Jorge J. Feliu Batlle

Transformada de Laplace

Permite transformar Ecuaciones Diferenciales en Fracciones de Polinomios

Simplifica la parte matemática del análisis de sistemas

Sea f(t) una función tal que f(t) = 0 para t < 0

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt \qquad \text{donde} \quad s = \sigma + j\omega$$

Existencia: $\displaystyle\int_0^\infty |f(t)|\, e^{-\sigma t}\, dt < \infty$

Antitransformada: $\displaystyle\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s)\, e^{st}\, ds$

Jorge J. Feliu Batlle

Transformada de Laplace

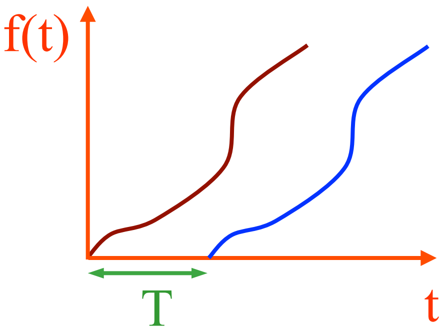
Propiedades

Linealidad:

$$\mathcal{L}[k.f(t)] = k.\ F(s)$$

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s)$$

Variación en el tiempo: $\mathcal{L}[f(t - T)] = e^{-sT}\ F(s)$



Integración: $$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\ dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt$$

Transformada de Laplace

Propiedades

Diferenciación: $$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{\,k-1}(0^+)$$

Ejemplos:

$n = 1$ ⇒ $$\mathcal{L}\left[\frac{d\,f(t)}{dt}\right] = sF(s) - \overbrace{f(0^+)}^{k=1}$$

$n = 2$ ⇒ $$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s^2F(s) - (\overbrace{s.f(0^+)}^{k=1} + \overbrace{\dot{f}(0^+)}^{k=2})$$

$n = 3$ ⇒ $$\mathcal{L}\left[\frac{d^3 f(t)}{dt^3}\right] = s^3F(s) - (\overbrace{s^2.f(0^+)}^{k=1} + \overbrace{s\dot{f}(0^+)}^{k=2} + \overbrace{\ddot{f}(0^+)}^{k=3})$$

Transformada de Laplace (función de transferencia)

- Relación entre la transformada de Laplace de la variable salida y la transformada de Laplace de la variable entrada.
- Es la transformada de Laplace de la respuesta de un sistema ante un impulso.
- Se puede determinar por tanto de la ecuación diferencial.
- Condiciones:
  - Condiciones iniciales nulas
  - Sistemas lineales e invariantes en el tiempo
  - Depende únicamente de las propiedades físicas del sistema (no de la entrada)
- No todas son expresiones racionales.
- Permiten estudiar la estabilidad, precisión y otras características de la respuesta

Jorge J. Feliu Batlle

Transformada de Laplace

Aplicación:

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{d t^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{d t^{n-1}} + \ldots + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m u(t)}{d t^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{d t^{m-1}} + \ldots + b_m u(t)$$

$$\mathcal{L} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}
a_0 s^n Y(s) - a_0[s^{n-1} y(0^+) + s^{n-2}\dot{y}(0^+) + s^{n-3}\ddot{y}(0^+) + \ldots] + \\
a_1 s^{n-1} Y(s) - a_1[s^{n-2} y(0^+) + s^{n-3}\dot{y}(0^+) + s^{n-4}\ddot{y}(0^+) + \ldots] + \\
a_2 s^{n-2} Y(s) - a_2[s^{n-3} y(0^+) + s^{n-4}\dot{y}(0^+) + s^{n-5}\ddot{y}(0^+) + \ldots] + \\
\quad \vdots \qquad - \qquad \vdots \\
a_{n-1} s Y(s) - a_{n-1} s y(0^+) + \\
a_n Y(s) = [b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m] U(s)
\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n} U(s) + \frac{f[0^+]}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n}$$

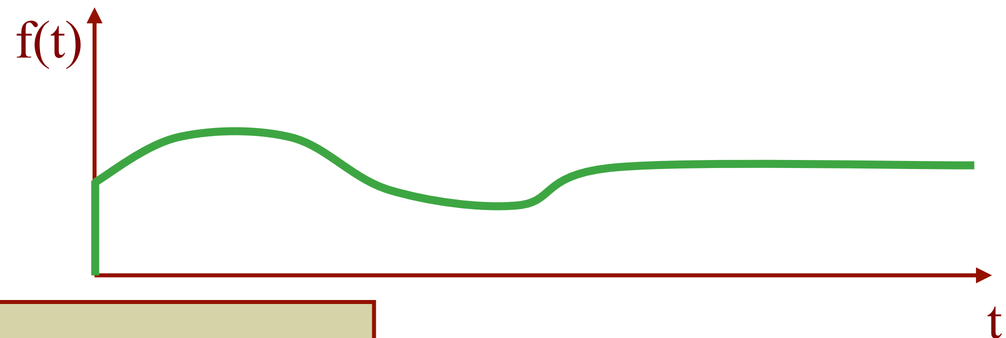
Transformada de Laplace

Propiedades

Teorema del valor inicial:

$$f(0) = \lim_{s \to \infty} s.F(s)$$

f(t) debe ser continua o discontinua de tipo escalón en el origen



Teorema del valor final:

$$f(\infty) = \lim_{s \to 0} s.F(s)$$

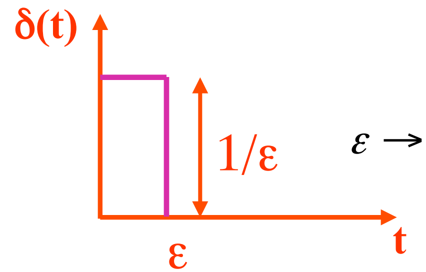
Todas las raíces del denominador de F(s) deben tener parte real negativa y no más de una raíz en el origen

Jorge J. Feliu Batlle

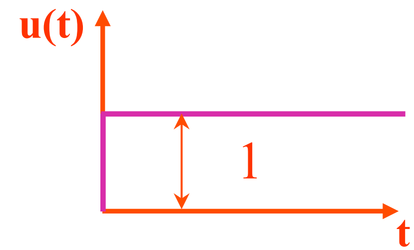
Transformada de Laplace

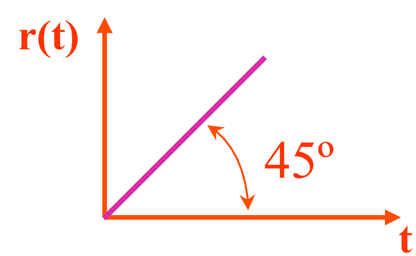
Tabla reducida de Transformadas

$d(t)$	1
$u(t)$	$1/s$
$r(t) = t.u(t)$	$1/s^2$
$t^n.u(t)$	$n!/s^{n+1}$
$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}.u(t)$	$\dfrac{1}{(s+a)^n}$
$\dfrac{1}{\omega} e^{-at} \operatorname{sen}(\omega t).u(t)$	$\dfrac{1}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos(\omega t).u(t)$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$f(t-T).u(t-T)$	$F(s)\, e^{-Ts}$



$$\varepsilon \to 0 \Rightarrow \int_0^t \delta(t)dt = 1$$





Transformada de Laplace

Cálculo de antitransformadas

Se usan las tablas de transformadas

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \boxed{\frac{A_1}{s+s_1} + \frac{A_2}{s+s_2} + \dots + \frac{A_n}{s+s_n}} +$$

Polos reales simples

$$\boxed{+\frac{a_1}{s+s_i} + \frac{a_2}{(s+s_i)^2} + \dots + \frac{a_r}{(s+s_i)^r} +}$$

Polos reales de multiplicidad r

$$\boxed{+\frac{b_1+c_1 s}{s^2+e_1 s+d_1} + \frac{b_2+c_2 s}{s^2+e_2 s+d_2} + \dots + \frac{b_m+c_m s}{s^2+e_m s+d_m}}$$

Polos complejos conjugados

Transformada de Laplace

Ejemplo

a) Calcular la f.d.t. del sistema que tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+7\frac{dy(t)}{dt}+12y(t)=6\frac{du(t)}{dt}+12u(t)$$

b) Calcular su respuesta temporal si la entrada es un escalón unitario y las condiciones iniciales son:

$$y(0)=1$$

$$\dot{y}(0)=1$$

c) Calcular los valores inicial y final de la respuesta

Jorge J. Feliu Batlle

Transformada de Laplace

a) Aplicando la transformada de Laplace queda:

$$\underbrace{s^2.Y(s)-\left[s.y(0)+\dot{y}(0)\right]}_{\mathcal{L}[d^2y/dt^2]}+7\underbrace{\left[s.Y(s)-y(0)\right]}_{\mathcal{L}[dy/dt]}+\underbrace{12.Y(s)}_{\mathcal{L}[y(t)]}=\underbrace{6s.U(s)}_{\mathcal{L}[du/dt]}+\underbrace{12.U(s)}_{\mathcal{L}[u(t)]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad Y(s)\left[s^2+7s+12\right]=U(s)\left[6s+12\right]+\left[(s+7).y(0)+\dot{y}(0)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad Y(s)=\frac{6s+12}{s^2+7s+12}U(s)+\frac{(s+7).y(0)+\dot{y}(0)}{s^2+7s+12}$$

Transformada de Laplace

b) Aplicando la antitransformada de Laplace queda:

$$Y(s)=\underbrace{\frac{6s+12}{s^2+7s+12}}_{(s+3)(s+4)}\boxed{U(s)}+\frac{(s+7).y(0)+\dot{y}(0)}{s^2+7s+12}=\frac{A}{s+3}+\frac{B}{s+4}+\frac{C}{s}+\frac{\hat{A}}{s+3}+\frac{\hat{B}}{s+4}$$

$U(s) \rightarrow$ 1/s $\rightarrow \frac{C}{s}$

$$A=\left.\frac{6s+12}{(s+4)s}\right|_{s=-3}=2;\quad B=\left.\frac{6s+12}{(s+3)s}\right|_{s=-4}=-3;\quad C=\left.\frac{6s+12}{(s+3)(s+4)}\right|_{s=0}=1;$$

$$\hat{A}=\left.\frac{s+8}{s+4}\right|_{s=-3}=5;\quad \hat{B}=\left.\frac{s+8}{s+3}\right|_{s=-4}=-4$$

$$Y(s)=\frac{2}{s+3}-\frac{3}{s+4}+\frac{1}{s}+\frac{5}{s+3}-\frac{4}{s+4}=\boxed{\frac{1}{s}}+\boxed{\frac{7}{s+3}}-\boxed{\frac{7}{s+4}}$$

$\frac{1}{s} \rightarrow$ Escalón unitario

$$\frac{1}{(s+a)^n}=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.e^{-at}$$

$$y(t)=1+7\overbrace{e^{-3t}}^{\substack{a=3\\ n=1}}-7\overbrace{e^{-4t}}^{\substack{a=4\\ n=1}}$$

Transformada de Laplace

c) Calcular su los valores inicial y final de la respuesta

Se puede resolver de dos maneras:

Primera manera (en el dominio de Laplace) ⇒ Polos: 0, -4 y -3

Teorema del valor inicial: $$y(0)=\lim_{s\to\infty} s\left[\underbrace{\frac{6s+12}{s^2+7s+12}\frac{1}{s}}_{0}+\frac{s+8}{s^2+7s+12}\right]=1$$

Teorema del valor final: $$y(\infty)=\lim_{s\to 0} s\left[\frac{6s+12}{s^2+7s+12}\frac{1}{s}+\underbrace{\frac{s+8}{s^2+7s+12}}_{0}\right]=1$$

Segunda manera (en el dominio del tiempo)

$$y(t)=1+7e^{-3t}-7e^{-4t} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \Rightarrow y(0)=1 \\ t\to\infty \Rightarrow y(\infty)=1 \end{cases}$$

Modelado de sistemas

Representar mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales el comportamiento dinámico de un sistema

Permite someter a diferentes análisis las respuestas de los sistemas ante diversas señales de excitación

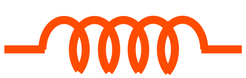
Permite diseñar dispositivos (reguladores, filtros, …) para actuar sobre ellos

Tipos de sistemas:

- Lineales o no lineales
- Invariantes o variables con el tiempo
- Parámetros concentrados o parámetros distribuidos

Modelado de sistemas

Modelado Eléctrico: Leyes de Kirchoff

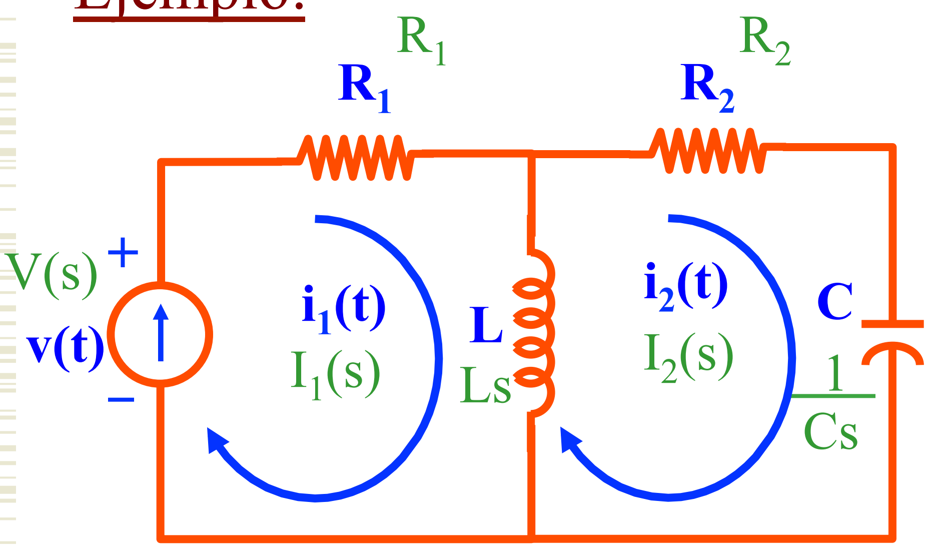
Componente	Tensión - Intensidad	Intensidad - Tensión	Tensión - Carga	Impedancia V(s)/I(s)
Condensador 	$v(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$	$i(t)=C\frac{dv(t)}{dt}$	$v(t)=\frac{1}{C}q(t)$	$\frac{1}{Cs}$
Resistencia 	$v(t)=Ri(t)$	$i(t)=\frac{1}{R}v(t)$	$v(t)=R\frac{dq(t)}{dt}$	R
Inductancia 	$v(t)=L\frac{di(t)}{dt}$	$i(t)=\frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau$	$v(t)=L\frac{d^2q(t)}{dt^2}$	Ls

v(t): Voltios   i(t): Amperios   q(t): Culombios

C: Faradios   R: Ohmnios   L: Henrios

Modelado de sistemas

Ejemplo:



$$R_1.I_1(s) + L.s.I_1(s) - L.s.I_2(s) = V(s)$$

$$R_2.I_2(s) + \frac{1}{C.s} I_2(s) + L.s.I_2(s) - L.s.I_1(s) = 0$$

$$\sum \text{Imped}_1 . I_1(s) - \sum \text{Imped}_{1-2} . I_2(s) = \sum \text{Tensiones}_1$$

$$-\sum \text{Imped}_{2-1} . I_1(s) + \sum \text{Imped}_2 . I_2(s) = \sum \text{Tensiones}_2$$

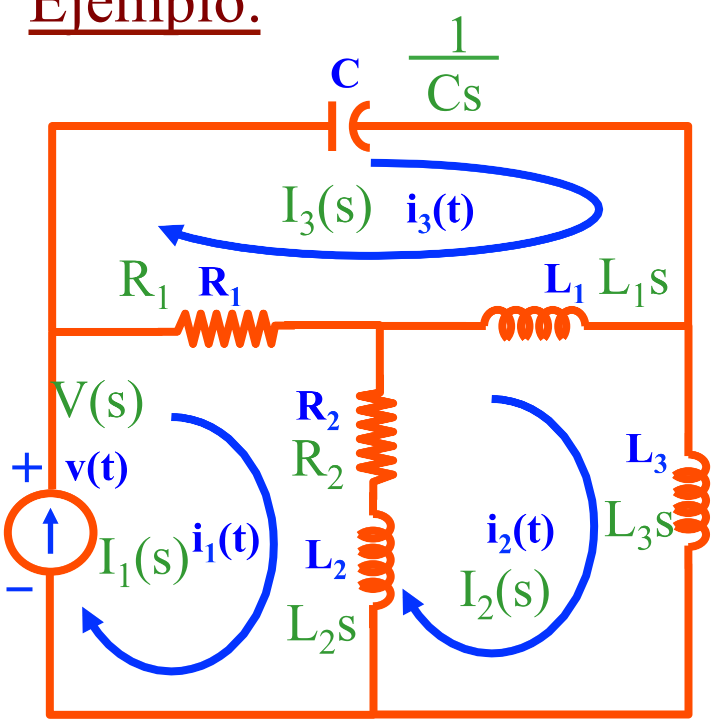
Análisis de las mallas

1) Sustituir el valor de los elementos pasivos por sus impedancias
2) Asignar el mismo sentido a la corriente en cada una de las mallas
3) Transformar mediante Laplace todas las variables temporales
4) Aplicar las Leyes de Kirchoff a cada malla
5) Resolver el sistema de ecuaciones resultante y obtener la f.d.t.

Jorge J. Feliu Batlle

Modelado de sistemas

Ejemplo:



$$\sum \text{Imped}_1 . I_1(s) - \sum \text{Imped}_{1-2} . I_2(s) - \sum \text{Imped}_{1-3} . I_3(s) = \\ = \sum \text{Tensiones}_1$$

$$-\sum \text{Imped}_{2-1} . I_1(s) + \sum \text{Imped}_2 . I_2(s) - \sum \text{Imped}_{2-3} . I_3(s) = \\ = \sum \text{Tensiones}_2$$

$$-\sum \text{Imped}_{3-1} . I_1(s) - \sum \text{Imped}_{3-2} . I_2(s) + \sum \text{Imped}_3 . I_3(s) = \\ = \sum \text{Tensiones}_3$$

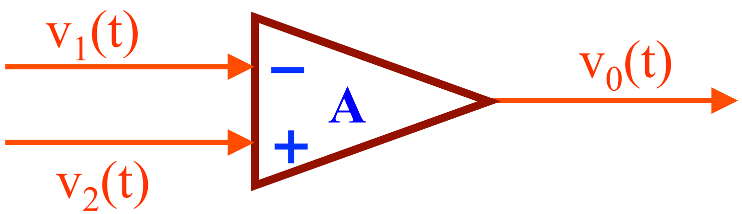
$$(R_1 + R_2 + L_2.s).I_1(s) - (R_2 + L_2.s).I_2(s) - R_1.I_3(s) = V(s)$$

$$-(R_2 + L_2.s).I_1(s) + (R_2 + L_1.s + L_2.s + L_3.s).I_2(s) - L_1.s.I_3(s) = 0$$

$$-R_1.I_1(s) - L_1.s.I_2(s) + (R_1 + L_1.s + \frac{1}{C.s}).I_3(s) = 0$$

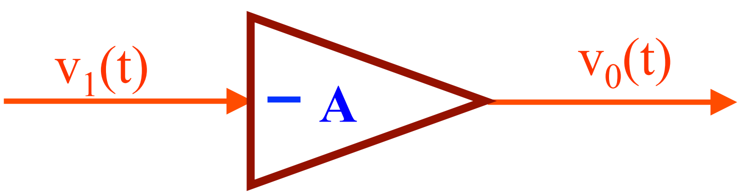
Modelado de sistemas

Amplificador operacional



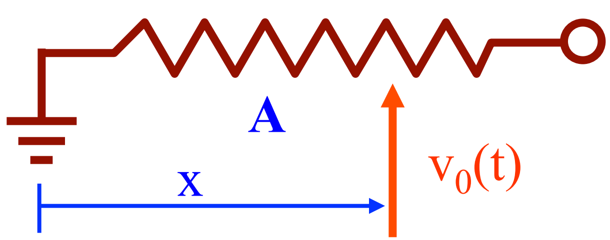
$$v_0(t) = A\,(v_2(t) - v_1(t))$$

Amplificador operacional inverso



$$v_0(t) = -\,A\,v_1(t)$$

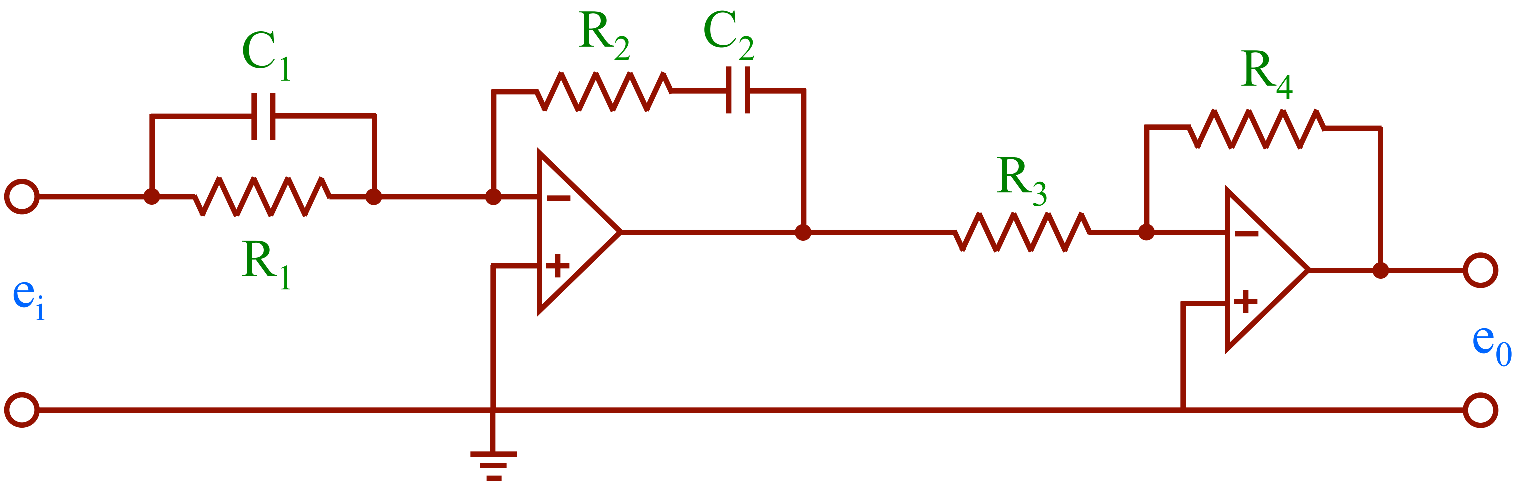
Potenciómetro



$$v_0(t) = A\,x(t)$$

Modelado de sistemas

Controlador PID (ideal)



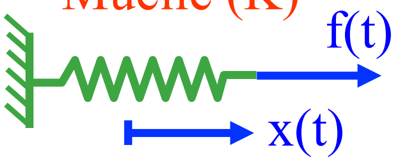
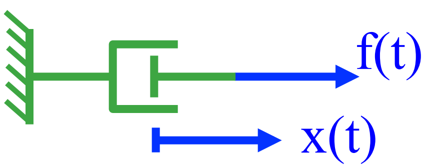
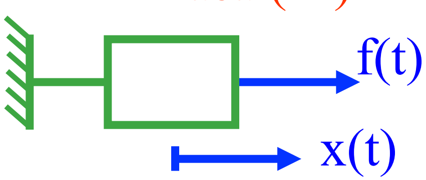
$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \boxed{\frac{R_4.(R_1.C_1 + R_2.C_2)}{R_3.R_1.C_2}} + \boxed{\frac{R_4}{R_3.R_1.C_2.s}} + \boxed{\frac{R_4.R_2.C_1.s}{R_3}}$$

P I D

Jorge J. Feliu Batlle

Modelado de sistemas

Modelado Mecánico: (Traslacional)

Componente	Fuerza - Velocidad	Fuerza - Desplazamiento	Impedancia F(s)/X(s)
Muelle (K) 	$f(t)=K\int_0^t v(\tau)d\tau$	$f(t)=K.x(t)$	K
Amortiguamiento (D) 	$f(t)=D.v(t)$	$f(t)=D\dfrac{dx(t)}{dt}$	$D.s$
Masa (M) 	$f(t)=M\dfrac{dv(t)}{dt}$	$f(t)=M\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$	$M.s^2$

f(t): Newtons

x(t): Metros

v(t): m/s

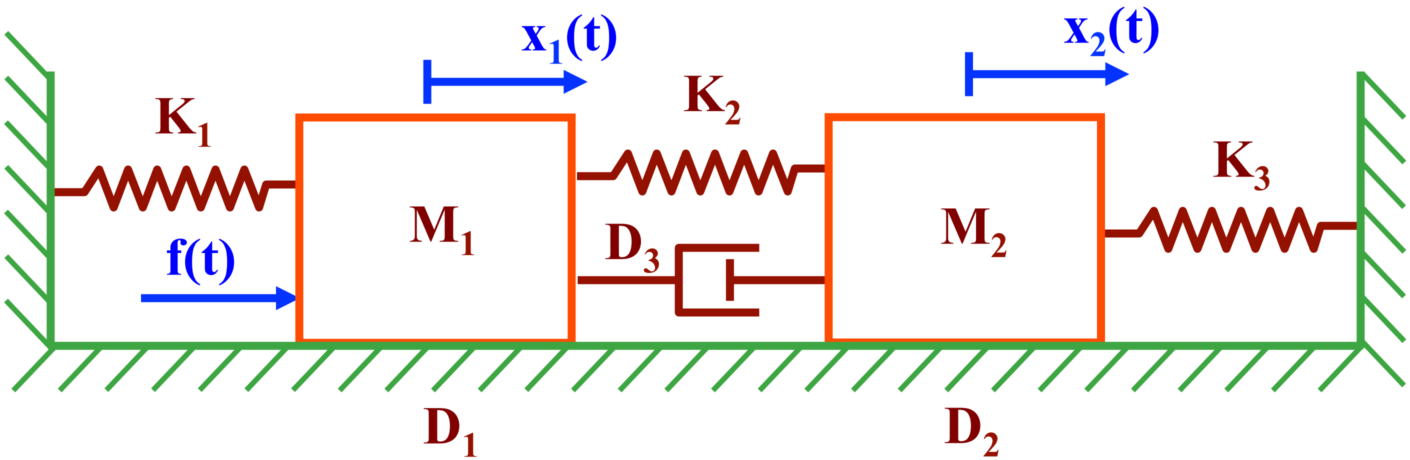
D: N.s/m

K: N/m

M: Kilogramos

Modelado de sistemas

Ejemplo:



$$\sum \text{Imped}_1 . X_1(s) - \sum \text{Imped}_{1-2} . X_2(s) = \sum \text{Fuerzas}_1$$

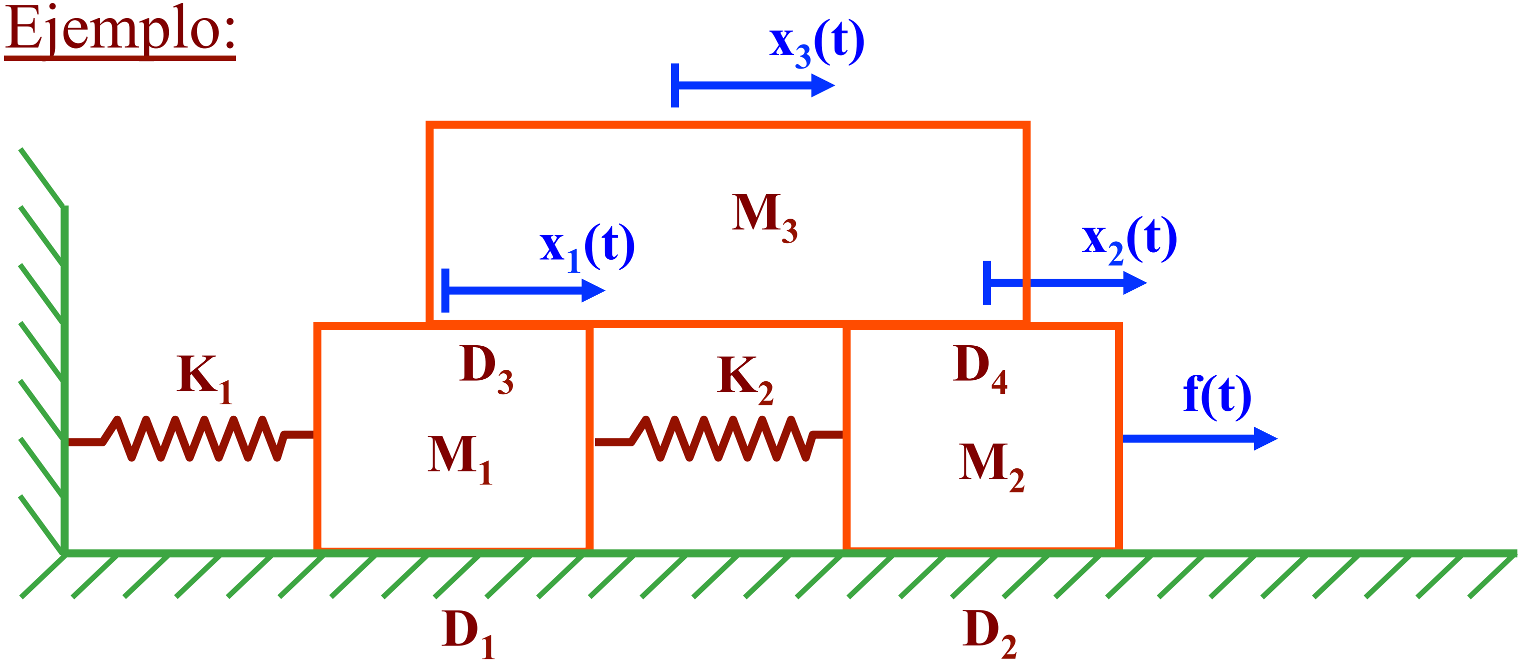
$$-\sum \text{Imped}_{2-1} . X_1(s) + \sum \text{Imped}_2 . X_2(s) = \sum \text{Fuerzas}_2$$

$$(M_1.s^2 + (D_1 + D_3).s + K_1 + K_2).X_1(s) - (D_3.s + K_2).X_2(s) = F(s)$$

$$-(D_3.s + K_2).X_1(s) + (M_2.s^2 + (D_2 + D_3).s + K_2 + K_3).X_2(s) = 0$$

Modelado de sistemas

Ejemplo:



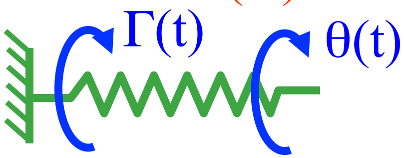
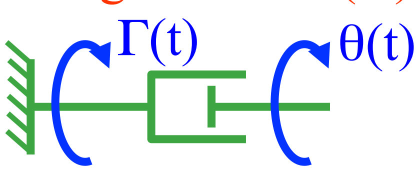
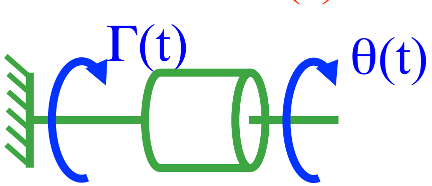
$$(M_1.s^2 + (D_1 + D_3).s + K_1 + K_2).X_1(s) - K_2.X_2(s) - D_3.s.X_3(s) = 0$$

$$- K_2.X_1(s) + (M_2.s^2 + (D_2 + D_4).s + K_2).X_2(s) - D_4.s.X_3(s) = F(s)$$

$$- D_3.s.X_1(s) - D_4.s.X_2(s) + (M_3.s^2 + (D_3 + D_4).s).X_3(s) = 0$$

Modelado de sistemas

Modelado Mecánico: (Rotacional)

Componente	Par – Vel. ang.	Par - Ángulo	Impedancia $\Gamma(s)/\Theta(s)$
Muelle (K) 	$\Gamma(t) = K\int_0^t \omega(\tau)d\tau$	$\Gamma(t) = K.\theta(t)$	K
Amortiguamiento (D) 	$\Gamma(t) = D.\omega(t)$	$\Gamma(t) = D\dfrac{d\theta(t)}{dt}$	$D.s$
Inercia (J) 	$\Gamma(t) = J\dfrac{d\omega(t)}{dt}$	$\Gamma(t) = J\dfrac{d^2\theta(t)}{dt^2}$	$J.s^2$

Γ(t): N.m

θ(t): Rad

ω(t): rad/s

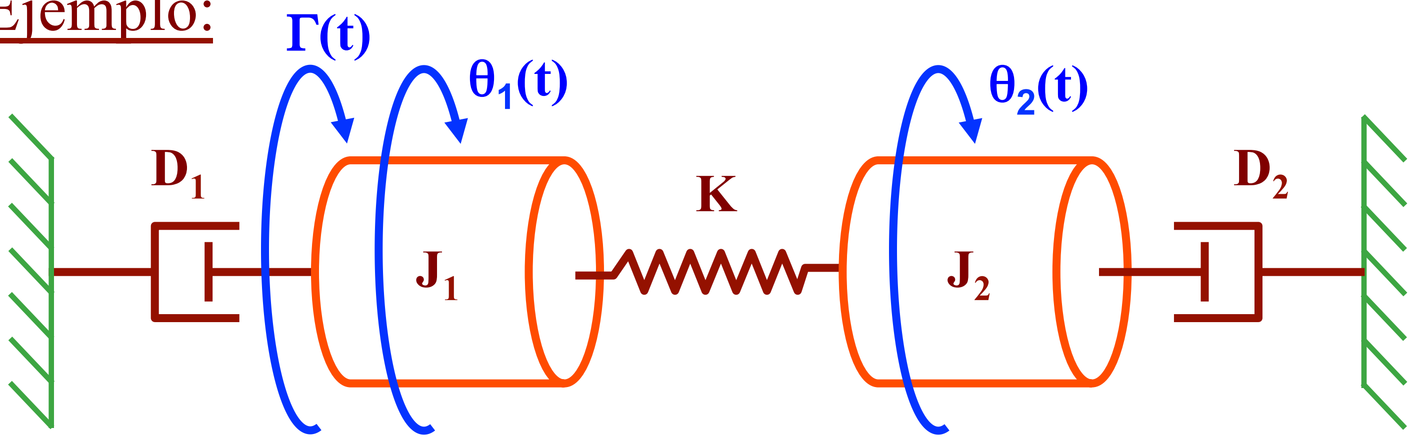
D: N.m.s/rad

K: N.m/rad

J: $kg.m^2$

Modelado de sistemas

Ejemplo:



$$\sum \mathrm{Imped}_1 . \theta_1(s) - \sum \mathrm{Imped}_{1-2} . \theta_2(s) = \sum \mathrm{Pares}_1$$

$$-\sum \mathrm{Imped}_{2-1} . \theta_1(s) + \sum \mathrm{Imped}_2 . \theta_2(s) = \sum \mathrm{Pares}_2$$

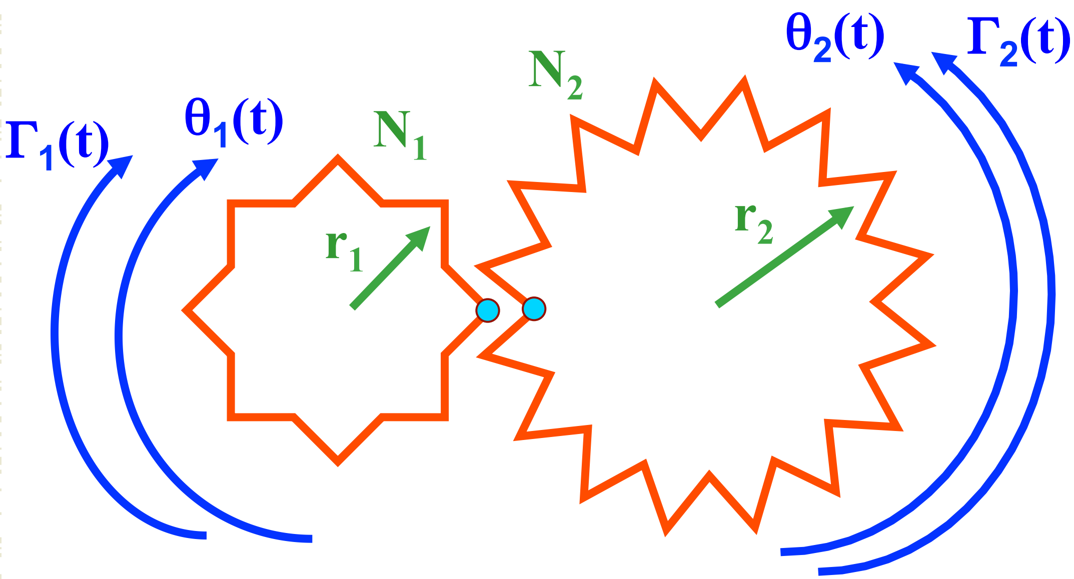
$$(J_1.s^2 + D_1.s + K).\Theta_1(s) - K.\Theta_2(s) = \Gamma(s)$$

$$-K.\Theta_1(s) + (J_2.s^2 + D_2.s + K).\Theta_2(s) = 0$$

Jorge J. Feliu Batlle

Modelado de sistemas

Trenes de engranaje (reductoras)



$$r_1.\theta_1(t) = r_2.\theta_2(t)$$

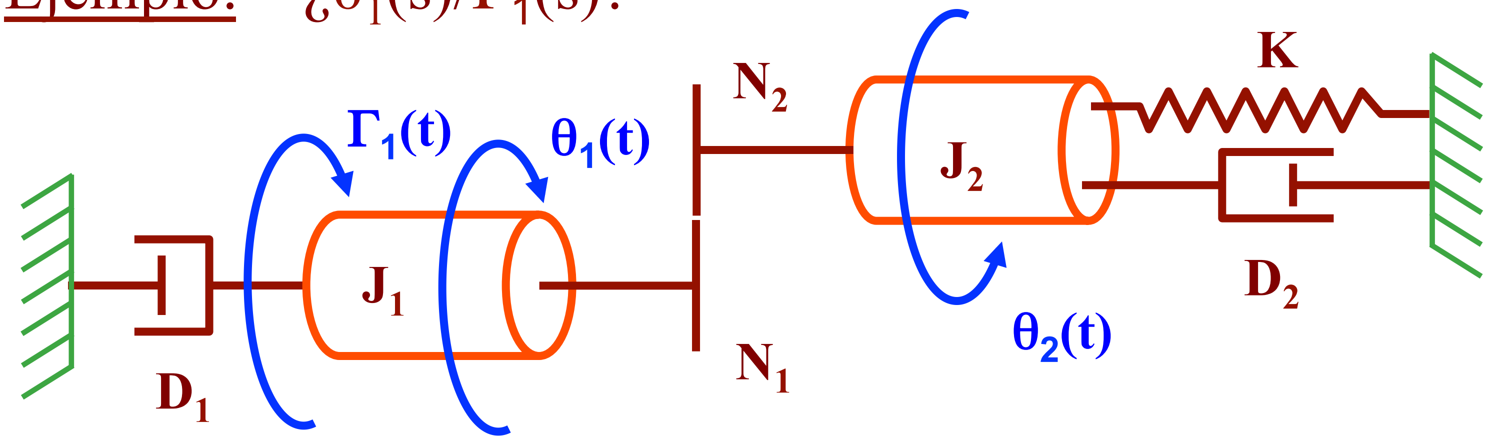
$$\frac{\theta_2(t)}{\theta_1(t)} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\Gamma_1(t)}{\Gamma_2(t)}$$

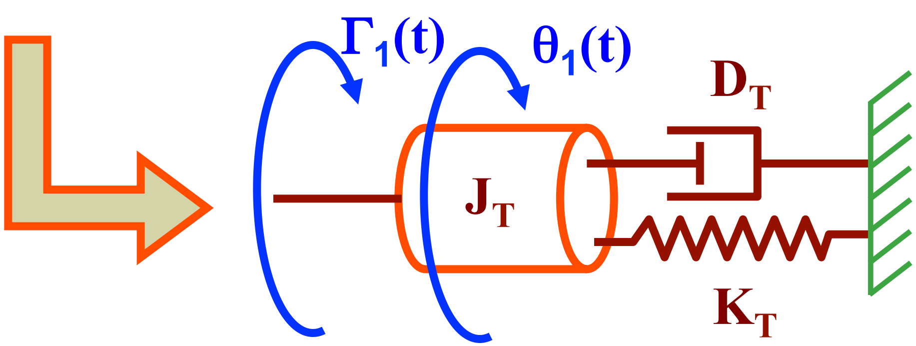
Propiedad: la impedancia de sistemas rotacionales se trasmite a través de trenes de engranajes multiplicándola por:

$$\left(\frac{\text{Nº dientes de destino}}{\text{Nº dientes de inicio}}\right)^2$$

Modelado de sistemas

Ejemplo: ¿$\theta_1(s)/\Gamma_1(s)$?





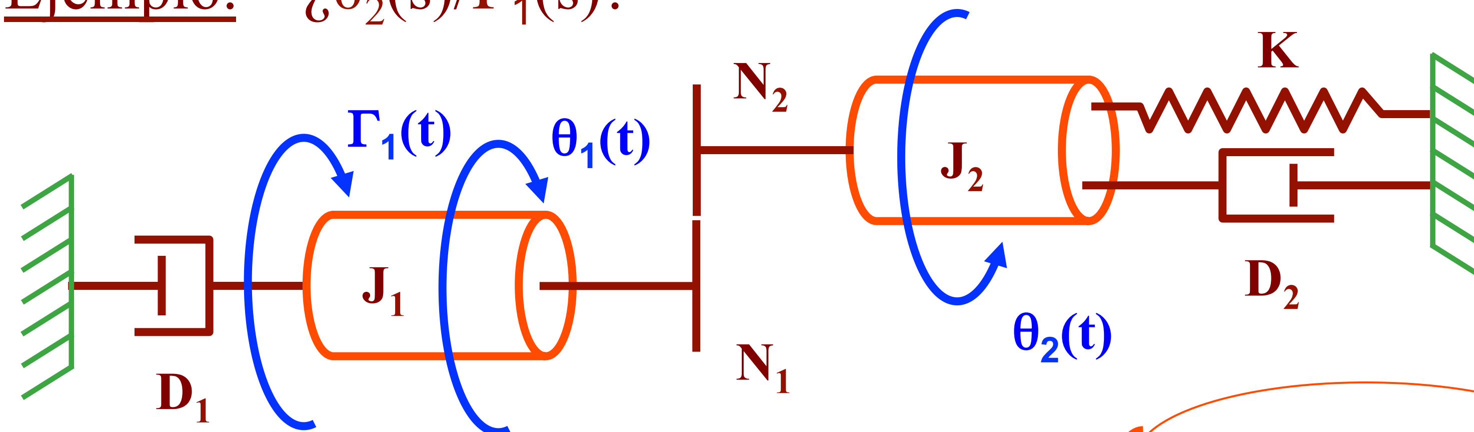
$$\begin{cases} J_T = J_1 + J_2.(N_1/N_2)^2 \\ D_T = D_1 + D_2.(N_1/N_2)^2 \\ K_T = K.(N_1/N_2)^2 \end{cases}$$

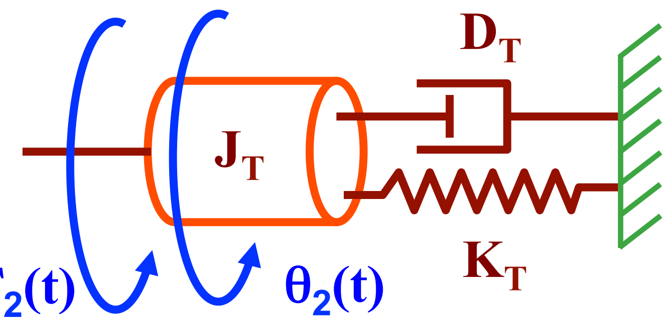
$$(J_T.s^2 + D_T.s + K_T).\Theta_1(s) = \Gamma_1(s)$$

$$\frac{\Theta_1(s)}{\Gamma_1(s)} = \frac{1}{J_T.s^2 + D_T.s + K_T}$$

Modelado de sistemas

Ejemplo: ¿$\theta_2(s)/\Gamma_1(s)$?





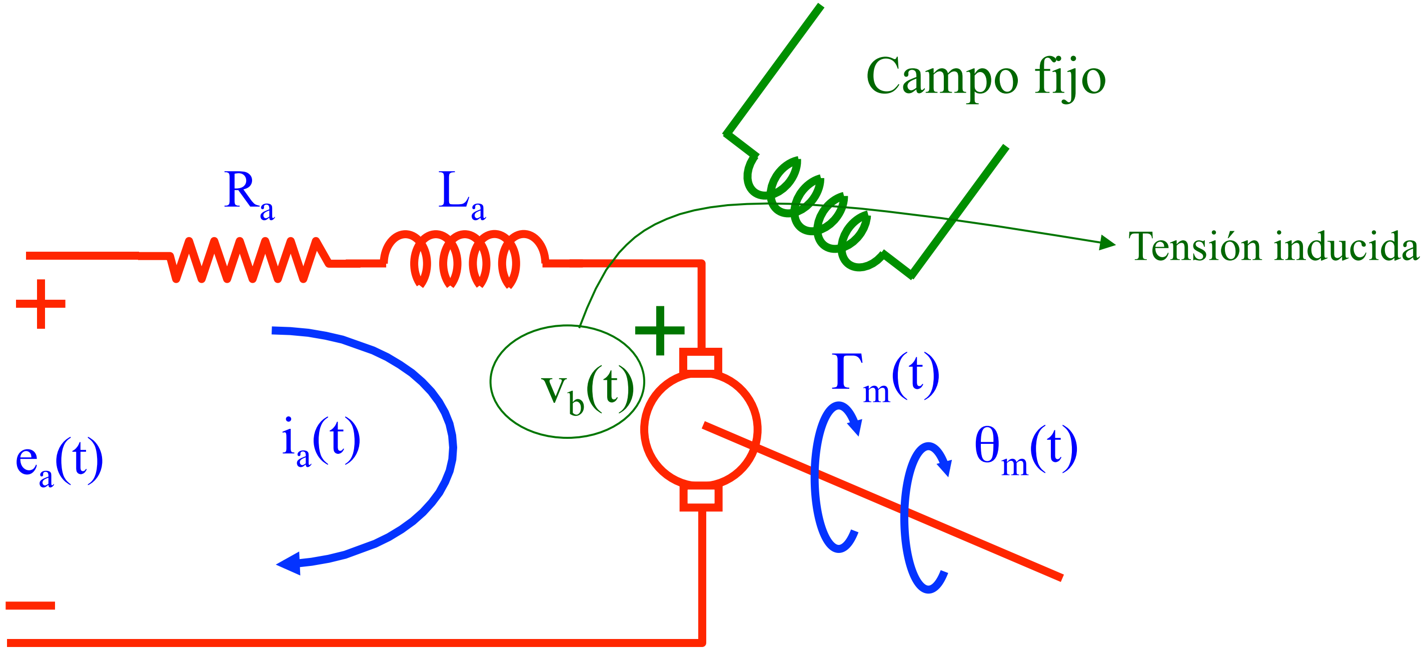
$$\begin{cases} \Gamma_2(t) = \Gamma_1(t).N_2/N_1 \\ J_T = J_1.(N_2/N_1)^2 + J_2 \\ D_T = D_1.(N_2/N_1)^2 + D_2 \\ K_T = K \end{cases}$$

$$(J_T.s^2 + D_T.s + K_T).\Theta_2(s) = \Gamma_2(s)$$

$$\frac{\Theta_2(s)}{\Gamma_1(s)} = \frac{N_2/N_1}{J_T.s^2 + D_T.s + K_T}$$

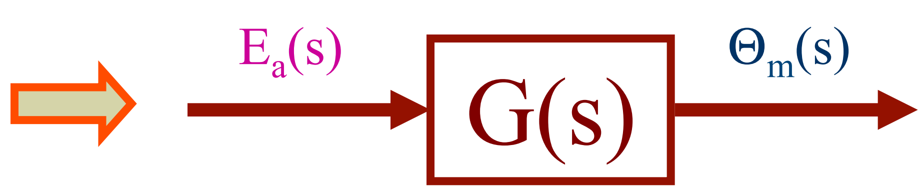
Modelado de sistemas

Modelado Electro-Mecánico: (Motor controlado por inducido)



Señal de entrada: Voltios

Señal de salida: Radianes



Modelado de sistemas

Modelado Electro-Mecánico: (Motor controlado por inducido)

$$v_b(t) = K_b \frac{d\theta_m(t)}{dt} \Rightarrow V_b(s) = K_b.s.\Theta_m(s)$$ siendo K_b la cte. de fuerza contraelectrom.

$$R_a.i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + v_b(t) = e_a(t) \Rightarrow (R_a + L_a.s).I_a(s) + V_b(s) = E_a(s)$$

$$\Gamma_m(t) = K_t.i_a(t) \Rightarrow \Gamma_m(s) = K_t.I_a(s)$$ siendo K_t la cte. de par

$$E_a(s) = \frac{R_a + L_a.s}{K_t}\Gamma_m(s) + K_b.s.\Theta_m(s)$$ PARTE ELÉCTRICA

Modelado de sistemas

Modelado Electro-Mecánico: (Motor controlado por inducido)

$$\Gamma_m(t) = J_m \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} + D_m \frac{d\theta_m(t)}{dt} \Rightarrow \underbrace{\Gamma_m(s) = (J_m.s^2 + D_m.s).\Theta_m(s)}_{\text{PARTE MECÁNICA}}$$

PARTE ELÉCTRICA + PARTE MECÁNICA

$$E_a(s) = \frac{R_a + L_a.s}{K_t}(J_m.s^2 + D_m.s).\Theta_m(s) + K_b.s.\Theta_m(s) \xrightarrow{L_a \ll R_a}$$

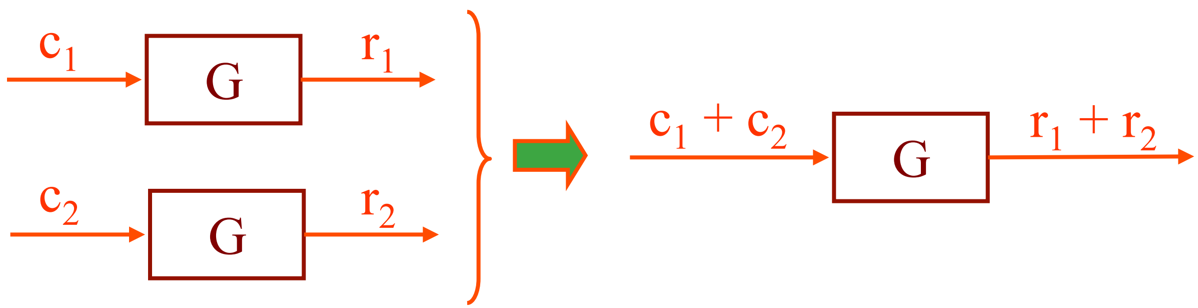
$$\Rightarrow \frac{\Theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{K_t/(R_a.J_m)}{s\left[s + \dfrac{1}{J_m}\left(D_m + \dfrac{K_t.K_b}{R_a}\right)\right]} = \frac{K}{s.(s+a)}$$

Linealización

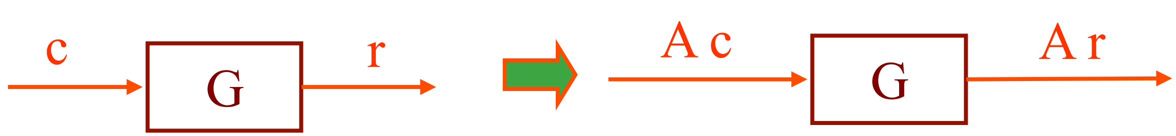
Los sistemas lineales son más sencillos de controlar

Cumplen dos propiedades:

- Superposición:

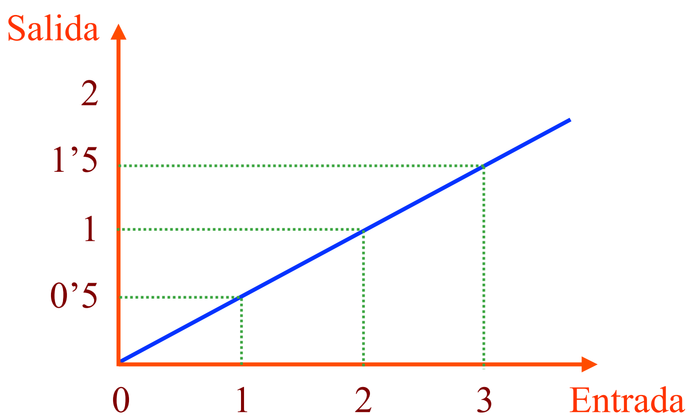


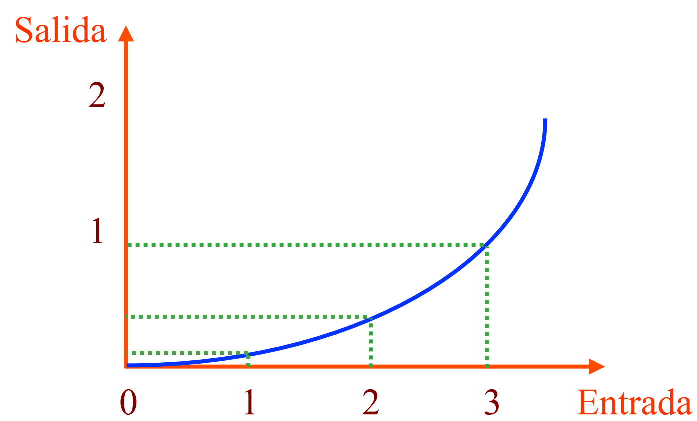
- Homogeneidad:



Linealización

De forma gráfica:





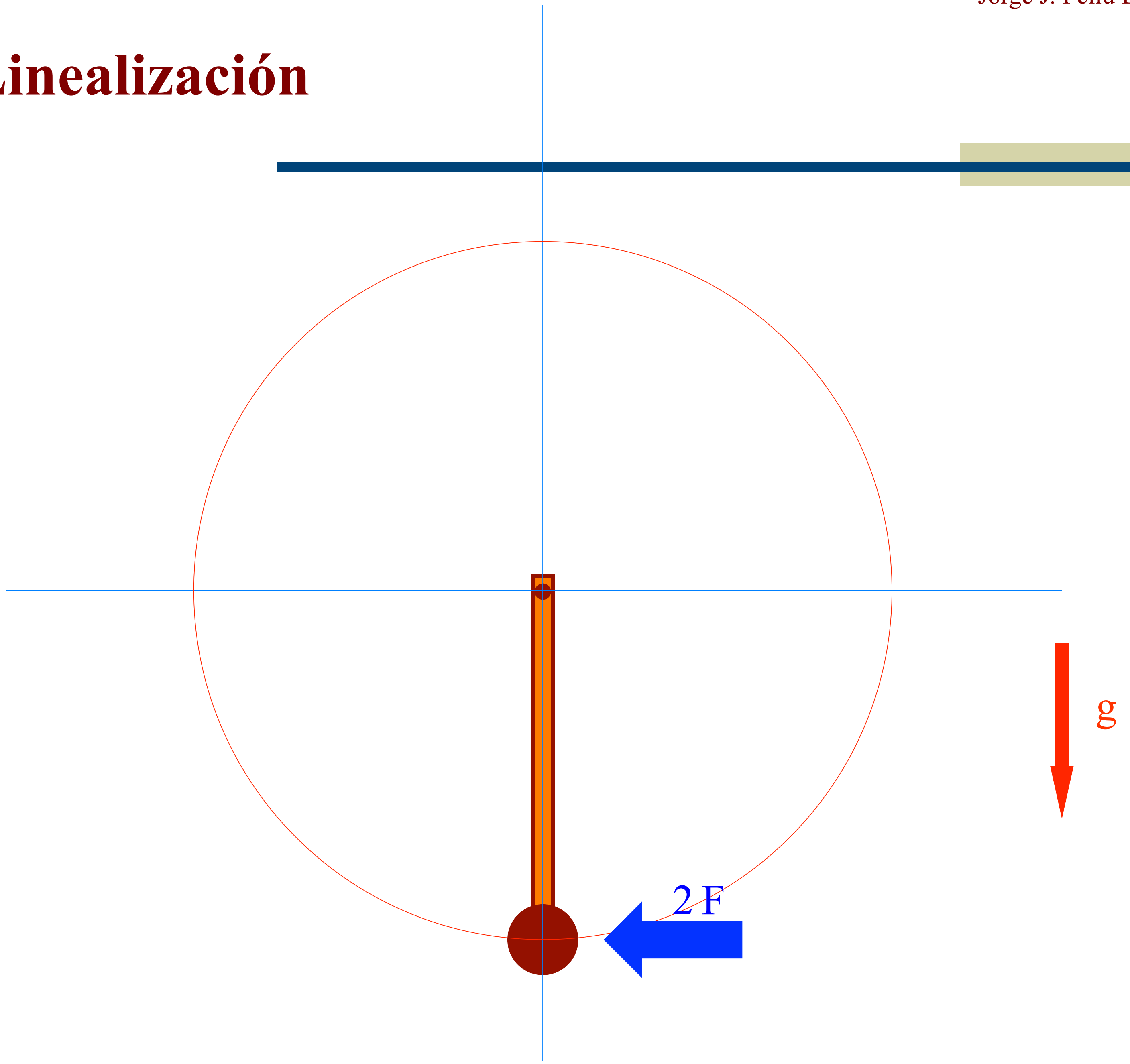
Entrada = 1 $\Rightarrow$ Salida = 0'5

Entrada = 2 $\Rightarrow$ Salida = 1

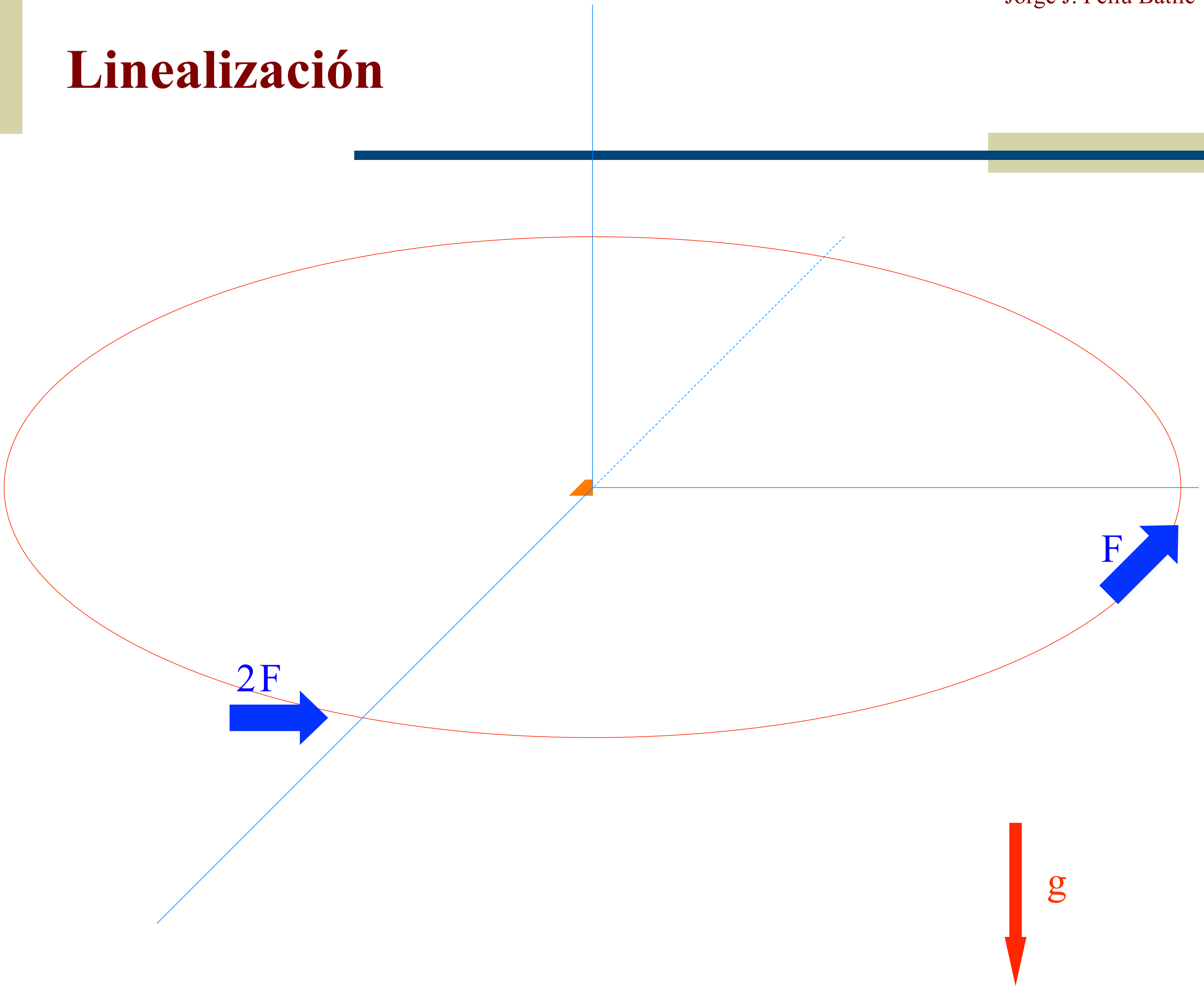
Entrada = 1 + 2 = 3 $\Rightarrow$ Salida = 1 + 0'5 = 1'5 $\Rightarrow$ Superposición

Entrada = 0'5.2 = 1 $\Rightarrow$ Salida = 0'5.1 = 0'5 $\Rightarrow$ Homogeneidad

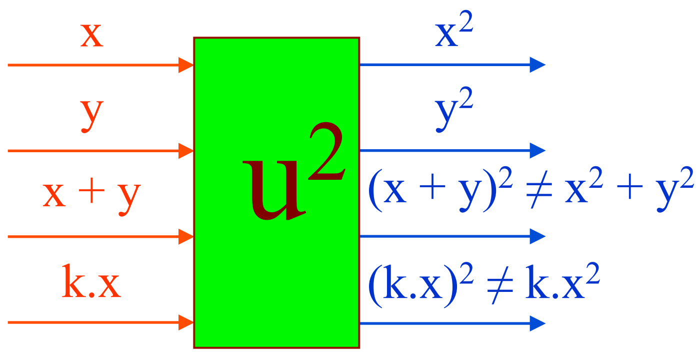
Linealización



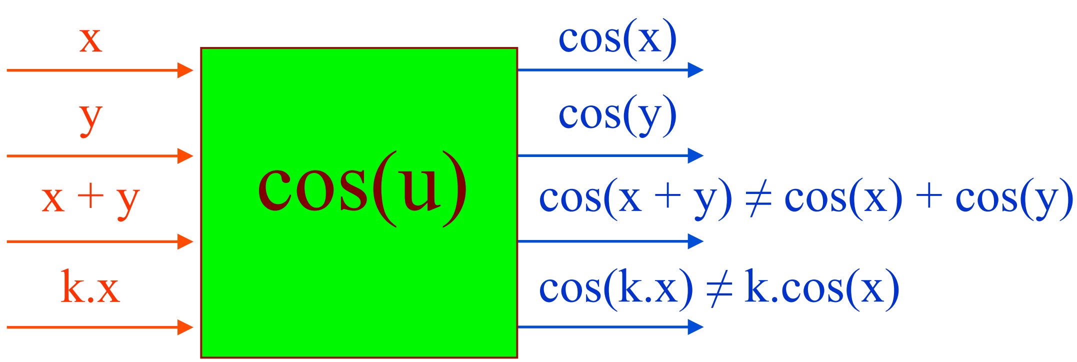
Linealización



Linealización

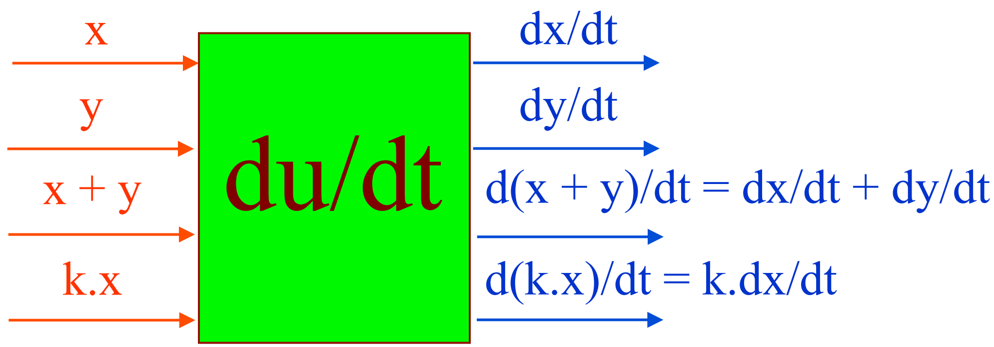


No lineal

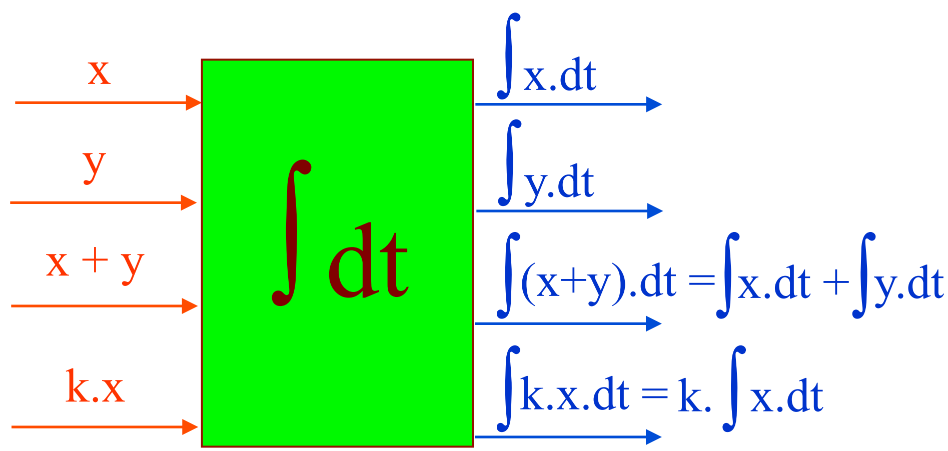


No lineal

Linealización



Sí lineal



Sí lineal

Linealización

Ejemplos de ecuaciones NO lineales:

$$x^2 + y + \cos(x) = 0$$

$$\ln(x) - 5 + \dot{x} = 0$$

$$x.u + \ddot{u} + \dot{x} = 3$$

$$e^u - 3 + u + x = 0$$

$$\vdots$$

De forma general:

- ✓ Términos trigonométricos
- ✓ Exponenciales y logaritmos
- ✓ Productos de funciones
- ✓ Constantes sueltas
- ✓ etc

Ejemplos de ecuaciones SÍ lineales:

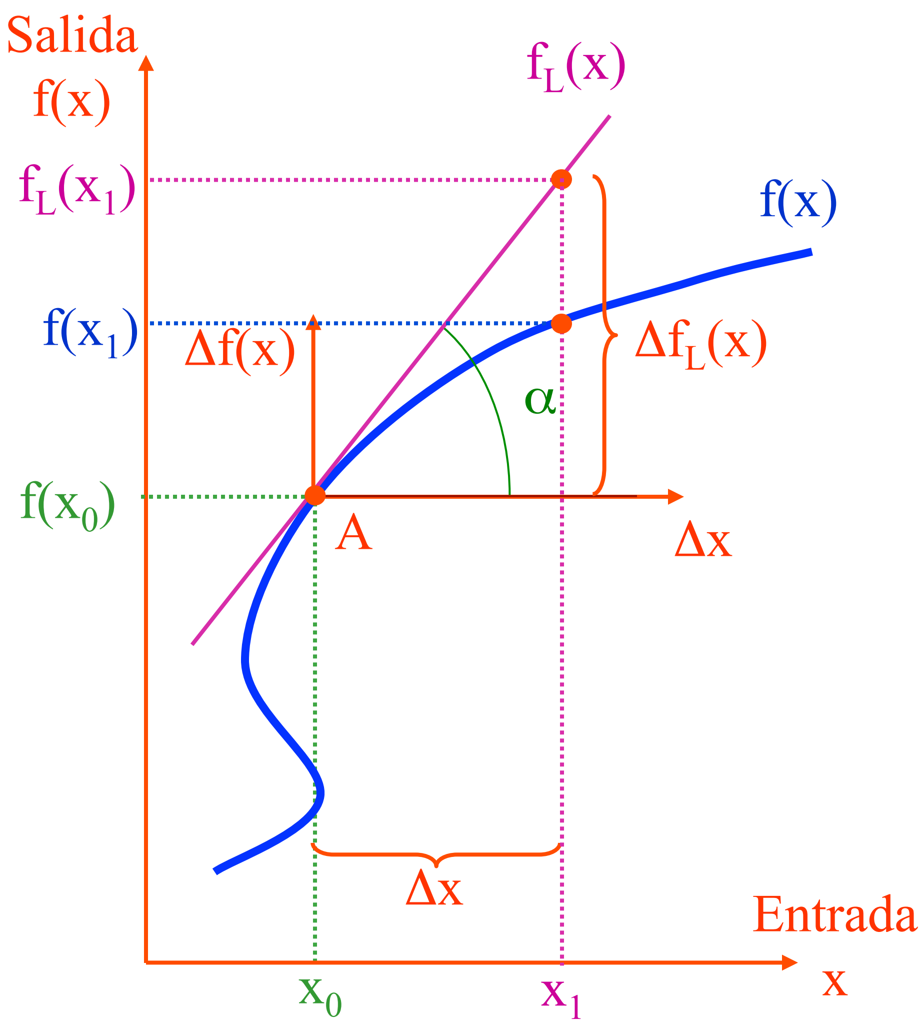
$$x + 7y + 3z = 0$$

$$x - \ddot{z} + \dot{x} = 0$$

Jorge J. Feliu Batlle

Linealización

Procedimiento



$$tg(\alpha) = \Delta f_L(x)/\Delta x$$

$$\underbrace{f_L(x_1) - f(x_0)}_{\Delta f_L(x)} = \underbrace{m_A}_{tg(\alpha)}\underbrace{(x_1 - x_0)}_{\Delta x}$$

$$f_L(x_1) = f(x_0) + m_A(x_1 - x_0)$$

$$f_L(x_1) = f(x_0) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x = x_0}(x_1 - x_0)$$

Jorge J. Feliu Batlle

Reducción de Sistemas

Diagramas de bloques

Es un representación gráfica de la relación entre los diferentes subsistemas y las señales que intervienen en un sistema complejo

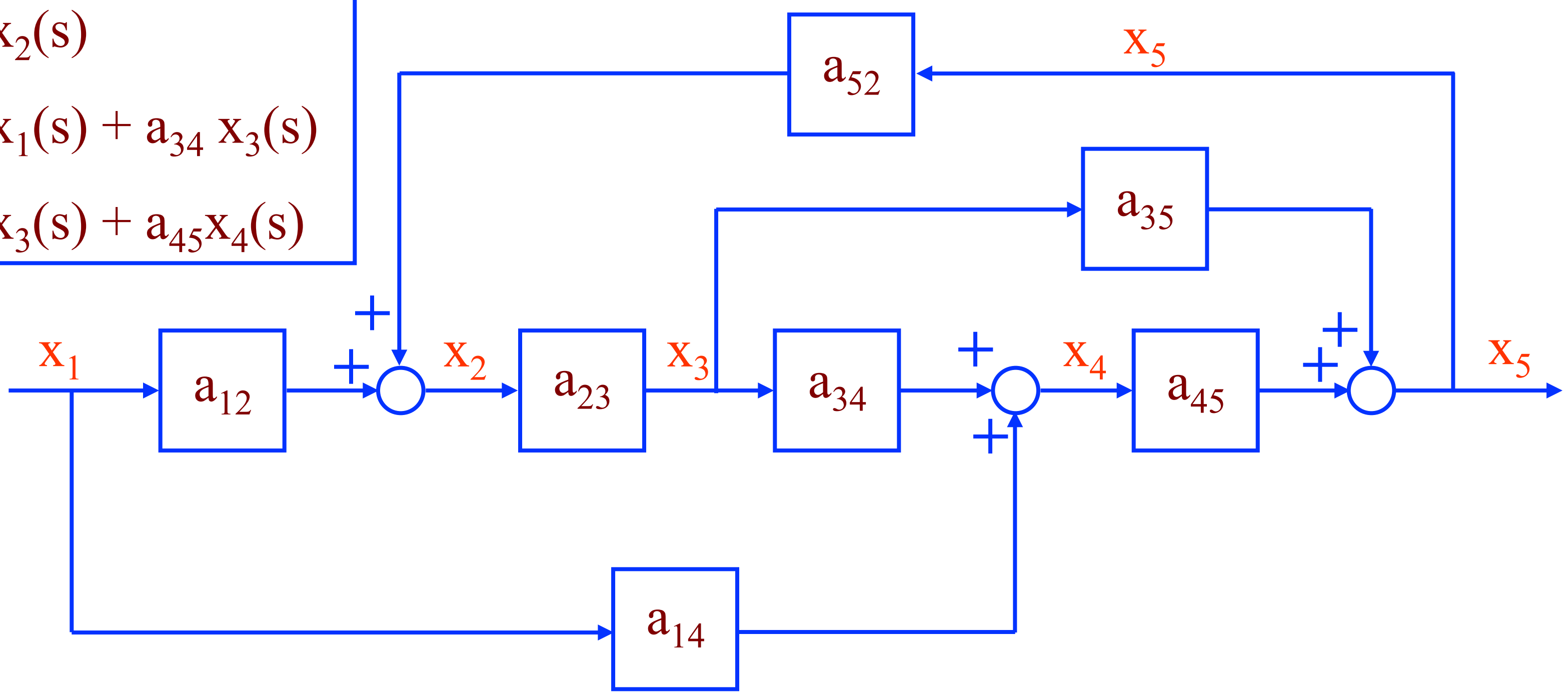
$$x_2(s) = a_{12}x_1(s) + a_{52}x_5(s)$$

$$x_3(s) = a_{23}x_2(s)$$

$$x_4(s) = a_{14}x_1(s) + a_{34}\ x_3(s)$$

$$x_5(s) = a_{35}x_3(s) + a_{45}x_4(s)$$

Entrada: x_1 – Salida: x_5



Jorge J. Feliu Batlle

Reducción de Sistemas

Diagrama de bloques de un motor controlado por inducido

$$V_b(s) = K_b.s.\Theta_m(s) \longrightarrow \omega_m$$

$$(R_a + L_a.s).I_a(s) + V_b(s) = E_a(s)$$

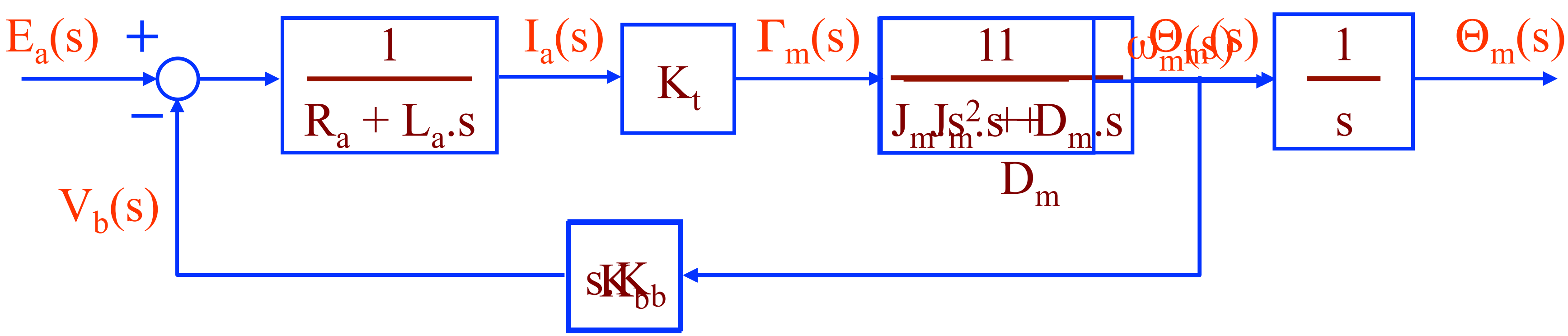
$$\Gamma_m(s) = K_t.I_a(s)$$

PARTE ELÉCTRICA

$$\Gamma_m(s) = (J_m.s^2 + D_m.s).\Theta_m(s)$$

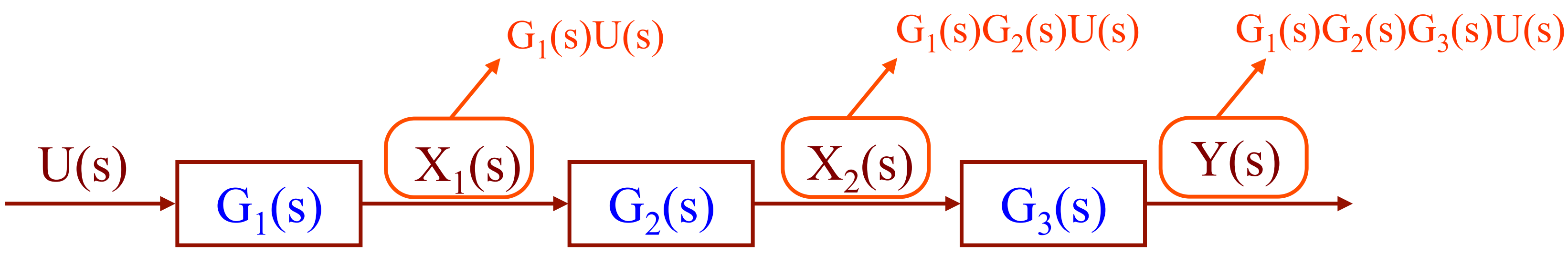
PARTE MECÁNICA

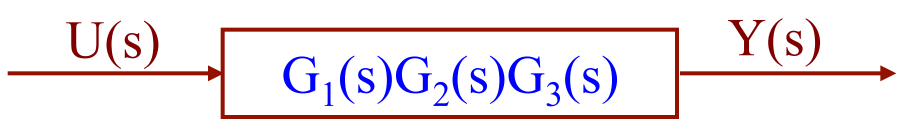
Entrada: E_a – Salida: Θ_m



Reducción de Sistemas

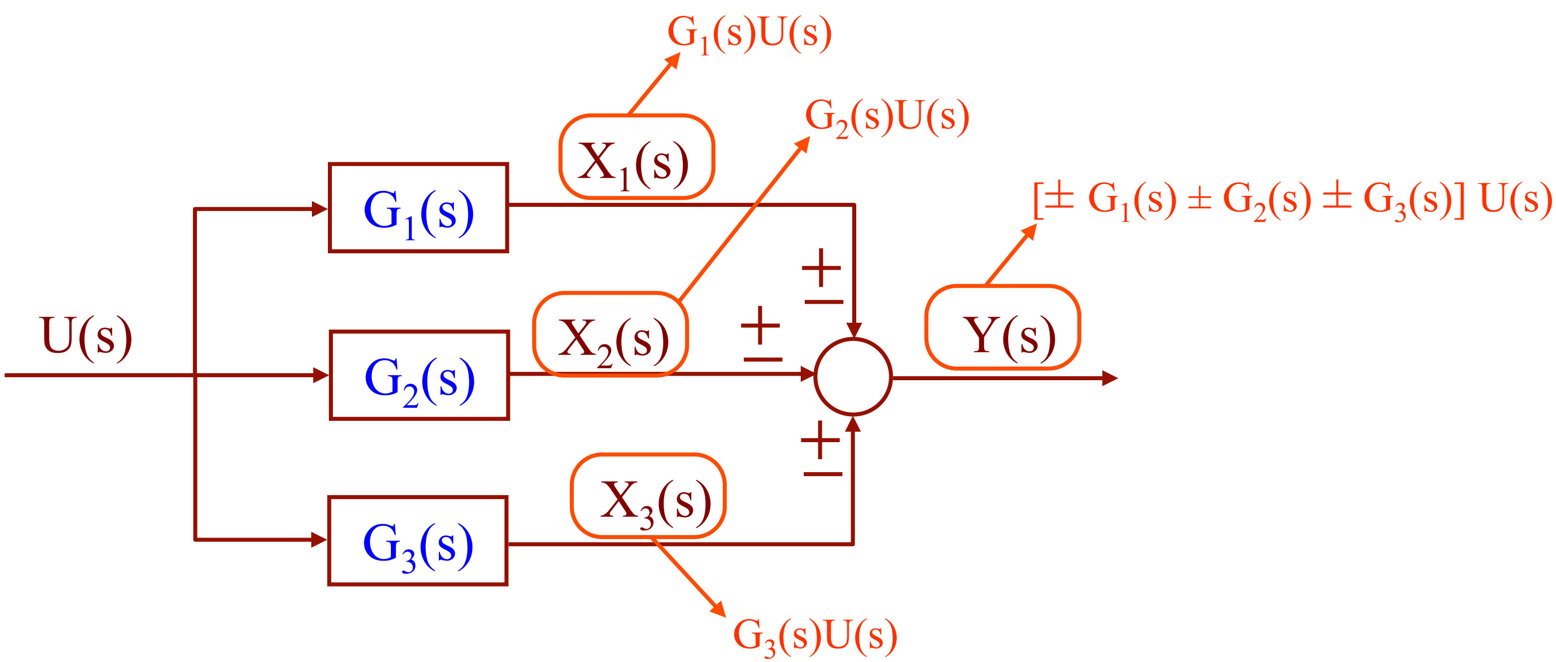
Bloques en serie:

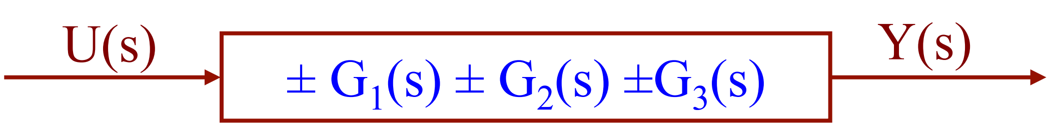




Reducción de Sistemas

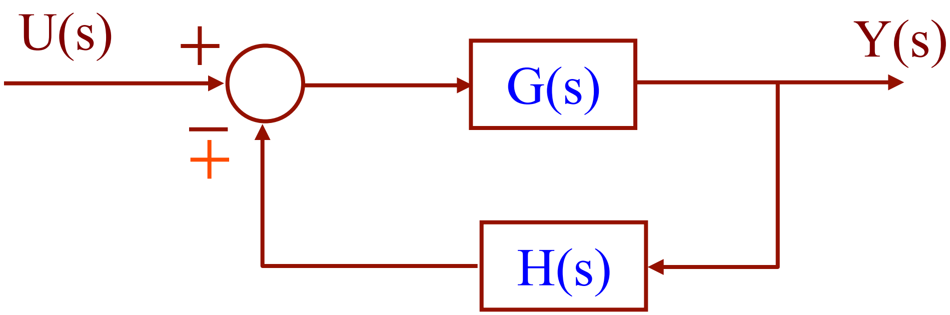
Bloques en paralelo:

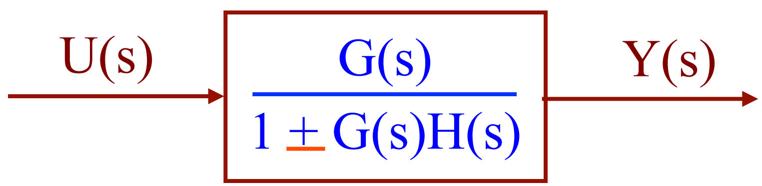




Reducción de Sistemas

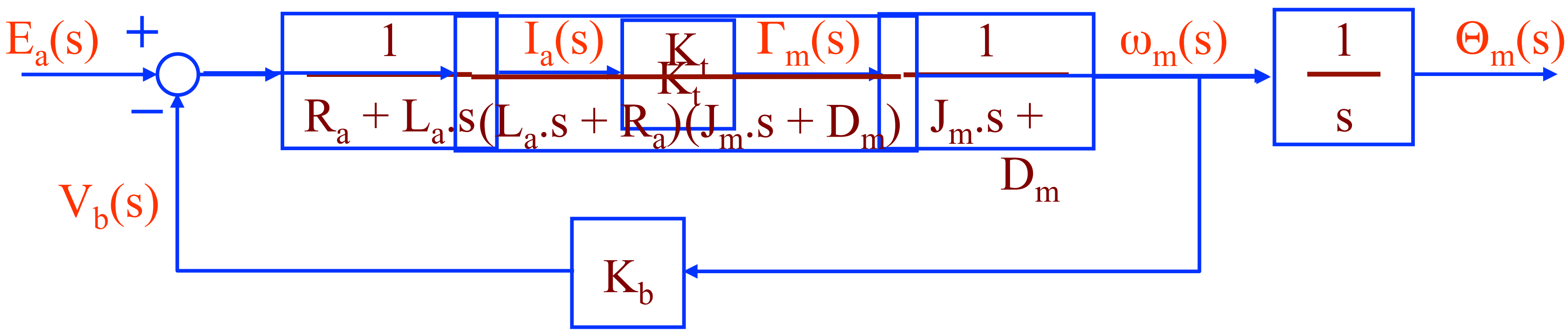
Realimentación:

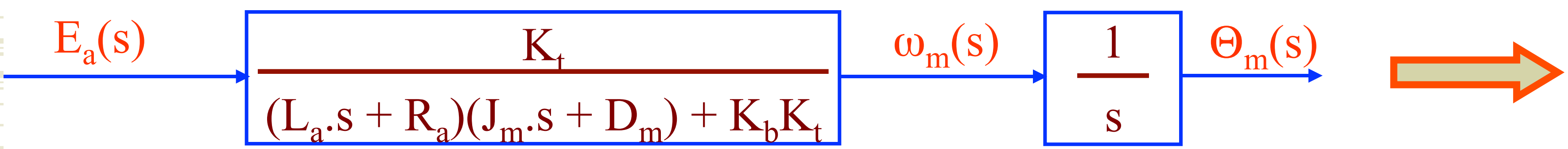


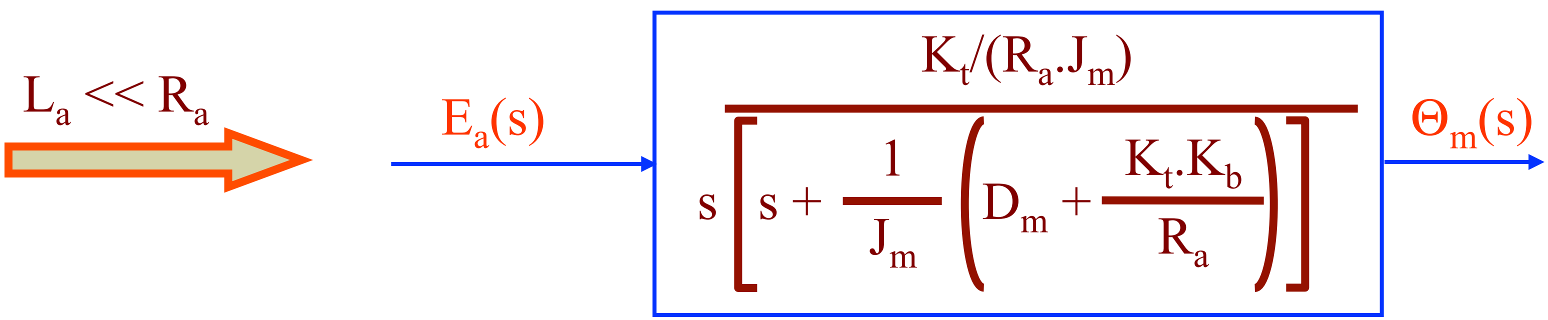


Reducción de Sistemas

Simplificación del diagrama de bloques de un motor controlado por inducido



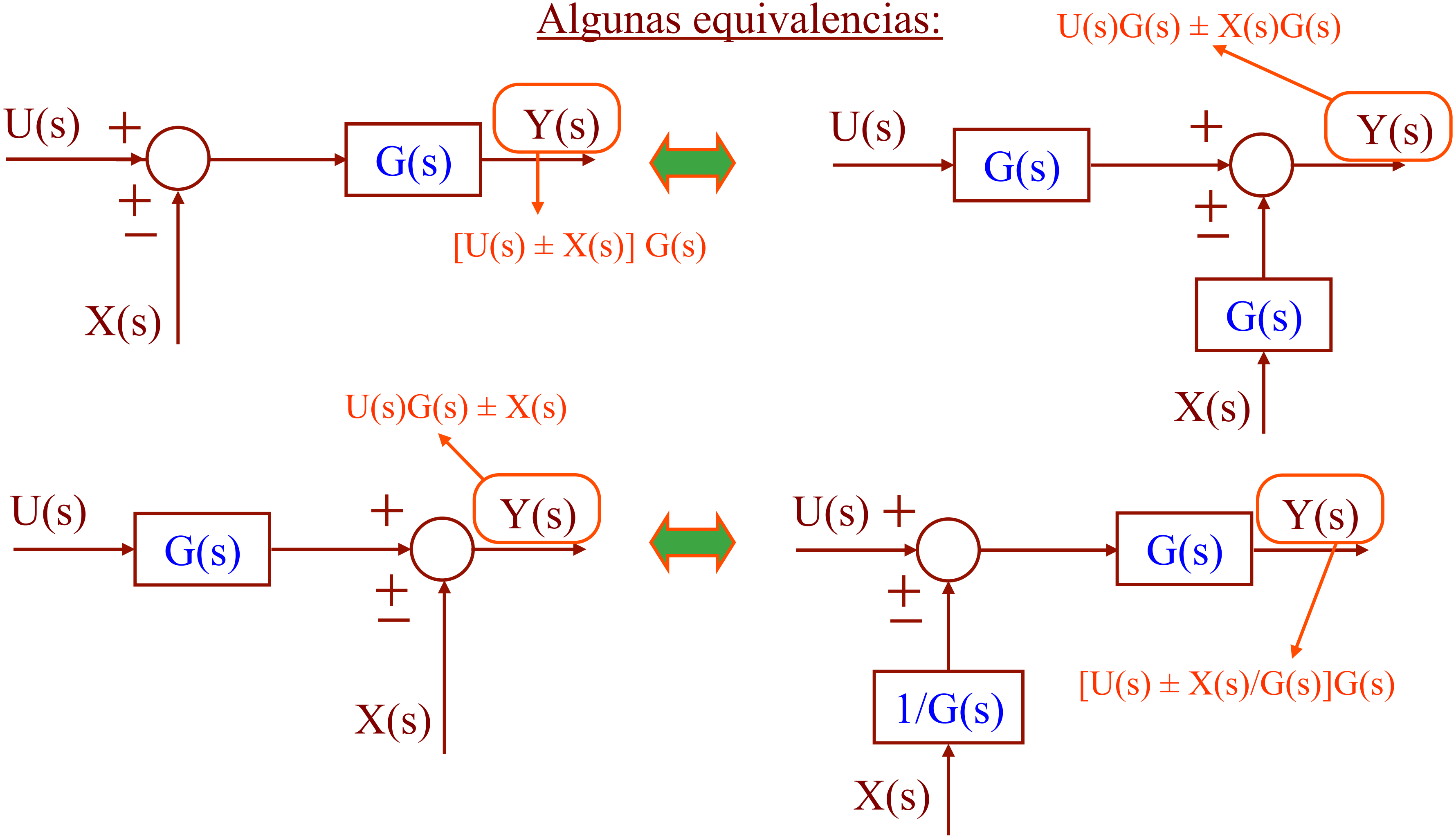




Jorge J. Feliu Batlle

Reducción de Sistemas

Algunas equivalencias:



Reducción de Sistemas

Diagramas de flujo (flujogramas)

Es un representación dual del diagrama de bloques

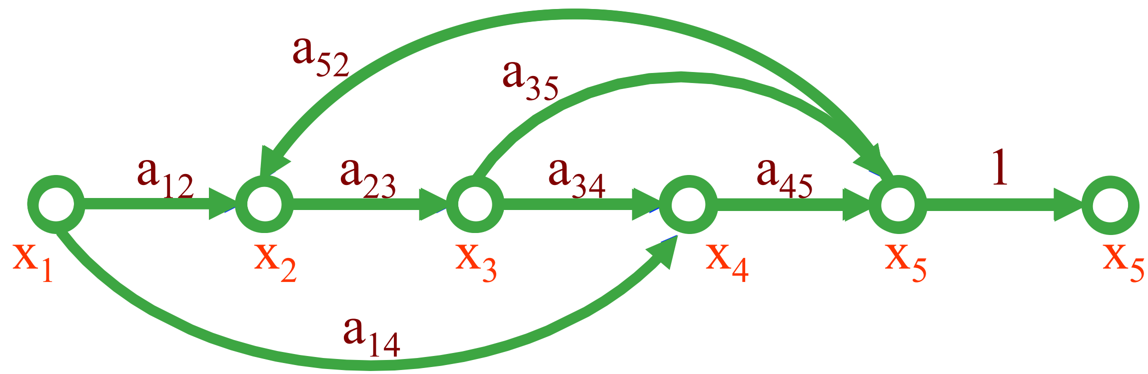
Entrada: x_1 – Salida: x_5

$$x_2(s) = a_{12}x_1(s) + a_{52}x_5(s)$$

$$x_3(s) = a_{23}x_2(s)$$

$$x_4(s) = a_{14}x_1(s) + a_{34}\, x_3(s)$$

$$x_5(s) = a_{35}x_3(s) + a_{45}x_4(s)$$



Nodo fuente: nodo del que sólo parten ramas: x_1

Nodo final: nodo al que sólo llegan ramas: x_5

Trayecto directo: trayecto que parte de un nodo fuente y llega a un nodo final sin pasar dos veces por el mismo nodo: $a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}$, $a_{12}a_{23}a_{35}$, $a_{14}a_{45}$

Bucle: trayecto que comienza y termina en el mismo nodo sin pasar dos veces por ningún otro nodo: $a_{23}a_{34}a_{45}a_{52}$, $a_{23}a_{35}a_{52}$

Jorge J. Feliu Batlle

Reducción de Sistemas

Flujograma de un motor controlado por inducido

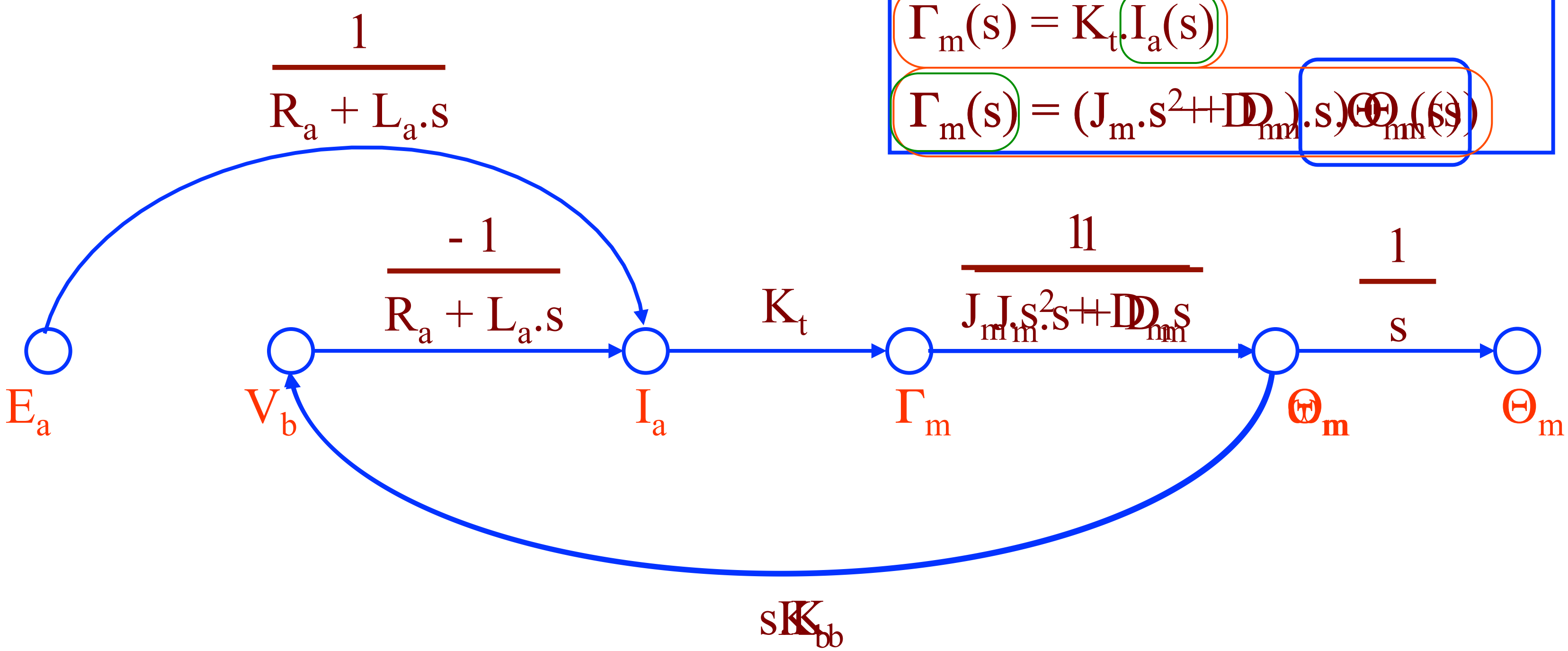
Entrada: E_a – Salida: Θ_m

$V_b(s) = K_b.s.\Theta_m(s) \rightarrow \omega_m$

$(R_a + L_a.s).I_a(s) + V_b(s) = E_a(s)$

$\Gamma_m(s) = K_t.I_a(s)$

$\Gamma_m(s) = (J_m.s^2 + D_m.s)\Theta_m(s)$



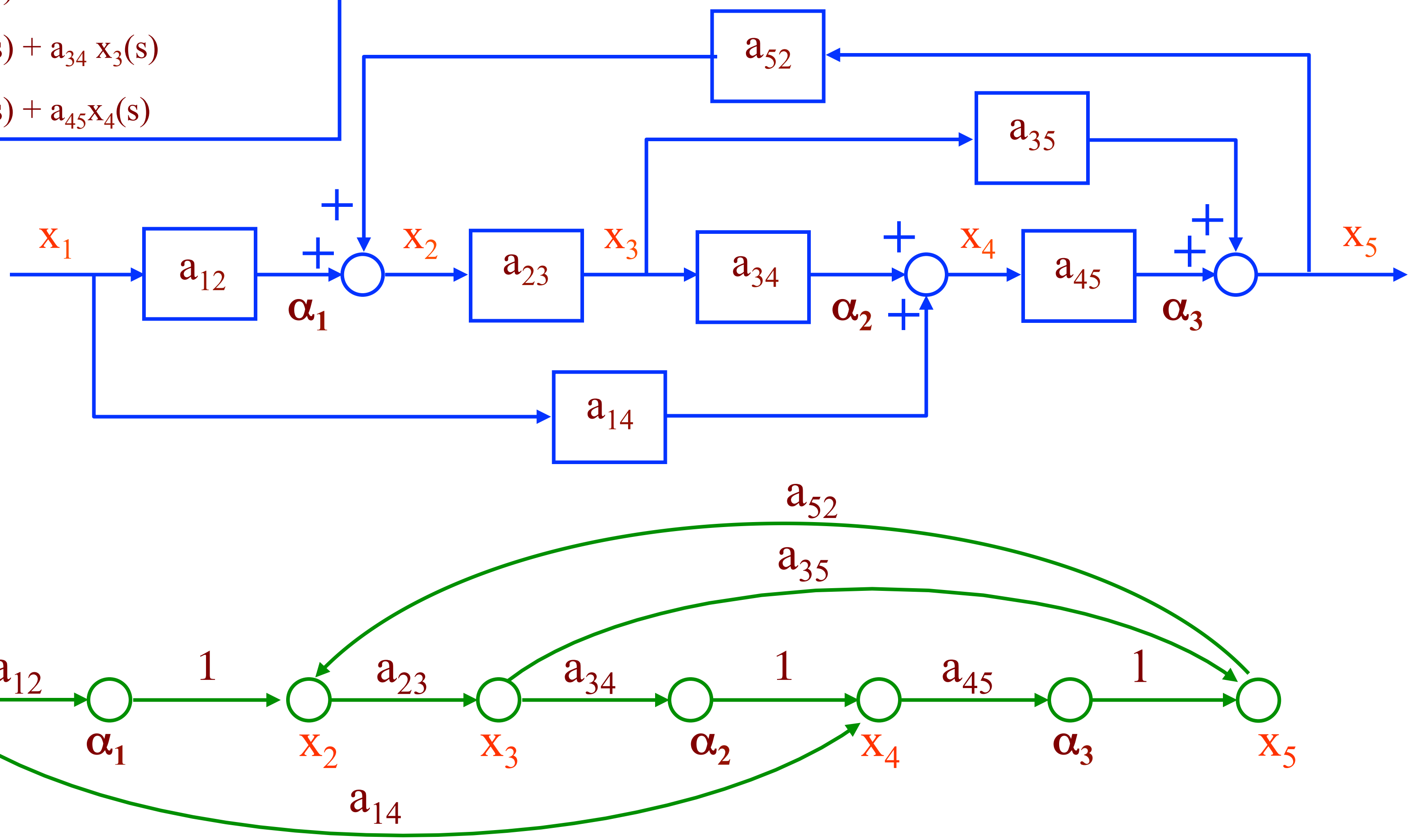
Reducción de Sistemas

$x_2(s) = a_{12}x_1(s) + a_{52}x_5(s)$

$x_3(s) = a_{23}x_2(s)$

$x_4(s) = a_{14}x_1(s) + a_{34}\ x_3(s)$

$x_5(s) = a_{35}x_3(s) + a_{45}x_4(s)$



Reducción de Sistemas

Regla de Mason:

Sirve para calcular la f.d.t. entre un nodo final y uno fuente:

$$G(s) = \frac{x_{final}}{x_{fuente}} = \frac{1}{\Delta} \sum_k T_k \Delta_k$$

$$\Delta = 1 - \sum B_{1n} + \sum B_{2n} - \sum B_{3n} + \cdots + (-1)^n \sum B_{mn}$$

T_k = Transmitancia del k-ésimo trayecto directo entre el x_{fuente} y el x_{final}

$\sum B_{1n}$ = Suma de transmitancias de todos los bucles del flujograma

$\sum B_{2n}$ = Suma de los productos de transmitancias de las parejas de bucles disjuntos

$\sum B_{3n}$ = Suma de los productos de transmitancias de las ternas de bucles disjuntos

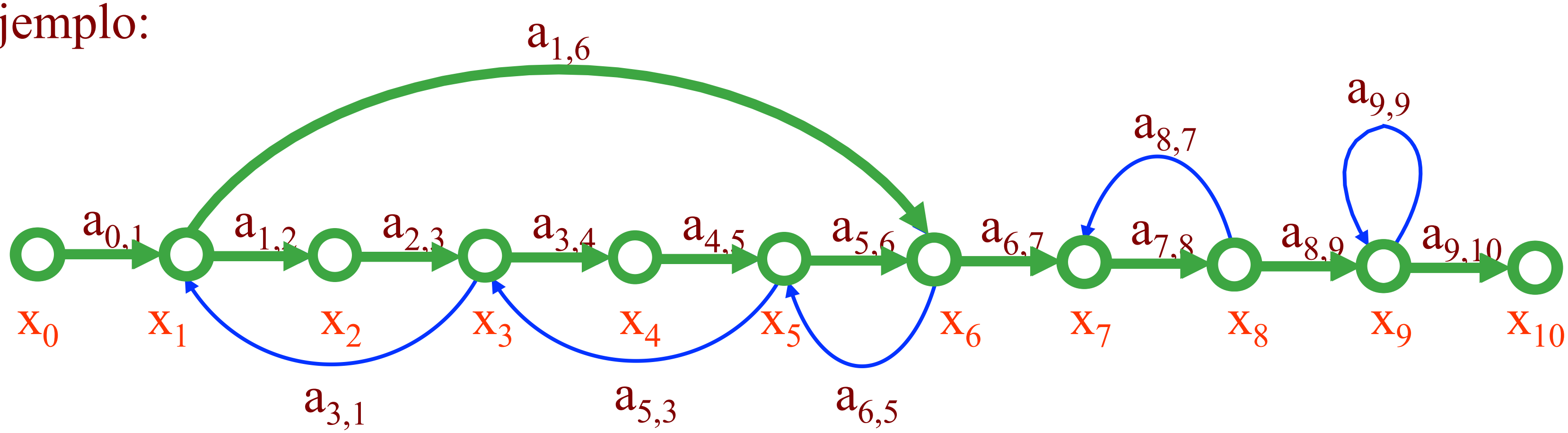
• • •

Δ_k = Valor de Δ excluyendo los términos donde intervienen bucles que tienen algún nodo común con el trayecto directo T_k

Reducción de Sistemas

Regla de Mason:

Ejemplo:



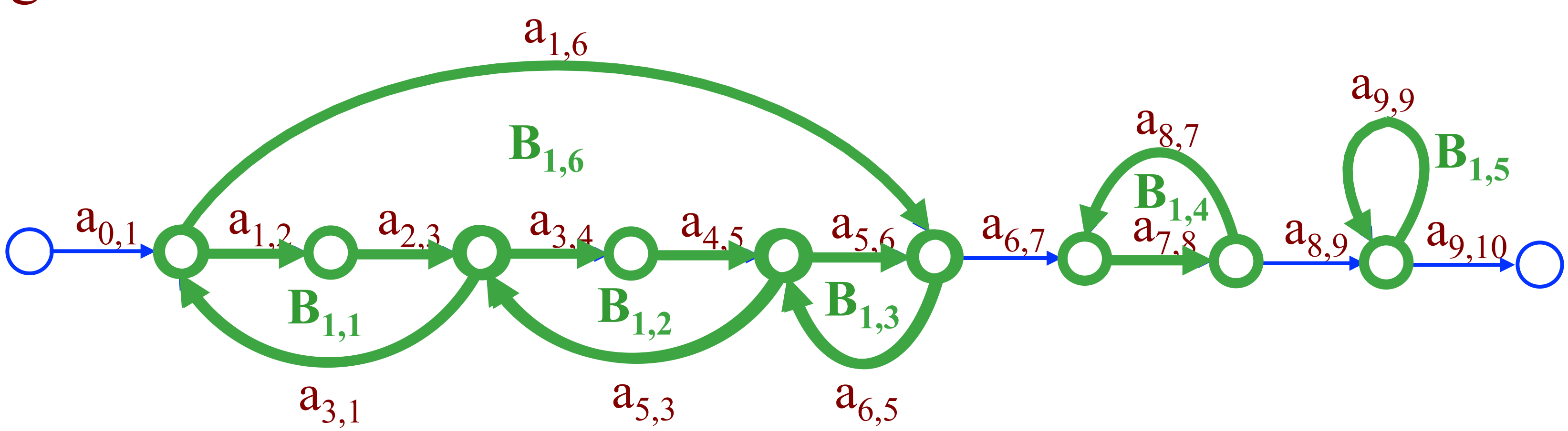
Trayectos directos (T_k)

$$T_1 = a_{0,1}a_{1,2}a_{2,3}a_{3,4}a_{4,5}a_{5,6}a_{6,7}a_{7,8}a_{8,9}a_{9,10}$$

$$T_2 = a_{0,1}a_{1,6}a_{6,7}a_{7,8}a_{8,9}a_{9,10}$$

Reducción de Sistemas

Regla de Mason:

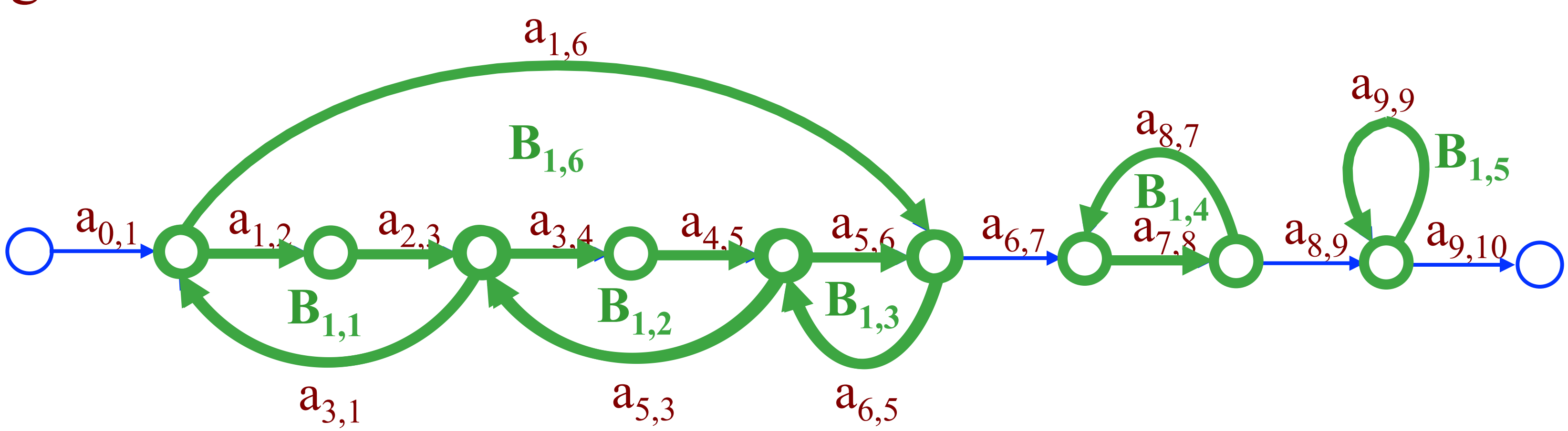


Bucles ($B_{1,n}$)

$$B_{1,1} = a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}$$
$$B_{1,2} = a_{3,4}a_{4,5}a_{5,3}$$
$$B_{1,3} = a_{5,6}a_{6,5}$$
$$B_{1,4} = a_{7,8}a_{8,7}$$
$$B_{1,5} = a_{99}$$
$$B_{1,6} = a_{1,6}a_{6,5}a_{5,3}a_{3,1}$$

Reducción de Sistemas

Regla de Mason:



Bucles ($B_{2,n}$)

$$B_{2,1} = B_{1,1}B_{1,3} \qquad B_{2,2} = B_{1,1}B_{1,4}$$

$$B_{2,3} = B_{1,1}B_{1,5} \qquad B_{2,4} = B_{1,2}B_{1,4}$$

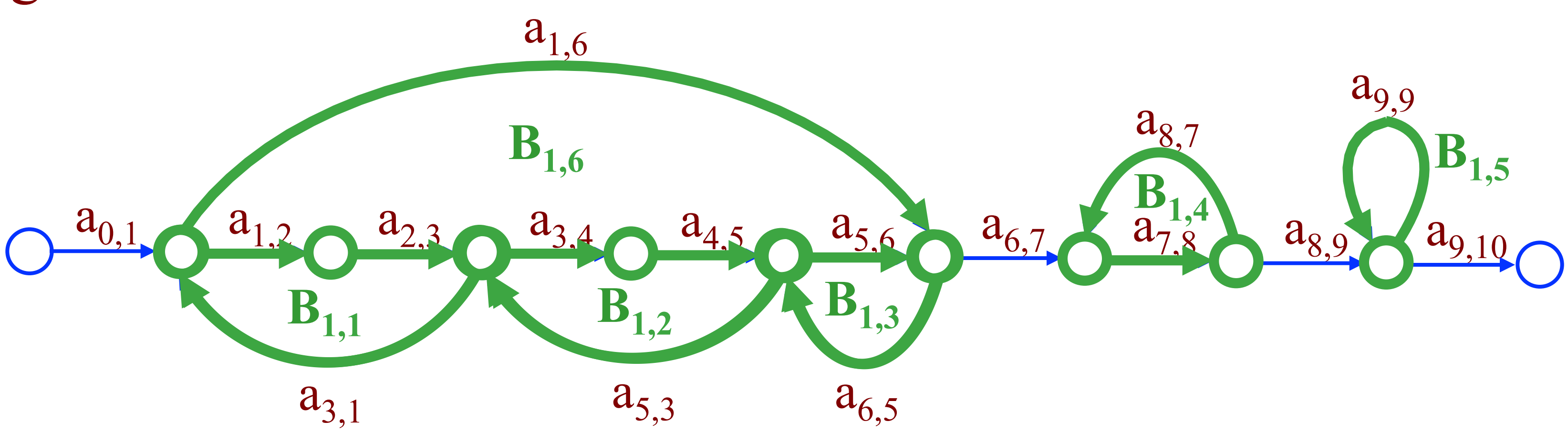
$$B_{2,5} = B_{1,2}B_{1,5} \qquad B_{2,6} = B_{1,3}B_{1,4}$$

$$B_{2,7} = B_{1,3}B_{1,5} \qquad B_{2,8} = B_{1,4}B_{1,5}$$

$$B_{2,9} = B_{1,4}B_{1,6} \qquad B_{2,10} = B_{1,5}B_{1,6}$$

Reducción de Sistemas

Regla de Mason:



Bucles ($B_{3,n}$)

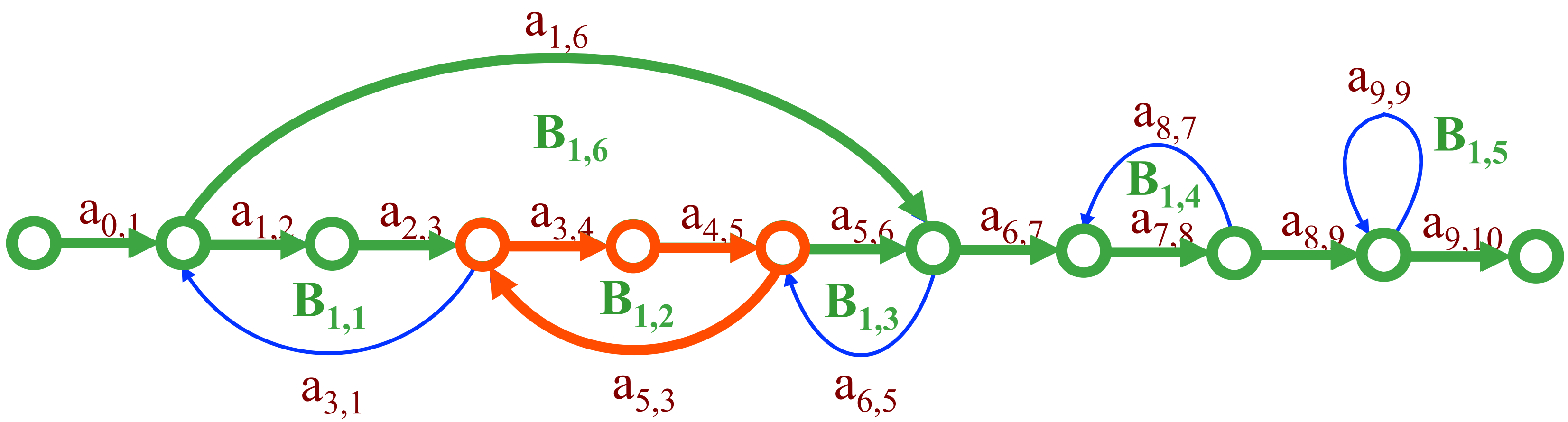
$$\boxed{\begin{aligned} B_{3,1} &= B_{1,1}B_{1,3}B_{1,4} \\ B_{3,2} &= B_{1,1}B_{1,3}B_{1,5} \\ B_{3,3} &= B_{1,1}B_{1,4}B_{1,5} \\ B_{3,4} &= B_{1,2}B_{1,4}B_{1,5} \\ B_{3,5} &= B_{1,3}B_{1,4}B_{1,5} \\ B_{3,6} &= B_{1,4}B_{1,5}B_{1,6} \end{aligned}}$$

Bucles ($B_{4,n}$)

$$\boxed{B_{4,1} = B_{1,1}B_{1,3}B_{1,4}B_{1,5}}$$

Reducción de Sistemas

Regla de Mason:



$$\Delta = 1 - \cancel{\sum B_{1n}} + \cancel{\sum B_{2n}} - \cancel{\sum B_{3n}} + \cancel{\cdots} + (-1)^n \cancel{\sum B_{mn}}$$

$$T_1 = a_{0,1}a_{1,2}a_{2,3}a_{3,4}a_{4,5}a_{5,6}a_{6,7}a_{7,8}a_{8,9}a_{9,10}$$

$$\Delta_1 = 1$$

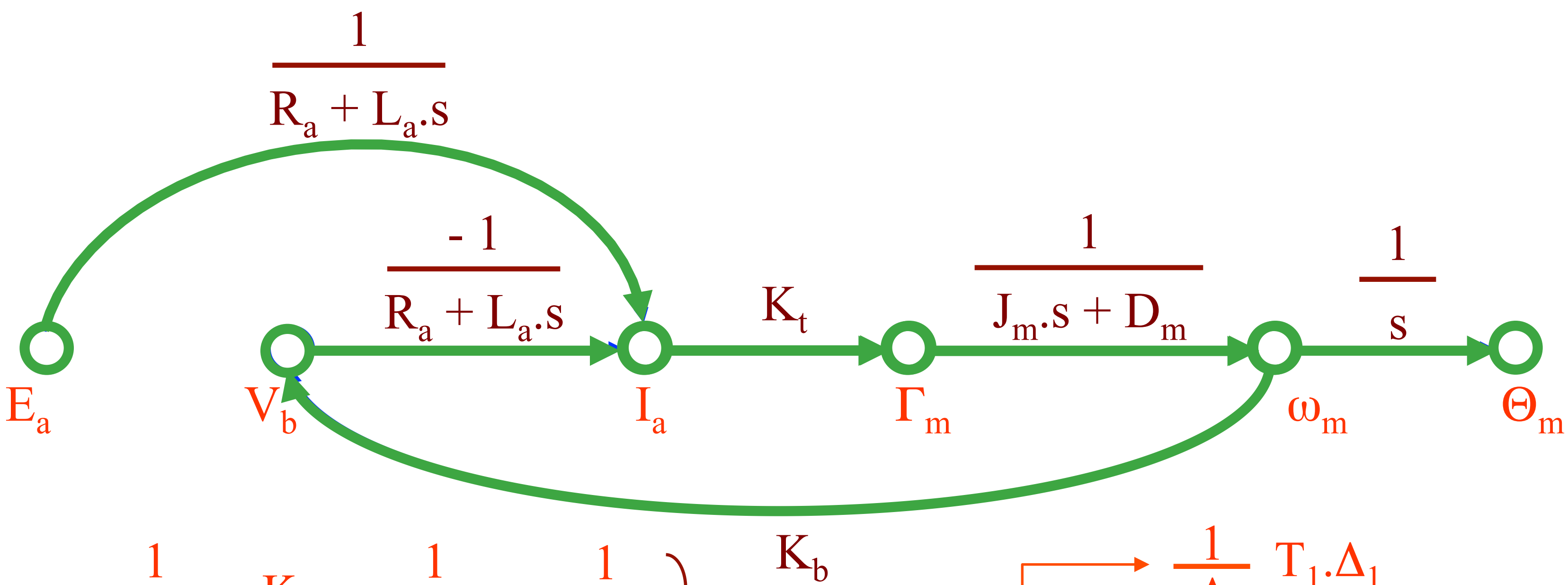
$$T_2 = a_{0,1}a_{1,6}a_{6,7}a_{7,8}a_{8,9}a_{9,10}$$

$$\Delta_2 = 1 - B_{1,2}$$

Jorge J. Feliu Batlle

Reducción de Sistemas

Simplificación del diagrama de flujo de un motor controlado por inducido



$$T_1 = \frac{1}{R_a + L_a.s} K_t \frac{1}{J_m.s + D_m} \frac{1}{s}$$

$$B_{11} = \frac{-1}{R_a + L_a.s} K_t \frac{1}{J_m.s + D_m} K_b$$

$$\Delta = 1 - B_{11} \Rightarrow \Delta_1 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{Q_m(t)}{E_a(s)} = \frac{1}{\Delta} T_1.\Delta_1 = \frac{K_t/(R_a.J_m)}{s\left[s + \frac{1}{J_m}\left(D_m + \frac{K_t.K_b}{R_a}\right)\right]}$$