Tema 3. Análisis de Fourier de señales y sistemas de tiempo continuo.

2015-2016

Índice

Índice

Introducción

Tema anterior. Sistemas LTI

- Tanto $x(t)$ como $x[n]$ se pueden expresar como combinación lineal de impulsos.
- Por tanto, la salida de un sistema $y(t)$ o $y[n]$ será la combinación lineal (convolución) de funciones de respuesta al impulso $h[n]$ o $h(t)$.

Objetivo

Expresar las señales de tiempo continuo $x(t)$ como combinación lineal de otro tipo de señales básicas que permitan:

- Calcular la salida de un sistema sin realizar la convolución.
- Entender la dinámica de las señales y sistemas de un modo más intuitivo.

Índice

Respuesta de sistemas LTI a exponenciales complejas: Autovalores y autofunciones

Consideración

Las exponenciales complejas son autofunciones de los sistemas LTI.

$$x(t) = e^{s_0 t} \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s_0 (t-\tau)} d\tau = H(s_0) \cdot e^{s_0 t}$$

$$H(s_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s_0 \tau} d\tau \rightarrow \text{Autovalor}$$

$$e^{s_0 t} \rightarrow \text{Autofunción}$$

Conclusión

Sabemos como se transforma una exponencial compleja $\Rightarrow$ son interesantes como señales básicas

Índice

Exponenciales complejas armónicamente relacionadas

Proposición

Una señal periódica con periodo T_0 se puede expresar como una combinación de exponenciales complejas armónicamente relacionadas $\Rightarrow$ Desarrollo en serie de Fourier.

Definición

La familia de exponenciales complejas armónicamente relacionadas son:

$$\Phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Todas ellas son periódicas de periodo $T_0 = \dfrac{2\pi}{|\omega_0|}$.

Desarrollo en serie de Fourier

Ecuación de síntesis

Sea una señal periódica $x(t)$ con periodo fundamental $T_0 \Rightarrow$ se puede poner como combinación lineal de exponenciales complejas armónicamente relacionadas:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}; \quad a_k \in \mathbb{C}$$

- a_k: Coeficientes del desarrollo de Fourier
- $k = 0 \rightarrow$ Componente continua
- $k = \pm 1 \rightarrow$ Componente fundamental (Primer armónico)
- $k = \pm N \rightarrow$ N-ésimo armónico

Ejemplo de DSF

Ejemplo de síntesis:

Sea una señal periódica $x(t)$, cuya pulsación fundamental es $\omega_0 = 2\pi$ rad/s, expresada como:

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{3} a_k e^{jk2\pi t}$$

donde:

$$a_0 = 1; a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4}; a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}; a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}$$

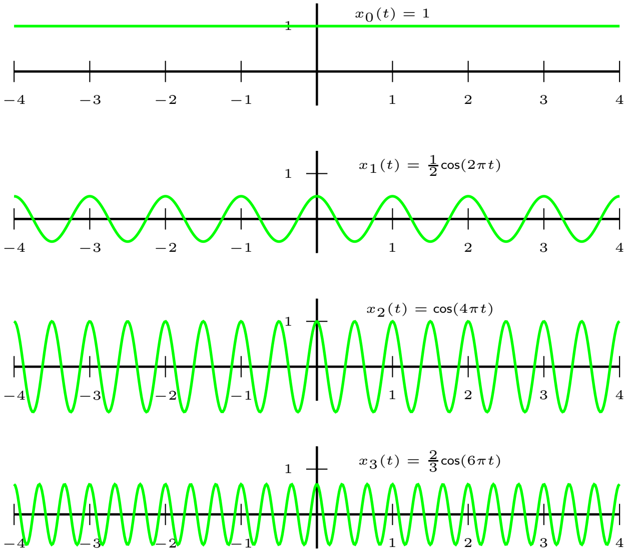
Vamos a representar la señal, para ello se reescribe la ecuación y se aplica la relación de Euler:

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{2}{3}\cos(6\pi t)$$

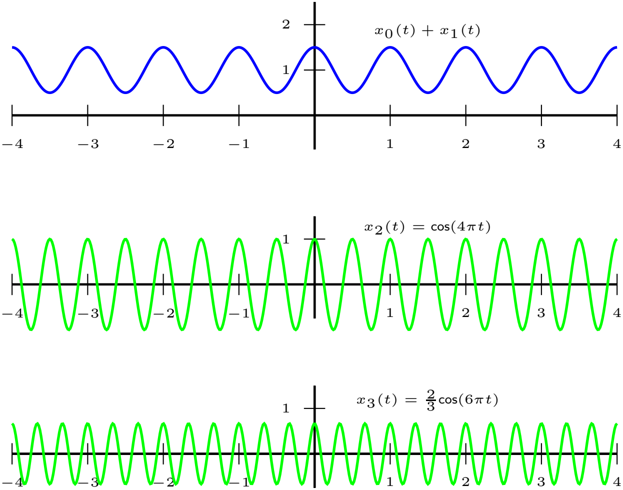
Simetría

Coeficientes simétricos $\Rightarrow$ señal real.

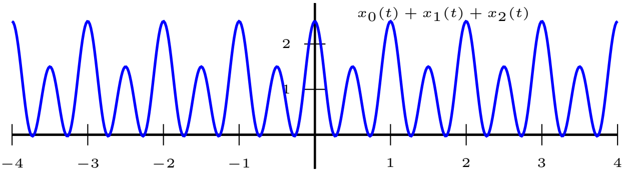
Ejemplo de DSF

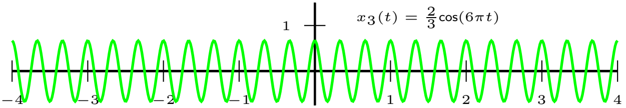


Ejemplo de DSF

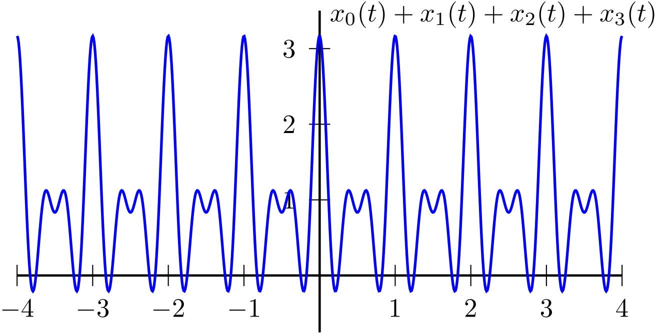


Ejemplo de DSF





Ejemplo de DSF



¿Cúal es el periodo?

Obtención de los coeficientes del DSF

Obtención de los coeficientes

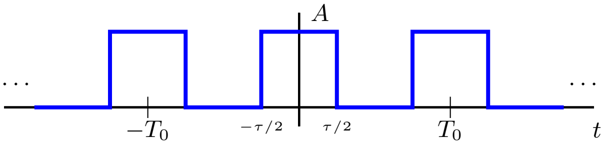
La señal se expresa:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}; \quad a_k \in \mathbb{C}$$

Los coeficientes de la combinación lineal se obtienen mediante la ecuación de análisis:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Ejemplo de análisis: Tren de pulsos rectangulares



Los coeficientes del DSF serán:

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-jk\omega_0 t}dt = A\frac{\mathsf{sen}(k\omega_0\tau/2)}{k\pi}$$

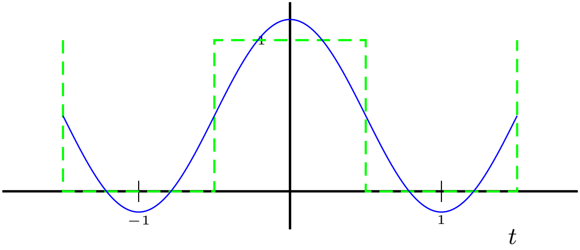
$$\boxed{a_k = \frac{A\tau}{T_0}\mathsf{sinc}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2\pi}\right)}$$

Tren de pulsos rectangulares. Fenómeno de Gibbs

Recuperación de la señal a partir del DSF:

$$x(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}; \quad a_k \in \mathbb{C}$$

$$N = 1$$

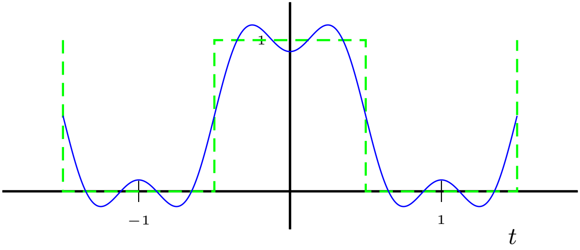


Tren de pulsos rectangulares. Fenómeno de Gibbs

Recuperación de la señal a partir del DSF:

$$x(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}; \quad a_k \in \mathbb{C}$$

$$N = 3$$

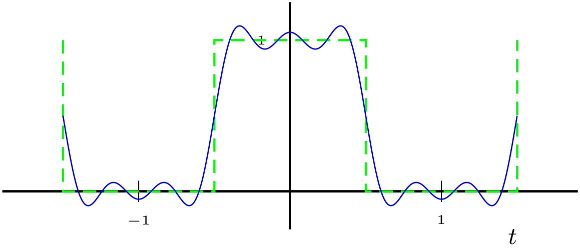


Tren de pulsos rectangulares. Fenómeno de Gibbs

Recuperación de la señal a partir del DSF:

$$x(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}; \quad a_k \in \mathbb{C}$$

$$N = 5$$

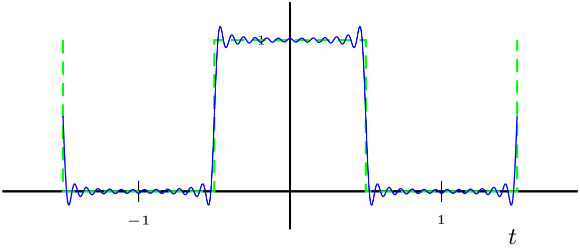


Tren de pulsos rectangulares. Fenómeno de Gibbs

Recuperación de la señal a partir del DSF:

$$x(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}; \quad a_k \in \mathbb{C}$$

$$N = 25$$

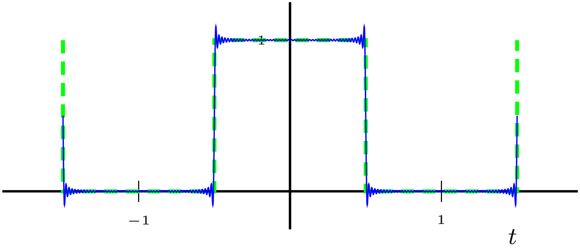


Tren de pulsos rectangulares. Fenómeno de Gibbs

Recuperación de la señal a partir del DSF:

$$x(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}; \quad a_k \in \mathbb{C}$$

$$N = 100$$



Convergencia de las series de Fourier

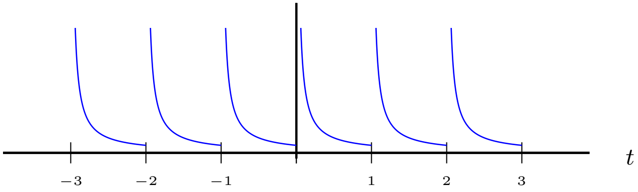
Condiciones de Dirichlet

Condición 1. Sobre cualquier periodo, $x(t)$ debe ser integrable en valor absoluto:

$$\int_T |x(t)| dt < \infty$$

Ejemplo donde no se cumple:

$$x(t) = \frac{1}{t};\;\; 0 < t \leq 1;\; \text{Periódica con periodo } T = 1$$



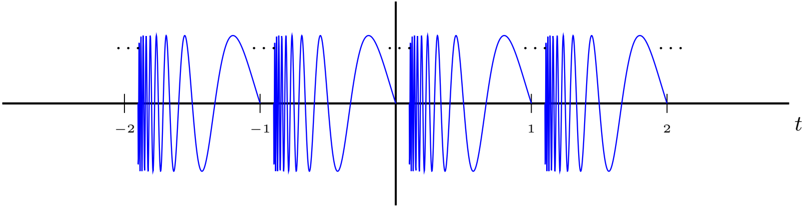
Convergencia de las series de Fourier

Condiciones de Dirichlet

Condición 2. La variación de $x(t)$ en cualquier periodo está acotada; esto es, hay un número finito de máximos y mínimos en un periodo.

Ejemplo donde no se cumple:

$$x(t) = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{t}\right); \quad 0 < t \leq 1; \text{ Periódica con periodo } T = 1$$



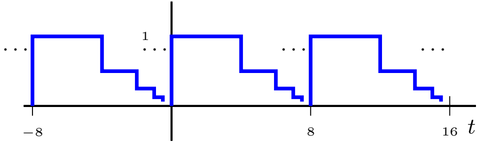
Convergencia de las series de Fourier

Condiciones de Dirichlet

Condición 3. En cualquier periodo sólo hay un número finito de discontinuidades finitas.

Ejemplo que no cumple

Señal periódica con $T = 8$, compuesta por infinitas secciones donde cada una de ellas tiene la mitad de anchura y de altura que la anterior



PROPIEDADES DE LA SERIE CONTINUA DE FOURIER

Propiedad	Señal Periódica	Coeficientes de la serie
	$\left.\begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix}\right\}$ Periódicas de periodo T y frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$	a_k b_k
Obtención de coeficientes	$x(t)\big\|_T = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt$
	x(t) Señal par	$a_k = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} x(t)\cos(k\omega_0 t)dt$
	x(t) Señal impar	$a_k = -\frac{2j}{T}\int_0^{T/2} x(t)\,\mathrm{sen}(k\omega_0 t)dt$
Linealidad	$A\,x(t) + B\,y(t)$	$A\,a_k + B\,b_k$
Desplazamiento en el tiempo	$x(t - t_0)$	$a_k\, e^{-jk\omega_0 t_0}$
Desplazamiento en frecuencia	$x(t) e^{jM\omega_0 t}$	a_{k-M}
Conjugación	$x^*(t)$	a^*_{-k}
Inversión de tiempo	$x(-t)$	a_{-k}
Escalamiento en el tiempo	$x(\alpha t),\ \alpha > 0$ (Periódica de periodo T/α)	a_k
Convolución periódica	$\int_T x(\tau) y(t-\tau) d\tau$	$T\, a_k b_k$
Multiplicación	$x(t)y(t)$	$\sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p b_{k-p}$
Diferenciación	$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 a_k$

PROPIEDADES DE LA SERIE CONTINUA DE FOURIER

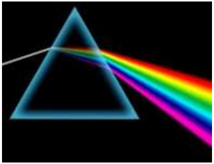
Propiedad	Señal Periódica	Coeficientes de la serie
Diferenciación	$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 a_k$
Integración	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ (de valor finito y periódica solo si $a_0 = 0$)	$\frac{1}{jk\omega_0} a_k$
Simetría conjugada para señales reales.	$x(t)$ Señal real	$\begin{cases} a_k = a_{-k}^* \\ R_e[a_k] = R_e[a_{-k}] \\ I_m[a_k] = -I_m[a_{-k}] \\ \|a_k\| = \|a_{-k}\| \\ \varphi[a_k] = -\varphi[a_{-k}] \end{cases}$
Señal real y par	$x(t)$ real y par	a_k real y par
Señal real e impar	$x(t)$ real e impar	a_k imaginaria e impar
Relación de Parseval para señales periódicas $P_m[x(t)] = \frac{1}{T}\int_T \|x(t)\|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|a_k\|^2$		

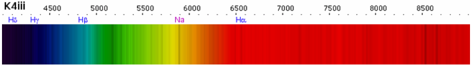
Índice

Representación espectral

Representación espectral

El espectro de frecuencias de una señal ondulatoria muestra cuál es la proporción de cada una de las frecuencias que la componen (sonora, luminosa, electromagnética,...).





Representación espectral de señales

El valor de los coeficientes del DSF son la proporción de cada uno de los armónicos que forman la señal. Se representa el valor de los coeficientes para cada frecuencia.

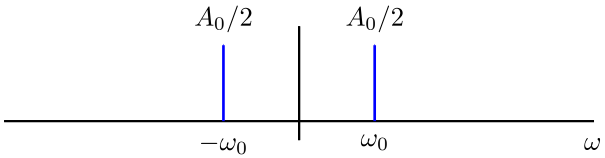
Ejemplo coseno

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

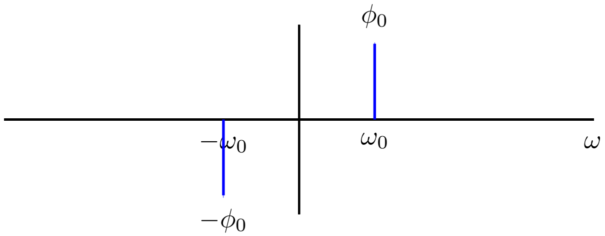
$$x(t) = \frac{A_0}{2} e^{-j\omega_0 t} \cdot e^{-j\phi_0} + \frac{A_0}{2} e^{j\omega_0 t} \cdot e^{j\phi_0}$$

¿Cuál es la representación espectral?

Representación espectral de señales



Módulo



Fase

Ejemplo de representación espectral

Representar el desarrollo en serie de la señal:

$$x(t) = 1 + \text{sen}(\omega_0 t) + 2\cos(\omega_0 t) + \cos(2\omega_0 t + \pi/4)$$

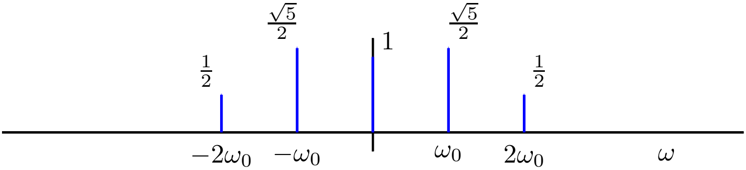
Identificando términos: si lo ponemos en función de exponenciales complejas quedará:

$$x(t) = 1 + \left(1 + \frac{1}{2j}\right) e^{j\omega_0 t} + \left(1 - \frac{1}{2j}\right) e^{-j\omega_0 t} + \cdots$$

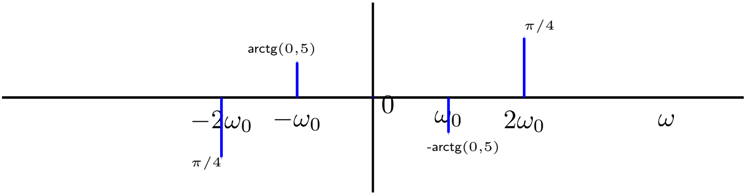
$$\cdots + \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + j)\, e^{j2\omega_0 t} + \frac{\sqrt{2}}{4} (1 - j)\, e^{-j2\omega_0 t}$$

Coeficientes de la serie de Fourier: $a_0 = 1$, $a_1 = \left(1 - \frac{1}{2}j\right)$, $a_{-1} = \left(1 + \frac{1}{2}j\right)$, $a_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + j)$, $a_{-2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - j)$

Ejemplo de representación espectral



Amplitud



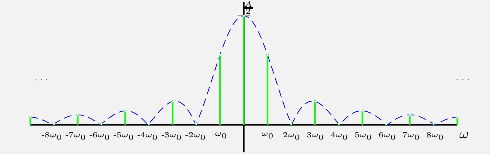
Fase

Ejemplo. Espectro tren de pulsos

$$a_k = \frac{A\tau}{T_0}\text{sinc}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2\pi}\right) = \frac{A\tau}{T_0}\text{sinc}\left(\frac{k\tau}{T_0}\right)$$

Para representarlo tomamos $T_0 = 2\tau$: $a_k = \dfrac{A}{2}\text{sinc}\left(\dfrac{k}{2}\right)$.

Módulo del espectro:



Fase del espectro: