

Departamento de
Automática



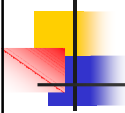
Universidad
de Alcalá

Ingeniería de Control I

Tema 7

Análisis temporal

1

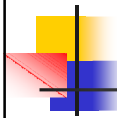


7. Análisis temporal.

- Régimen transitorio y permanente
- Señales normalizadas de entrada
- Respuesta a escalón de sistemas de tiempo continuo
- Relación entre la respuesta temporal y la situación de los polos
- Sistemas equivalentes de orden reducido
- Error en rp
- Coeficientes estáticos y dinámicos de error

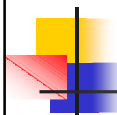
Análisis temporal

2



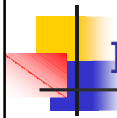
Bibliografía

- Señales y Sistemas. OCW-UC3M
- Apuntes Automática Básica. J. M. Bañón, UAH.
- Ingeniería de Control Moderna. K. Ogata.
- Automática. OCW-UPV
- Sistemas realimentados de control. J.J. D'azzo
- Feedback control systems. J.V. de Vegte.



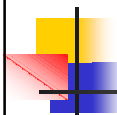
Objetivos

- Introducir el concepto de respuesta en r_p y r_t
- Desarrollar el cálculo de la salida de sistemas
- Obtener los errores en r_p
- Obtener la variación del error en r_p

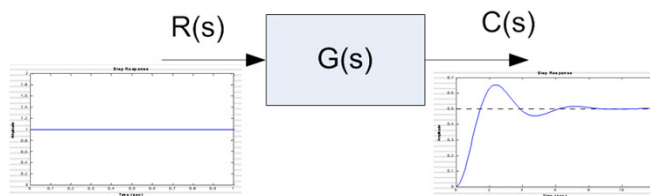


Introducción

- Objetivos del análisis en el tiempo
 - Análisis de estabilidad: ante entrada acotada, salida acotada
 - Análisis del régimen permanente: capacidad del sistema de seguir a la entrada en régimen permanente (error)
 - Análisis dinámico, caracterización de la respuesta transitoria ante una entrada antes de llegar al régimen permanente (rapidez, oscilaciones, etc.)



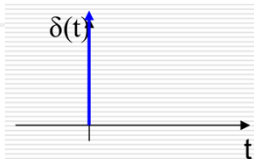
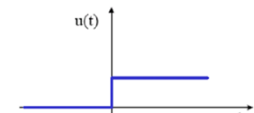
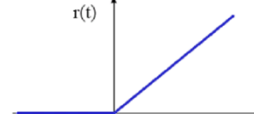
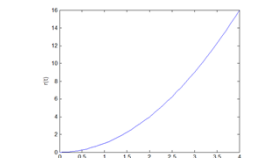
- $C(s) = G(s)R(s) \Rightarrow \begin{cases} c(t) = g(t) * r(t) \\ c(t) = L^{-1}[G(s)R(s)] \end{cases}$



- $c(t) = c_{rt}(t) + c_{rp}(t)$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} c_{rt}(t) = 0$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = c_{rp}(t)$

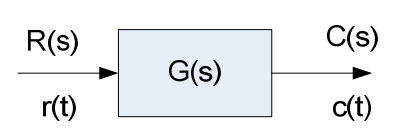
Señales normalizadas

- Impulso
 - $r(t) = \delta(t) \Rightarrow R(s) = 1$
- Escalón
 - $r(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s}$
- Rampa
 - $r(t) = tu(t) \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s^2}$
- Parábola
 - $r(t) = t^2u(t) \Rightarrow R(s) = \frac{2}{s^3}$

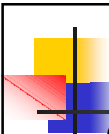
Análisis temporal

Respuesta a un escalón



- Respuesta:
 - $C(s) = G(s)U(s) = \frac{G(s)}{s}$
 - $c(t) = L^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right) = \int_0^t g(\tau) d\tau$

Análisis temporal



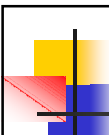
■ O tb a partir de la expresión racional de $G(s)$

- $G(s) = \frac{N(s)}{\prod_i (s+\sigma_i) \prod_q ((s+\alpha_q)^2 + \beta_q^2)} \Rightarrow$
- $C(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{N(s)}{s \prod_i (s+\sigma_i) \prod_q ((s+\alpha_q)^2 + \beta_q^2)} = \frac{A}{s} + \sum_i \frac{B_i}{(s+\sigma_i)} + \sum_q \frac{C_q s + D_q}{(s+\alpha_q)^2 + \beta_q^2}$
- Tablas:

$\frac{s + \alpha}{(s + a)^2 + b^2}$	$\frac{\sqrt{(\alpha - a)^2 + b^2}}{b} e^{-at} \sin(bt + \phi) \quad \phi = \tan^{-1} \frac{b}{\alpha - a}$
--------------------------------------	---

- $c(t) = G(0) + \sum_i B_i e^{-\sigma_i t} + \sum_q E_q e^{-\alpha_q t} \sin(\beta_q t + \varphi_q); t \geq 0$

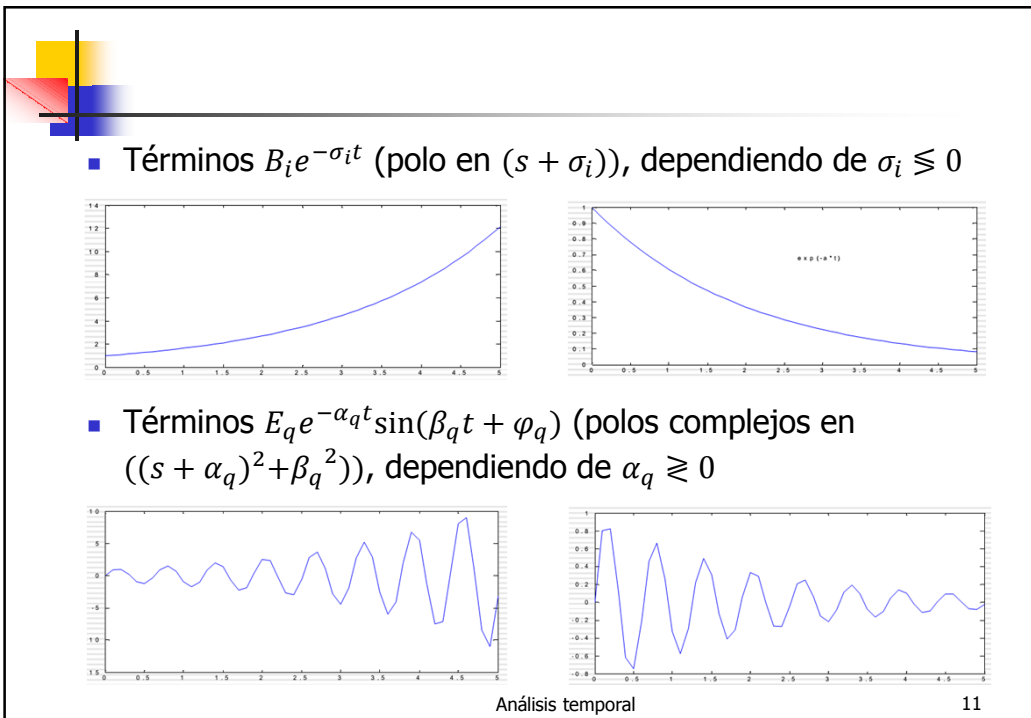
9



Ej.

- $G(s) = \frac{3s^3 - 10s^2 + 21s - 30}{s^3 - 5s^2 + 11s - 15} = \frac{3s^3 - 10s^2 + 21s - 30}{(s-3)(s-1+2j)(s-1-2j)}$
- $C(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{3s^3 - 10s^2 + 21s - 30}{s(s-3)(s-1+2j)(s-1-2j)} = \frac{3s^3 - 10s^2 + 21s - 30}{s(s-3)[(s-1)^2 + 2^2]}$
- $C(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s-3)} + \frac{Cs+D}{(s^2-2s+5)}$
- Como son polos simples se puede calcular por el teorema de los residuos o bien primero el residuo de los polos reales y el del complejo restando (D'azzo).
- $C(s) = \frac{2}{s} + \frac{1}{(s-3)} + \frac{2}{((s-1)^2 + 2^2)}$
- $c(t) = 2 + e^{3t} + e^t \sin(2t); t \geq 0$

10



Posición de los polos

- Un sistema es estable si salida es acotada cuando la entrada lo es. Ante escalón debe dar valor finito y fijo.
 - POLOS EN SEMIPLANO NEGATIVO
- Tb se ve si es estable si la respuesta impulsiva es absolutamente integrable
- ¿Respuesta impulsiva a partir de la respuesta a escalón? (LTI)
- Ganancia estática: régimen permanente (ante escalón) $G(0)$
 - $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G(s)}{s} = G(0)$

Análisis temporal 12

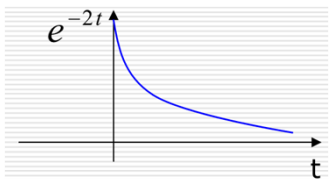
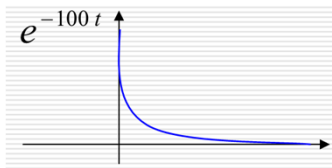
Relación de situación de polos con respuesta temporal

- Rapidez (en llegar a rp o en desaparecer rt): depende de la distancia al eje imaginario.
 - $e^{-\sigma_i t}, e^{-\alpha_q t}$
 - e^{-200t} con $t = 1 \Rightarrow e^{-200}$
 - e^{-2t} con $t = 100 \Rightarrow e^{-200}$
- Oscilaciones: depende de la parte imaginaria de los polos complejos $\alpha_q \pm j\beta_q$
 - $E_q e^{-\alpha_q t} \sin(\beta_q t + \varphi_q)$

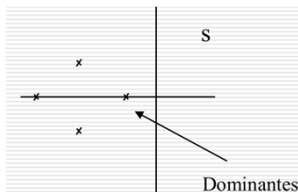
Análisis temporal 13

Polo dominante

La respuesta transitoria de los polos con parte real negativa (semiplano izdo) se atenúan más rápidamente cuanto mayor es su valor absoluto (cuanto más alejados del eje).

- Polos dominantes: cercanos al eje $j\omega$

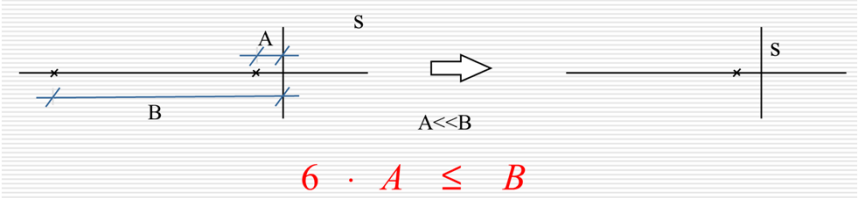


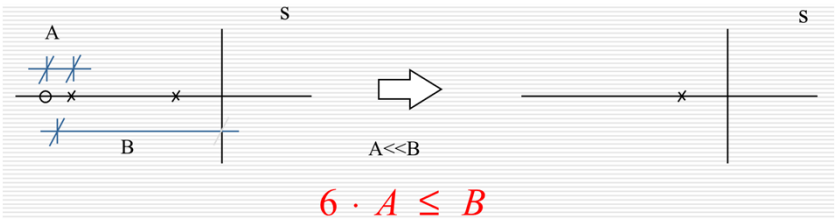
Análisis temporal 14



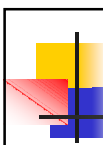
Cancelación de raíces no dominantes

- Para polos alejados del eje


- Para ceros-polos cercanos


- Se debe mantener la ganancia estática

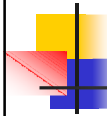
15



Ej.

- $G(s) = \frac{3(s+1)}{(s+2)(s+1.5)(s+10)}$, $6 \cdot 1.5 < 10$;
 - $\hat{G}(s) = \frac{K(s+1)}{(s+2)(s+1.5)}$
 - $\hat{G}(0) = G(0)$
 - K?
- $G(s) = \frac{2(s+6)}{(s+2)(s+6.5)(s+1)}$, $(6.5 - 6) \cdot 6 < 6.25$
 - $\hat{G}(s) = \frac{K}{(s+2)(s+1)}$
 - $\hat{G}(0) = G(0)$
 - K?

16

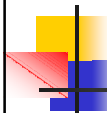


Polos y ceros adicionales

- Añadir un polo a un sistema retarda y reduce el pico de la respuesta
- El sistema se hace más lento
- Añadir un cero a un sistema adelanta y aumenta el pico de la respuesta.
- El sistema se hace más rápido
- En ambos casos el efecto se aprecia más cuanto más cerca del eje $j\omega$ se encuentre la raíz.

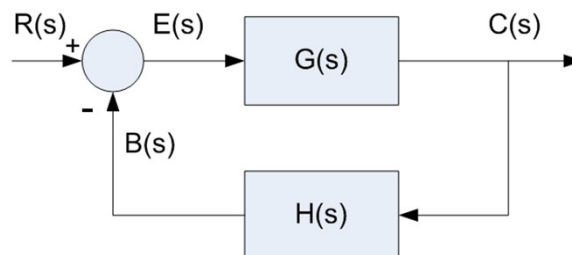
Análisis temporal

17



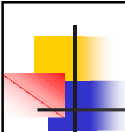
Régimen permanente (sistemas realimentados)

- El error en rp nos indicará la precisión del sistema
- En sistemas realimentados el error en la salida viene definido por la señal de error a la entrada de $G(s)$
- El error del sistema dependerá del tipo de entrada, de la ganancia en lazo abierto ($G(s)H(s)$) y del tipo de sistema.



Análisis temporal

18

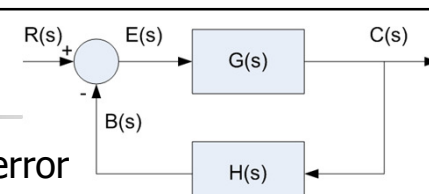


- A partir de la forma canónica de un sistema realimentado obtenemos su FT en lazo abierto y su ganancia K en lazo abierto:
 - $G(s)H(s) = \frac{K(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{s^r(1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n)}$
- El exponente r define el tipo de sistema:
 - Tipo 0, r=0
 - Tipo 1, r=1
 - Tipo 2, r=2
 - Tipo 3, r=3
- Aumentar el tipo aumenta exactitud pero genera inestabilidad

Análisis temporal 19

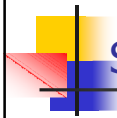


Errores en rp



- Calculamos la expresión del error
 - $C(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} R(s)$
 - $C(s) = E(s)G(s)$
 - Despejando $E(s)$
- Por el teorema del valor final:
 - $e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)}$

Análisis temporal 20

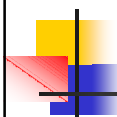


Sistemas tipo 0

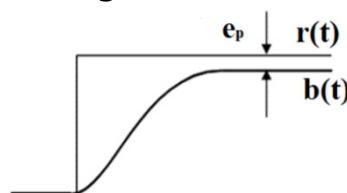
- Escalón $r(t) = R_0 u(t), R(s) = R_0/s$
 - $e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K_0(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{(1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n)}} \frac{R_0}{s} = \frac{R_0}{1+K_0}$
 - Error de posición: es finito, $e_p \% = \frac{e_{ss}}{R_0} \cdot 100 = \frac{1}{1+K_0} \cdot 100$
 - Señal de realimentación $b(t)_{ss} = r(t) - e(t)_{ss}$
- Rampa $r(t) = R_1 t u(t), R(s) = R_1/s^2$
 - $e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K_0(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{(1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n)}} \frac{R_1}{s^2} = \infty$
 - Error de velocidad: es infinito, el sistema es incapaz de seguir la señal de rampa y se perderá su control

Análisis temporal

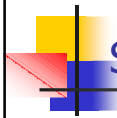
21



- Parábola $r(t) = R_2 t^2 u(t), R(s) = 2R_2/s^3$
 - $e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K_0(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{(1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n)}} \frac{2R_2}{s^3} = \infty$
 - Error de aceleración: es infinito, el sistema es incapaz de seguir la señal en parábola y se perderá su control
- El sistema tipo 0 solo es controlable por una señal de entrada escalón, con un error finito inversamente proporcional a la ganancia en lazo abierto K_0



22

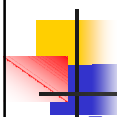


Sistemas tipo 1

- Escalón $r(t) = R_0 u(t), R(s) = R_0/s$
 - $e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K_1(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{s(1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n)}} \frac{R_0}{s} = 0$
 - Error de posición: es 0
- Rampa $r(t) = R_1 t u(t), R(s) = R_1/s^2$
 - $e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K_1(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{s(1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n)}} \frac{R_1}{s^2} = \frac{R_1}{K_1}$
 - Error de velocidad: es finito, $e_v \% = \frac{e_{ss}}{R_1} \cdot 100 = \frac{1}{K_1} \cdot 100$

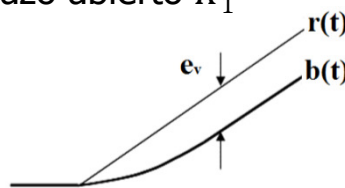
Análisis temporal

23



- Parábola $r(t) = R_2 t^2 u(t), R(s) = 2R_2/s^3$

- $e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K_1(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{s(1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n)}} \frac{2R_2}{s^3} = \infty$
- Error de aceleración: es infinito, el sistema es incapaz de seguir la señal en parábola y se perderá su control
- El sistema tipo 1 es controlable por una entrada escalón con error 0 y con una entrada en rampa con un error finito inversamente proporcional a la ganancia en lazo abierto K_1



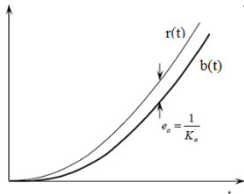
24

Sistemas tipo 2

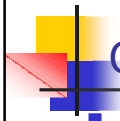
- Escalón $r(t) = R_0 u(t), R(s) = R_0/s$
 - $e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K_2(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{s^2(1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n)}} \frac{R_0}{s} = 0$
 - Error de posición: es 0
- Rampa $r(t) = R_1 t u(t), R(s) = R_1/s^2$
 - $e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K_2(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{s^2(1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n)}} \frac{R_1}{s^2} = 0$
 - Error de velocidad: es 0

Análisis temporal 25

- Parábola $r(t) = R_2 t^2 u(t), R(s) = 2R_2/s^3$
 - $e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K_2(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{s^2(1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n)}} \frac{2R_2}{s^3} = \frac{2R_2}{K_2}$
 - Error de aceleración: es finito, $e_a \% = \frac{e_{ss}}{R_2} \cdot 100 = \frac{2}{K_2} \cdot 100$
- El sistema tipo 2 es controlable por una entrada escalón y rampa con error 0 y con una entrada en parábola con un error finito inversamente proporcional a la ganancia en lazo abierto K_2



26



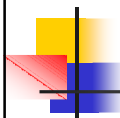
Coeficientes estáticos de error

- Son parámetros que dan la medida del comportamiento del sistema realimentado en rp
- Están relacionados con los errores de posición, velocidad y aceleración
 - C.E. de error de posición K_p : cociente entre $b(t)_{ss}$ y $e(t)_{ss}$:
 - C.E. de error de velocidad K_v : cociente entre el régimen permanente de la variación de $b(t)$ y $e(t)_{ss}$:

$$■ K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$$
$$■ K_v = \frac{\left(\frac{db(t)}{dt}\right)_{ss}}{e(t)_{ss}} = \frac{Db(t)_{ss}}{e(t)_{ss}} = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$$

Análisis temporal

27

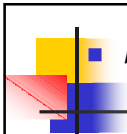


- C.E. de error de aceleración K_a : cociente entre el rp de la derivada de la variación de $b(t)$ y $e(t)_{ss}$:

$$■ K_a = \frac{\left(\frac{d^2b(t)}{dt^2}\right)_{ss}}{e(t)_{ss}} = \frac{D^2b(t)_{ss}}{e(t)_{ss}} = \lim_{s \rightarrow 0} s^2G(s)H(s)$$

Análisis temporal

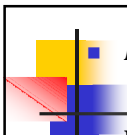
28



- $b(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sB(s) =$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{K_0(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{(1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n)}}{1+\frac{K_0(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{(1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n)}} R(s)$$
- $e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+\frac{K_0(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{(1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n)}} R(s)$
- CE de error sistema tipo 0:
 - Entrada escalón ($R(s) = R_0/s$):
 - $b(t)_{ss} = \frac{K_0}{1+K_0} R_0$; $e(t)_{ss} = \frac{1}{1+K_0} R_0$
 - $K_p = \frac{b(t)_{ss}}{e(t)_{ss}} = K_0$
 - Entrada rampa: $K_v = 0$
 - Entrada parábola: $K_a = 0$

Análisis temporal 29

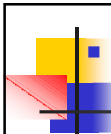


- $Db(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot sB(s) =$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{\frac{K_1(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{s(1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n)}}{1+\frac{K_1(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{s(1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n)}} R(s)$$
- $e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+\frac{K_1(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{s(1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n)}} R(s)$
- CE de error sistema tipo 1:
 - Entrada escalón: $K_p = \infty$
 - Entrada rampa ($R(s) = R_1/s^2$):
 - $K_v = \frac{Db(t)_{ss}}{e(t)_{ss}} = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} (...)}{\lim_{s \rightarrow 0} (...)} = (\text{num y den no se hacen 0 o } \infty \text{ simultáneamente}) =$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_1(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{s(1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n)} = K_1$$
 - Entrada parábola: $K_a = 0$

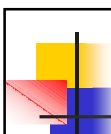
Análisis temporal 30



$D^2b(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot s^2 B(s) =$
 $\lim_{s \rightarrow 0} s^3 \frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^3 \frac{\frac{K_2(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{s^2(1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n)}}{1+\frac{K_1(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{s^2(1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n)}} R(s)$

- $e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+\frac{K_2(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{s^2(1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n)}} R(s)$
- CE de error sistema tipo 2:
 - Entrada escalón: $K_p = \infty$
 - Entrada rampa: $K_v = \infty$
 - Entrada parábola ($R(s) = \frac{2R_2}{s^3}$):
 - $K_a = \frac{D^2b(t)_{ss}}{e(t)_{ss}} = \frac{\lim_{s \rightarrow 0}(\dots)}{\lim_{s \rightarrow 0}(\dots)} = (\text{num y den no se hacen 0 o } \infty \text{ simultáneamente}) =$
 $= \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K_2(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{s^2(1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n)} = K_2$

Análisis temporal 31



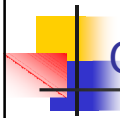
Resumen

- Tabla resumen

	Err. en escalón	Err. En rampa	Err. En parábola	K_p	K_v	K_a
Tipo 0	$\frac{R_0}{1+K_p} = \frac{R_0}{1+K_0}$	∞	∞	K_0	0	0
Tipo 1	0	$\frac{R_1}{K_v} = \frac{R_1}{K_1}$	∞	∞	K_1	0
Tipo 2	0	0	$\frac{2R_2}{K_a} = \frac{2R_2}{K_2}$	∞	∞	K_2

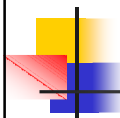
- Son coeficientes de mérito (cuanto más altos, menor error del sistema)

Análisis temporal 32



Coeficientes dinámicos de error

- Nos permiten calcular cómo varía la señal de error $e(t)$ en rp, se denomina $e(t)_s$
 - $E(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)} R(s) = W(s)R(s)$
 - Desarrollando Taylor para $s=0$ ($t=\infty$):
 - $$W(s) = W(0) + s \cdot \frac{d}{ds} W(s) \Big|_{s=0} + \frac{1}{2!} s^2 \frac{d^2}{ds^2} W(s) \Big|_{s=0} + \dots + \frac{1}{n!} s^n \frac{d^n}{ds^n} W(s) \Big|_{s=0}$$



- Se definen los coeficientes como

- $C_0 = W(0) = \lim_{s \rightarrow 0} W(s)$
- $C_1 = W'(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} W(s)$
- $C_n = W^{(n)}(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^n}{ds^n} W(s)$

- Reescribiendo $W(s)$

- $$W(s) = C_0 + C_1 s + \frac{1}{2!} C_2 s^2 + \dots + \frac{1}{n!} C_n s^n$$



■ Entonces $E(s)$

$$■ E(s) = C_0 R(s) + C_1 s R(s) + \frac{1}{2!} C_2 s^2 R(s) + \dots + \frac{1}{n!} C_n s^n R(s)$$

■ Haciendo la TIL

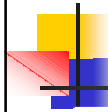
$$■ e(t)_s = C_0 r(t) + C_1 \frac{d}{dt} r(t) + \frac{1}{2!} C_2 \frac{d^2}{dt^2} r(t) + \dots + \frac{1}{n!} C_n \frac{d^n}{dt^n} r(t)$$

- Obtenemos la variación de la señal de error en rp, siendo su límite el error en rp $e(t)_{ss}$.



Tabla de TL

1	$\delta(t)$	1	All s
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} > 0$
3	$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} < 0$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re\{s\} > 0$
5	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re\{s\} < 0$
6	$e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{s + \alpha}$	$\Re\{s\} > -\alpha$
7	$-e^{-\alpha t} u(-t)$	$\frac{1}{s + \alpha}$	$\Re\{s\} < -\alpha$
8	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{(s + \alpha)^n}$	$\Re\{s\} > -\alpha$
9	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t} u(-t)$	$\frac{1}{(s + \alpha)^n}$	$\Re\{s\} < -\alpha$
10	$\delta(t - T)$	e^{-sT}	para toda s
11	$[\cos \omega_0 t] u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\Re\{s\} > 0$
12	$[\sin \omega_0 t] u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\Re\{s\} > 0$
13	$[e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t] u(t)$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$	$\Re\{s\} > -\alpha$
14	$[e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t] u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$	$\Re\{s\} > -\alpha$



Propiedades (TL bilateral)

Propiedad	Señal	Transformada	ROC
	$x(t)$	$X(s)$	R
	$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
	$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
9.5.1	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$	Al menos $R_1 \cap R_2$
9.5.2	$x(t - t_0)$	$e^{-st_0} X(s)$	R
9.5.3	$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s - s_0)$	Versión desplazada de R [es decir, s está en la ROC si $(s - s_0)$ está en R]
9.5.4	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{s}{a}\right)$	ROC "escalada" [es decir, s está en la ROC si (s/a) está en la ROC de $X(s)$]
9.5.5	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	Al menos $R_1 \cap R_2$
9.5.6	$\frac{d}{dt} x(t)$	$sX(s)$	Al menos R
9.5.7	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds} X(s)$	R
9.5.8	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$	Al menos $R \cap \{\Re\{s\} > 0\}$