Tema 3. Análisis de Fourier de señales y sistemas de tiempo continuo.

2015-2016

Índice

Índice

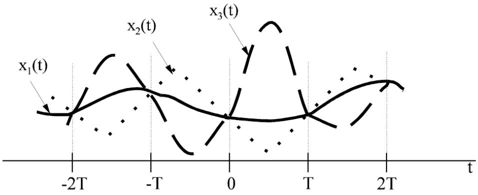
Introducción al muestreo

Definición

El muestreo consiste en tomar muestras de una señal mediante otra señal periódica llamada señal muestreadora.

Consideración

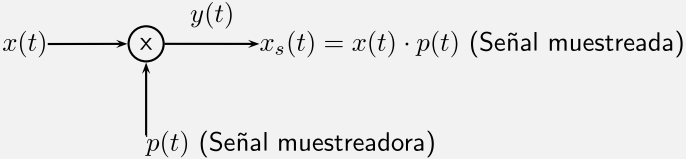
En general, al tomar muestras se pierde información. Existen algunas condiciones bajo las cuales una señal queda caracterizada mediante una colección de muestras equiespaciadas.



Introducción al muestreo

Muestreo

El esquema general del muestreo es:



Índice

Muestreo ideal

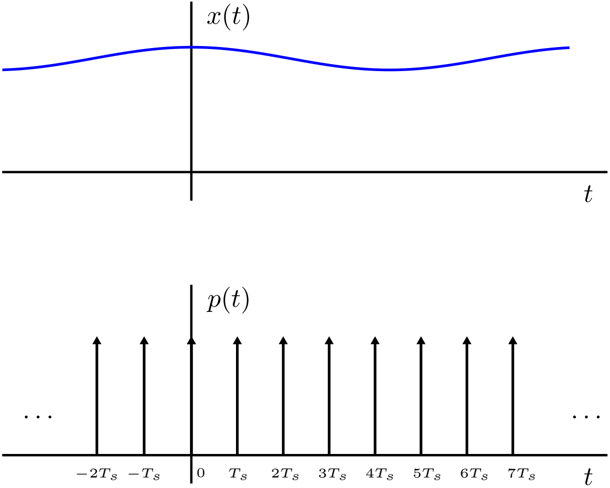
Definición

En el muestreo ideal la señal muestreadora es un tren periódico de Deltas de Dirac.

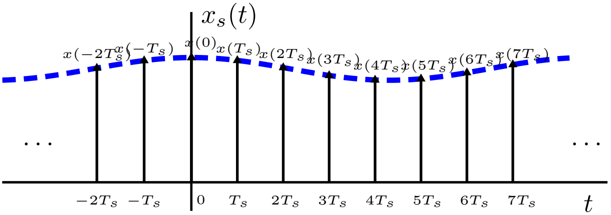
$$x(t) \longrightarrow \otimes \longrightarrow x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

Muestreo ideal



Muestreo ideal



$$x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - nT_s) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

Muestreo ideal

Efecto del muestreo en el espectro

$$x_s(t) = x(t) \cdot p(t) \Leftrightarrow X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[X(\omega) * P(\omega) \right]$$

Teniendo en cuenta:

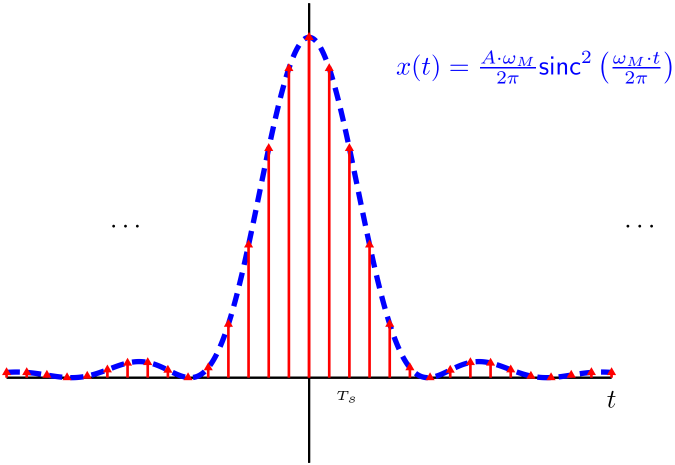
$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \Leftrightarrow P(\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s); \;\; \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

Resultado final

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s)$$

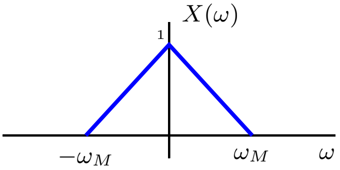
Muestreo ideal

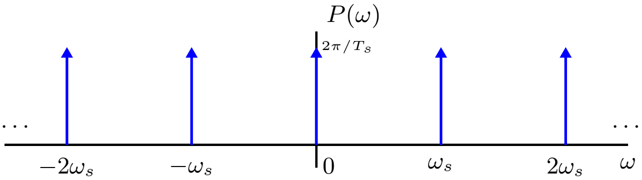
Ejemplo en el tiempo



Muestreo ideal

Ejemplo en frecuencia



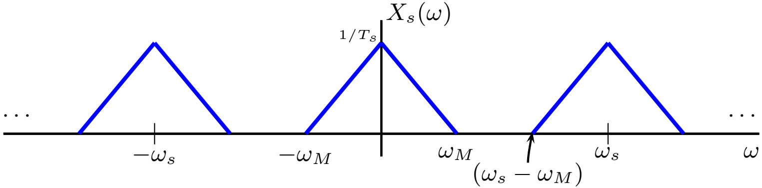


$$X_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s)$$

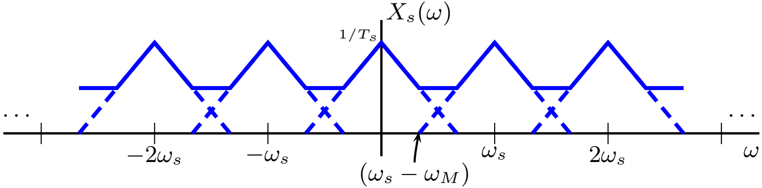
Muestreo ideal

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s)$$

Sin solapamiento



Con solapamiento



Teorema de muestreo

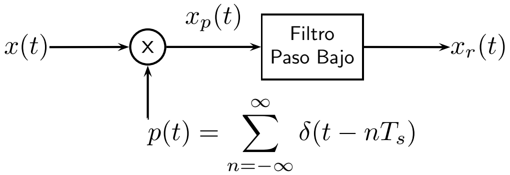
Recuperación

Se puede recuperar la señal original a partir de las muestras mediante un filtrado paso bajo, siempre que no se produzca solapamiento. Para ello se debe cumplir:

$$\omega_M \leq \omega_s - \omega_M$$

y por tanto:

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \geq 2\omega_M$$



Teorema de muestreo

Teorema de muestreo

Dada una señal limitada en banda con $X(\omega) = 0, \ \forall \ |\omega| > \omega_M$. Entonces $x(t)$ quedará determinada por sus muestras $x(nT_s), n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ si se cumple:

$$\boxed{\omega_s \geq 2\omega_M}$$

siendo $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$.

Frecuencia de Nyquist

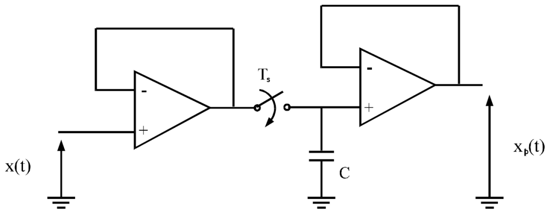
A la pulsación mínima que permite cumplir el teorema de muestreo $(\omega_s = 2\omega_M)$ se le conoce como pulsación de Nyquist.
Nota: en la práctica se muestrea por encima de la pulsación de Nyquist, ya que es imposible realizar un filtro ideal.

Índice

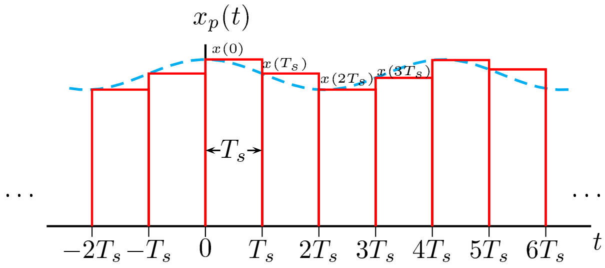
Muestreo real – Sample&Hold

Consideración

El dispositivo que permite realizar el muestreo real se conoce como Sample&Hold y el esquema se muestra en la siguiente figura:

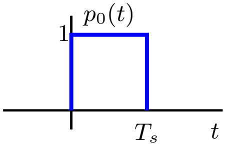


Muestreo Real



La señal muestreadora es:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \cdot p_0(t - nT_s)$$



Muestreo Real – Dominio del tiempo

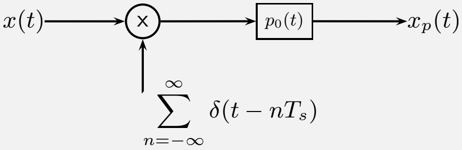
Relación con el muestreo ideal

No se verifica: $x_p(t) = x(t) \cdot p(t)$, sin embargo se puede relacionar:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \cdot p_0(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \cdot [p_0(t) * \delta(t - nT_s)]$$

$$x_p(t) = p_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \cdot \delta(t - nT_s) = p_0(t) * \left[x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)\right],$$

donde el término entre corchetes, $x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$, representa la ecuación del muestreo ideal.



Muestreo real – Dominio de la frecuencia

Dominio de la frecuencia:

$$x_p(t) = p_0(t) * \left[x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \right],$$

Realizando el estudio en el dominio de la frecuencia se obtendrá:

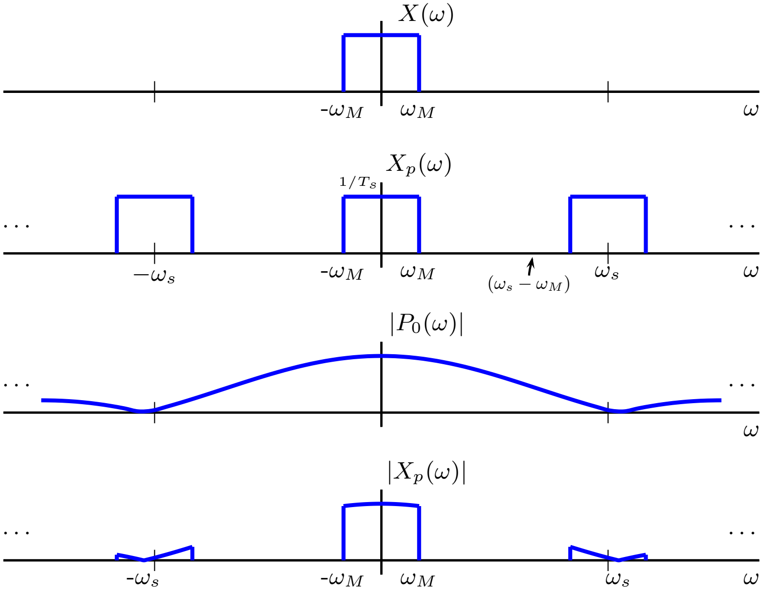
$$X_p(\omega) = P_0(\omega) \cdot X_s(\omega)$$

donde:

$$P_0(\omega) = T_s \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega T_s}{2\pi}\right) \cdot e^{-j\omega \frac{T_s}{2}}$$

y

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s)$$



$X(\omega)$
$-\omega_M$
ω_M
ω
$X_p(\omega)$
$1/T_s$
$\cdots$
$-\omega_s$
$-\omega_M$
ω_M
$(\omega_s - \omega_M)$
ω_s
ω
$|P_0(\omega)|$
ω
$|X_p(\omega)|$
$-\omega_s$
$-\omega_M$
ω_M
ω_s
ω

Muestreo real. Conclusiones

Distorsión

El espectro está modulado con $P_0(\omega)$, lo cual supone cierta distorsión que depende de la anchura del pulso de muestreo, T_s.

Efecto apertura

Este efecto se conoce como efecto de apertura, debido a que la duración del pulso $p_0(t)$ es inversamente proporcional a la anchura del lóbulo principal de la sinc. Cuanto más estrecho sea el pulso $p_0(t)$, más plana es la sinc en las frecuencias bajas y se produce menos distorsión.