Tema 7. Propiedades de la luz.

Problemas resueltos.

Problema 1.- Se tiene un dioptrio esférico convexo que separa una región donde hay aire ($n_1 = 1$) de otra donde hay vidrio ($n_2 = 1,5$). El radio del diptrio esférico es de 20 cm.
(a) ¿Cuáles son las distancias focales imagen y objeto?
(b) Se coloca un objeto de 3 cm de altura en la región donde hay aire, a una distancia de 90 cm del polo del dioptrio. El objeto se coloca verticalmente, sobre el eje del dioptrio. ¿A qué distancia se formará la imagen del objeto? ¿Qué tamaño tendrá la imagen?
(c) ¿Cuál es el aumento lateral del sistema y el tamaño de la imagen?

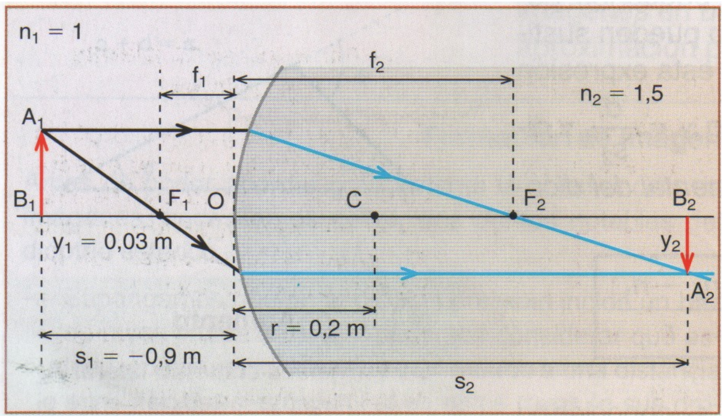
Solución:
(a) La distancia focal imagen f_2 es

$$f_2 = r\frac{n_2}{n_2 - n_1} = 0{,}60\,\mathrm{m}$$

y la objeto

$$f_1 = -r\frac{n_1}{n_2 - n_1} = -0{,}40\,\mathrm{m}$$

Nótese que la distancia focal objeto es negativa por estar situada a la izquierda del vértice O.



(b) Para calcular la distancia a la que se forma la imagen s_2, utilizamos la ecuación para la refracción en una superficie única,

$$\frac{n_2}{s_2} - \frac{n_1}{s_1} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

y despejando obtenemos

$$s_2 = \frac{n_2}{\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2 - n_1}{r}} = 1{,}08\,\mathrm{m}$$

Esta distancia es positiva, ya que la imagen se forma a la derecha de O, en el punto donde se cortan los rayos en la figura. La imagen, pues, es real.
(c) El aumento lateral es

$$m = \frac{y_2}{y_1} = \frac{s_2 n_1}{s_1 n_2} = -0{,}8$$

El signo negativo indica que la imagen aparece invertida, debajo del eje. La imagen es de menor tamaño que la original, ya que $|m| < 1$.
El aumento lateral nos da directamente el tamaño de la imagen,

$$y_2 = m y_1 = -0{,}024\,\mathrm{m}$$

Problema 2.- Tenemos un espejo cóncavo de radio de curvatura 20 cm.
(a) ¿Cuál es la distancia focal?
(b) Se coloca un objeto verticalmente sobre el eje óptico, de altura 2 cm, y a una distancia de 30 cm del espejo. ¿Cuál es la posición de la imagen?
(c) ¿Cuál es el tamaño de la imagen?

Solución:
(a) La distancia focal se calcula a partir del valor del radio de curvatura,

$$f = \frac{r}{2} = -10\,\text{cm}$$

(b) La posición de la imagen viene detreminada por la ecuación del espejo.

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f} \qquad \Longrightarrow \qquad s:2 = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s_1}} = -15\,\text{cm}$$

La imagen, pues, aparece a la izquierda del espejo.
(c) Para calcular el tamaño de la imagen utilizamos el aumento lateral,

$$y_2 = my_1 = -\frac{s_2}{s_1}y_1 = -1\,\text{cm}.$$

La imagen es, pues, menor que el objeto y está invertida.
Haga el estudiante un diagrama de rayos para verificar que la imagen es real.

Problema 3.- Un haz de luz incide, formando un ángulo θ con la normal, sobre una lámina de vidrio plana. El grosor del vidrio, de índice de refracción n, es d.
(a) ¿Cuál es el ángulo máximo que, dentro del vidrio, puede formar el rayo de luz que se propague en el vidrio con la normal?
(b) ¿Cuál es el ángulo de salida de la luz de la lámina plana de vidrio.
(c) ¿Cuál es el desplazamiento del haz luminoso que sale de nuevo al aire, respecto al haz luminoso original que incide sobre la lámina?
(d) Aplicación numérica: $\theta = 40°$, $n = 1,52$ (el índice del aire se supone igual a 1).

Solución:
(a) Este ángulo es el correspondiente a un rayo incidente que forme prácticamente un ángulo de 90° con la normal (incide casi paralelamente a la superficie). Al aplicar la ley de Snell

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2\theta_2$$

obtenemos que $\theta_2 \approx 41{,}2°$
(b) El ángulo que forma el rayo difractado por la primera superficie (aire-vidrio) viene también dado por la ley de Snell, por lo que directamente se puede calcular como $\theta_2 = 25°$.

Las superficies de la lámina de vidrio son paralelas, de manera que el rayo de luz llega formando el mismo ángulo a la segunda superficie de la lámina de vidrio (la superficie vidrio-aire). Como vuelve a un medio que es el aire, la nueva aplicación de la ley de Snell a la refracción que allí ocurre nos da que el ángulo de salida es $\theta_3 = 40°$. Por tanto, el ángulo de salida del rayo es el mismo ángulo con el que incidió en la lámina.

(c) El desplazamiento del punto de donde sale el rayo luminoso respecto al que saldría si no se hubiera difractado en las dos superficies de la lámina se puede calcular como sigue.

El punto de salida si no se hubiera difractado estaría a una altura h sobre el punto de incidencia, siendo

$$h_1 = d\tan\theta_1$$

y la altura del punto por donde realmente sale es

$$h_2 = d\tan\theta_2.$$

Por consiguiente, el desplazamiento a lo largo de la lámina es

$$h_1 - h_2 = d\,(\tan\theta_1 - \tan\theta_2)$$

Problema 4.- Se hace incidir un haz de luz monocromática, de intensidad I_0, sobre una lámina de vidrio cuyo índice de refracción es n. Se sabe que la lámina está está situada en el aire. ¿Cuál es la intensidad transmitida a través de la misma?

Solución:

• Pensemos primero en el proceso que se produce en la superficie aire-vidrio, donde incide el haz luminoso sobre la lámina.

Si llamamos I_R la intensidad del haz que ha sido reflejada en la superficie del vidrio (esto es, en la interfase aire-vidrio sobre la que incide la luz), la intensidad de la luz que se ha transmitido en el vidrio es

$$I_{\text{transmitida}} = I_0 - I_R$$

Por otra parte, sabemos que la intensidad reflejada es

$$I_R = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 I_0,$$

lo que nos permite escribir que

$$I_{\text{transmitida}} = I_0 - I_R = I_0 - \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 I_0 = \frac{4n}{(1+n)^2}\,I_0$$

• Pensemos ahora en el segundo proceso de transmisión y reflexión, el que ocurre en la interfase vidrio-aire, una vez que el haz de luz ha atravesado la lámina.

Ahí vuelve a pasar que la intensidad transmitida final es la diferencia entre la que llega, $I_{\text{transmitida}}$, y la que se refleja, $((1-n)/(1+n))^2\, I_{\text{transmitida}}$.

Este nuevo proceso nos da finalmente una intensidad transmitida final

$$I_{\text{transmitida}-\text{final}} = I_{\text{transmitida}} - \left(I_{\text{transmitida}} - \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 I_{\text{transmitida}}\right)$$

que, tras alguna manipulación, se convierte en

$$I_{\text{transmitida}-\text{final}} = \left[\frac{4n}{(1+n)^2}\right]^2 I_0.$$

Problema 5.- Se tiene un prisma como el de la figura, de índice de refracción n_2, apoyado sobre una superficie horizontal. Llamamos α al ángulo del vértice superior. Se hace incidir un haz luminoso sobre una de las caras del prisma, de manera que el haz es perpendicular a la otra cara del prisma (la que no está apoyada sobre la superficie horizontal). Se observa que el haz se desvía por refracción y sale del prisma formando un ángulo δ con la perpendicular a la última cara mencionada (véase la figura). Evaluar el ángulo de salida δ en función del de incidencia θ_i, del índice de refracción n y del ángulo α del prisma.

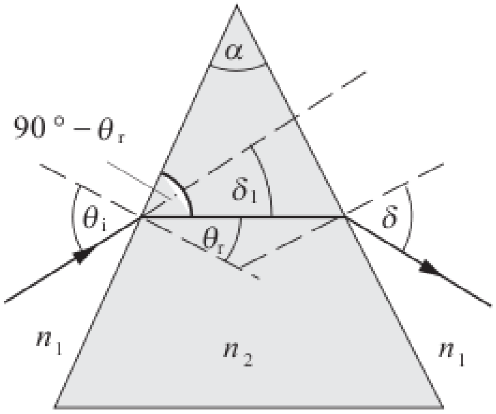
Solución:

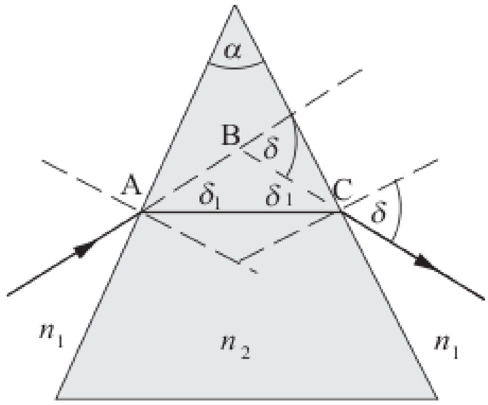
Si nos fijamos en las figuras, la simetría del problema nos permite afirmar que

$$\theta_r = \frac{1}{2}\alpha \qquad\qquad \delta_1 = \theta_i - \theta_r = \theta_i - \frac{1}{2}\alpha.$$

y que

$$\delta = 2\delta_1 = 2\left(\theta_1 - \frac{1}{2}\alpha\right) = 2\theta_i - \alpha$$





Por consiguiente,

$$\theta_i = \frac{1}{2}(\alpha + \delta)$$

En el primer proceso de refracción (interfase aire- vidrio) se aplica la ley de Snell:

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_r \qquad \Longrightarrow \qquad \sin\theta_i = \frac{n_2}{n_1}\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$$

Finalmente,

$$\sin\frac{\alpha+\delta}{2} = \frac{n_2}{n_1}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Problema 6.- Tenemos una varilla de vidrio con índice de refracción 1.68, muy larga y de 1.75 cm de diámetro. Uno de los extremos de la varilla se pule y se le da forma de superficie esférica convexa cuyo radio es 7.2 cm.
(a) Se coloca un objeto puntual en el exterior de la varilla pero en el eje de la misma, a una distancia de 30 cm de la mencionada superficie esférica. Encontrar la posición de la imagen y explicar si es real o virtual.
(b) Hacer lo mismo para el caso en que el punto se sitúe también en el eje de la varilla, pero a 5 cm de la superficie esférica?

Solución:

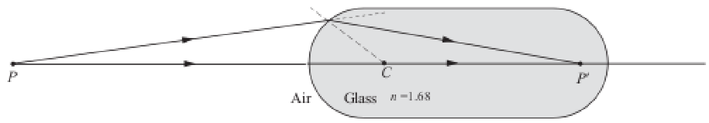
(a) La ecuación de la refracción debida a una superficie nos relaciona la posición de objeto e imagen:

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r} \qquad \Longrightarrow \qquad s' = n_2 \Big/ \left(\frac{n_2 - n_1}{r} - \frac{n_1}{s}\right)$$

Si sustituimos los valores numéricos del enunciado ($s = 30$ cm, $n_1 = 1$, $n_2 = 1{,}68$ y $r = 7{,}20$ cm) podemos evaluar

$$s' = 27\,\mathrm{cm}$$

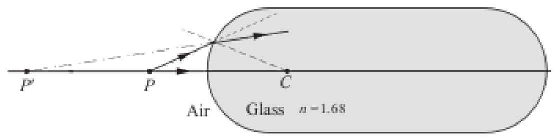
Por consiguiente, al tener un valor positivo se forma la imagen dentro del vidrio (a la derecha de la superficie que produce la refracción; es, pues, una imagen *real*).



(b) En este caso el resultado es

$$s' = -16\,\mathrm{cm}$$

por lo que, al tener un valor negativo se forma la imagen fuera del vidrio (a la izquierda de la superficie que produce la refracción; es, pues, una imagen *virtual*).



Problema 7.- En los Estados Unidos, en el espejo retrovisor exterior derecho de los automóviles se pone un letrero que anuncia que "los objetos que se ven por el espejo están más cercanos de lo que aparentan en el espejo". Eso es debido a que el espejo es convexo, para que el conductor cubra un mayor ángulo de visión al utilizarlo. Una estudiante de Fundamentos de Física II argumenta que ese espejo, además, puede inducir a error al estimar la velocidad de los objetos que aparecen en el mismo. Para demostrar si es cierto, supongamos que el espejo retrovisor es un espejo convexo cuyo radio de curvatura (en valor absoluto) es 2 m. Supongamos además un objeto que está situado a una distancia de 5 m del espejo, acercándose a él con una velocidad relativa de 3,5 m/s. ¿Cuál es la velocidad aparente de la imagen del objeto en el espejo?

Solución:

Si llamamos s' a la distancia imagen y s a la distancia real del objeto al espejo, sabemos que

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}, \qquad \text{con} \qquad f = \frac{r}{2}$$

donde f es la distancia focal del espejo.

Si despejamos s' y diferenciamos respecto al tiempo obtenemos la velocidad de la imagen

$$v' = \frac{ds'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{s}\right)^{-1} = -\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{s}\right)^{-2} \frac{1}{s^2}\frac{ds}{dt}.$$

Simplificando,

$$v' = -\left(\frac{s'}{s}\right)^2 v \simeq 9{,}72\text{cm/s}.$$

ya que $s' = -0{,}8333$ m. Como se ve, la estudiante tiene toda la razón.