemas Multivariable

Método de Bristol de las ganancias relativas

• Permite medir el grado de acoplamiento e interacción entre las distintas variables controladas y variables manipuladas de un sistema.
• Matriz de ganancias estáticas en lazo abierto: ***K***
• Matriz de ganancias relativas **λ = *f*(*K*)**

$$K = \lim_{s \to 0} G(s)$$

$$\lambda = K \times \left(K^{-1}\right)^T$$

• El símbolo x representa el producto de Hadamard de dos matrices (las matrices se multiplican elemento a elemento).

4. Control de Sistemas Multivariable

Método de Bristol de las ganancias relativas

- Cálculo equivalente de ***K*** y ***λ:***

$$K_{ij} = \lim_{s \to 0} G_{ij}(s)$$

$$\lambda_{ij} = \frac{\lim_{s \to 0} \dfrac{Y_i(s)}{U_j(s)} \quad lazos \quad abiertos}{\lim_{s \to 0} \dfrac{Y_i(s)}{U_j(s)} \quad lazos \quad cerrados}$$

4. Control de Sistemas Multivariable

Método de Bristol de las ganancias relativas

- Ejemplo***:***

$$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{-1.8}{1+4257.13s} & \dfrac{11.93}{1+645.16s} \\ \dfrac{0.0174}{1+929.37s} & \dfrac{-0.096}{1+471.03s} \end{bmatrix}$$

$$K=\begin{bmatrix} -1.81 & 11.93 \\ 0.017 & -0.0966 \end{bmatrix}$$

$$\lambda=\begin{bmatrix} -6.24 & 7.24 \\ 7.24 & -6.24 \end{bmatrix}$$

4. Control de Sistemas Multivariable

Características de la matriz λ

- Los elementos suman 1.0 en todas las filas y columnas.

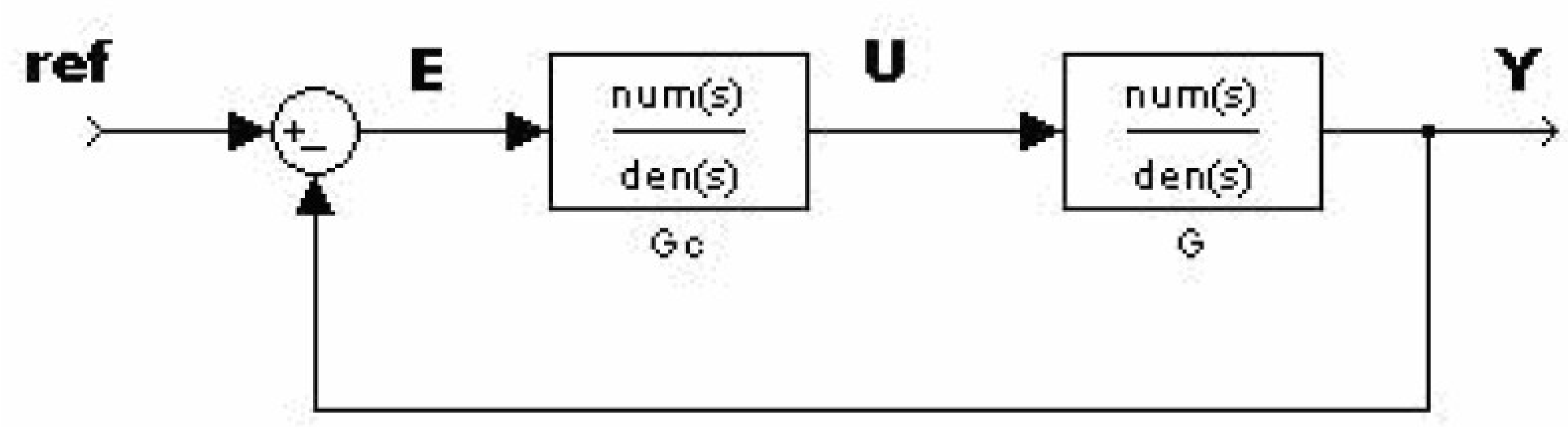
- Descripción de la interacción entre las variables

  - Cuanto más difiere de 1.0 mayor es el grado de interacción entre las variables.
  - Las variables se emparejan de forma que se elije el mayor λ_{ij}. En el ejemplo anterior, la variable de salida 1 debe emparejarse con la variable de control 2 y la variable de salida 2 debe emparejarse con la variable de control 1.

4. Control de Sistemas Multivariable

Sistemas de desacoplamiento

- Eliminan, o al menos reducen las interacciones.
- Esquema de desacoplamiento propuesto.



4. Control de Sistemas Multivariable

Diseño de sistemas de desacoplamiento

• Ecuación del sistema expresada en términos matriciales.

$$Y = (I+G*G_c)^{-1} * G * G_c * ref = G_{bc} * ref$$

• G_{bc} se obtiene a partir de las especificaciones impuestas para el sistema en lazo cerrado. G_D representa la matriz de desacoplo.

$$G_D = G * G_c = G_{bc} * (I - G_{bc})^{-1}$$

• Para que el sistema esté desacoplado, la matriz en lazo cerrado debe ser diagonal, y para ello, la matriz G_D también debe ser diagonal.

Diseño de sistemas de desacoplamiento

- Aplicándolo al ejemplo anterior, la matriz en lazo cerrado debe presentar la siguiente forma:

$$G_{bc} = \begin{bmatrix} 0 & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & 0 \end{bmatrix}$$

- Considerando las especificaciones impuestas en la práctica, un ejemplo de matriz deseada en lazo cerrado es el siguiente:

$$G_{bc} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{1+700s} \\ \dfrac{1}{1+930s} & 0 \end{bmatrix}$$

4. Control de Sistemas Multivariable

Diseño de sistemas de desacoplamiento

- Deducción del valor de G_D:

$$G_D = G_{bc} * (I - G_{bc})^{-1}$$

$$G_{Dii} = \frac{G_{BCii}}{1 - G_{Bii}}$$

$$G_{D11} = 0 \qquad G_{D12} = \frac{\frac{1}{1+700s}}{1 - \frac{1}{1+700s}}$$

$$G_{D21} = \frac{\frac{1}{1+930s}}{1 - \frac{1}{1+930s}} \qquad G_{D22} = 0$$

Diseño de sistemas de desacoplamiento

- Deducción del valor de G_C:

$$\mathbf{G_D} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{700s} \\ \dfrac{1}{930s} & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_D = G * G_C$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{700s} \\ \dfrac{1}{930s} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-1.8}{1+4257.13s} & \dfrac{11.93}{1+645.16s} \\ \dfrac{0.0174}{1+929.37s} & \dfrac{-0.096}{1+471.03s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{C11} & G_{C12} \\ G_{C21} & G_{C22} \end{bmatrix}$$

4. Control de Sistemas Multivariable

Diseño de sistemas de desacoplamiento

- Resolución de un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas:

$$0 = \frac{-1.8}{1+4257.13s} * G_{C11} + \frac{11.93}{1+645.16s} * G_{C21}$$

$$\frac{1}{700s} = \frac{-1.8}{1+4257.13s} * G_{C12} + \frac{11.93}{1+645.16s} * G_{C22}$$

$$\frac{1}{930s} = \frac{0.0174}{1+929.37s} * G_{C11} + \frac{-0.096}{1+471.03s} * G_{C21}$$

$$0 = \frac{0.0174}{1+929.37s} * G_{C12} + \frac{-0.096}{1+471.03s} * G_{C22}$$

4. Control de Sistemas Multivariable

Diseño de sistemas de desacoplamiento

- Resultado final de la matriz de compensación (o controladores)

$$G_{C11} = \frac{12355708443s^3 + 42428328s^2 + 37509.42s + 6.63}{155737150s^3 + 353331s^2 + 17.1s}$$

$$G_{C12} = \frac{2552542600s^3 + 7302571.3s^2 + 5831.66s + 1}{2280494850s^3 + 5171370.1s^2 + 252s}$$

$$G_{C21} = \frac{282425980s^3 + 1341243.2s^2 + 2045.56s + 1}{155737150s^3 + 353331s^2 + 17.1s}$$

$$G_{C22} = \frac{234482762.5s^3 + 916337.6s^2 + 973.9s + 0.1825}{2280494850s^3 + 5171370.1s^2 + 252s}$$

4. Control de Sistemas Multivariable

Diseño de sistemas de desacoplamiento

- **Observaciones**:

  - El sistema de desacoplo no es perfecto ya que trabaja con modelos simplificados de la planta. En ocasiones pudiera no ser ni siquiera realizable físicamente.

  - Se han obviado retardos y tiempos muertos. Si existen estos elementos, el sistema de compensación se diseñará obviando la existencia de los mismos, para posteriormente añadirlos en el esquema de control final.