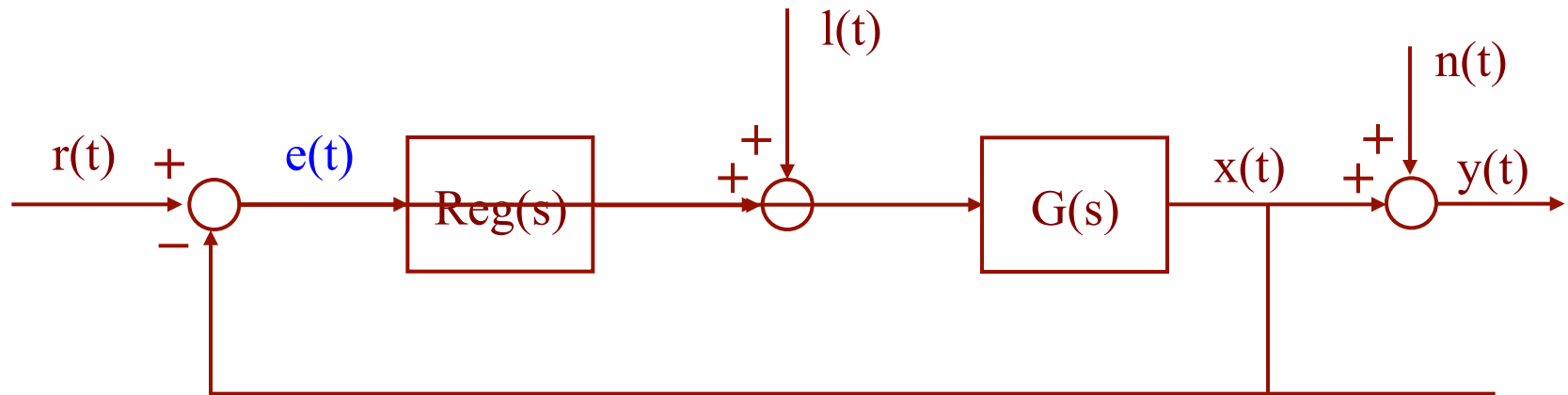


# Reguladores y Redes de Compensación



$l(t)$ : perturbación de carga

$n(t)$ : perturbación en la medida

$$R(s) = K \frac{\prod (s + z_i)}{\prod (s + p_i)}$$

- Reguladores sencillos
- Seguir la señal de referencia asignada:  $r(t)$
- Eliminar las posibles perturbaciones:  $l(t)$

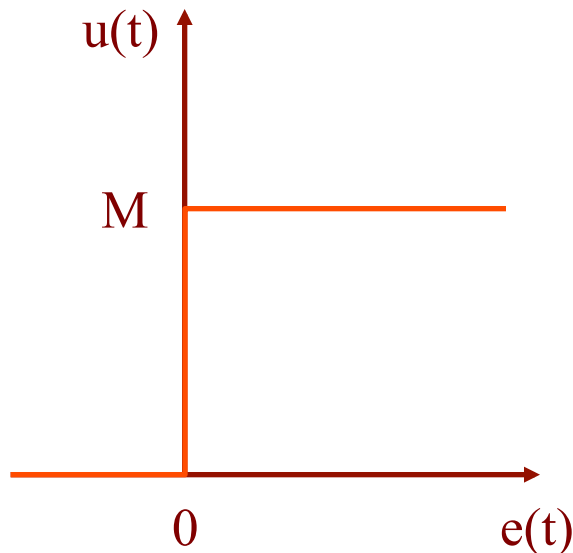
# Reguladores y Redes de Compensación

## Control on-off (todo o nada)

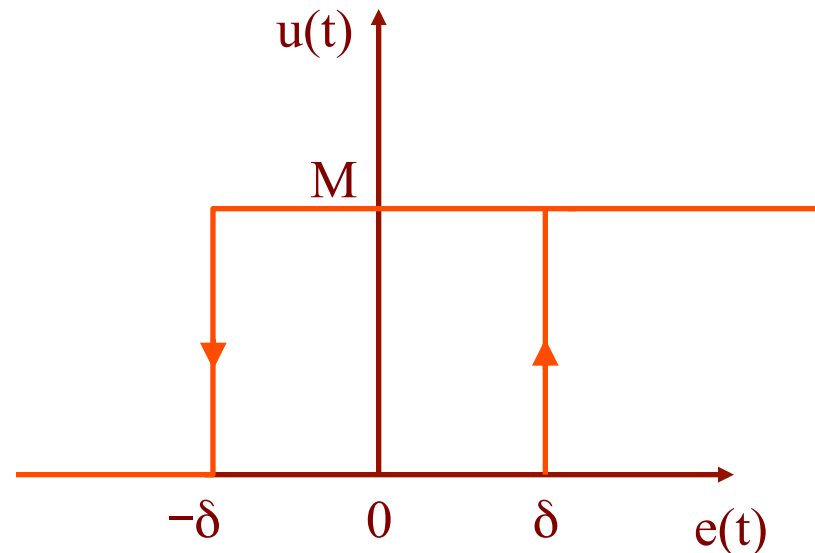
Es la forma más sencilla de controlar

Eficiente para señales de evolución lenta

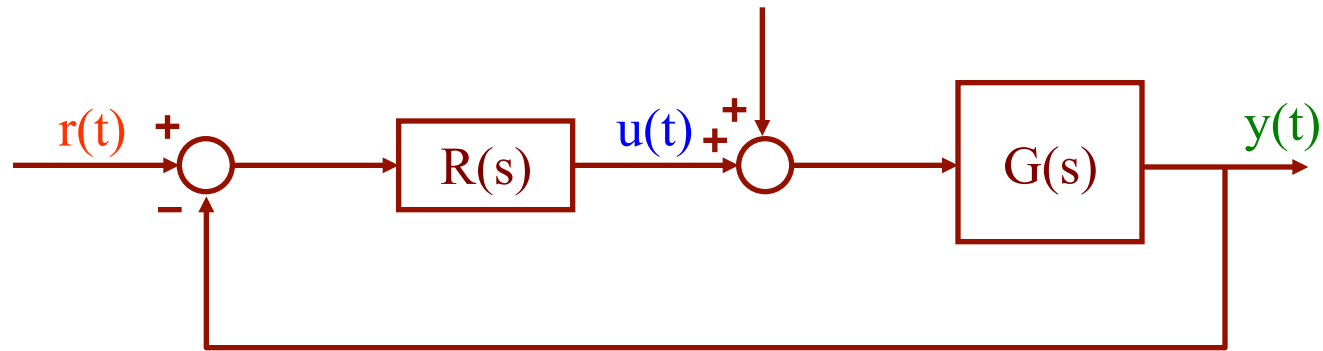
### Sin histéresis



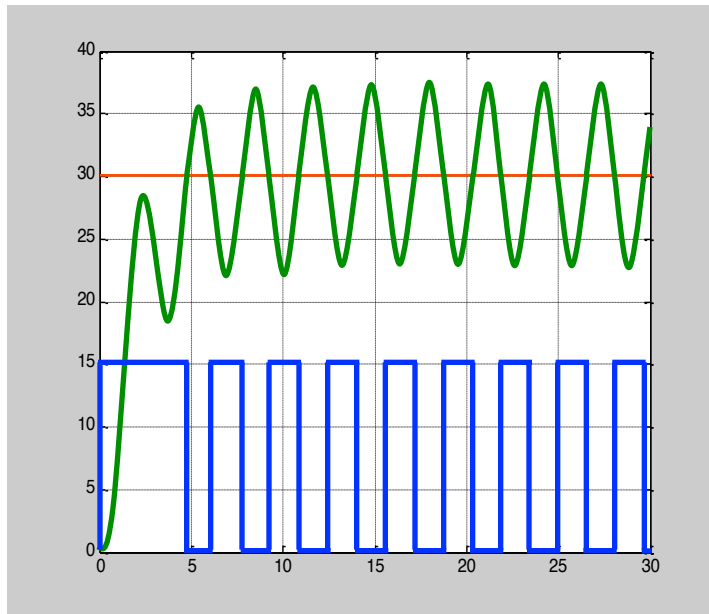
### Con histéresis



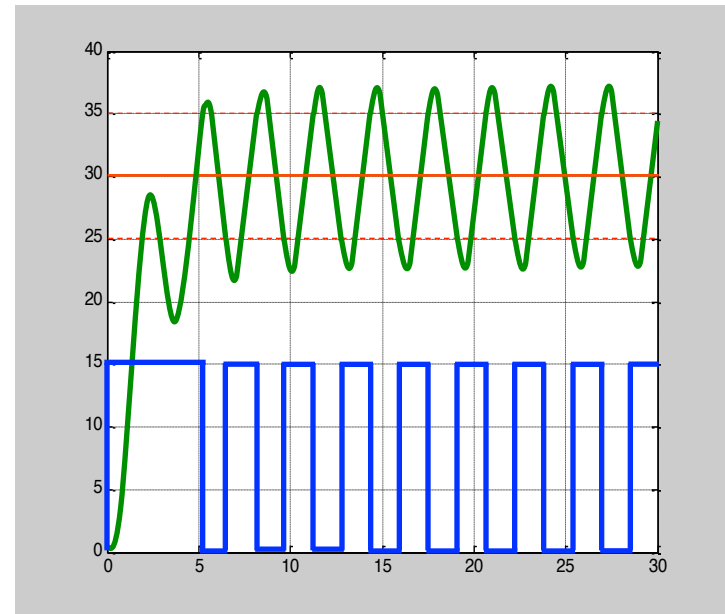
# Reguladores y Redes de Compensación



Sin histéresis ( $M = 15$ )



Con histéresis: ( $M = 15; \delta = 5$ )



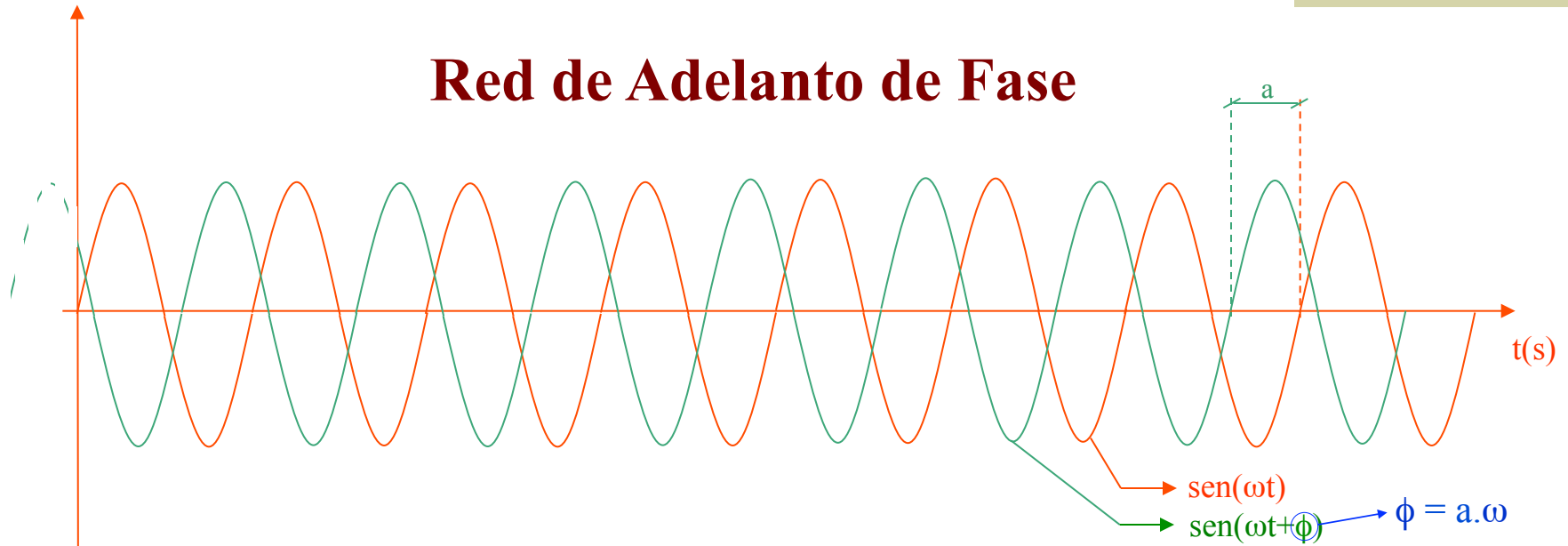
# Reguladores y Redes de Compensación

## Redes de Adelanto y/o Atraso de Fase

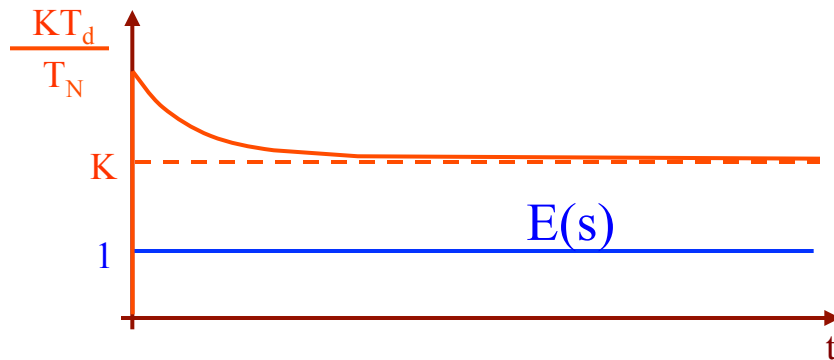
- ✓ Son dispositivos físicos (eléctricos, mecánicos, ...) que actúan como compensadores
- ✓ Dan lugar a funciones de transferencia físicamente realizables
- ✓ Se diseñan según un conjunto de especificaciones:
  - Régimen transitorio:  $t_r$ ,  $t_s$ ,  $t_p$ ,  $M_p$ ,  $\omega_n$ ,  $\omega_d$ ,  $\xi$ , ...
  - Régimen permanente (precisión):  $e_p$ ,  $e_v$ ,  $e_a$
- ✓ Una Red de Adelanto es aquella que ante una señal senoidal de entrada da como salida otra señal senoidal de igual frecuencia y fase adelantada. Se usa para el ajuste del régimen transitorio.
- ✓ Una Red de Atraso es aquella que ante una señal senoidal de entrada da como salida otra señal senoidal de igual frecuencia y fase atrasada. Se usa para el ajuste del error en régimen permanente.

# Reguladores y Redes de Compensación

## Red de Adelanto de Fase



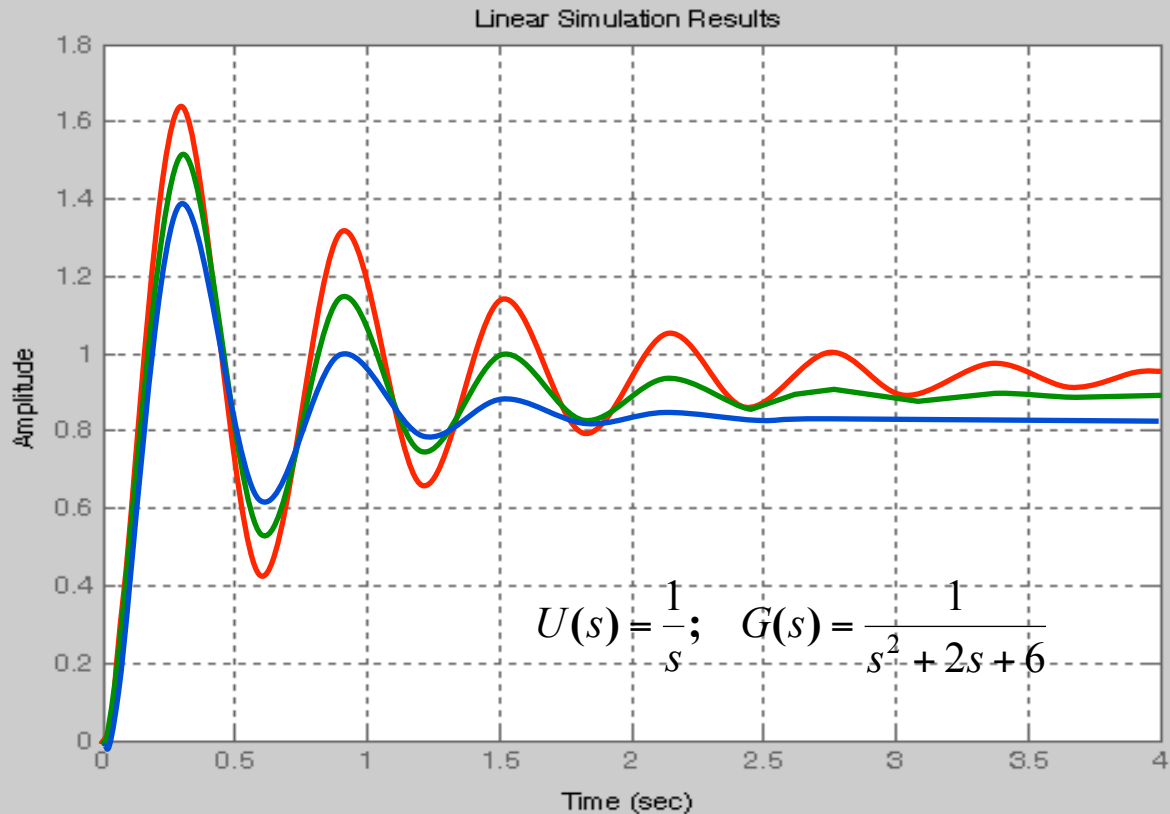
Red de Adelanto de Fase  $\Rightarrow R(s) = K \frac{1 + T_d s}{1 + T_N s} \quad (T_d > T_N) \Rightarrow$



$\Rightarrow R(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad (0 < \alpha < 1)$

# Reguladores y Redes de Compensación

## Red de Adelanto de Fase



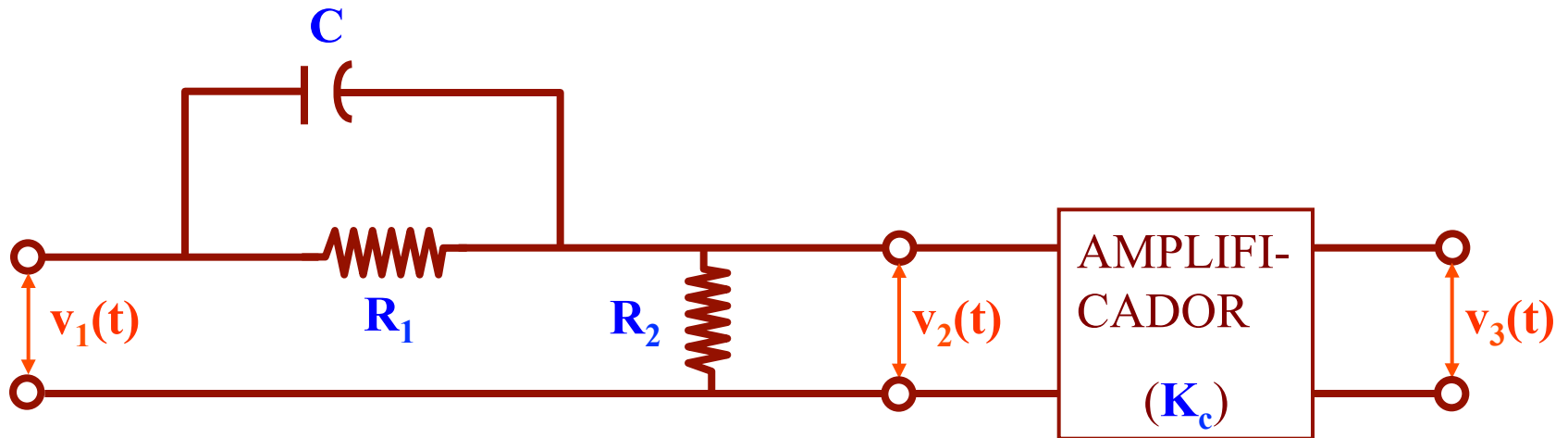
$$R(s) = 100$$

$$R(s) = 100 \frac{s + 1}{s + \frac{1}{0.5}}$$

$$R(s) = 100 \frac{s + 1}{s + \frac{1}{0.3}}$$

# Reguladores y Redes de Compensación

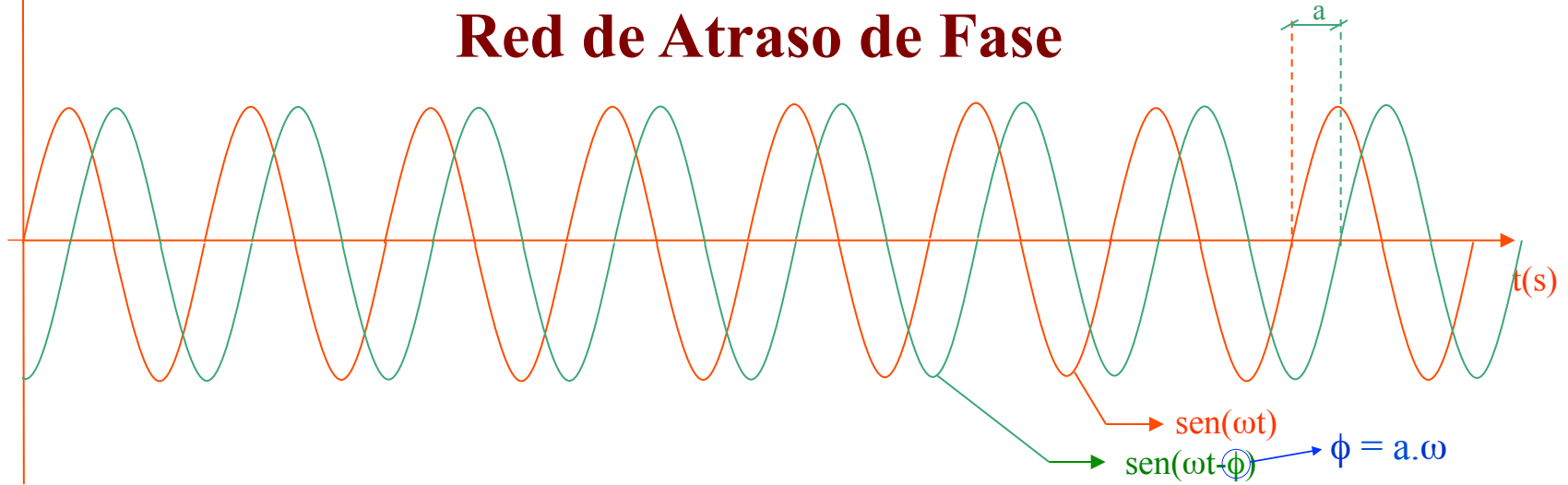
## Red de Adelanto de Fase



$$G_c(s) = \frac{V_3(s)}{V_1(s)} = K_c \frac{s + \frac{1}{R_1 C}}{s + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}}$$

# Reguladores y Redes de Compensación

## Red de Atraso de Fase



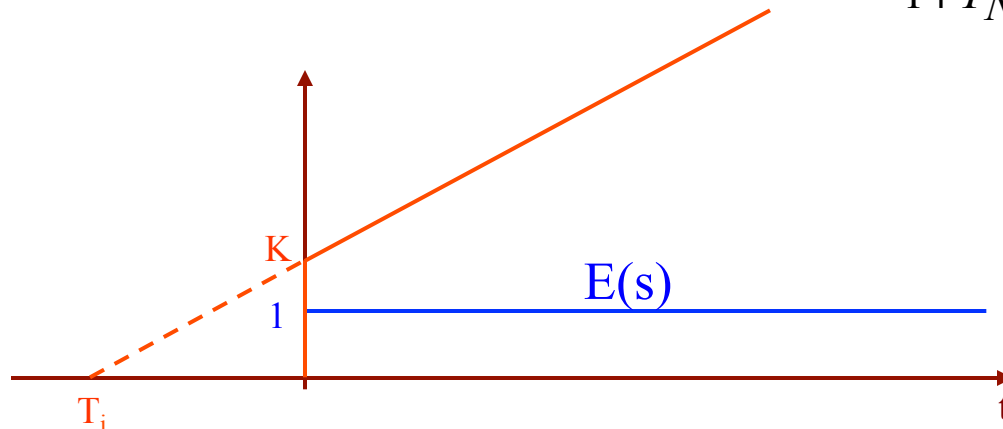
Red de Atraso de Fase



$$R(s) = K \frac{1 + T_i s}{1 + T_N s} \quad (T_i \gg T_N)$$



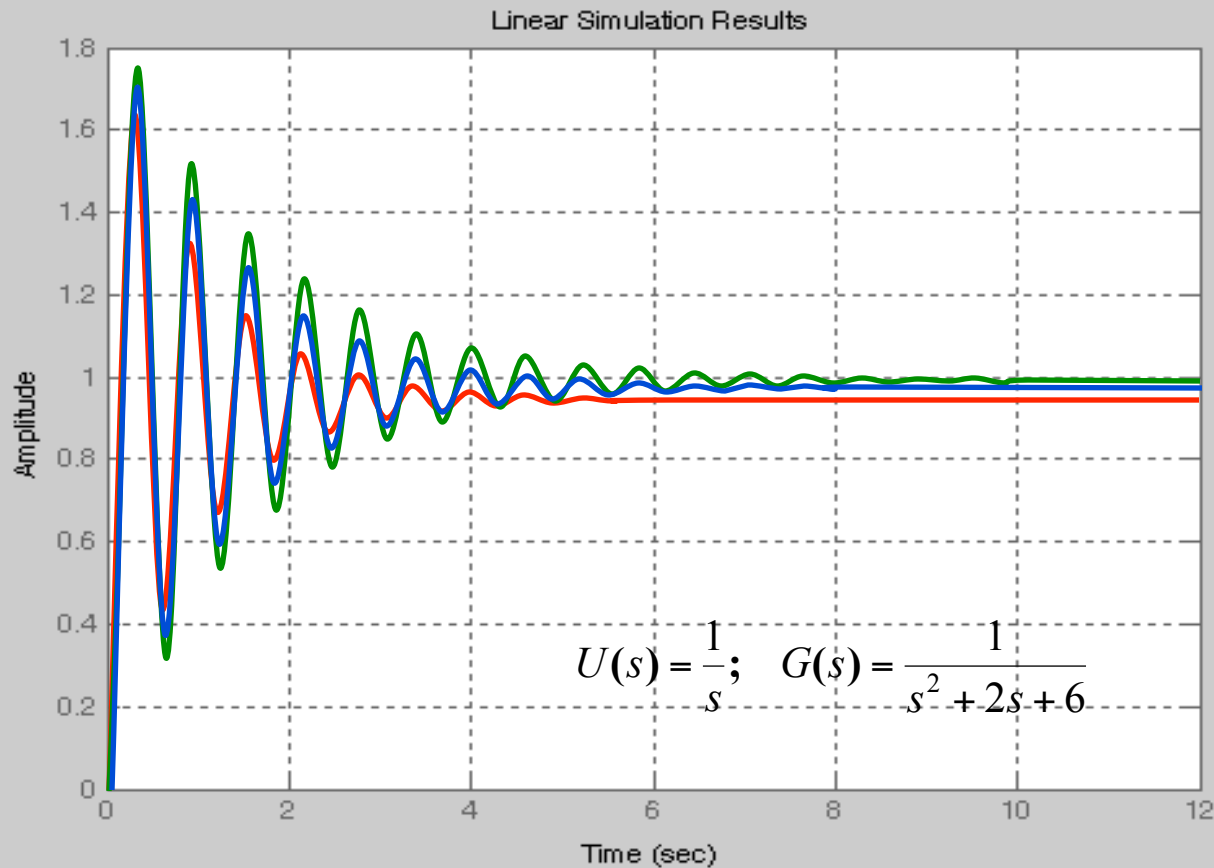
$$R(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \quad (\beta > 1)$$





# Reguladores y Redes de Compensación

## Red de Atraso de Fase



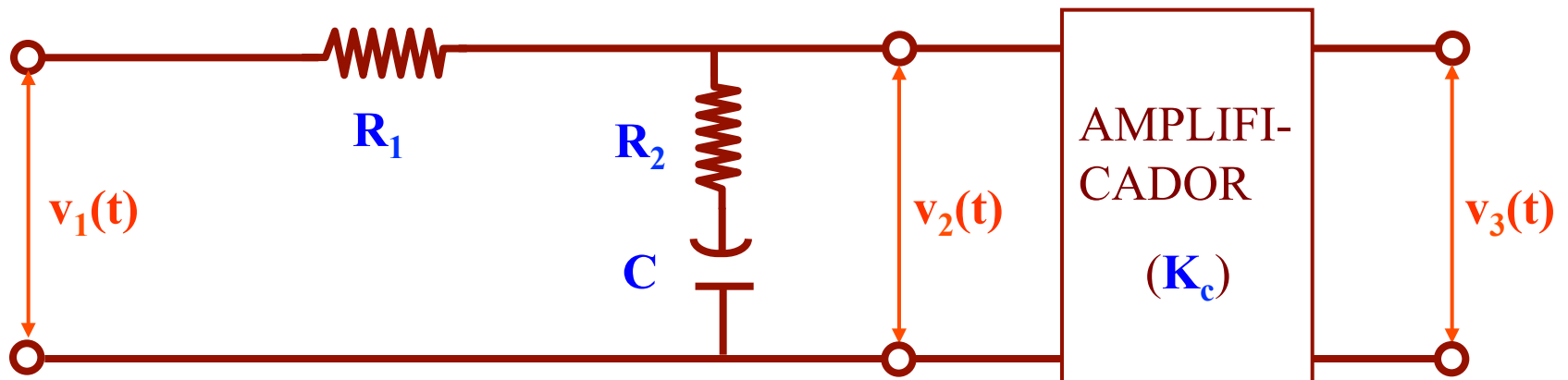
$$R(s) = 100$$

$$R(s) = 100 \frac{s + 1}{s + \frac{1}{2}}$$

$$R(s) = 100 \frac{s + 1}{s + \frac{1}{5}}$$

# Reguladores y Redes de Compensación

## Red de Atraso de Fase



$$G_c(s) = \frac{V_3(s)}{V_1(s)} = K_c \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{s + \frac{1}{R_2 C}}{s + \frac{1}{(R_1 + R_2)C}}$$

# Reguladores y Redes de Compensación

## Red de Atraso-Adelanto de Fase

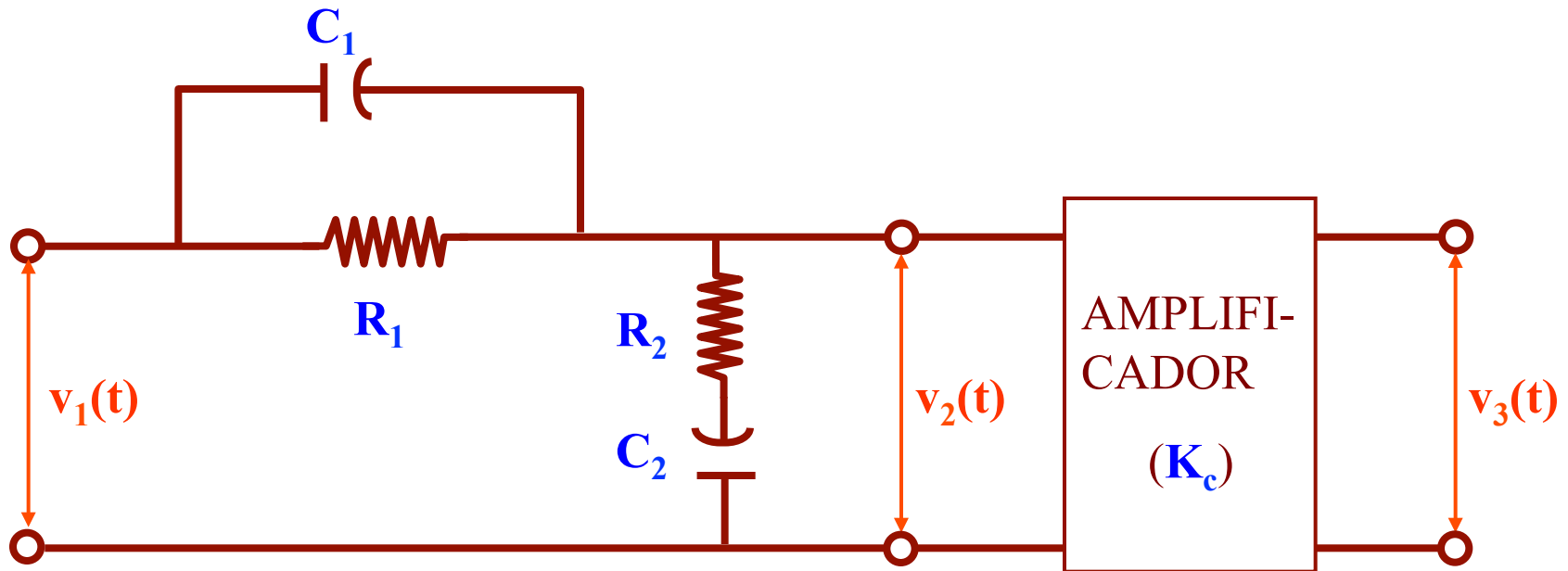
Compromiso entre régimen transitorio y permanente

### Red de Atraso-Adelanto de Fase

$$R(s) = K_c \underbrace{\left( \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{1}{\alpha T_1}} \right)}_{\substack{\times \quad \circ}} \underbrace{\left( \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right)}_{\substack{\circ \quad \times}} \quad (\alpha < 1, \beta > 1)$$

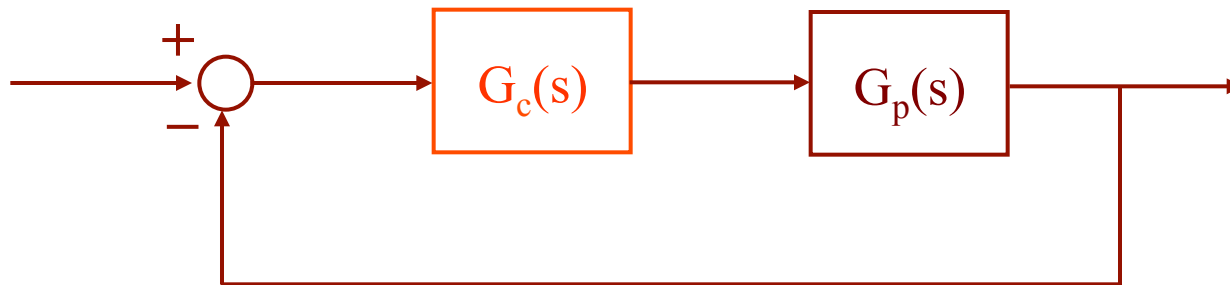
# Reguladores y Redes de Compensación

## Red de Atraso-Adelanto de Fase



$$G_c(s) = \frac{V_3(s)}{V_1(s)} = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{R_1 C_1}\right) \left(s + \frac{1}{R_2 C_2}\right)}{s^2 + \frac{R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2}{R_1 R_2 C_1 C_2} s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

# Diseño de Reguladores (Lugar de las Raíces)



- 1) Situar los polos para cumplir el régimen transitorio:  $M_p$ ,  $t_p$ ,  $t_s$ ,  $t_r$ , ...
- 2) Dibujar el  $\mathcal{L.R.}$  y ver si pasa por los puntos especificados
- 3) Si pasa  $\Rightarrow G_c(s) = K_c \Rightarrow$  Criterio del módulo
- 4) Si no pasa  $\Rightarrow$  PD o Red de Adelanto de Fase

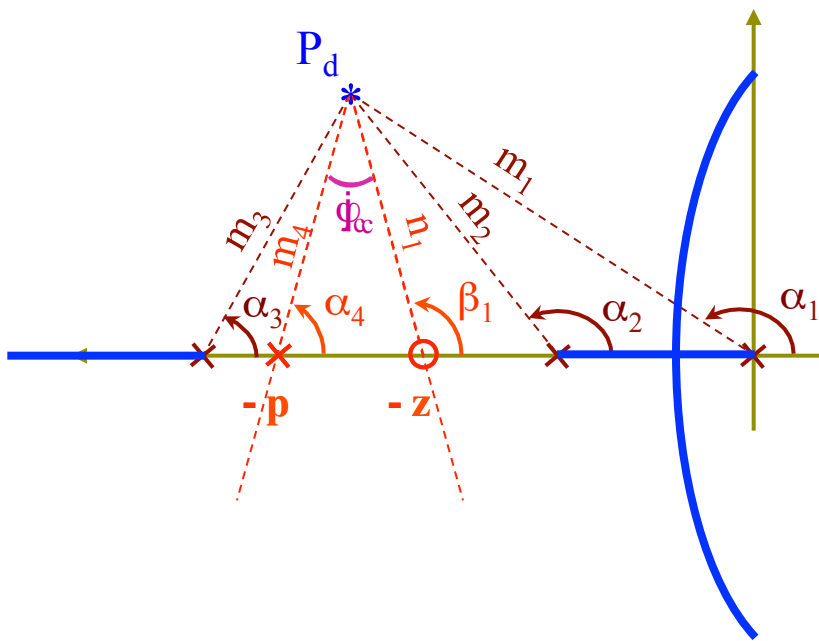
$$G_c(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad (0 < \alpha < 1) \Rightarrow G_c(s) = K_c \frac{s + z}{s + p}$$

# Diseño de Reguladores (Lugar de las Raíces)

4) Diseño de la Red de Adelanto de Fase  $\Rightarrow G_c(s) = K_c \frac{s+z}{s+p}$

El cero y el polo con el criterio del argumento

La ganancia con el criterio del módulo



$$\sum_1^m \theta_z - \sum_1^n \theta_p = (2q+1)\pi \Rightarrow$$

$$\beta_1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = \pi$$

$$\beta_1 - \alpha_4 = \pi + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

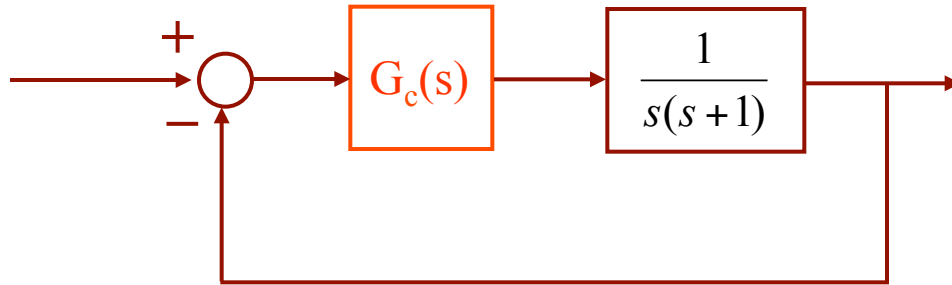
$\varphi_c$

$\infty$  soluciones

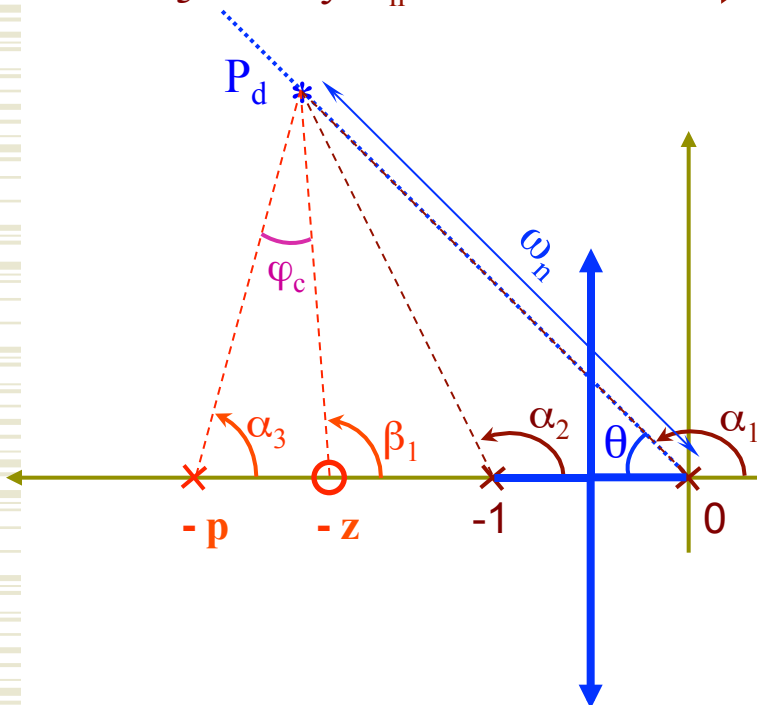
$$K_c = \frac{m_1 m_2 m_3 m_4}{n_1}$$

# Diseño de Reguladores (Lugar de las Raíces)

Ejemplo:



Datos:  $\xi = 0.7$  y  $\omega_n = 2 \text{ rad/s}$   $\Rightarrow \xi = \cos(\theta) \Rightarrow \theta \approx \pi/4 = 45^\circ$



$$P_d = -2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)j = -1.414 + 1.414j$$

$$\alpha_1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad} = 135^\circ$$

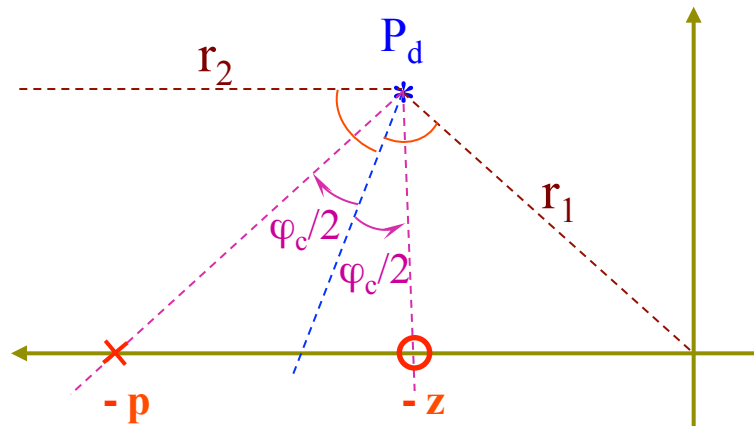
$$\alpha_2 = \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{1.414}{1.414 - 1}\right) = 1.85 \text{ rad} = 106^\circ$$

$$\varphi_c = \pi + \alpha_1 + \alpha_2 = 7.35 \text{ rad} = 421^\circ = 61^\circ$$

# Diseño de Reguladores (Lugar de las Raíces)

## Métodos para situar el cero y el polo del regulador

- Situar el cero del regulador coincidente con el 2º polo más significativo (el que está más cerca del eje imaginario) de  $G_p(s)$ .
- Situar el cero del regulador en el punto de corte de la vertical que pasa por el polo dominante  $P_d$  y el eje real. Si existiese un polo real de  $G_p(s)$  cerca del punto de corte se sitúa el cero a la izquierda de éste.
- Situar el cero y el polo del regulador de la siguiente manera:

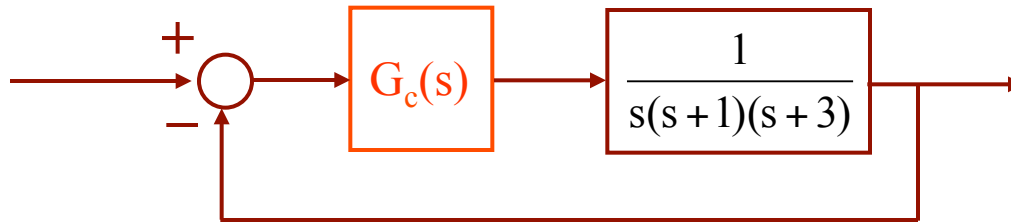


Se obtiene el regulador con **a** máxima

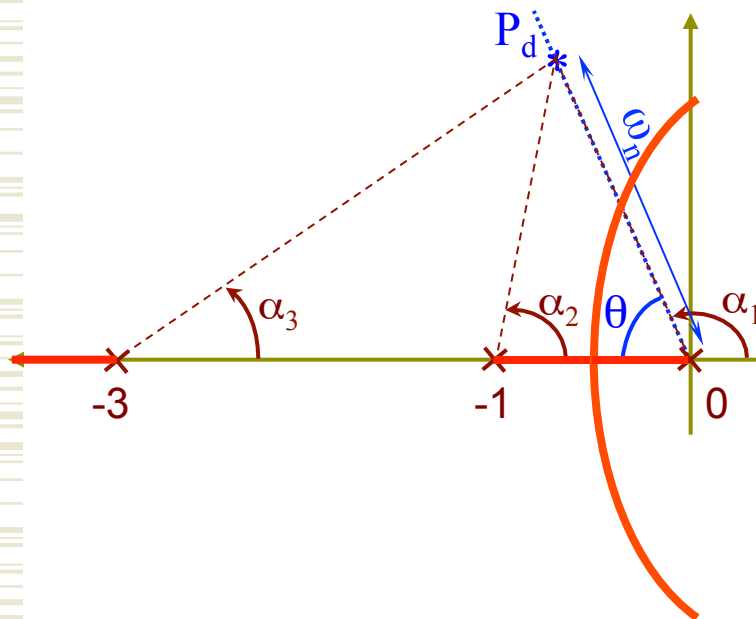


# Diseño de Reguladores (Lugar de las Raíces)

Ejemplo:



Datos:  $\xi = 0'4$  y  $\omega_n = 1'4$  rad/s  $\longrightarrow \xi = \cos(\theta) \longrightarrow \theta \approx 1'16$  rad =  $66'5^\circ$



$$P_d = -1'4 \cos(1'16) + 1'4 \operatorname{sen}(1'16)j = -0'56 + 1'3j$$

$$\alpha_1 = \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{1'3}{0'56}\right) = 1'97 \text{ rad} = 113'3^\circ$$

$$\alpha_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{1'3}{1 - 0'56}\right) = 1'24 \text{ rad} = 71'3^\circ$$

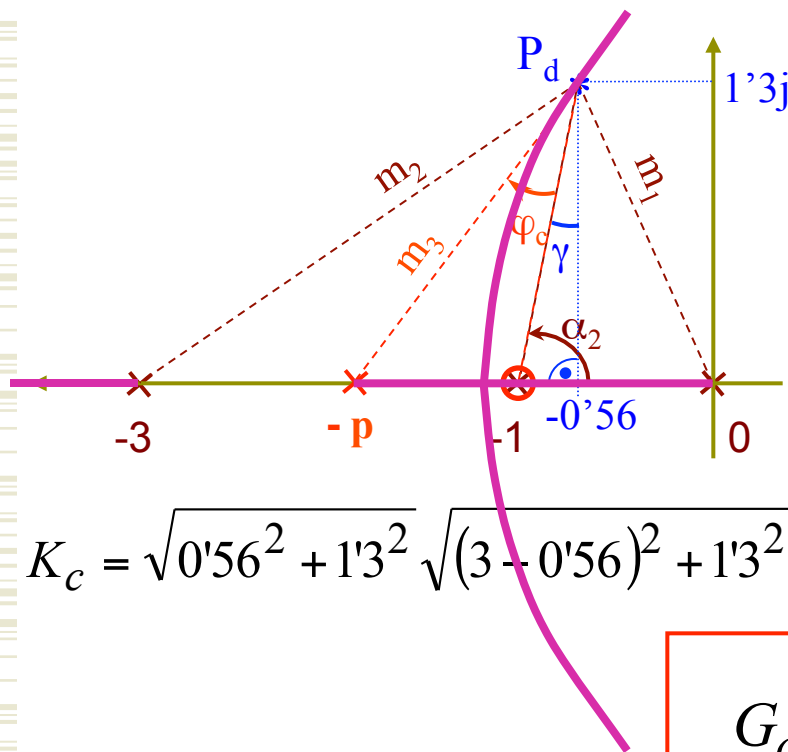
$$\alpha_3 = \operatorname{arctg}\left(\frac{1'3}{3 - 0'56}\right) = 0'49 \text{ rad} = 28^\circ$$

$$\varphi_c = \pi + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 392'6^\circ = 32'6^\circ$$

# Diseño de Reguladores (Lugar de las Raíces)

## Primer método para situar el cero y el polo del regulador

Situar el cero del regulador coincidente con el 2º polo más significativo (el que está más cerca del eje imaginario) de  $G_p(s)$ .



$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(\varphi_c + \gamma) &= \frac{p - 0'56}{1'3} \\ \gamma &= 180^\circ - 90^\circ - \alpha_2 = 18'7^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{p = 2'2}$$

$$\Rightarrow G_c(s) = K_c \frac{s + 1}{s + 2'2}$$

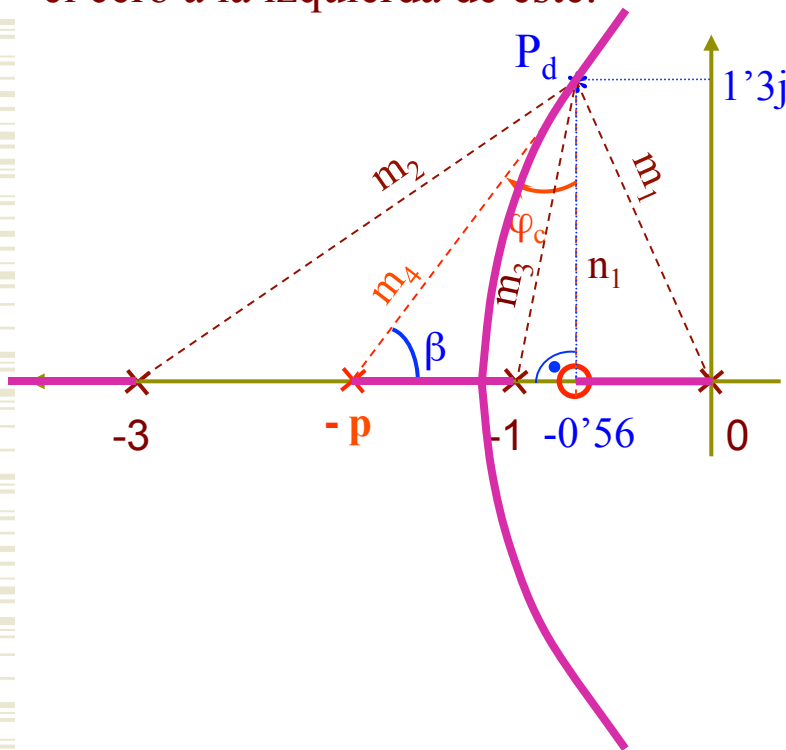
$$K_c = \sqrt{0'56^2 + 1'3^2} \sqrt{(3 - 0'56)^2 + 1'3^2} \sqrt{(2'2 - 0'56)^2 + 1'3^2} \Rightarrow \boxed{K_c = 8'2} \Rightarrow$$

$$\boxed{G_c(s) = 8'2 \frac{s + 1}{s + 2'2}}$$

# Diseño de Reguladores (Lugar de las Raíces)

## Segundo método para situar el cero y el polo del regulador

Situar el cero del regulador en el punto de corte de la vertical que pasa por el polo dominante  $P_d$  y el eje real. Si existiese un polo real de  $G_p(s)$  cerca del punto de corte se sitúa el cero a la izquierda de éste.



$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{1.3}{p - 0.56}$$

$$\beta = 180^\circ - 90^\circ - \varphi_c \approx 57^\circ$$

$$p = 1.4$$

$$G_c(s) = K_c \frac{s + 0.56}{s + 1.4}$$

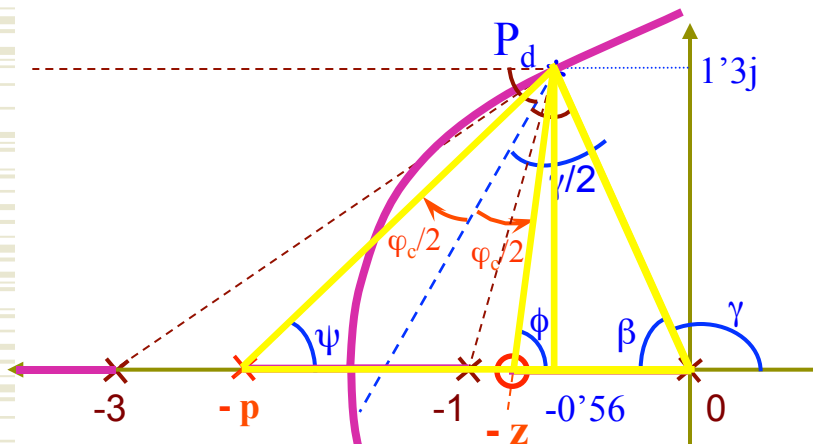
$$K_c = \frac{m_1 m_2 m_3 m_4}{n_1}$$

$$K_c = 6.4$$

$$G_c(s) = 6.4 \frac{s + 0.56}{s + 1.4}$$

# Diseño de Reguladores (Lugar de las Raíces)

## Tercer método para situar el cero y el polo del regulador



$$\beta = \arctg\left(\frac{1.3}{0.56}\right) = 66.7^\circ \quad \Rightarrow \quad \gamma = 180 - \beta = 113.3^\circ$$

$$\phi = 180 - \beta - \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\phi_c}{2}\right) = 73^\circ \quad \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}(\phi) = \frac{1.3}{z - 0.56} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = 0.96}$$

$$\psi = 180 - \beta - \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\phi_c}{2}\right) = 40.3^\circ \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}(\psi) = \frac{1.3}{p - 0.56} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = 2.1}$$

$$\Rightarrow G_c(s) = K_c \frac{s + 0.96}{s + 2.1}$$

$$K_c = \frac{m_1 m_2 m_3 m_4}{n_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_c = 7.9}$$

$$\boxed{G_c(s) = 7.9 \frac{s + 0.96}{s + 2.1}}$$

# Diseño de Reguladores (Lugar de las Raíces)

5) Si se cumple el transitorio pero no el permanente

→ PI o Red de Atraso de Fase:  $G_c(s) = K_c \frac{s+z}{s+p}$

$\frac{1}{T}$

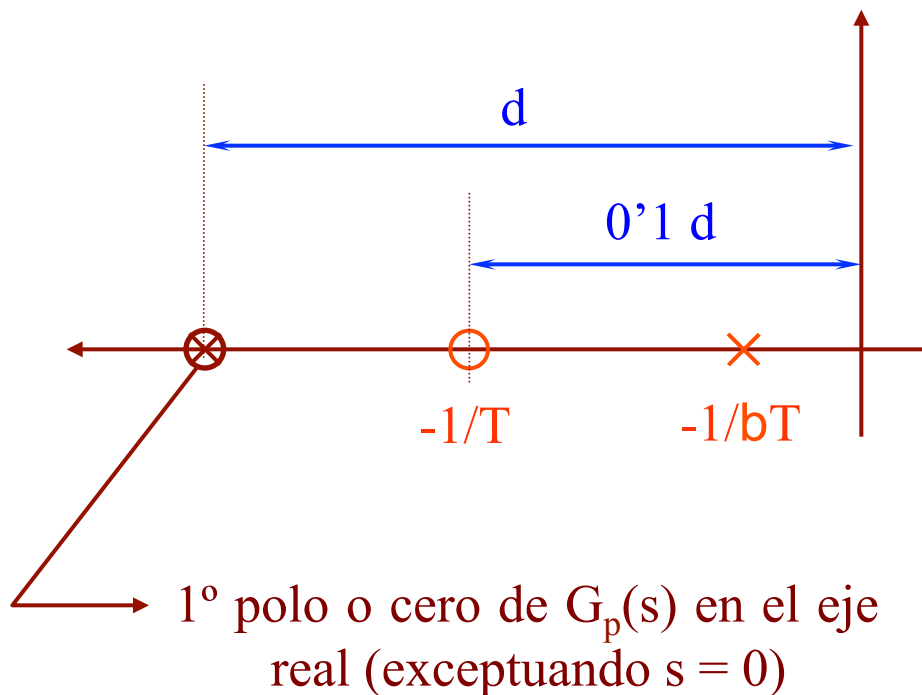
$\frac{1}{\beta T} \quad (\beta > 1)$

$G_c(s) = K_c \frac{s+z}{s}$

- Colocar el polo en el origen o muy cerca de él para ajustar el error permitido.
- El cero muy cerca del polo para que el transitorio no cambie demasiado

# Diseño de Reguladores (Lugar de las Raíces)

## Primer método para situar el cero y el polo del regulador

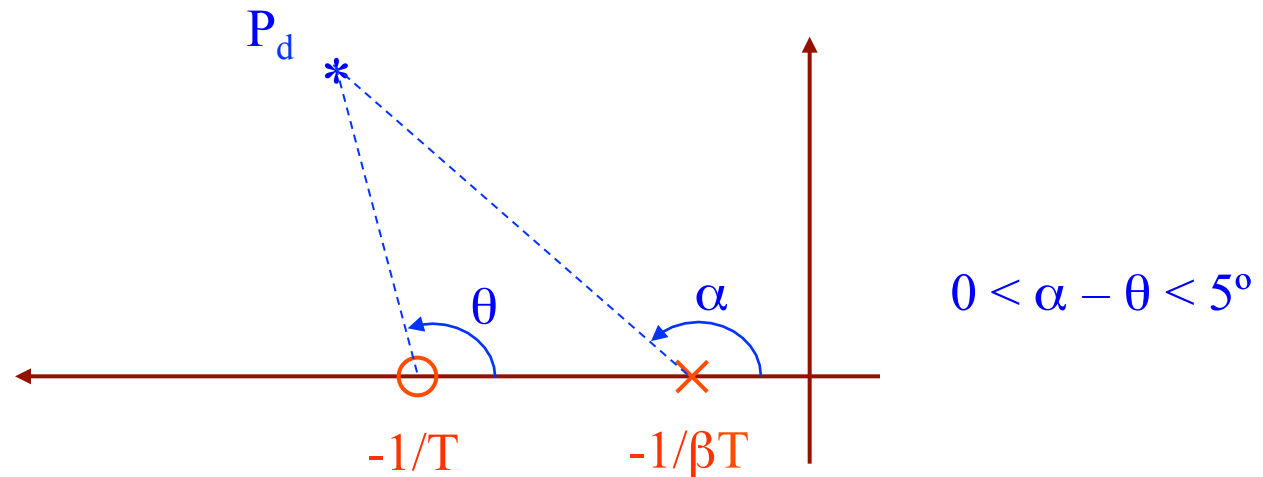


$\beta$  se relaciona con el aumento de ganancia necesario para ajustar el error en régimen permanente

# Diseño de Reguladores (Lugar de las Raíces)

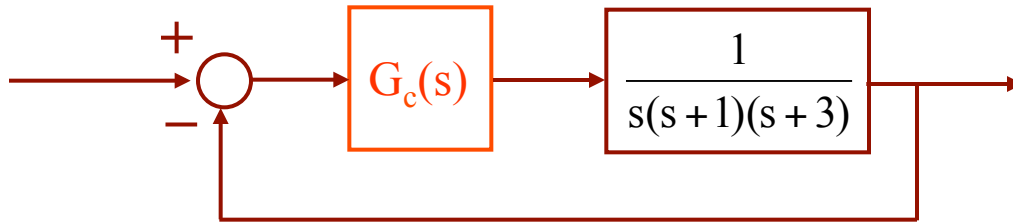
## Segundo método para situar el cero y el polo del regulador

Situarse el polo y el cero del compensador cerca del origen de forma que la diferencia entre el ángulo del polo y el del cero, al unirlos con  $P_d$ , sea menor que  $5^\circ$ .

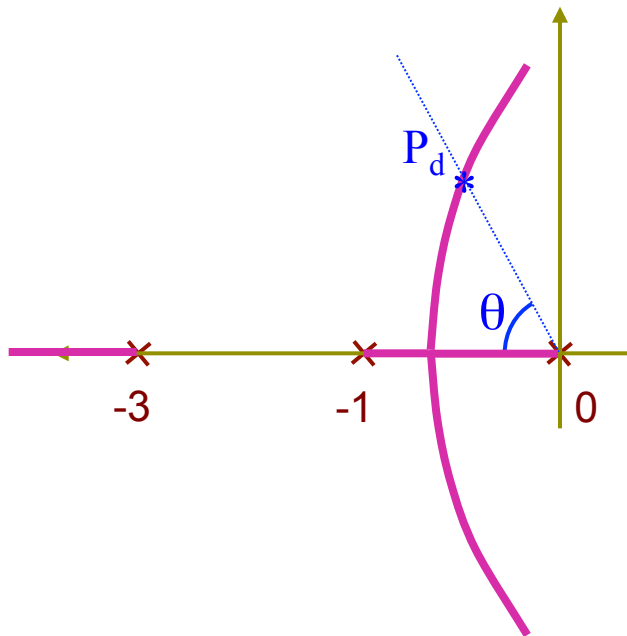


# Diseño de Reguladores (Lugar de las Raíces)

Ejemplo:



Datos:  $\xi = 0'4$  y  $e_v \leq 0'4$  s  $\Rightarrow \xi = \cos(\theta) \Rightarrow \theta \approx 1'05$  rad =  $60^\circ$



$\Rightarrow P_d = -0'37 + 0'64j \Rightarrow G_c(s) = K = 1'81$

Cálculo del error:

$$e_v = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1'81}{s(s+1)(s+3)}} \Rightarrow e_v = 1'65 > 0'4 \text{ s}$$

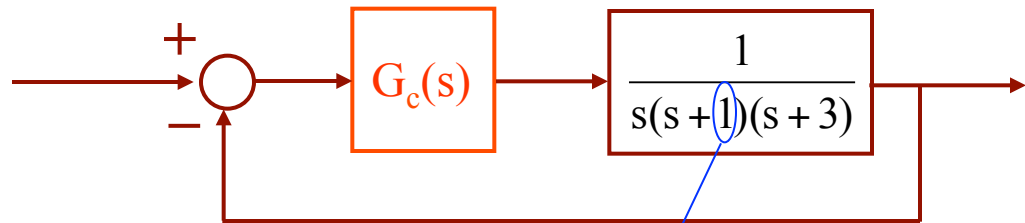
No cumple

Red de Atraso de fase:  $G_c(s) = K_c \frac{s+z}{s+p}$



# Diseño de Reguladores (Lugar de las Raíces)

Primer método:



Cálculo de  $\beta$ :

$$e_v \leq 0'4 \text{ s} \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s(s+1)(s+3)} \frac{s+1/T}{s+1/\beta T} \leq 0'4 \Rightarrow \beta \geq 4'1 \Rightarrow \beta = 5$$

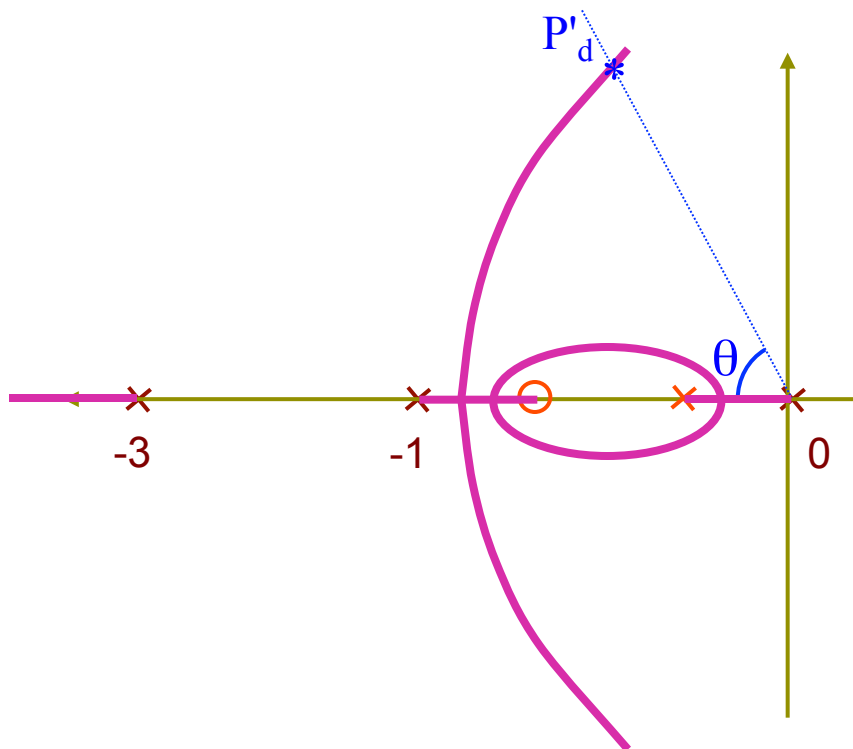
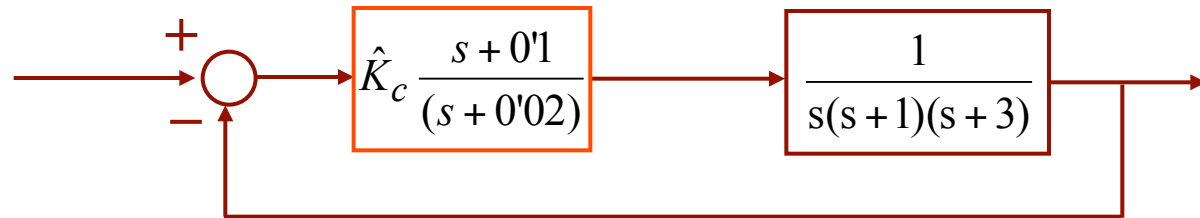
El cero se sitúa en  $z = 0'1$  (d)  $\Rightarrow z = 1/T = 0'1 \Rightarrow T = 10$

1

$\Rightarrow p = 1/\beta T = 0'02 \Rightarrow G_c(s) = \hat{K}_c \frac{s + 0'1}{s + 0'02}$

# Diseño de Reguladores (Lugar de las Raíces)

Cálculo de  $\hat{K}_c$ :



$$P'_d = -0.34 + 0.58j \Rightarrow \hat{K}_c = 1.71$$

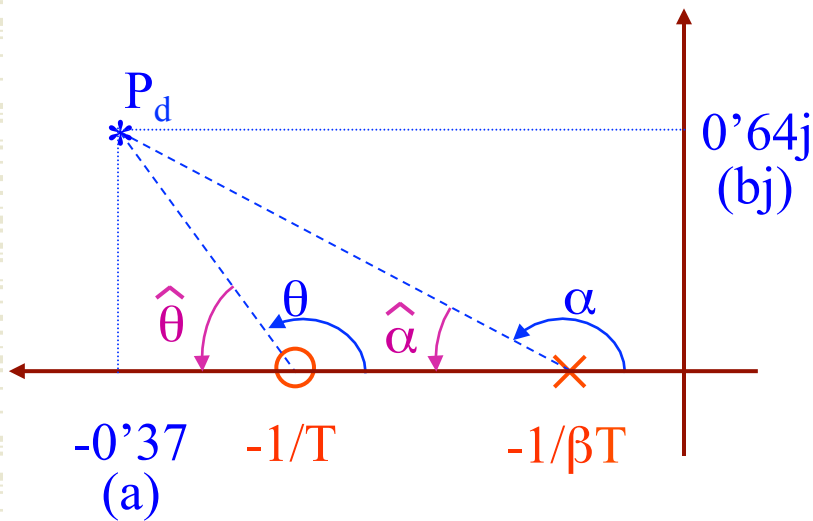
$$G_c(s) = 1.71 \frac{s + 0.1}{s + 0.02}$$

$$e_v = 0.35 < 0.4 \text{ s}$$

# Diseño de Reguladores (Lugar de las Raíces)

## Segundo método:

Cálculo de  $\beta$ :  $\Rightarrow$  Igual que antes  $\Rightarrow \beta \geq 4'1 \Rightarrow \beta = 5$



Por ejemplo  $\alpha - \theta = 4^\circ$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\alpha} &= 180 - \alpha \\ \hat{\theta} &= 180 - \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{\theta} - \hat{\alpha} = \alpha - \theta = 4 \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \text{tg}(\hat{\theta} - \hat{\alpha}) &= \frac{\text{tg}(\hat{\theta}) - \text{tg}(\hat{\alpha})}{1 + \text{tg}(\hat{\theta})\text{tg}(\hat{\alpha})} = \text{tg}(4^\circ) \\ \text{tg}(\hat{\theta}) &= \frac{b}{a - 1/T}; \quad \text{tg}(\hat{\alpha}) = \frac{b}{a - 1/\beta T} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$(a^2 + b^2)\beta T^2 - \left[ \frac{b(\beta - 1)}{\text{tg}(\hat{\theta} - \hat{\alpha})} + a(\beta + 1) \right] T + 1 = 0 \Rightarrow T = \begin{cases} 0'026 \\ 14'2 \end{cases}$$

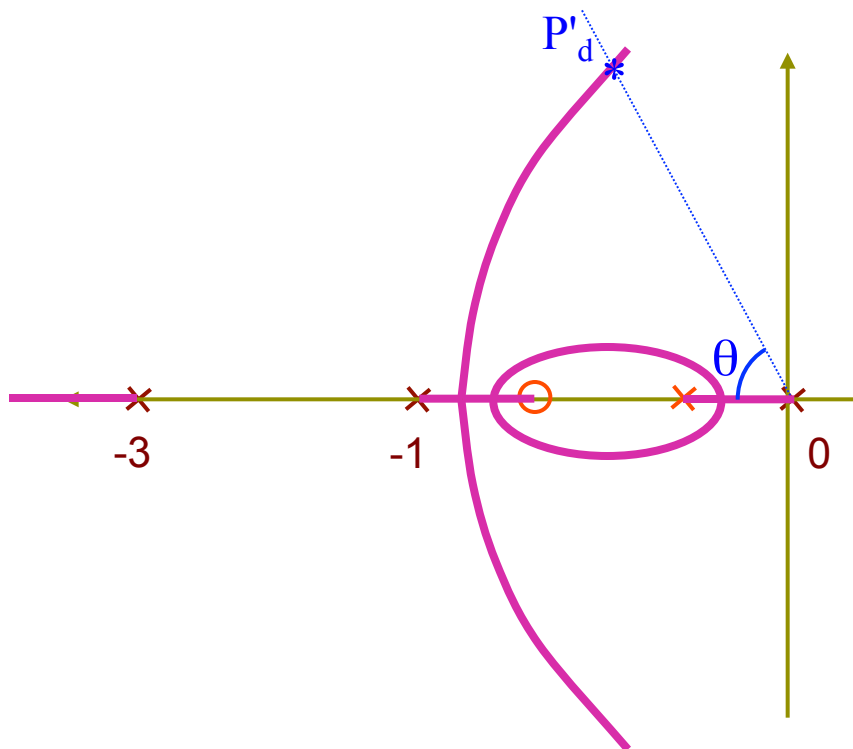
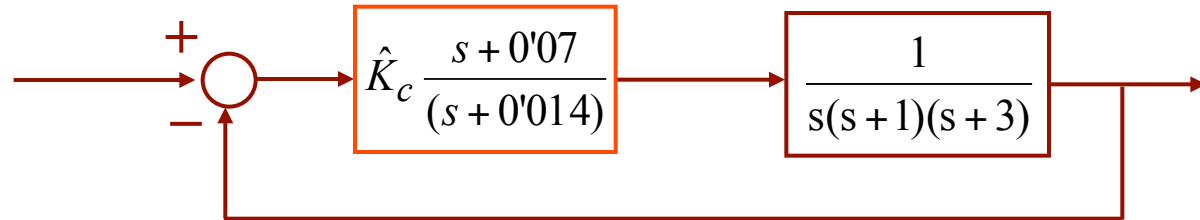
Polo y cero muy alejados

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 1/T = 0'07 \\ p = 1/\beta T = 0'014 \end{cases}$$

$$\Rightarrow G_c(s) = \hat{K}_c \frac{s + 0'07}{s + 0'014}$$

# Diseño de Reguladores (Lugar de las Raíces)

Cálculo de  $\hat{K}_c$ :



$$P'_d = -0.34 + 0.58j \Rightarrow \hat{K}_c = 1.71$$

$$G_c(s) = 1.71 \frac{s + 0.07}{s + 0.014}$$

$$e_v = 0.35 < 0.4 \text{ s}$$

# Reguladores y Redes de Compensación

## Reguladores PID

Son los más usados en toda clase de industrias ya que dan prestaciones suficientemente buenas para la mayoría de los sistemas de control

Pueden usarse de forma individual (*stand-alone*) o en control distribuido

Se usan en lazo cerrado

Eliminan los errores en el estacionario

Se anticipan al futuro con la acción derivativa

$$u = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(t) dt + k_d \frac{de(t)}{dt}$$



$$R(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right)$$

# Reguladores PID

<b>Acción de control (si aumentamos...)</b>	<b>Tiempo de subida</b>	<b>Sobrepico</b>	<b>Error estacionario</b>
$K_p$	Disminuye	Aumenta	Disminuye
$K_p/T_i$	Disminuye	Aumenta	Eliminado
$K_p * T_d$	Cambia poco	Disminuye	Cambia poco

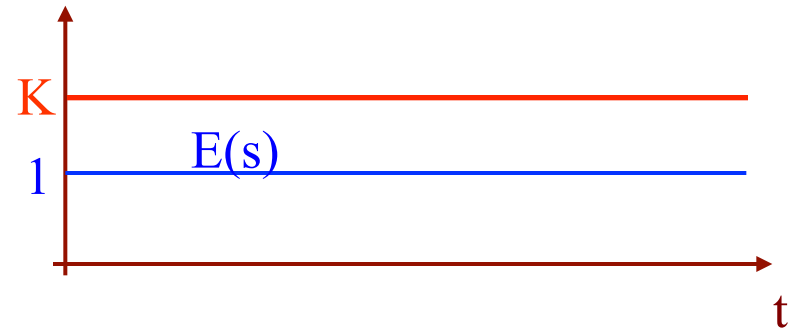
# Reguladores PID

## Reguladores de tipo P

Tipo P



$$R(s) = K_p$$

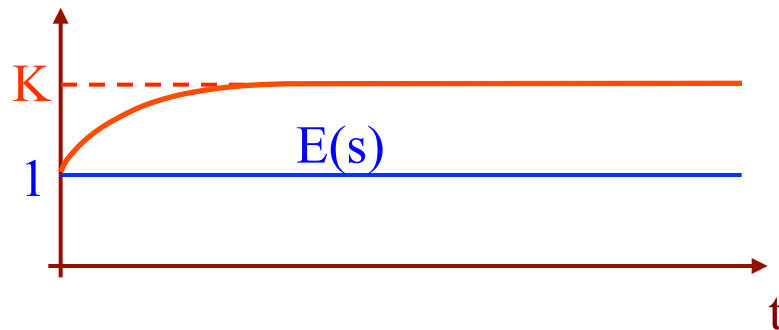


Compensación rápida pero poco precisa

Tipo P con filtrado

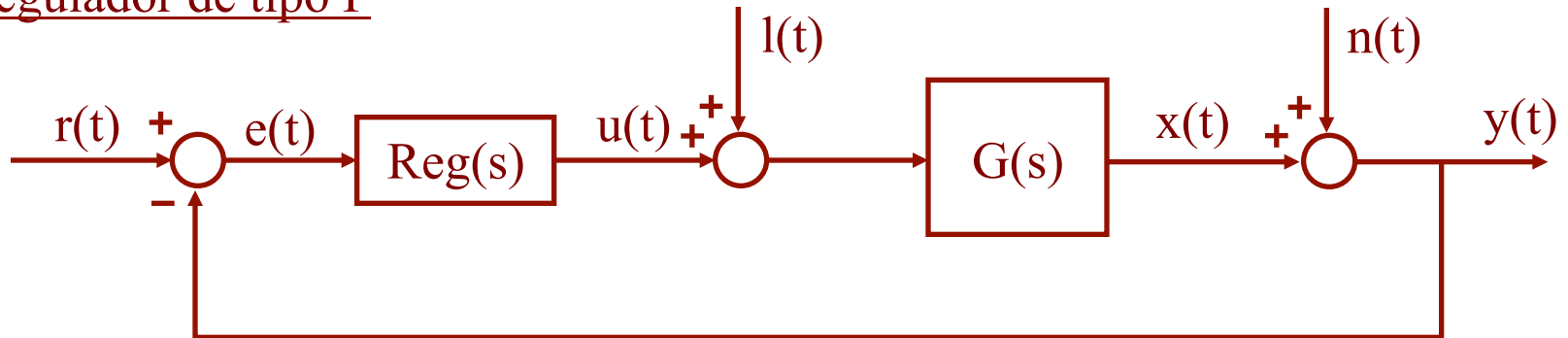


$$R(s) = \frac{K_p}{T_N s + 1}$$



# Reguladores PID

## Regulador de tipo P



$$u(t) = K_p \cdot e(t)$$

$$y = x + n$$

$$x = K_{\text{planta}} \cdot (u + l)$$

$$u = K_p \cdot (r - y)$$



$$x = \frac{K_p \cdot K_{\text{planta}}}{1 + K_p \cdot K_{\text{planta}}} (r - n) + \frac{K_p}{1 + K_p \cdot K_{\text{planta}}} l$$



Si  $K_p \cdot K_{\text{planta}}$  aumenta



$x(t)$  tiende a  $r(t)$

La influencia de  $l(t)$  disminuye

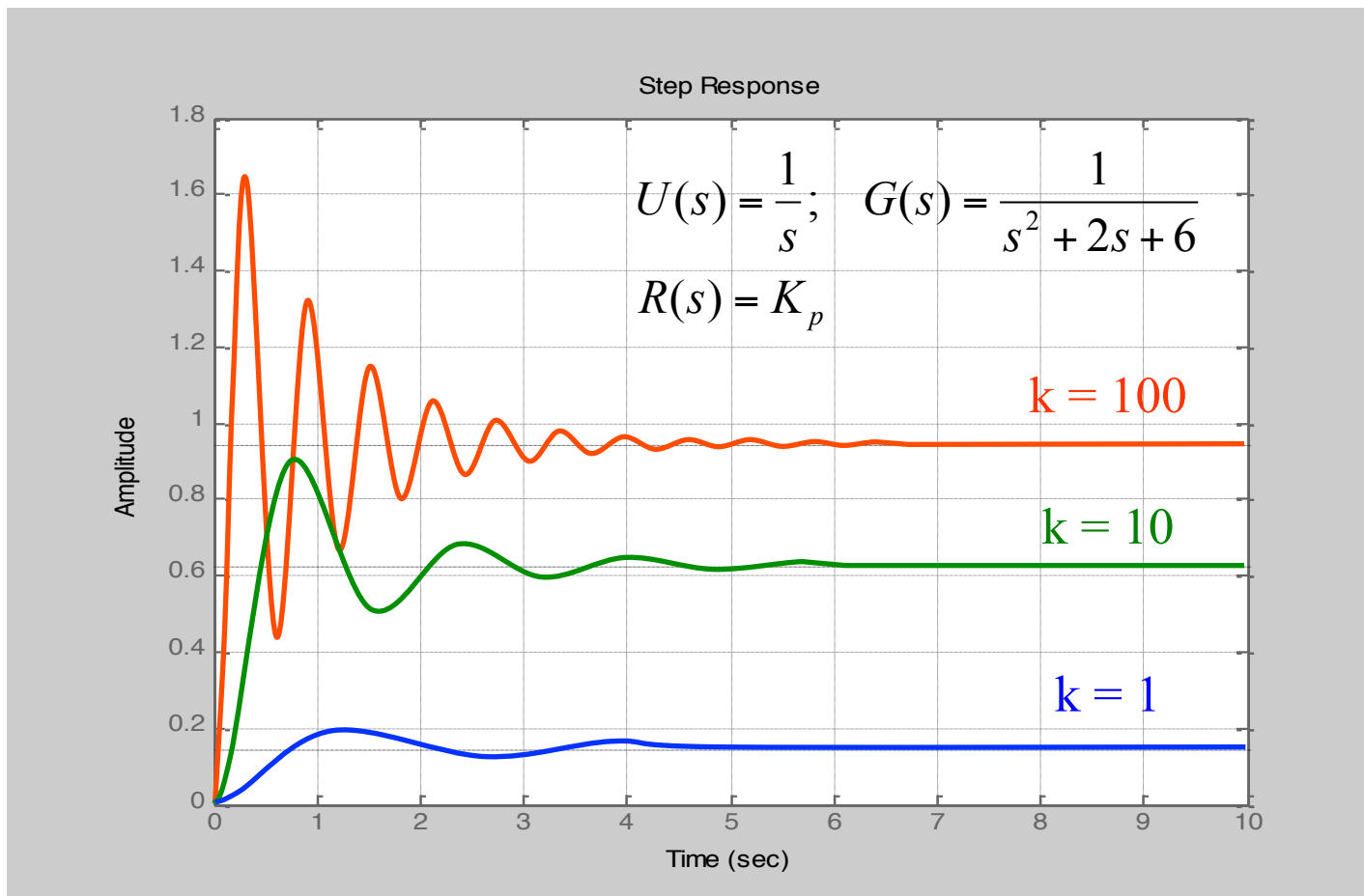
La influencia de  $n(t)$  aumenta

Se disminuye el error en estacionario



# Reguladores PID

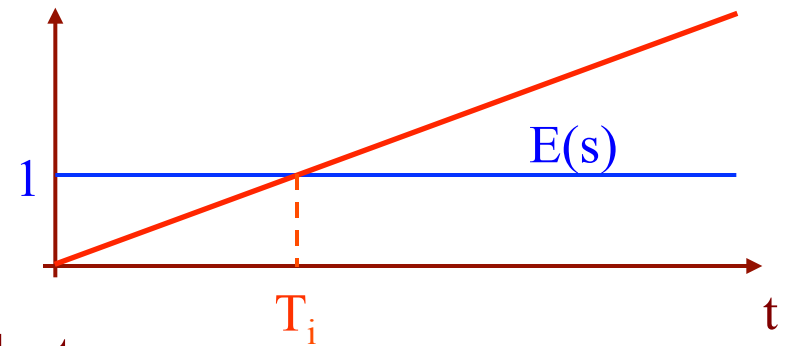
## Reguladores de tipo P



# Reguladores PID

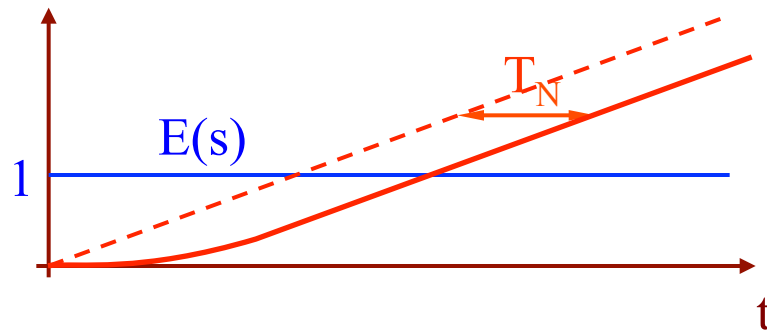
## Reguladores de tipo I

Tipo I  $\Rightarrow R(s) = \frac{K}{s} = \frac{1}{T_i s}$   $\Rightarrow$



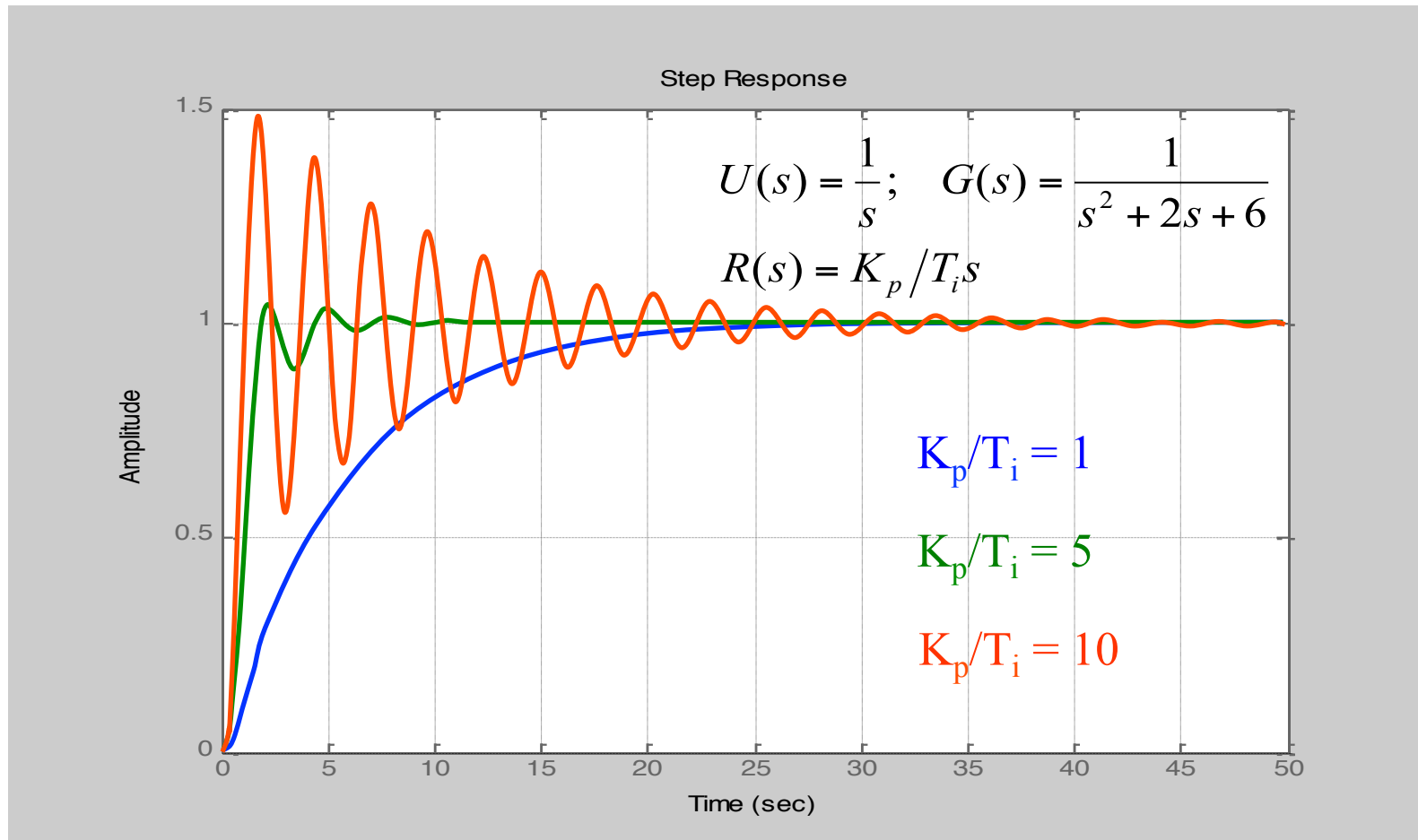
Error de posición nulo pero compensación lenta

Tipo I filtrado  $\Rightarrow R(s) = \frac{1}{T_i s (T_N s + 1)}$



# Reguladores PID

## Reguladores de tipo I



# Reguladores PID

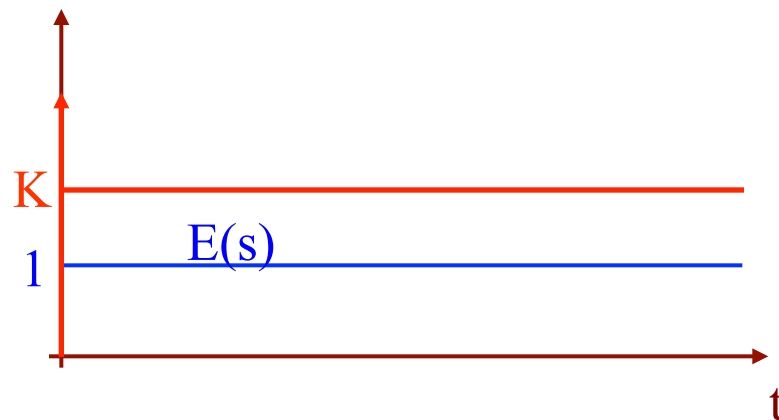
## Reguladores de tipo PD

Tipo PD  $\longrightarrow$   $R(s) = K_p(1 + T_d s)$   $\longrightarrow$  Regulador ideal

Atenúa las sobreoscilaciones (acción anticipativa)

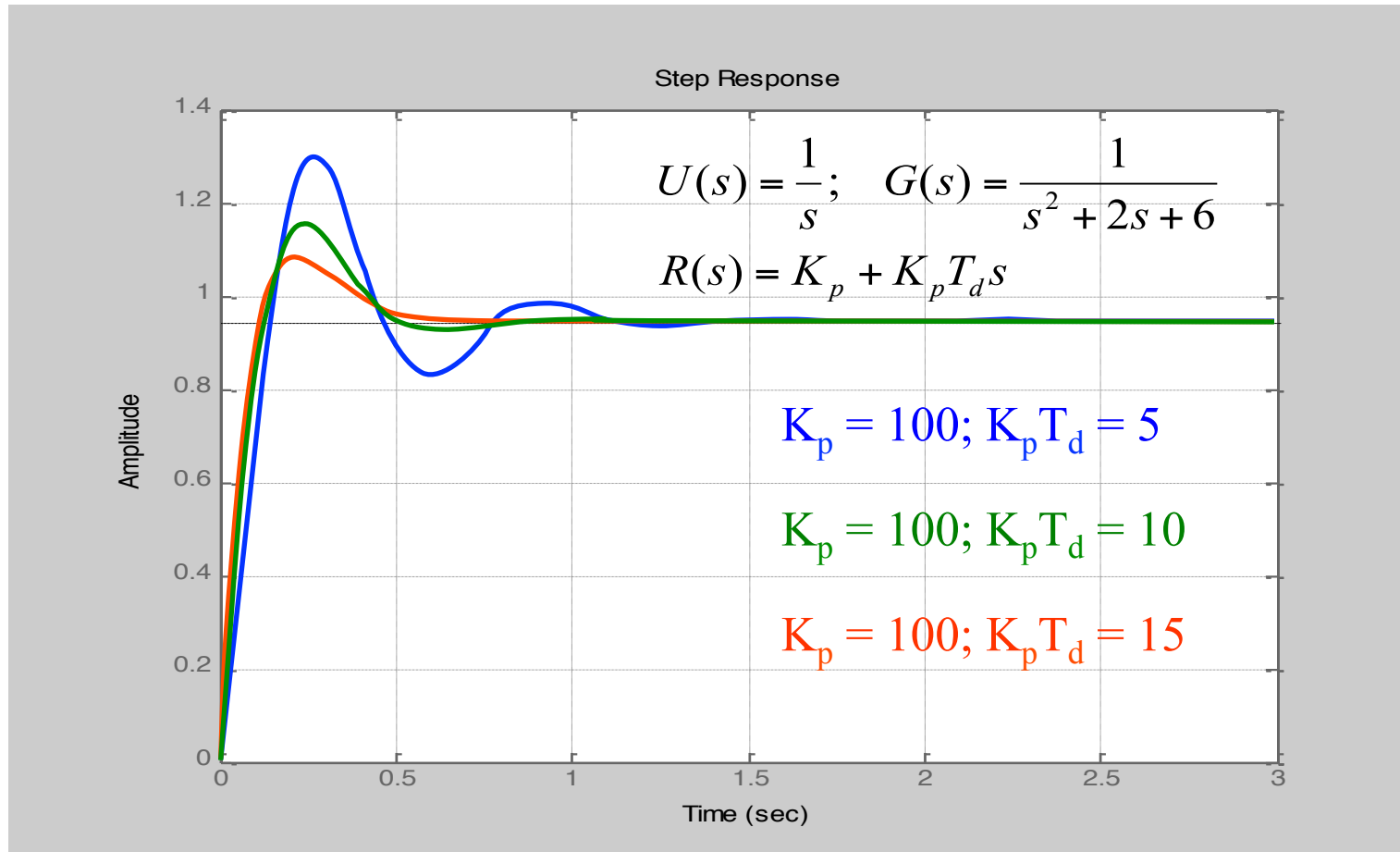
Permite ajustar condiciones de la respuesta transitoria

Puede resultar problemático ante la presencia de ruido con altas frecuencias



# Reguladores PID

## Reguladores de tipo PD



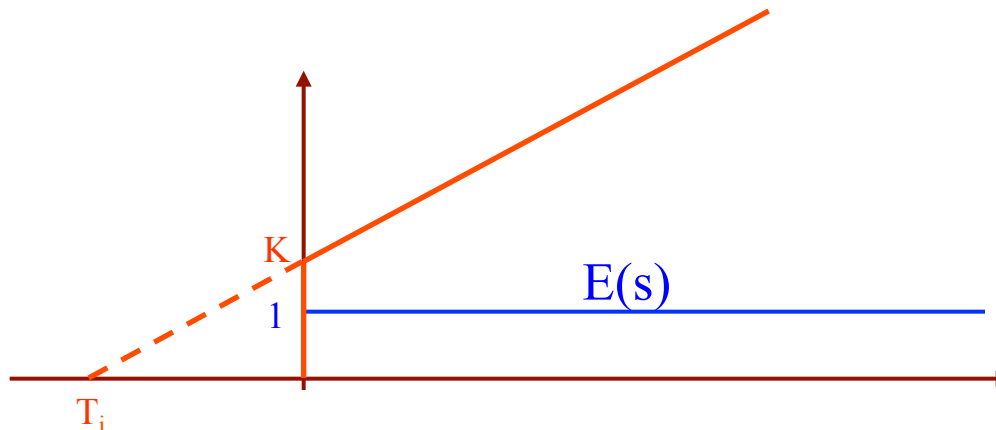
# Reguladores PID

## Reguladores de tipo PI

Tipo PI  $\longrightarrow R(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) = K_p \frac{s + \frac{1}{T_i}}{s}$

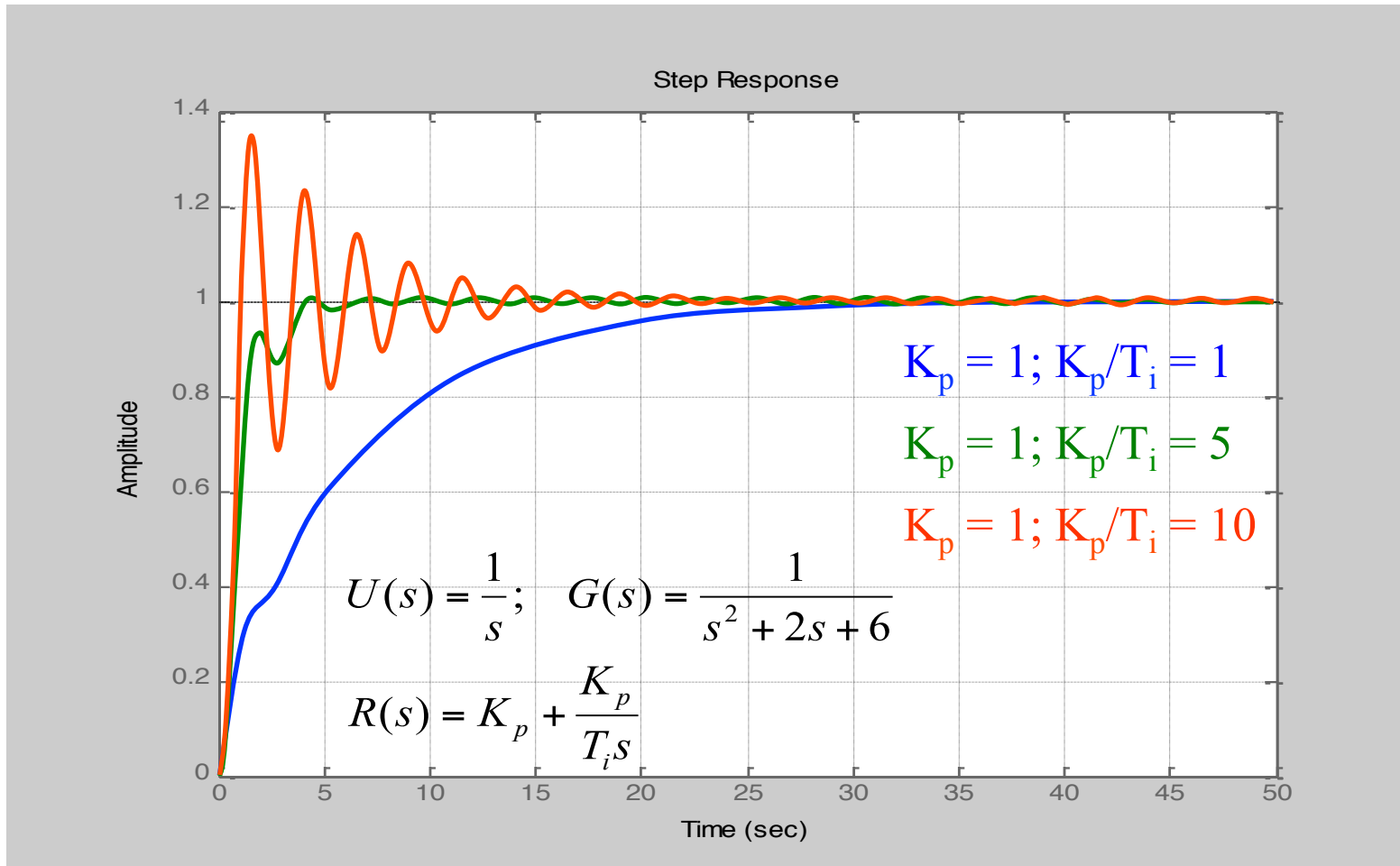
Compensación rápida y precisa

Si  $T_i$  es grande  $\longrightarrow$  El cero del regulador muy cerca de su polo  $\longrightarrow$  Casi no se modifica el transitorio



# Reguladores PID

## Reguladores de tipo PI

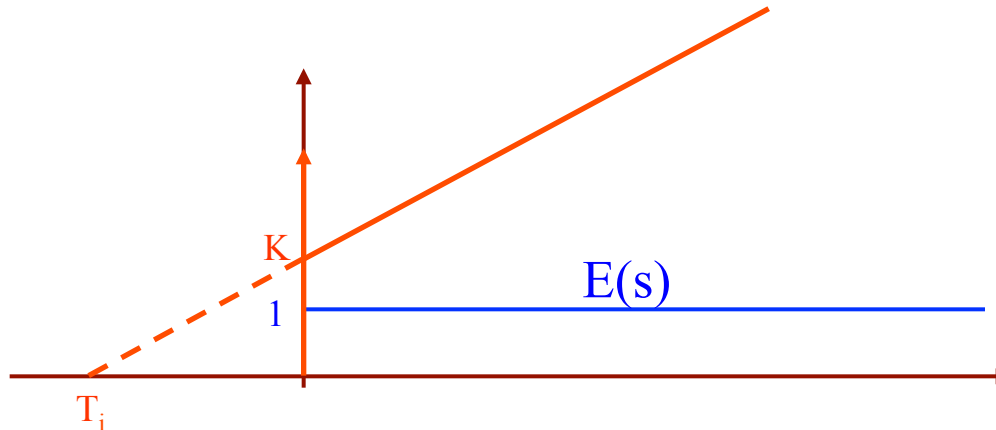


# Reguladores PID

## Reguladores de tipo PID

Tipo PID  $\longrightarrow$   $R(s) = K \left( 1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right)$   $\longrightarrow$  Regulador ideal

Compromiso entre régimen transitorio y permanente





# Reguladores PID

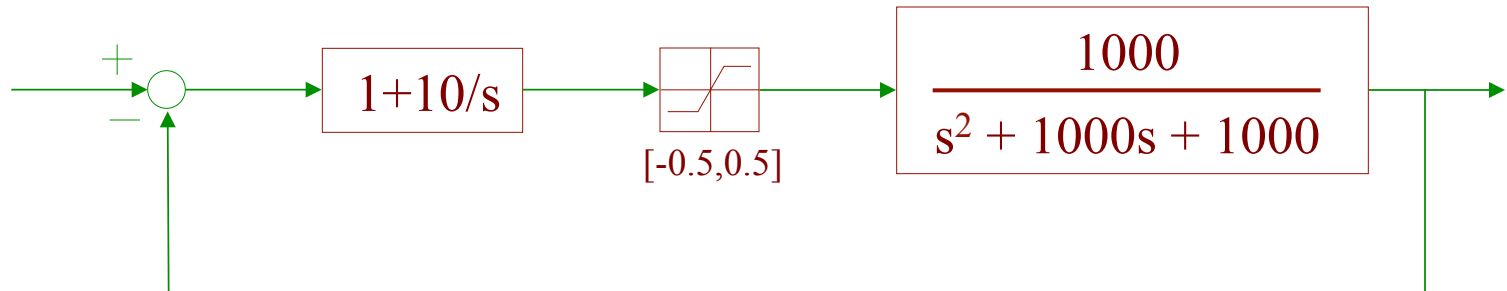
## Problemas en la implantación de PID

- ✓ Efecto Windup
- ✓ Señales de control bruscas en los saltos de consigna
- ✓ Amplificación del ruido en la parte derivativa
- ✓ ...

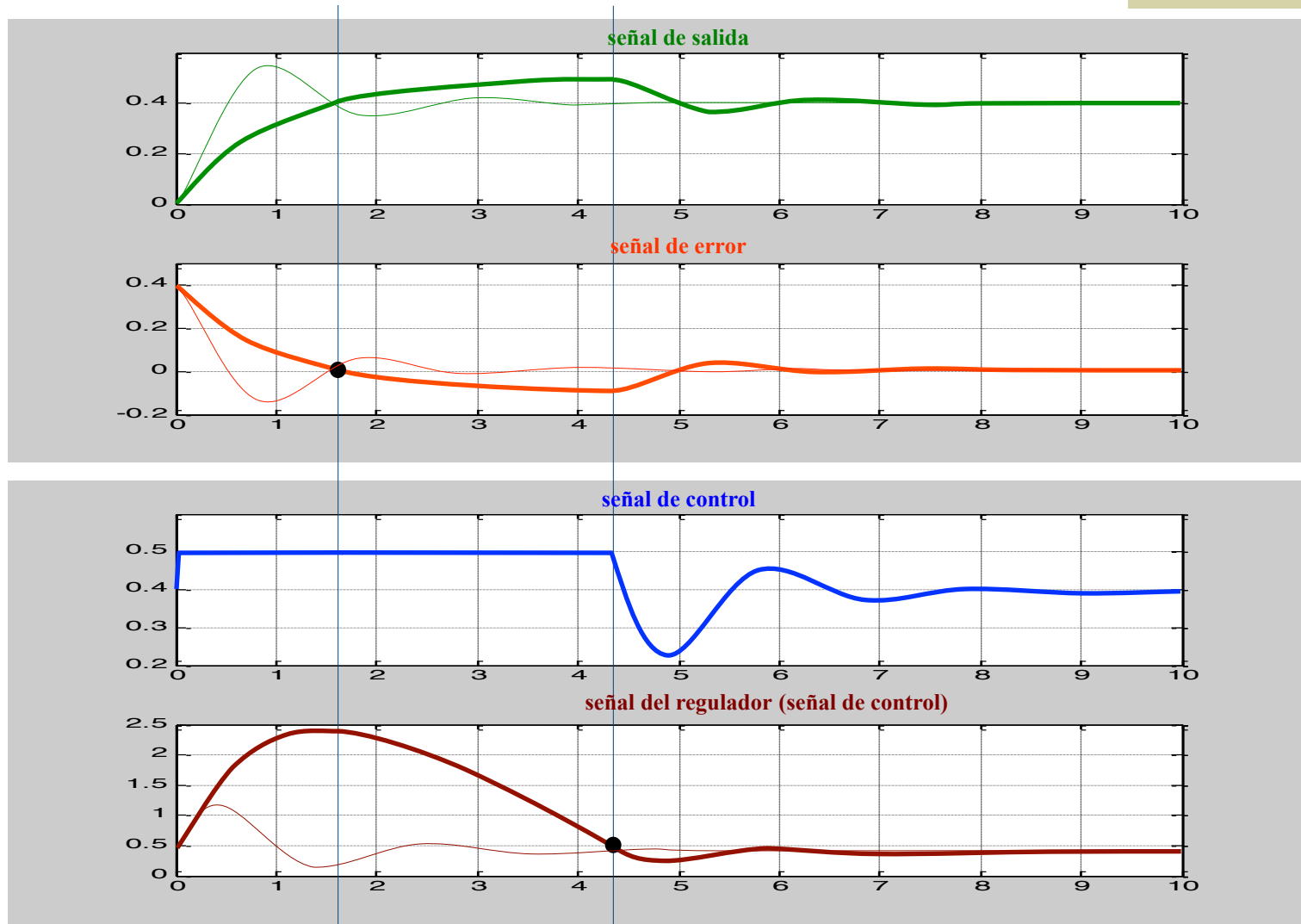
# Reguladores PID

## Efecto Windup

- En sistemas con acción de control integral y saturación del actuador.
- Al saturarse la señal de control, el integrador sigue actuando sin efecto en la respuesta del sistema.
- Entre que cambia de signo la señal de error y se “desatura” la señal de control pasa un cierto intervalo de tiempo → El sistema tarda en responder.
- Para evitar el windup se puede diseñar un circuito de forma que active un lazo de realimentación en torno al integrador durante el tiempo que dura la saturación.

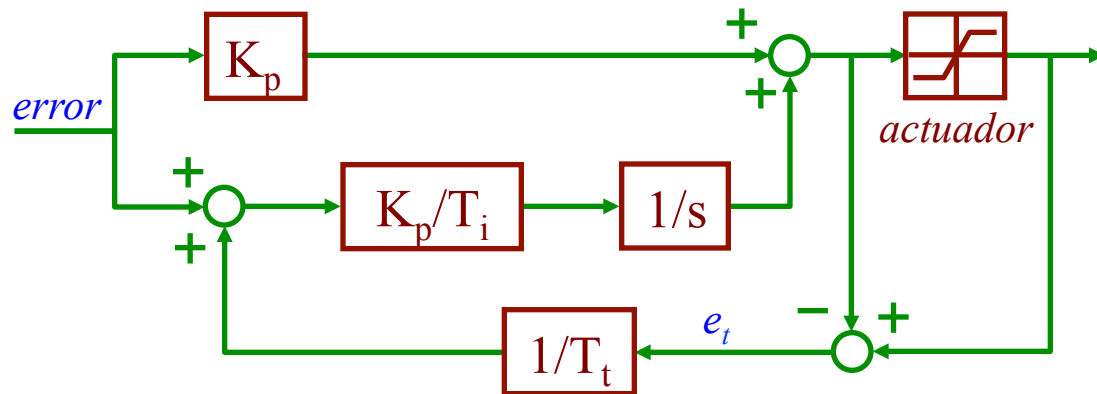


# Reguladores PID



# Reguladores PID

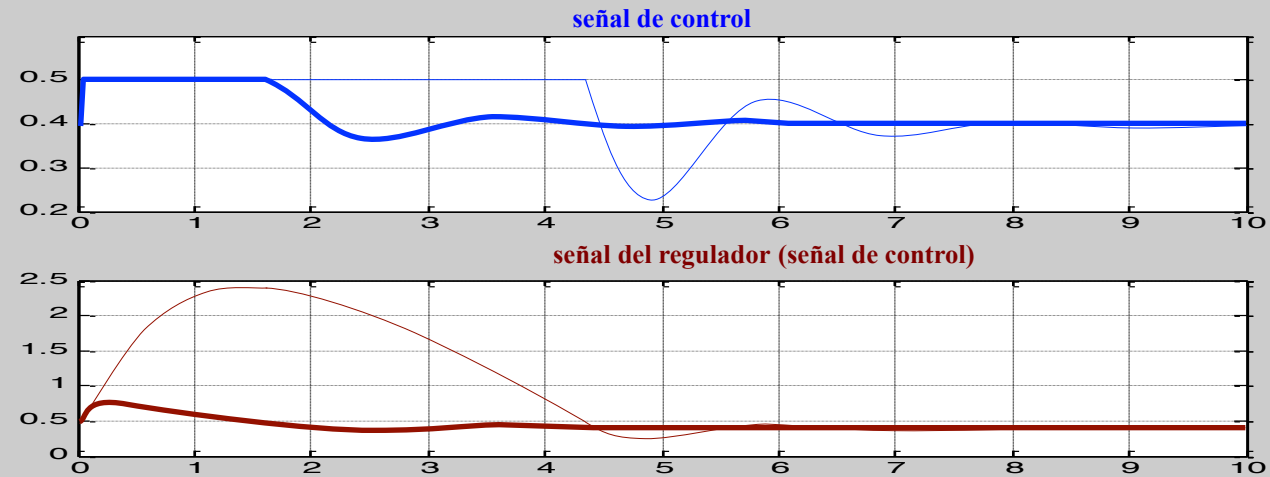
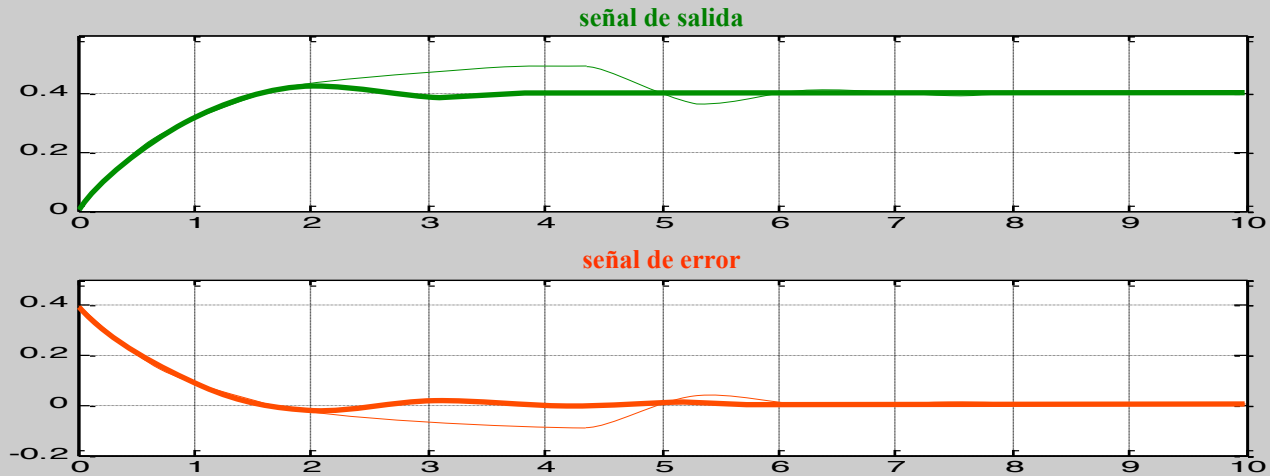
## Ejemplo de solución anti Windup:



Si el actuador está saturado  $e_t \neq 0$ . Esta señal se realimenta a través del integrador para ser anulada. La constante de seguimiento  $T_t$  permite ajustar la velocidad de recuperación de la integral.

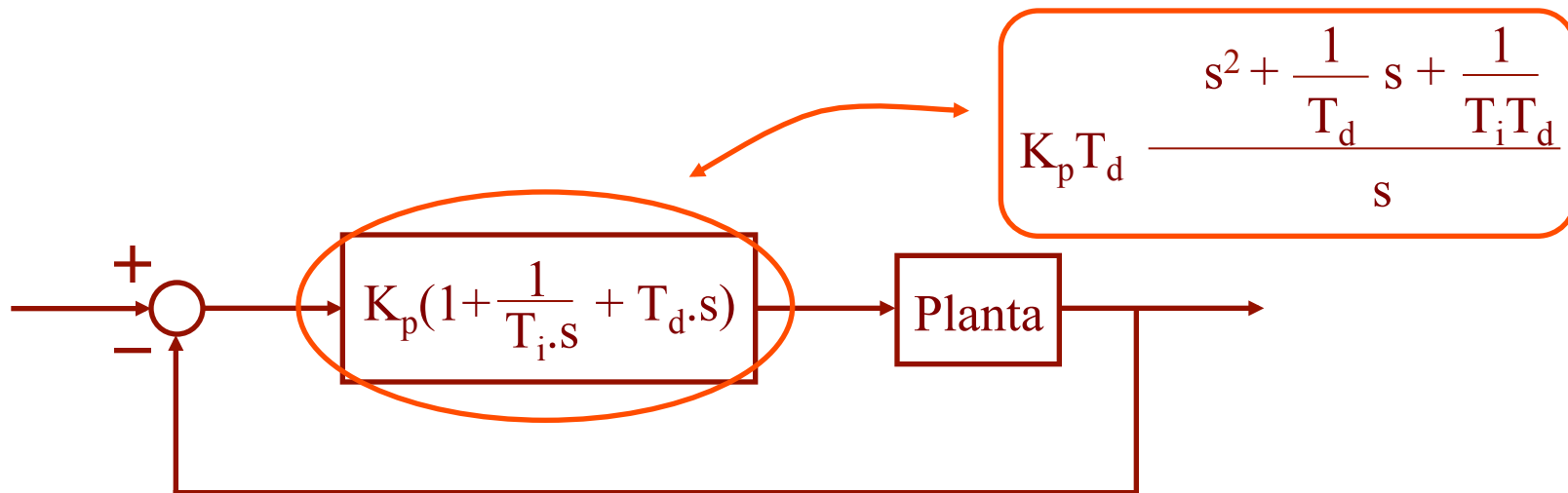
# Reguladores PID

$$T_t = 1$$



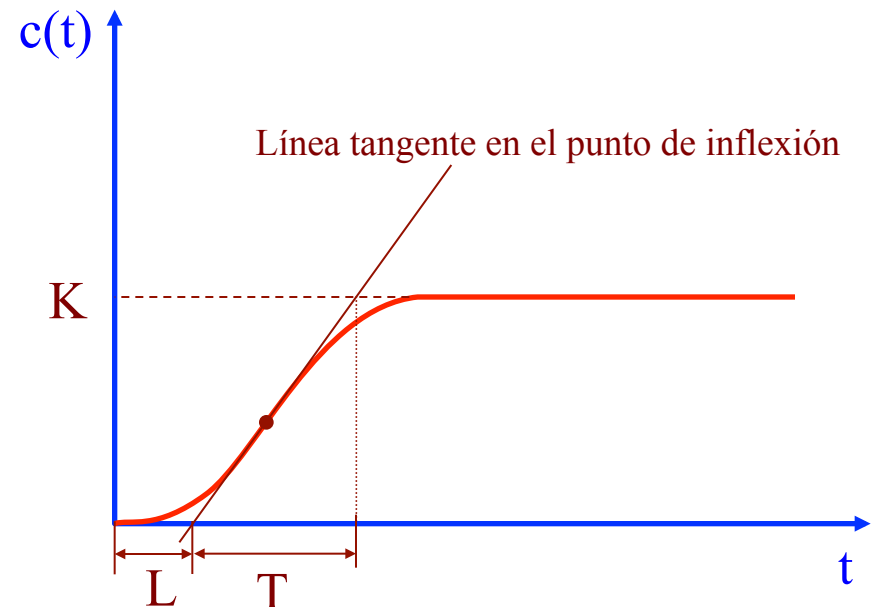
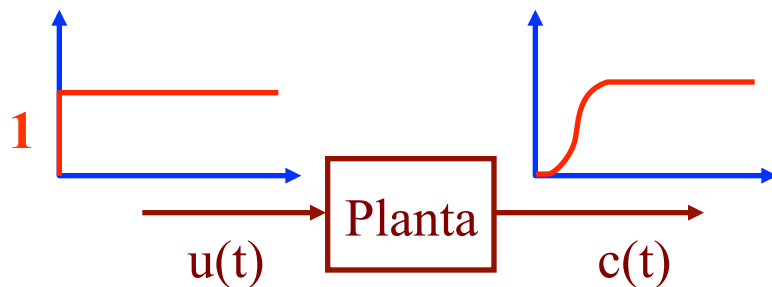
# Sintonía experimental de PID

- ✓ Útiles para plantas de las que se desconoce su modelo
- ✓ Son métodos experimentales
- ✓ Dan una estimación razonable de los parámetros del PID
- ✓ Se requiere posteriormente una sintonía fina



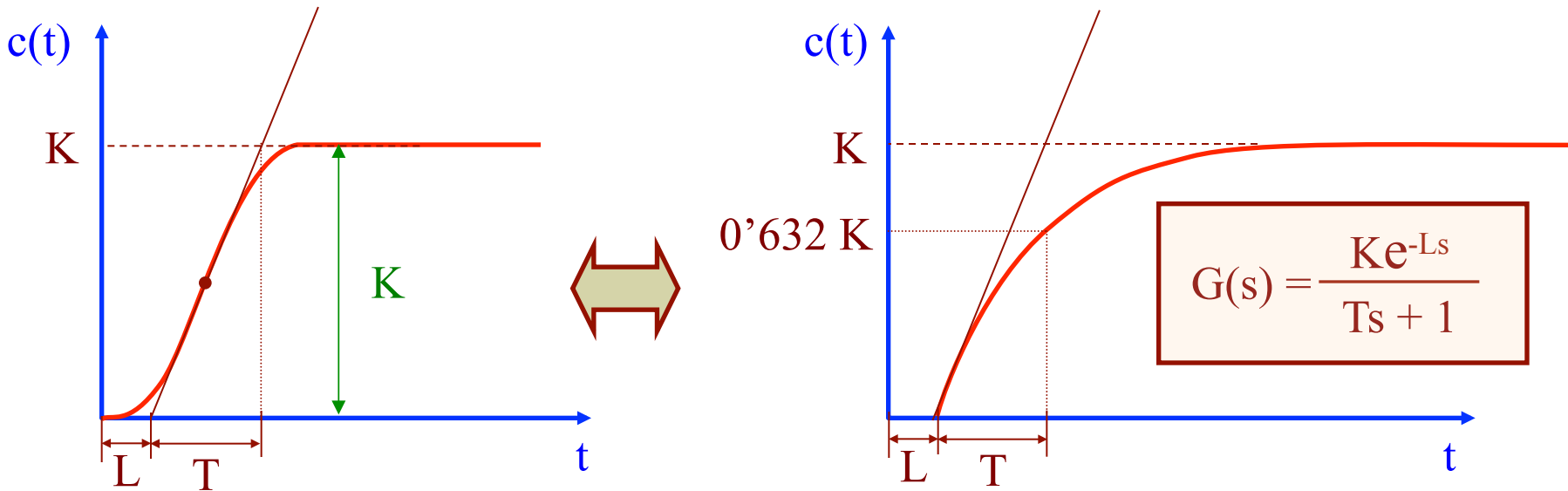
# Sintonía experimental de PID (1º método de Ziegler-Nichols)

- ✓ Se aplica a la planta un escalón unitario
- ✓ Se buscan respuestas en forma de S.
- ✓ Da reguladores que provocan que el sistema tengan de media  $M_p < 25\%$



# Sintonía experimental de PID (1º método de Ziegler-Nichols)

Línea tangente en el punto de inflexión



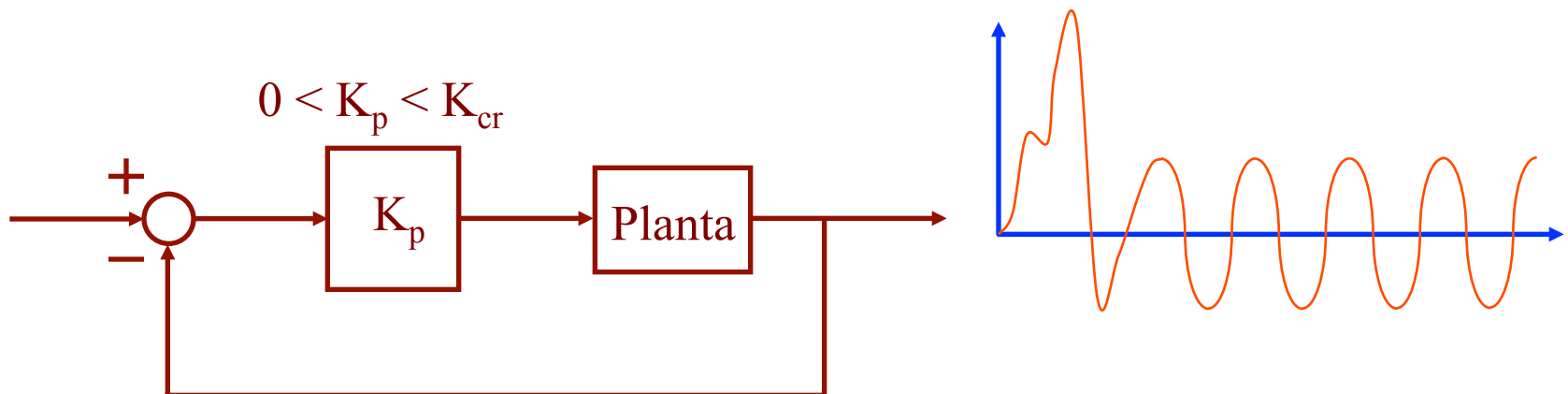
Tipo de controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$T/L$	$\infty$	0
PI	$0.9T/L$	$L/0.3$	0
PID	$1.2T/L$	$2L$	$0.5L$

$$PID = 0.6T \frac{\left(s + \frac{1}{L}\right)^2}{s}$$

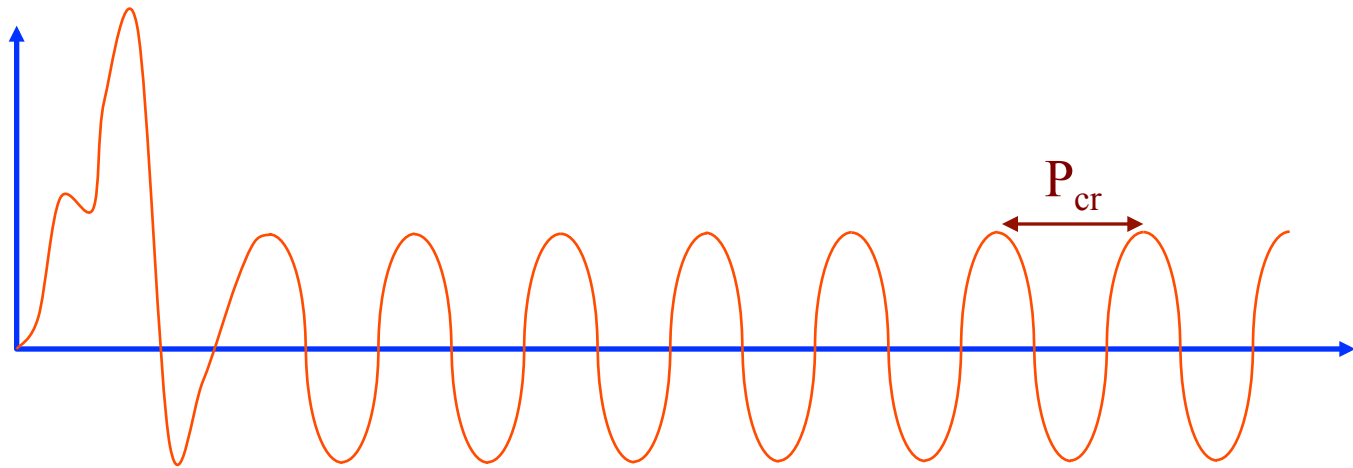


## Sintonía experimental de PID (2º método de Ziegler-Nichols)

- ✓ Se aplica un regulador proporcional  $K_p$  y se cierra el lazo
- ✓ Se aumenta  $K_p$  hasta un  $K_{cr}$  que inestabilice el sistema →
- Aparición de polos imaginarios puros
- ✓ Se lee el periodo de oscilación de la señal de salida



## Sintonía experimental de PID (2º método de Ziegler-Nichols)

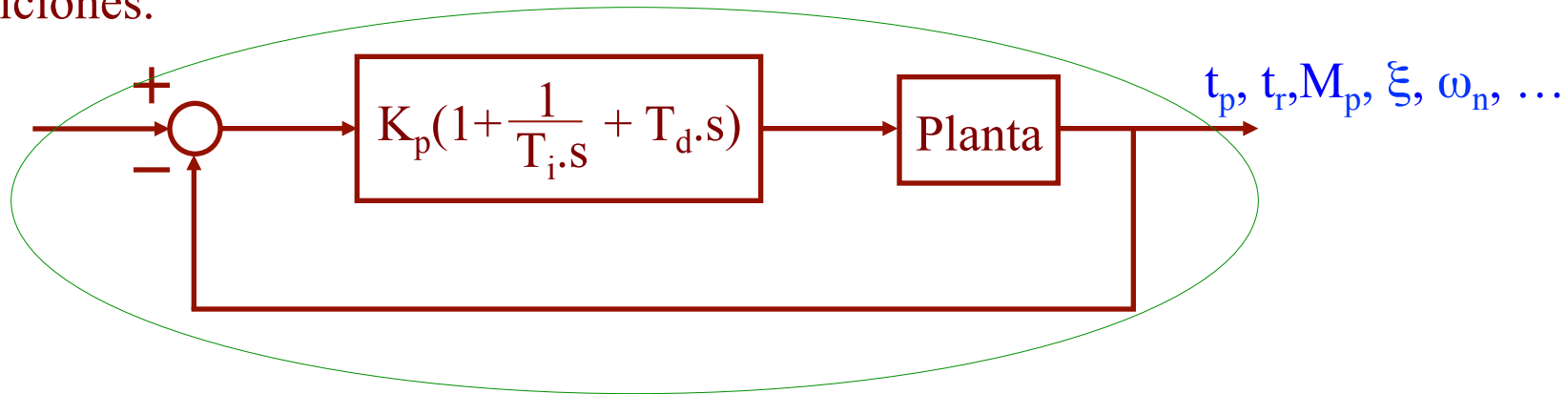


Tipo de controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0'5K_{cr}$	$\infty$	0
PI	$0'45K_{cr}$	$P_{cr}/1'2$	0
PID	$0'6K_{cr}$	$0'5P_{cr}$	$0'125P_{cr}$

$$PID = 0'075K_{cr}P_{cr} \frac{\left(s + \frac{4}{P_{cr}}\right)^2}{s}$$

# Sintonía analítica de PID (asignación de polos)

Se basa en ajustar los polos del sistema para que su respuesta cumpla ciertas condiciones.



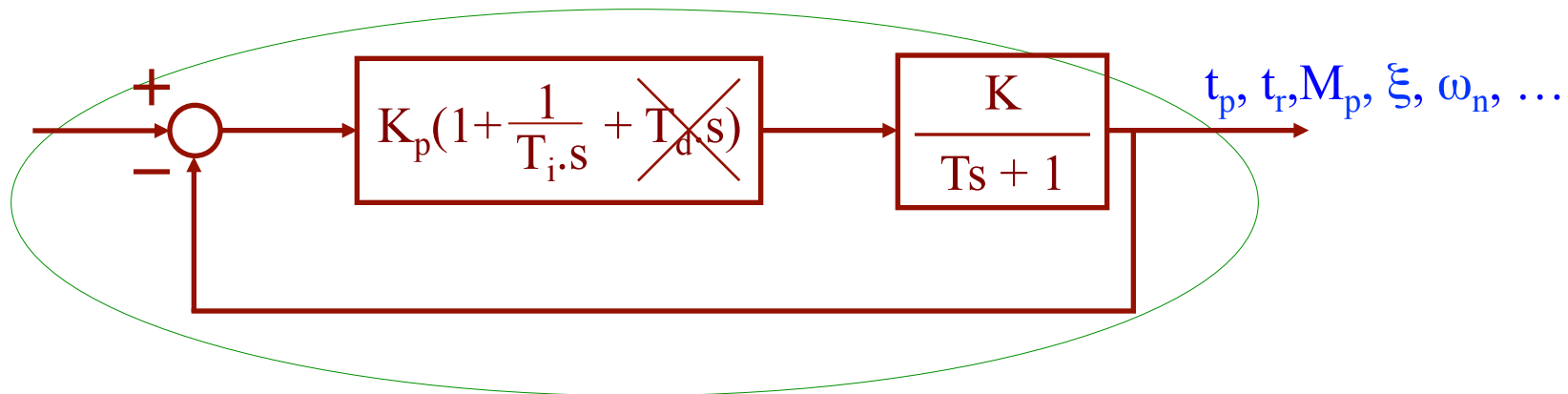
$$M(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \longrightarrow D(s) = f(K_p, T_i, T_d)$$
$$D(s) = (s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s^2 + 2\hat{\xi}\hat{\omega}_n s + \hat{\omega}_n^2) \dots$$

operando

$K_p, T_i, T_d$

# Sintonía analítica de PID (asignación de polos)

Ejemplo: Sistemas de primer orden  $\longrightarrow$  suficiente con un PI (ajustar a un 2º orden)



$$M(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \longrightarrow D(s) = s^2 + \left( \frac{1 + K \cdot K_p}{T} \right) s + \frac{K \cdot K_p}{T \cdot T_i} \quad \left. \vphantom{D(s)} \right\} \longrightarrow \text{operando}$$

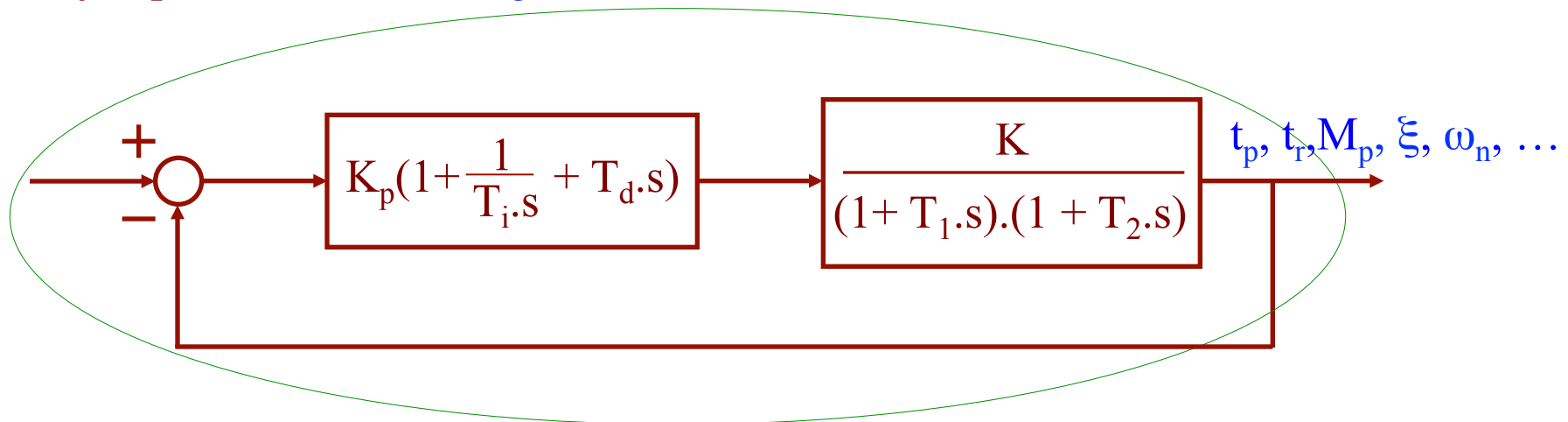
$$D(s) = (s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)$$

$$\longrightarrow K_p = \frac{2\xi\omega_n T - 1}{K}$$

$$T_i = \frac{2\xi\omega_n T - 1}{T \cdot \omega_n^2}$$

# Sintonía analítica de PID (asignación de polos)

Ejemplo: Sistemas de segundo orden  $\longrightarrow$  se necesita un PID



$$D(s) = s^3 + \left( \frac{T_1 + T_2 + K \cdot K_p \cdot T_d}{T_1 \cdot T_2} \right) s^2 + \left( \frac{1 + K \cdot K_p}{T_1 \cdot T_2} \right) s + \frac{K \cdot K_p}{T_1 \cdot T_2 \cdot T_i}$$

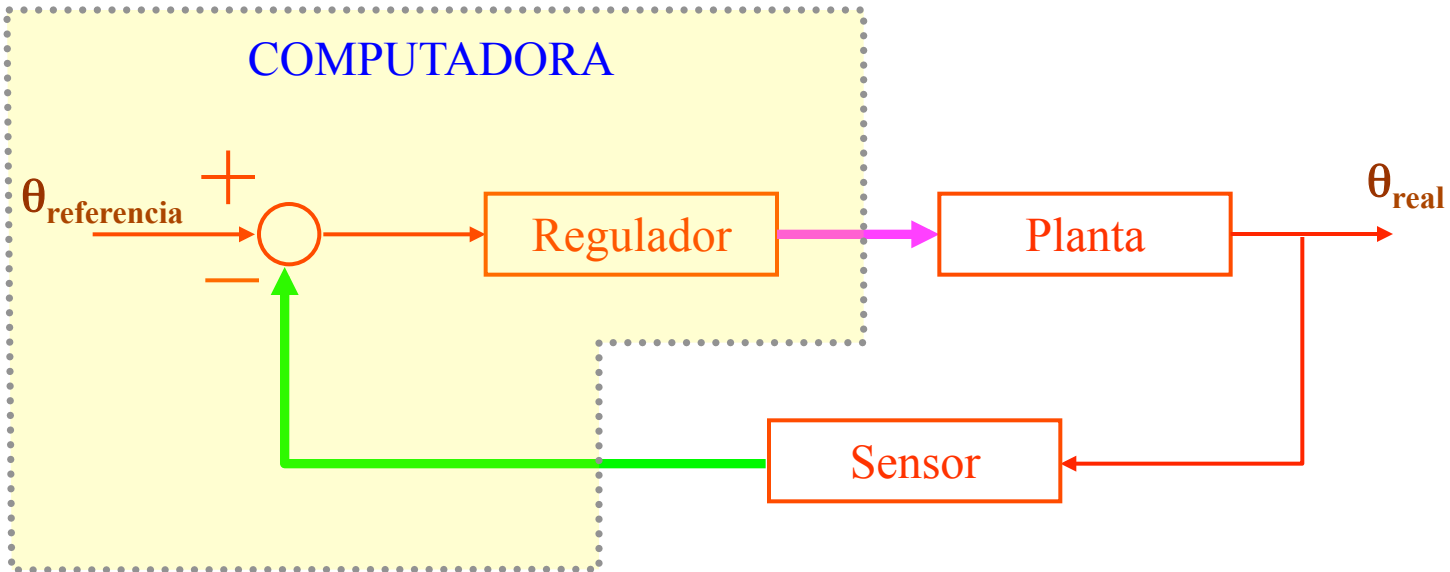
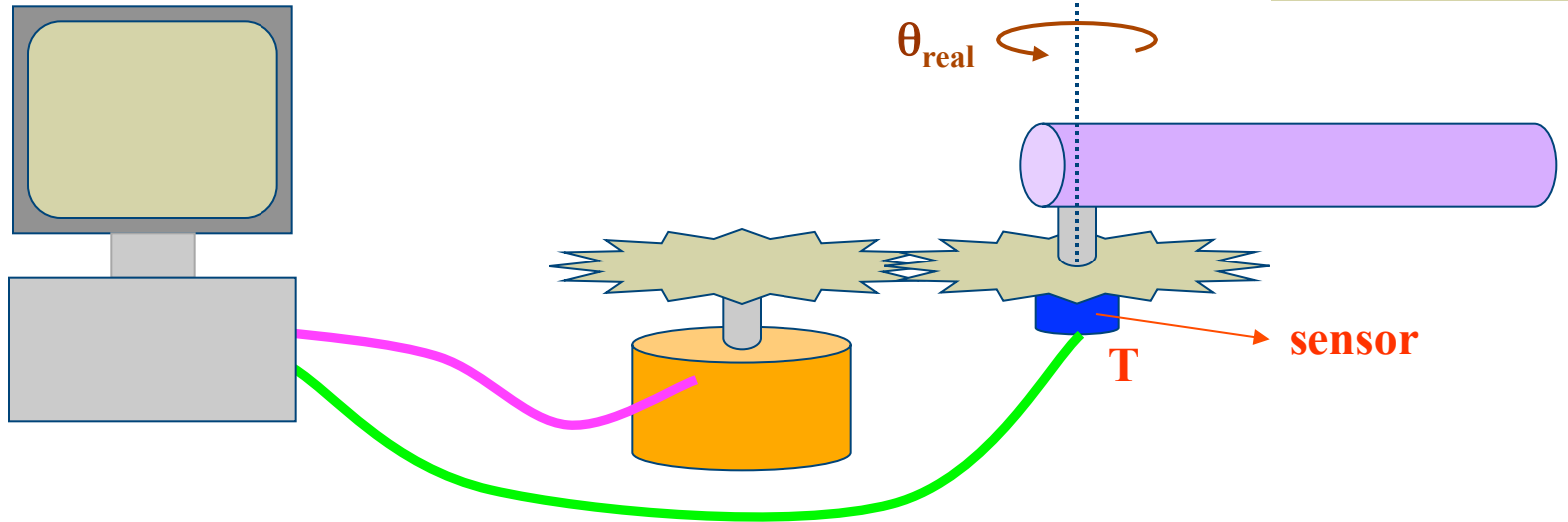
$$D(s) = (s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s + \alpha \cdot \omega_n)$$

$$K_p = \frac{T_1 T_2 \omega_n^2 (1 + 2\alpha\xi) - 1}{K}$$

$$T_i = \frac{T_1 T_2 \omega_n^2 (1 + 2\alpha\xi) - 1}{T_1 T_2 \alpha \omega_n^3}$$

$$T_d = \frac{T_1 T_2 \omega_n (\alpha + 2\xi) - T_1 - T_2}{T_1 T_2 \omega_n^2 (1 + 2\alpha\xi) - 1}$$

# Discretización (introducción)



# Discretización (muestreo)



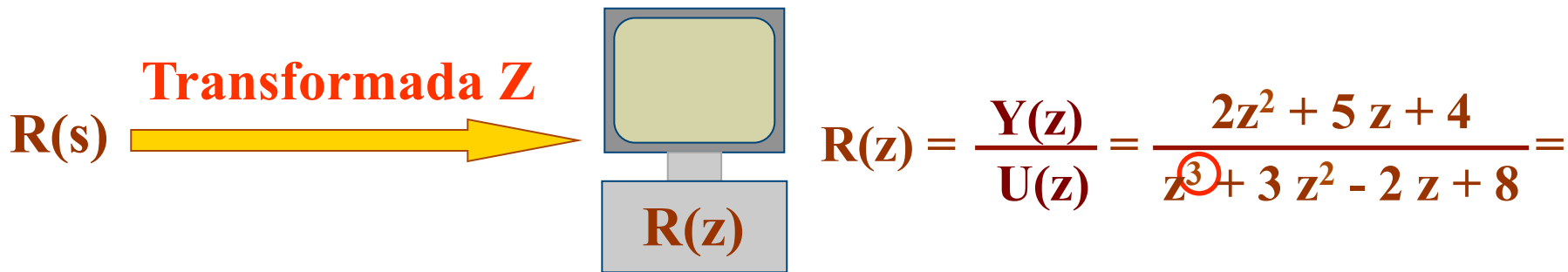
$$w(k.T) = w_k = \{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, \dots\}$$

## Ecuación en diferencias

$$r_k = 3 w_k - 2 w_{k-1} + 7 w_{k-2} - r_{k-1} + 5 r_{k-2}$$

# Discretización (ecuación en diferencias)

Es la ecuación que controla la planta  $\longrightarrow$  R(s)



$= \frac{2z^{-1} + 5z^{-2} + 4z^{-3}}{1 + 3z^{-1} - 2z^{-2} + 8z^{-3}}$   $\longrightarrow$  Ecuación en diferencias

$\longrightarrow y_k + 3y_{k-1} - 2y_{k-2} + 8y_{k-3} = 2u_{k-1} + 5u_{k-2} + 4u_{k-3}$



# Discretización (transformada Z)

Transformada Z ( $G(s) \longrightarrow G(z)$ )

## Existen varios métodos

- Aproximación del operador derivada:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{x_k - x_{k-1}}{T} \longrightarrow s = \frac{z - 1}{T}$$

- Método trapezoidal o método de Tustin:

$$s = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1}$$

- ...