Tema 6. Interacción gravitatoria.

Problemas resueltos.

Problema 1.- Un satélite artificial se lanza, en dirección paralela a la superficie de la Tierra, desde una altura $h = 500km$. Determinar su velocidad inicial, v_0, para que describa una órbita circular. Suponer que los únicos datos, además de la altura h, son el radio de la Tierra ($R = 6{,}371km$) y la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra ($g = 9,8m/s^2$).

Solución:

Como nos dicen que el movimiento será circular, se tendrá que cumplir

$$m\frac{v_0^2}{R+h} = G\frac{Mm}{(R+h)^2}$$

donde M es la masa de la Tierra y m la masa del satélite. En primer lugar vemos que la masa del satélite aparece en los dos miembros de la ecuación, por lo que puede simplificarse, de forma que no interviene en la solución del problema. Para calcular la masa de la Tierra suponemos el satélite justo en la superficie terrestre, de forma que la segunda ley de Newton nos dice que

$$F = G\frac{Mm}{R^2} = mg$$

de donde se deduce $GM = gR^2$, que sustituído en la ecuación (1) nos conduce a la solución pedida

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}$$

que sustituyendo los valores nos da $v_0 = 7,6\,km\,s^{-1}$.

Problema 2.- Una partícula está sometida a una fuerza atractiva que varía en razón inversa del cuadrado de la distancia, $F = -k/r^2$. La trayectoria seguida por la partícula es una circunferencia de radio r. Demostrar:
(a) que su energía total E vale $-k/2r$;
(b) que su momento angular es $L = (mkr)^{1/2}$.

Solución:

(a) Como F es una fuerza central, el campo de fuerzas es conservativo, por lo que la energía potencial se puede calcular como

$$U = -\int_{\infty}^{r} F(r)dr = -\int_{\infty}^{r} (-k/r^2)dr = -k/r$$

y, de acuerdo con el principio de la conservación de la energía mecánica

$$E_{total} = E_c + U = \frac{1}{2}mv^2 + (-k/r)$$

pero como la partícula se mueve en una circunferencia de radio r, la fuerza que actúa sobre ella valdrá $F = -mv^2/r = -k/r^2$ (recordar que el signo - indica que tanto la fuerza como la aceleración están dirigidas hacia el centro de fuerzas), es decir

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{k}{2r}$$

Sustituyendo este valor en la expresión para la energía total nos queda

$$E_{total} = -\frac{k}{2r}$$

(b) En el apartado anterior se dedujo que la velocidad valía $v = (k/mr)^{1/2}$, de forma que el momento angular (su módulo) vale

$$L = rmv = rm\left(\frac{k}{mr}\right)^{1/2} = (mkr)^{1/2}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Problema 3.- Una pequeña luna de masa m y radio a orbita alrededor de un planeta de masa M describiendo un círculo de radio r y manteniendo siempre la misma cara hacia el planeta. Suponiendo que $r \gg a$, demostrar que si la luna se acerca al planeta a una distancia menor que $r_c = a(3M/m)^{1/3}$, una roca "suelta" sobre la superficie de la luna se elevará (en relación a la superficie lunar) por efecto de la atracción gravitatoria del planeta.

Solución:

Consideremos una pequeña roca de masa μ sobre la superficie de la luna. Como nos dicen que la luna mantiene la misma cara hacia el planeta en su movimiento circular, la velocidad de la roca será la misma que la de la luna alrededor del planeta, que viene dada por $GMm/r^2 = mv^2/r = mr\omega^2$, donde hemos usado la velocidad angular $\omega = v/r$. De aquí deducimos que

$$\omega^2 = \frac{GM}{r^3} \tag{1}$$

Escribamos ahora la segunda ley de Newton para la roca sobre la luna. Las fuerzas que actúan sobre la misma son: la fuerza de atracción gravitatoria de la luna sobre la roca, dirigida hacia el centro de la luna; la fuerza de atracción gravitatoria del planeta sobre la roca, dirigida hacia el centro del planeta, y la fuerza de contacto, F, entre la roca y la luna, es decir, la fuerza normal que la luna ejerce sobre la roca y que impide que esta "penetre", por efecto de la atracción gravitatoria, en el interior de la luna, dirigida, por consiguiente, hacia el exterior de la luna, es decir, hacia el planeta (ya que la luna presenta siempre la misma cara en su órbita alrededor del mismo). La suma (vectorial) de estas tres fuerzas debe ser igual al producto de la masa de la roca por la aceleración centrípeta de la roca, es decir

$$\frac{GM\mu}{(r-a)^2} - \frac{Gm\mu}{a^2} + F = \mu(r-a)\frac{GM}{r^3} \tag{2}$$

donde en el segundo miembro hemos sustituido ω^2 por la expresión (1) encontrada anteriormente.

A medida que la luna se acerca al planeta la atracción gravitatoria de este sobre la roca será mayor, pero mientras la fuerza de contacto F sea distinta de cero, la roca continuará "pegada" a la superficie de la luna. Así pues la condición para que la roca empiece a elevarse es $F = 0$. Poniendo esta condición en (2), simplificando y reordenando términos llegamos a

$$\frac{Ma^3}{mr^3} = \frac{(r-a)^2}{3r^2 - 3ra + a^2} \simeq \frac{1}{3} \tag{3}$$

donde en la última parte de la ecuación hemos usado la condición $r \gg a$ para aproximar la fracción por el valor $1/3$.

Finalmente, despejando en (3) obtenemos el resultado pedido

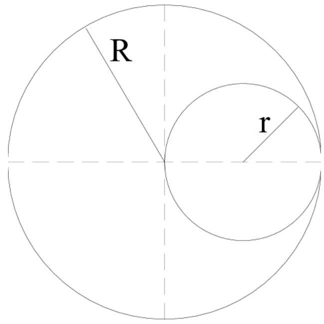
$$r_c \simeq a(3M/m)^{1/3} \tag{4}$$

que nos da la distancia a partir de la cual la roca se elevaría por efecto de la atracción gravitatoria del planeta.

Problema 4.- Una esfera de radio R tiene su centro en el origen de coordenadas. Posee una densidad de masa uniforme ρ_0 exceptuando el hecho de que tiene un agujero esférico de radio $r = R/2$ cuyo centro se encuentra en $x = R/2$, como se muestra en la figura. Calcular el campo gravitatorio en los puntos del eje x para los que se cumple que $x \geq R$.

Solución:

El campo gravitatorio es una magnitud vectorial, de forma que el campo producido por dos cuerpos es la suma (vectorial) del campo producido por cada uno de ellos por separado. En nuestro caso tenemos una esfera maciza a la que le falta un trozo, de forma que el campo gravitatorio en un punto P será el producido por la esfera si no tuviera el hueco *menos* el que produciría el hueco si también fuera macizo. Así pues, llamando $\vec{g}_R$ y $\vec{g}_r$ a los campos gravitatorios de la esfera y del hueco, respectívamente, tenemos que el campo gravitatorio en un punto P situado a una distancia x del centro de la esfera se puede poner como



$$\vec{g}_P = \vec{g}_R - \vec{g}_r = -\frac{GM}{x^2}\vec{i} - \left(-\frac{Gm}{(x-r)^2}\right)\vec{i}$$

donde $\vec{i}$ es el vector unitario en la dirección del eje x, $M = (4/3)\pi R^3\rho_0$ es la masa de la esfera (si no hubiera hueco) y $m = (4/3)\pi r^3\rho_0$ es la "masa" del hueco (si fuera macizo). Teniendo en cuenta que $r = R/2$, nos queda finalmente

$$\vec{g}_P = -\frac{G\pi R^3\rho_0}{6}\left[\frac{8}{x^2} - \frac{1}{\left(x-\frac{R}{2}\right)^2}\right]\vec{i}$$

que es el campo gravitatorio pedido.

Problema 5.- Las mareas se producen como consecuencia de las fuerzas gravitatorias ejercidas por el Sol y la Luna sobre los océanos y la Tierra.
(a) Demostrar que el cociente entre la fuerza ejercida por el Sol y la ejercida por la Luna es $M_S r_L^2/M_L r_S^2$, en donde M_S y M_L son las masas del Sol y de la Luna y r_S y r_L son las distancias de la Tierra al Sol y a la Luna. Evaluar numéricamente este cociente.
(b) A pesar de que el Sol ejerce una fuerza mucho mayor sobre el océano que la ejercida por la Luna, ésta produce un efecto mucho mayor sobre las mareas, porque el hecho importante es la *variación* en la fuerza cuando la distancia al océano varía (debido a la rotación terrestre). Demostrar que para una pequeña variación de la distancia, la variación de la fuerza ejercida por el Sol está relacionada con la variación de la fuerza ejercida por la Luna por

$$\frac{\Delta F_S}{\Delta F_L} \approx \frac{M_S r_L^3}{M_L r_S^3}$$

y evaluar numéricamente esta relación.

Solución:

(a) El módulo de la fuerza Sol-Tierra vale $F_S = GM_S M_T/r_S^2$ y el de la fuerza Luna-Tierra $F_L = GM_L M_T/r_L^2$, por lo que el cociente vale

$$\frac{F_S}{F_L} = \frac{M_S r_L^2}{M_L r_S^2} \approx 177$$

(b) Para calcular la variación de la fuerza con la distancia derivamos la expresión de la fuerza con respecto a la distancia

$$\begin{aligned} \frac{dF_S}{dr} &= -2G\frac{M_S M_T}{r_S^3} \\ \frac{dF_L}{dr} &= -2G\frac{M_L M_T}{r_L^3} \end{aligned}$$

si la variación de la distancia no es infinitesimal podemos poner $dF/dr \approx \Delta F/\Delta r$ y el cociente vale

$$\frac{\Delta F_S}{\Delta F_L} \approx \frac{M_S r_L^3}{M_L r_S^3} \approx 0,45$$

de manera que se observa como en este caso el efecto de la Luna es más importante que el del Sol.

Problema 6.- Investigando el planeta Norc, situado en otro sistema solar, encontramos que su radio es R y que el período de un satélite en una órbita circular de radio r alrededor de Norc es T. Se pide:
(a) la masa de Norc;
(b) el valor del campo gravitatorio en la superficie de Norc;
(c) suponiendo que el planeta es homogéneo (densidad constante), calcular la profundidad a la que debe introducirse un cuerpo para que su peso sea el mismo que a una altura h sobre la superficie del planeta.

Solución:

(a) Sea M la masa de Norc y m la masa del satélite en la órbita. La segunda ley de Newton nos da

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

pero, $v = 2\pi r/T$, de forma que

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2 G}$$

(b) Si g es el valor de la gravedad en la superficie de Norc, y m es la masa de un cuerpo en su superficie, se tiene

$$G\frac{Mm}{R^2} = mg \quad\Longrightarrow\quad g = \frac{GM}{R^2}$$

(c) Sea P el peso de un cuerpo. A una altura h se tiene

$$P = G\frac{Mm}{(R+h)^2}$$

donde m es la masa del cuerpo y $M = (4/3)\pi R^3\rho$ es la masa de Norc (ρ es la densidad que se supone constante). A una profundidad h' será

$$P = G\frac{M' m}{(R-h')^2}$$

con $M' = (4/3)\pi(R-h')^3\rho$. Igualando y simplificando, nos queda finalmente

$$h' = R - \frac{R^3}{(R+h)^2}$$

Problema 7.- Un planeta esférico recientemente descubierto tiene una densidad de masa doble que la de la Tierra, pero la aceleración debida a la gravedad sobre su superficie es exactamente la misma que la que se obtiene sobre la superficie de la Tierra. Se pide:
(a) encontrar el radio del planeta en función del radio de la Tierra;
(b) demostrar que la energía cinética que necesitaría una nave espacial, colocada a una distancia r del planeta, para escapar de la atracción del mismo es el doble que la energía cinética necesaria para que la misma nave girara alrededor del planeta en una orbita circular a la misma distancia r. ¿Sería este último resultado válido también para la Tierra?.

Solución:

(a) La aceleración debida a la gravedad en la superficie de un planeta de masa M y radio R viene dada por $g_p = GM/R^2$. Si el planeta se considera esférico con una densidad ρ su masa es $M = (4/3)\pi R^3\rho$, de forma que

$$g_p = \frac{4}{3}\pi G R\rho$$

como nos dicen que la aceleración debida a la gravedad en el planeta es igual que en la Tierra, ponemos $g_p = g_{Tierra}$, por lo que, simplificando el factor $(4/3)\pi G$ nos queda

$$R\rho = R_{Tierra}\rho_{Tierra}$$

de forma que como nos dicen que $\rho = 2\rho_{Tierra}$, obtenemos finalmente

$$R = \frac{1}{2} R_{Tierra}$$

(b) Para calcular la energía cinética mínima de escape utilizamos el principio de conservación de la energía entre el punto situado a una distancia r de la superficie del planeta y el infinito a donde llega la nave con velocidad cero (ya que buscamos la energía mínima de escape), es decir

$$E_{c,r} + E_{p,r} = E_{c,\infty} + E_{p,\infty} \implies \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{R+r} = 0$$

donde R es el radio del planeta, se ha tomado el infinito como origen de energías potenciales de forma que $E_{p,\infty} = 0$, y, además, la energía cinética $E_{c,\infty} = 0$ por lo dicho anteriormente. Por lo tanto la energía cinética que hay que comunicar a la nave para que llegue al infinito vale

$$E_{c,r} = \frac{1}{2}mv^2 = G\frac{mM}{R+r}$$

Por otra parte si la misma nave gira alrededor del planeta a una distancia r de su superficie con una velocidad v' la segunda ley de Newton conduce a

$$F = ma \implies G\frac{mM}{(R+r)^2} = m\frac{v'^2}{R+r}$$

donde hemos puesto que la aceleración es la centrípeta pues describe un movimiento circular alrededor del planeta. De aquí deducimos que $E'_{c,r} = (1/2)mv'^2 = GmM/2(R+r)$, de forma que comparando con la energía cinética de escape obtenemos

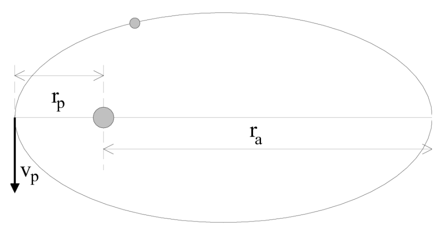
$$E_{c,r} = 2E'_{c,r}$$

Finalmente, de la propia deducción de este resultado se ve que también será válido en la Tierra y en cualquier otro planeta que se considere esférico.

Problema 8.- Un satélite describe una órbita *elíptica* alrededor de un planeta de radio R y en el que la aceleración de la gravedad vale g. La separación entre el satélite y el centro del planeta varía entre r_p (en el *perigeo* o punto de mínima separación) y r_a (en el *apogeo* o punto de máxima separación). El módulo de la velocidad en el perigeo vale v_p. Se pide:
(a) Demostrar que la velocidad en el apogeo, v_a, es *menor* que en el perigeo;
(b)Calcular el módulo de la velocidad en el apogeo, v_a, cuando $R = 6{,}370\ Km.$, $g = 9{,}8\ m/s^2$, $r_p = 7{,}200\ Km.$ y $v_p = 8\ Km/s$;
(c) Calcular el módulo de la velocidad del satélite, v_s, cuando se encuentra a una distancia $r_s = 8{,}400\ Km.$;
(d) ¿Sabría contestar a los apartados anteriores (b) y (c) sin conocer los valores de R y g ?.

Solución:

(a) Suponiendo el planeta fijo, la única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza de atracción gravitatoria que es una fuerza central conservativa, por lo que en todos los puntos de la trayectoria se conserva la energía total. Suponiendo que la masa del planeta es M y la masa del satélite es m, la energía total en un punto de la trayectoria a una distancia r_x del planeta viene dada por



$$E_x = \frac{1}{2}mv_x^2 \ - \ \frac{GMm}{r_x}$$

Puesto que esta energía total se mantiene constante,
para calcular la velocidad en el apogeo igualamos la energía total en el apogeo con la energía en el perigeo, es decir, ponemos $E_a = E_p$, de donde, despejando v_a, se obtiene

$$v_a = \sqrt{v_p^2 v \ + \ 2gR^2\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_p}\right)}$$

donde hemos tenido en cuenta que $GM = gR^2$. De la ecuación anterior se deduce que, como $r_a > r_p$ el segundo término en la raíz cuadrada es negativo, por lo que $v_a < v_p$.

(b) Para poder aplicar la fórmula para v_a encontrada en el apartado anterior nos falta conocer el valor de r_a que no nos lo dan en el enunciado. Para ello hacemos uso del hecho de que la fuerza sobre el satélite es una fuerza central, por lo que el momento angular orbital del satélite respecto al planeta se conserva, de forma que

$$L = mvr \operatorname{sen} \phi = \text{constante}$$

donde ϕ es el ángulo que forma la recta que une el planeta con el satélite y la velocidad del satélite. En el apogeo y en el perigeo se tiene $\phi = \pi/2$ de forma que $\operatorname{sen} \phi = 1$, por lo que $v_a r_a = v_p r_p$, que permite escribir $r_a = v_p r_p / v_a$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación para v_a del apartado anterior y operando, se encuentra una ecuación de segundo grado para v_a cuyas soluciones son

$$v_a = v_p; \quad v_a = \frac{2gR^2}{r_p v_p} - v_p$$

por lo que, descartando la primera, ya que en la primera parte hemos demostrado que $v_a < v_p$, y dando los valores numéricos que nos dicen, se encuentra finalmente $v_a = 5,82\ Km/s$.

(c) Sustituyendo en la fórmula del apartado a) la distancia r_c encontramos ahora $v_c = 6,94\ Km/s$.

(d) Tal y como está enunciado el problema la respuesta es NO. Si nos hubieran dado el valor de r_a se podría haber usado la conservación del momento angular para calcular $v_a = r_p v_p / r_a$ sin necesidad de conocer R ni g, pero para el apartado c) sí necesitaríamos estos valores, ya que desconocemos el valor del ángulo ϕ que aparece en el momento angular.

Problema 9.- Suponiendo que la Tierra tuviese exactamente simetría esférica, se pide: (a) Demostrar que g a una altura h sobre la superficie terrestre tal que $h \ll R_T$ (R_T es el radio de la Tierra) puede escribirse *en primera aproximación* como

$$g \approx \left(\frac{GM_T}{R_T^2}\right)\left(1 - \frac{2h}{R_T}\right)$$

(b) Calcular el tanto por ciento de reducción que experimenta la aceleración de la gravedad al aumentar la altura en 10 Km sobre la superficie terrestre.

(Ayuda: Redordar el desarrollo del binomio $(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)x^2/2! + \dots$).

Solución:

(a) A una altura h sobre la superficie terrestre tenemos

$$g = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2} = \frac{GM_T}{R_T^2}\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^{-2}$$

Utilizando ahora el desarrollo del binomio, se tiene, en primera aproximación (es decir, despreciando términos que involucran potencias de orden dos o superior), $(1 + h/R_T)^{-2} \approx 1 - 2h/R_T$, por lo que

$$g \approx \left(\frac{GM_T}{R_T^2}\right)\left(1 - \frac{2h}{R_T}\right)$$

que es el resultado pedido.

(b) Utilizando el resultado anterior tenemos

$$\Delta g = g' - g = \left(\frac{GM_T}{R_T^2}\right)\left(1 - \frac{2h}{R_T}\right) - \frac{GM_T}{R_T^2} = -\frac{2GM_T h}{R_T^3}$$

de forma que el cambio fraccional vendrá dado por

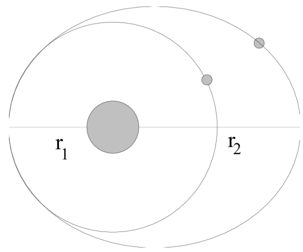
$$\frac{\Delta g}{g} = -\frac{2h}{R_T}$$

Dando los valores numéricos se encuentra $\Delta g/g = -3 \times 10^{-3}$ (el signo menos indica que g disminuye con la altura), por lo que el porcentaje pedido es el 0,3.

Problema 10.- Dos planetas de masas iguales, m, orbitan alrededor de una estrella de masa mucho mayor, M, de forma que la interacción gravitatoria planeta-planeta se puede despreciar frente a la interacción planeta-estrella. El planeta 1 se mueve en una órbita *circular* de radio $r_1 = 10^{11}\ m$ y periodo $T_1 = 2$ años. El planeta 2 se mueve en una órbita *elíptica* cuya distancia mas próxima a la estrella (perihelio, P) es también r_1 y la mas alejada (afelio, A) es $r_2 = 1,8 \times 10^{11}\ m$. Se pide:
(a) Utilizando el hecho de que el radio medio de una órbita elíptica es la longitud del semieje mayor, hallar el periodo de la órbita del planeta 2;
(b) Calcular la masa de la estrella;
(c) Sabiendo que la velocidad del planeta 2 en el afelio vale $v_{2A} = 6\ Km\,/\,s$, ¿cuál de los dos planetas tiene mayor energía total? ¿Cuál de los dos planetas tiene mayor velocidad en el perihelio (P)? (Dato: $G = 6,67 \times 10^{-11}\ N\,m^2\,/\,Kg^2$).

Solución:

(a) En primer lugar calculamos el radio medio de la órbita elíptica $R = (r_1 + r_2)/2 = 1,4 \times 10^{11}\ m$. Para calcular el periodo utilizamos la tercera ley de Kepler, $T^2 = C\ r^3$, donde C es una constante. Aplicando esta ley a los dos planetas se obtiene



$$T_2 = T_1\ \left(\frac{R}{r_1}\right)^{3/2}$$

que, dando los valores numéricos, nos queda $T_2 = 3,31$ años.

(b) La misma ley de Kepler, con el valor explícito de la constante C, nos dice $T^2 = (4\pi^2/GM)\ /\ r^3$, de forma que, despejando la masa de la estrella

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

Dando ahora los valores de, por ejemplo, el periodo y el radio de la órbita del planeta 1, se obtiene el valor numérico $M = 1,49 \times 10^{29}\ Kg$.

(c) Para responder a este apartado se puede usar el método directo de calcular la energía total de cada uno de los planetas y compararlas. Sin embargo, aquí usaremos otra forma. Consideremos los dos planetas cuando pasan por el punto P (perihelio). Como en ese momento los dos se encuentran a la misma distancia de la estrella, y su masa es también la misma, su energía potencial gravitatoria es igual para los dos, de forma que el planeta con mayor energía total será aquél que tenga mayor energía cinética en ese punto, es decir, que tenga mayor velocidad al pasar por P. Para el planeta 1 su velocidad en P (en realidad en cualquier punto de la órbita, pues es circular) se encuentra igualando la fuerza gravitatoria estrella-planeta con la fuerza centrípeta,

$$G\frac{Mm}{r_1^2} = m\frac{v_1^2}{r_1} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}} = 9{,}969\ m/s$$

Para encontrar la velocidad en el punto P del planeta 2 usamos el hecho de que el momento angular se conserva, por lo que, igualando el momento angular en el punto A con el del punto P, encontramos

$$r_1 m v_{2P} = r_2 m v_{2A} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_{2P}}{v_{2A}} = \frac{r_2}{r_1} = 1,8 \quad \Rightarrow \quad v_{2P} = 1,8\ v_{2A} = 10{,}800\ m/s$$

De esta forma, vemos que el planeta 2 tiene mayor velocidad en el punto P que el planeta 1; $v_{2P} > v_{1P}$. Por lo tanto, el planeta 2 tendrá mayor energía cinética y, por consiguiente, mayor energía total, es decir $E_{T2} > E_{T1}$.

Problema 11.- Supongamos que la Tierra es una esfera maciza de densidad uniforme, masa total M y radio R. Se taladra un túnel desde su superficie hasta su centro. Se pide:
(a)Demostrar que el módulo del campo gravitatorio en el interior del túnel, a una distancia r

del centro (es decir, $r < R$) vale $g_r = g\, r/R$, donde g es el campo gravitatorio en la superficie;
(b) ¿Cuánto trabajo se necesitaría para trasladar un objeto de masa m desde el centro de la Tierra hasta su superficie?
(c) Si se dejase caer el objeto por la abertura del túnel en la superficie, ¿con qué velocidad llegaría al centro?
(d) Suponiendo que la Tierra gira con velocidad angular constante ω, alrededor de un eje fijo, y que el túnel es perpendicular al eje de giro, calcular ω para que los objetos dentro del túnel no tengan aceleración *relativa* al túnel.

Solución:

(a) En un punto a una distancia r del centro, en el interior de una esfera maciza de radio total R y densidad uniforme, sólo la masa dentro de una esfera de radio r contribuye al campo gravitatorio en ese punto. La fracción de la masa total de la esfera que está dentro del radio r es igual al cociente entre el volumen de una esfera de radio r y el de una esfera de radio R, es decir, si M es la masa total de la esfera y M' es la masa de la esfera de radio r, se tiene

$$M' = \frac{(4/3)\pi r^3}{(4/3)\pi R^3}\, M = \frac{r^3}{R^3}\, M$$

por lo que el módulo del campo gravitatorio a la distancia r será

$$g_r = \frac{GM'}{r^2} = \frac{GM}{R^2}\left(\frac{r}{R}\right) \quad \Rightarrow \quad g_r = g\, r/R$$

donde $g = GM/R^2$ es el campo gravitatorio en la superficie.

(b) El trabajo será $dW = F(r)\, dr$, donde, teniendo en cuenta el apartado anterior, $F(r) = mg_r = mgr/R$, de forma que

$$W = \int_0^R F(r)\, dr = \frac{mg}{R}\int_0^R r\, dr \quad \Rightarrow \quad W = \frac{1}{2}mgR$$

(c) Por el teorema trabajo-energía sabemos que el trabajo total realizado sobre una partícula es igual a la variación de energía cinética de la misma, por lo que

$$W = \frac{1}{2}mgR = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gR}$$

(d) La fuerza gravitatoria sobre un objeto de masa m situado a una distancia r del centro de la Tierra y en el interior de la misma es $F = mg_r = (GM/R^3)\, mr$. Para que el objeto no tenga aceleración *relativa* al túnel (que está girando con velocidad angular ω) se necesita que la fuerza gravitatoria sea exactamente igual a la fuerza centrípeta necesaria para que el objeto se mueva en un círculo de radio r con velocidad ω, es decir

$$\left(\frac{GM}{R^3}\right) mr = m\frac{v^2}{r} = mr\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{GM/R^3}$$

(Nota: Por curiosidad se puede ver que, dando los valores de G y de la masa y radio de la Tierra, este valor de la velocidad angular ω es aproximadamente 16,5 veces mayor que la velocidad real actual de rotación de la Tierra).