5.4 Caminos mínimos: Algoritmo de Dijkstra

Al observar nuestro mapa de carreteras se pueden considerar las distancias en km que hay entre las ciudades, a cada arista se le asigna el valor correspondiente a la distancia entre las ciudades que une. Nos podemos plantear cuál es el trayecto a realizar entre dos ciudades para que la distancia recorrida sea mínima.

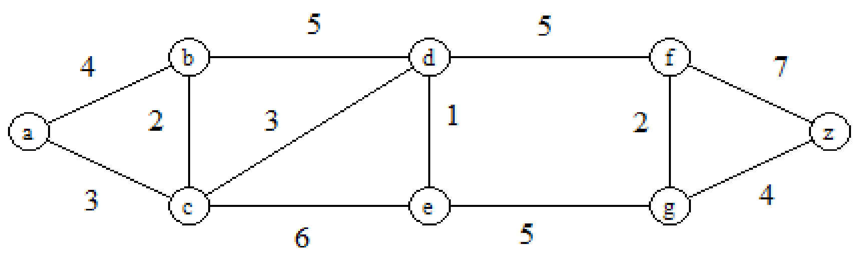
Definición 5.41. *Un grafo se dice* **ponderado** *si, y sólo si, a cada una de las aristas se le asigna un número positivo. A dicho número se le denomina* **peso** *de la arista. En un grafo ponderado hay definida una aplicación, llamada* **función de peso**

$$w\colon E \to \mathbb{R}^+$$

Definición 5.42. *Se define* **longitud** *de un camino de un grafo ponderado como la suma de los pesos de las aristas del camino.*

Obsérvese que esta definición de longitud es distinta a la longitud que denota el número de aristas de un camino.

Ejemplo 5.43. *Un ejemplo de grafo ponderado:*



Algoritmo 5.44. Algoritmo de Dijkstra

Se va a construir un algoritmo que permite hallar un camino de longitud mínima entre dos vértices en un grafo ponderado y su longitud. Sean a el vértice de partida y z el vértice final. Al peso de una arista cualquiera $\{u, v\}$ se le denotará por $w(u, v)$; si $\{u, v\}$ no es arista se considera $w(u, v) = \infty$. Se va a seguir un proceso iterativo:

Se construye un conjunto distinguido de vértices al que se añade un vértice en cada iteración. Este conjunto es el conjunto de vértice para los que se ha obtenido un camino de longitud mínima desde el vértice de partida a. También se lleva a cabo un proceso de etiquetado de los vértices. Este etiquetado es la longitud de un camino mínimo de a al correspondiente vértice pasando únicamente por vértices en el conjunto distinguido de vértices, junto a los vértices por los que pasa el camino

- Inicio*:* en el paso 0 se define:

$S_0 = \varnothing$, se comienza con $\varnothing$ como conjunto distinguido de vértices.

$L_0(a) = 0$, $C_0(a) = \varnothing$ es la etiqueta longitud-camino del vértice a en el paso 0

$L_0(v) = \infty$, $C_0(v) = \varnothing$ $\forall v$ vértice $v \neq a$, ∞ es la etiqueta longitud-camino de cualquier vértice distinto de a

- Se supone construidos en el paso (k-1)-ésimo $S_{k\text{-}1}$, el conjunto de vértices distinguidos, y $L_{k\text{-}1}(v)$, $C_{k\text{-}1}(v)$, la etiqueta de cualquier vértice v.
- Veamos cómo se construyen S_k, $L_k(v)$, $C_k(v)$ en el paso k-ésimo:

Se actualiza el conjunto distinguido de vértices: S_k se construye añadiendo a $S_{k\text{-}1}$ un vértice cuya etiqueta $L_{k\text{-}1}(v)$ sea mínima entre los vértices v que no están en $S_{k\text{-}1}$. Sea u un tal vértice, esto es, $S_k = S_{k\text{-}1} \cup \{u\}$.

Se actualiza las etiquetas de todos los vértices que no están en S_k de la forma siguiente:

$$L_k(v) = \text{mínimo}\{\, L_{k\text{-}1}(v), L_{k\text{-}1}(u) + w(u, v)\}$$

Si $L_k(v) = L_{k\text{-}1}(v)$, se hace $C_k(v) = C_{k\text{-}1}(v)$

Si $L_k(v) = L_{k\text{-}1}(u) + w(u, v)$, se hace $C_k(v) = C_{k\text{-}1}(u) \cup \{u\}$

La justificación reside en que $L_k(v)$ es la longitud de un camino de longitud mínima entre a y v que pasa sólo por vértices de S_k. La actualización se puede llevar a cabo considerando ó bien el camino más corto que pasa por vértices de $S_{k\text{-}1}$ ó bien es el resultado de añadir la arista $\{u,v\}$ al camino más corto obtenido en el paso k-1.

- El proceso finaliza en el momento en el que el vértice z se añade al conjunto distinguido. En este caso la etiqueta $L_m(z)$ es la longitud mínima entre a y z y $C_m(z)$ es un camino de longitud mínima entre a y z.Esto es debido a la observación siguiente:

Observación 5.45. En el paso k-ésimo del algoritmo de Dijkstra se verifica:

a) La etiqueta $L_k(v)$ de cada vértice que está en S_k es la longitud de un camino de longitud mínima entre a y dicho vértice.
b) La etiqueta $L_k(v)$ de cada vértice que no está en S_k es la longitud de un camino de longitud mínima entre a y dicho vértice que sólo contiene (exceptuando el propio vértice) vértices de S_k.

Algoritmo 5.46. *Encontrar un camino de longitud mínima entre los vértices a y z del grafo ponderado del ejemplo 5.43.*

- *Paso* 0:
  $S_0 = \varnothing$
  $L_0(a) = 0$
  $L_0(b) = L_0(d) = L_0(e) = L_0(f) = L_0(g) = L_0(z) = \infty$

- *Paso* 1:
  $S_1 = \{a\}$
  $L_1(b) = mín\ \{ L_0(b), L_0(a) + w(a, b) \} = mín\ \{ \infty, 4 \} = 4$, etiqueta de b: $4(a)$

$L_1(c) = mín\ \{\ L_0(c), L_0(a) + w(a, c)\ \} = mín\ \{\ \infty, 3\ \} = 3$, etiqueta de c: $3(a)$
$L_1(d) = mín\ \{\ L_0(d), L_0(a) + w(a, d)\ \} = mín\ \{\ \infty, \infty\ \} = \infty$, etiqueta de d: ∞
Análogamente, $L_1(e) = L_1(f) = L_1(g) = L_1(z) = \infty$, etiqueta de e: ∞
Se elige un vértice con etiquetado mínimo, en este caso es *c*.

- *Paso* 2:
  $S_2 = \{a, c\}$
  $L_2(b) = mín\ \{\ L_1(b), L_1(c) + w(c, b)\ \} = mín\ \{\ 4, 3+2\ \} = 4$, etiqueta de b: $4(a)$
  $L_2(d) = mín\ \{\ L_1(d), L_1(c) + w(c, d)\ \} = mín\ \{\ \infty, 3+3\} = 6$, etiqueta de c: $6(a,c)$
  $L_2(e) = mín\ \{\ L_1(e), L_1(c) + w(c, e)\ \} = mín\ \{\ \infty, 3+6\} = 9$, etiqueta de d: $9(a,c)$
  $L_2(f) = mín\ \{\ L_1(f), L_1(c) + w(c, f)\ \} = mín\ \{\ \infty, \infty\} = \infty$
  Análogamente, $L_2(f) = L_2(g) = L_2(z) = \infty$,
  Se elige un vértice con etiquetado mínimo, en este caso es *b*.

- *Paso* 3:
  $S_3 = \{a, c, b\}$
  $L_3(d) = mín\ \{\ L_2(d), L_2(b) + w(b, d)\ \} = mín\ \{\ 6, 4+5\} = 6$, etiqueta de d: $6(a,c)$
  $L_3(e) = mín\ \{\ L_2(e), L_2(b) + w(b, e)\ \} = mín\ \{\ 9, \infty\} = 9$, etiqueta de e: $9(a,c)$
  $L_3(f) = mín\ \{\ L_2(f), L_2(b) + w(c, f)\ \} = mín\ \{\ \infty, \infty\} = \infty$
  Análogamente, $L_3(f) = L_3(g) = L_3(z) = \infty$,
  Se elige un vértice con etiquetado mínimo, en este caso es *d*.

- *Paso* 4:
  $S_4 = \{a, c, b, d\}$
  $L_4(e) = mín\ \{\ L_3(e), L_3(d) + w(d, e)\ \} = mín\ \{\ 9, 6+1\} = 7$, etiqueta de e: $7(a,c,d)$
  $L_4(f) = mín\ \{\ L_3(f), L_3(d) + w(d, f)\ \} = mín\ \{\ \infty, 6+5\} = 11$, etiqueta de f: $11(a,c,d)$
  $L_4(g) = mín\ \{\ L_3(g), L_3(d) + w(d, g)\ \} = mín\ \{\ \infty, \infty\} = \infty$
  $L_3(z) = \infty$,
  Se elige un vértice con etiquetado mínimo, en este caso es *e*.

- *Paso* 5:
  $S_5 = \{a, c, b, d, e\}$
  $L_5(f) = mín\ \{\ L_4(f), L_4(e) + w(e, f)\ \} = mín\ \{\ 11, \infty\} = 11$, etiqueta de f: $11(a,c,d)$
  $L_5(g) = mín\ \{\ L_4(g), L_4(e) + w(e, g)\} = mín\ \{\ \infty, 7+5\} = 12$, etiqueta de g: $12(a,c,d,e)$
  $L_5(z) = mín\ \{\ L_4(z), L_4(e) + w(e, z)\ \} = mín\ \{\ \infty, \infty\} = \infty$
  Se elige un vértice con etiquetado mínimo, en este caso es *f*

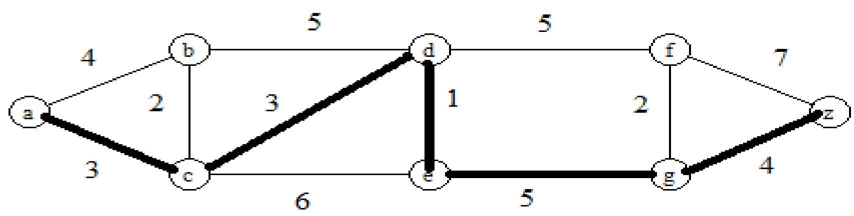
- *Paso* 6:
  $S_6 = \{a, c, b, d, e, f\}$
  $L_6(g) = mín\{\ L_5(g), L_5(f) + w(f, g)\} = mín\ \{12, 11+2\} = 12$, etiqueta de g: $12(a,c,d,e)$
  $L_6(z) = mín\ \{\ L_5(z), L_5(f) + w(f, z)\ \} = mín\ \{\ \infty, 11+7\} = 18$, etiqueta de z: $18(a,c,d,f)$
  Se elige un vértice con etiquetado mínimo, en este caso es *g*

- *Paso* 7:
  $S_7 = \{a, c, b, d, e, f, g\}$
  $L_7(z) = mín\ \{L_6(z), L_6(g)+w(g,z)\} = mín\ \{\ 18, 12+4\} = 16$, etiqueta de z: $16(a,c,d,e,g)$
  Se elige un vértice con etiquetado mínimo, en este caso es *z*

- *Paso* 8:
  $S_8 = \{a, c, b, d, e, f, g, z\}$

Al incluirse z en el conjunto de vértices destacados finaliza el proceso, el camino a seguir y la longitud de ese camino mínimo vienen dados por el etiquetado del vértice z:

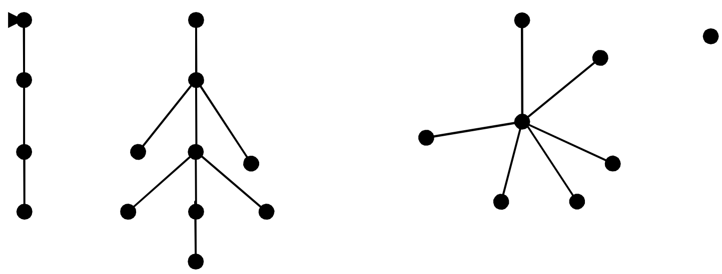
16(a,c,d,e,g). Esto significa que un camino mínimo se obtiene siguiendo las aristas a—c—d—e—g—z, su longitud es 16.



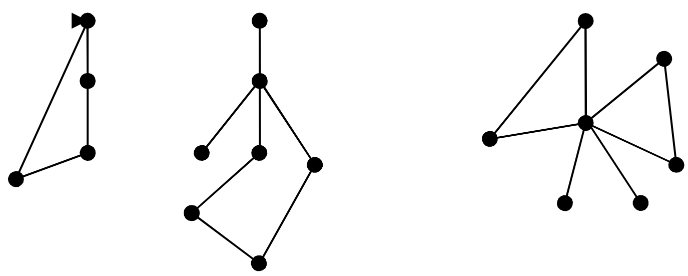
5.5 Árboles: definiciones, propiedades y ejemplos.

Definición 5.47. *A todo grafo no dirigido, conexo que no contiene ciclos*[1] *se le denomina* **árbol**.

Ejemplos 5.48. 4 ejemplos de árboles se muestran en la figura.



Ejemplos 5.49. Algunos ejemplos de grafos que no son árboles se muestran en la figura.



Obsérvese que puesto que no puede contener ciclos, tampoco puede contener bucles o aristas múltiples. Por tanto, todo árbol es un grafo simple.

---

[1] A los circuitos simples se les denomina **ciclos**

Teorema 5.50. *Todo árbol es un grafo simple.*

Como consecuencia de este teorema en un árbol se puede denotar cada arista por el par de vértices adyacentes a ella. Dos vértices si definen una arista, lo hacen de manera única. Por ello al considerar el grafo se puede omitir la aplicación de incidencia y denotar al grafo por su conjunto de vértices y de aristas.

Teorema 5.51. *Sea* $T = (V, E)$ *un árbol con al menos dos vértices, se verifica que para cada par de vértices u y v, existe un único camino de u a v en T.*

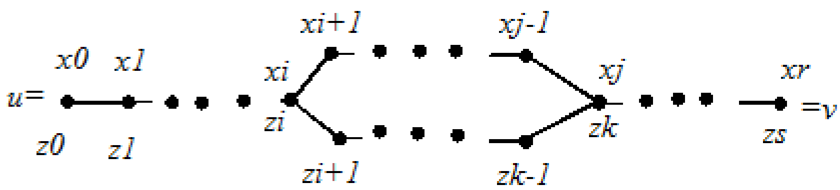
Demostración.

Al ser T un grafo conexo, existe un camino del vértice u al vértice v. Supongamos que existiesen dos caminos distintos que uniesen dichos vértices, sean sus secuencias de vértices:

$$u = x_0, x_1,\ldots, x_r = v \quad \text{y} \quad u = z_0, z_1,\ldots, z_s = v$$

al ser dos caminos distintos, existe un primer vértices en el difieren; sea i el menor índice para el cual $x_{i+1} \neq z_{i+1}$.

Puesto que ambos caminos terminan en v, existe un vértice en el que se encuentran de nuevo; sea j el menor de los índices tal que $j > i$ y $x_j = z_k$ para algún k.



Se tendría que x_i, x_{i+1},……, x_{j-1}, x_j, z_{k-1}, ….., z_{i+1}, $z_i = x_i$ es un ciclo en T, lo que contradice el hecho de que T sea un árbol.

Por tanto existe un único camino de u a v en el árbol T.

■

Teorema 5.52. *Sea* $T = (V, E)$ *un árbol con al menos dos vértices, se verifica que el grafo que se obtiene de T al eliminar cualquier arista tiene dos componentes conexas, cada una de las cuales es un árbol.*

Demostración.

Sea $\{u,v\}$ la arista cuyos vértices adyacentes son u y v, y sea $T' = (V, E')$ el subgrafo de T que tiene los mismos vértices que T y aristas $E' = E \setminus \{u,v\}$.

Sea V_1 el conjunto de todos los x vértices de T para los cuales el único camino desde x a v pasa por u. Dicho camino tiene que terminar en la arista $\{u,v\}$, en otro caso, el árbol T

tendría un ciclo. Por tanto, cada vértice de V_1 está unido a u por un camino del subgrafo T', el camino de x a v en T al que se le ha quitado la arista $\{u,v\}$.

Sea $V_2 = V \setminus V_1$, complementario de V_1 en V, es el conjunto de todos los x vértices de T para los cuales el único camino desde x a v no pasa por u; este camino no contiene a la arista $\{u,v\}$. Por tanto, es un camino del subgrafo T'. Como consecuencia, vértice de V_2 está unido a v por un camino del subgrafo T'.

Cada vértice de de V_1 está unido a u por un camino del subgrafo T' y cada vértice de V_2 está unido a v por un camino del subgrafo T', sin embargo en T' no hay ningún camino de u a v. Por tanto, V_1 y V_2 son los conjuntos de vértices de las dos componentes conexas del grafo.

Cada componente conexa es conexa y no contiene ciclos, pues T no los contiene. Por lo que las dos componentes conexas son árboles.

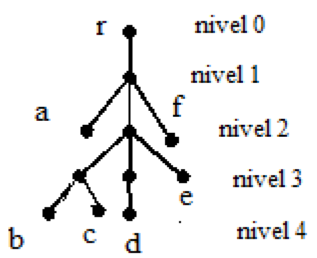
■

Construcción 5.53. En algunas aplicaciones se designa un vértice del grafo como **raíz**, disponiéndose los vértices del árbol por niveles. En el nivel 0 está únicamente el vértice elegido como raíz. En el nivel 1 se disponen los vértices adyacentes al vértice raíz. En el nivel 2, los vértices adyacentes al los del nivel 1, y que sean distintos de los del vértice raíz. Dispuestos los vértices del nivel k-1, el nivel k contiene los vértices adyacentes a los del nivel k-1 que no estén en el nivel k-2.

Definición 5.54. *Un* **árbol con raíz** *es un árbol en el que uno de sus vértices se ha designado como vértice raíz y sigue la disposición de la construcción anterior. Un vértice del nivel k se dice que es* **padre** *de sus adyacentes del nivel k+1, a estos se les dice* **hijos** *de dicho vértice. Un vértice que no tiene hijos se le dice* **hoja**. *A los vértices que tienen hijos se les llaman* **vértices internos**. *La* **altura** *de un árbol con raíz el máximo valor l para el cual el nivel l no es vacío.*

Definición 5.55. *Un árbol se dice* **m-ario** *si todos los vértices internos tienen, a lo más, m vértices hijos.*

Ejemplo 5.56. Un ejemplo de árbol con raíz r, 3-ario, con altura 4. Los vértices a, b, c, d, e, f son hojas



Teorema 5.57. *Sea* $T = (V, E)$ *un árbol, se verifica que* $|E| = |V| - 1$.

La demostración se puede hacer por inducción sobre $|V|$.

Si $|V| = 1$, es cierto, el único árbol posible no tiene aristas.

Supongamos que es cierto para todos los árboles con menos de n vértices, veamos que es cierto para todos los árboles con n vértices

Sea T un árbol con $|V| = n$, y sea u una hoja de T. Se considera el subgrafo $T' = (V', E')$ que resulta de eliminar dicha hoja u, queda también eliminada la arista incidente con u. Por tanto, es un árbol con un vértice y arista menos que T.

Al ser $|V'| = n$-1, por hipótesis de inducción se verifica

$$|E'| = |V'| - 1.$$

Como consecuencia, se tiene que

$$|E| = |E'| + 1 = |V'| - 1 + 1 = |V'| = |V| - 1$$

■

Teorema 5.58. *Un árbol m-ario de altura h tiene, a lo sumo,* m^h *hojas.*

Demostración.

Por inducción sobre la atura.

La afirmación es cierta para altura $h = 0$. En este caso, sólo hay un vértice, que es hoja. Por tanto el número de hojas es $m^0 = 1$.

Supongamos que es cierto para todos los árboles con altura menor que h. Veamos que lo es para altura h.

Sea T un árbol con altura h. Si se elimina la raíz se obtienen m árboles, todos ellos con altura h-1. Por hipótesis de inducción para cada uno de ellos el número de hojas es m^{h-1}.

Las hojas de todos los m subárboles obtenidos son las hojas del árbol de partida. Cada uno de ellos tiene a lo más m^{h-1}, puesto que hay m subárboles, se verifica que el número de hojas del árbol dado T es, a lo sumo, $m.\, m^{h-1} = m^h$ hojas.

■