VECTORES DESLIZANTES

Definición

Se denomina vector deslizante a un segmento orientado. Un vector deslizante queda así definido por la recta soporte (base), la longitud del mismo (módulo) y el sentido, indicado gráficamente por una flecha. Así, en la figura 1, el vector deslizante $\overline{AB}$ queda definido por la recta soporte r, el módulo (la longitud del segmento AB) y el sentido (de A a B).

Así pues, cualquier vector sobre la recta r de igual módulo e igual sentido tal como el $\overline{CD}$ es igual al vector $\overline{AB}$, por ello se le denomina vector deslizante, ya que puede "deslizar" sobre la recta soporte y el punto de aplicación puede ser un punto cualquiera de la recta.

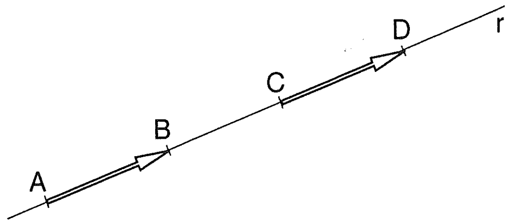

Figura 1

Momento polar

Dado un vector deslizante $\overline{v}$ y un punto O, se denomina momento polar en O del vector $\overline{v}$ al vector fijo $\overline{G}_O$, aplicado en O, dado por el producto vectorial:

$$\overline{G}_O = \overline{OP} \wedge \overline{v} \qquad (1)$$

donde P es un punto cualquiera de la recta soporte del vector deslizante $\overline{v}$.

Para que la definición anterior sea correcta, es preciso demostrar que el resultado obtenido es el mismo si se toma otro punto Q de la recta soporte (ver figura 2), es decir hay que demostrar que

$$\overline{G}'_O = \overline{OQ} \wedge \overline{v}$$

es igual a $\overline{G}_O$. En efecto:

$$\overline{OQ} = \overline{OP} + \overline{PQ}$$

Así pues

$$\overline{G}'_O = \overline{OQ} \wedge \overline{v} = \left(\overline{OP} + \overline{PQ}\right) \wedge \overline{v} = \overline{OP} \wedge \overline{v} + \overline{PQ} \wedge \overline{v}$$

pero $\overline{PQ} \wedge \overline{v}$ es cero, ya que el vector $\overline{PQ}$ tiene la dirección de la recta soporte y por tanto es paralelo a $\overline{v}$. Por tanto

$$\overline{G}'_O = \overline{OP} \wedge \overline{v} = \overline{G}_O \qquad \text{c.q.d.}$$

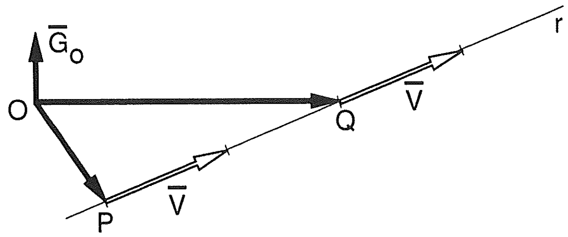

Figura 2

Vamos ahora a deducir una expresión muy importante que relaciona los momentos polares de un vector en dos puntos distintos:

Sea el vector $\overline{v}$ y dos puntos P y Q. Los momentos polares en P y Q del vector $\overline{v}$ serán

$$\overline{G}_P = \overline{PA} \wedge \overline{v}$$
$$\overline{G}_Q = \overline{QA} \wedge \overline{v}$$

donde A es un punto de la recta soporte de $\overline{v}$. Pero

$$\overline{QA} = \overline{QP} + \overline{PA}$$

Por tanto

$$\overline{G}_Q = \left(\overline{QP} + \overline{PA}\right) \wedge \overline{v} = \overline{PA} \wedge \overline{v} + \overline{QP} \wedge \overline{v}$$

finalmente

$$\overline{G}_Q = \overline{G}_P + \overline{QP} \wedge \overline{v} \qquad (2)$$

que es la expresión buscada.

Momento áxico

Dado un vector deslizante $\bar{v}$ y una recta *r*, se denomina momento áxico del vector $\bar{v}$ respecto de *r* a un escalar *m* , obtenido proyectando sobre *r* el momento polar de $\bar{v}$ en un punto cualquiera O de la recta *r* (ver figura 3):

$$m = \text{proy}_r\, \overline{G}_O \qquad (3)$$

si α es el ángulo que forma el vector $\overline{G}_O$ con la recta *r*, la definición anterior es equivalente a

$$m = G_O \cos\alpha = \overline{G}_O \cdot \bar{r}_O \qquad (4)$$

donde $\bar{r}_O$ es un versor en la dirección de la recta *r*

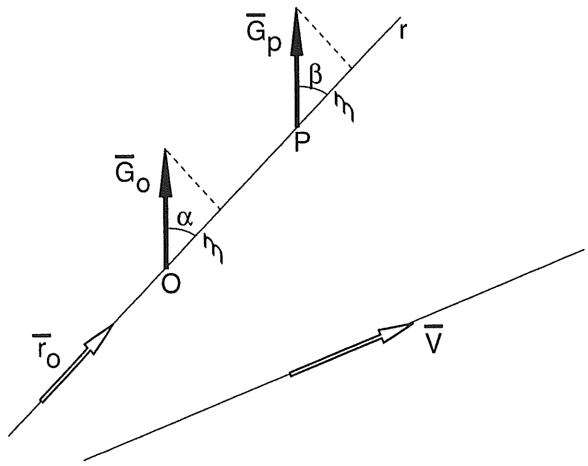

Figura 3

La definición anterior exige demostrar que el resultado es independiente del punto escogido sobre la recta *r* para obtener el momento polar. Es decir, si P es otro punto sobre *r* y denominamos m' a

$$m' = \text{proy}_r\, \overline{G}_P$$

es necesario demostrar que m' = m

Ahora bien, de acuerdo con la fórmula 4 se tiene

$$m' = \overline{G}_P \cdot \bar{r}_O$$

y por otro lado $\overline{G}_P$ se deduce en función de $\overline{G}_O$ con la expresión 2:

$$\overline{G}_P = \overline{G}_O + \overline{PO} \wedge \bar{v}$$

sustituyendo, resulta

$$m' = \left(\overline{G}_O + \overline{PO} \wedge \bar{v}\right) \cdot \bar{r}_O = \overline{G}_O \cdot \bar{r}_O + \left(\overline{PO} \wedge \bar{v}\right) \cdot \bar{r}_O$$

En esta expresión, $\overline{PO} \wedge \overline{v}$ es un vector perpendicular a $\overline{PO}$ y por tanto perpendicular a *r*, mientras que $\overline{r}_O$ lleva la dirección de *r*, por lo que el producto escalar de ambos vectores es cero. Finalmente $\overline{G}_O \cdot \overline{r}_O$ es *m* y por tanto

$$m' = m \qquad\qquad \text{c.q.d.}$$

Es importante resaltar que $\overline{G}_O$ y $\overline{G}_P$ son distintos y así mismo son distintos los ángulos α y β que forman con la recta *r* , sin embargo sus proyecciones sobre la recta *r* son iguales.

Sistema de vectores deslizantes

Se denomina sistema a un conjunto de vectores deslizantes. Se define la **resultante** de un sistema de vectores deslizantes como un vector libre, obtenido como suma vectorial de los vectores deslizantes como si fuesen libres. Así, si el sistema está constituido por los vectores $\overline{v}_1, \overline{v}_2$, etc., la resultante $\overline{R}$ se obtiene en un punto cualquiera del espacio P, llevando vectores idénticos a los $\overline{v}_1, \overline{v}_2$, etc. uno tras otro y contruyendo un polígono (ver figura 4)

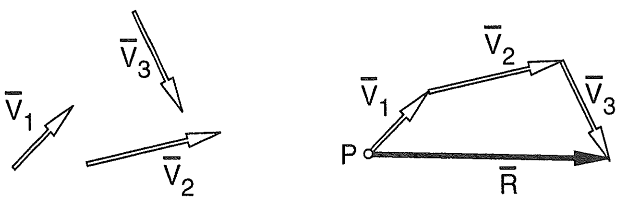

Figura 4

Es importante resaltar que los vectores $\overline{v}_i$ del sistema son deslizantes, pero la resultante $\overline{R}$ es un vector libre que puede situarse en cualquier punto del espacio.

Dado un sistema de vectores deslizantes y un punto O, se define el **momento polar** del sistema respecto de O, $\overline{G}_O$, como el vector fijo en O obtenido sumando vectorialmente los momentos polares en O de todos los vectores del sistema. Es decir, si se denomina $\overline{G}_{O\,vi}$ el momento polar en O del vector $\overline{v}_i$, el momento polar del sistema respecto de O, se obtiene como

$$\overline{G}_O = \sum_i \overline{G}_{O\,vi} = \sum_i \overline{OP_i} \wedge \overline{v}_i \qquad (5)$$

donde P_i es un punto de la recta soporte del vector $\overline{v}_i$

Partiendo de la expresión 2, vamos a hallar ahora una expresión similar que relaciona los momentos polares del sistema respecto de dos puntos distintos. Si P y Q son dos puntos se tiene (expresión 2)

$$\overline{G}_{Q\,vi} = \overline{G}_{P\,vi} + \overline{QP} \wedge \overline{v}_i$$

Por otro lado, los momentos del sistema respecto de P y Q son

$$\overline{G}_Q = \sum_i \overline{G}_{Q\,vi}$$

$$\overline{G}_P = \sum_i \overline{G}_{P\,vi}$$

sustituyendo, se obtiene sucesivamente

$$\overline{G}_Q = \sum_i \left(\overline{G}_{P\,vi} + \overline{QP} \wedge \overline{v}_i\right) = \sum_i \overline{G}_{P\,vi} + \sum_i \overline{QP} \wedge \overline{v}_i = \overline{G}_P + \overline{QP} \wedge \sum_i \overline{v}_i$$

Pero $\sum_i \overline{v}_i$ es la resultante $\overline{R}$ del sistema, con lo que finalmente se obtiene la expresión

$$\overline{G}_Q = \overline{G}_P + \overline{QP} \wedge \overline{R} \qquad (6)$$

La ecuación anterior tiene gran importancia y se utilizará repetidamente a lo largo del capítulo.

Dado un sistema de vectores deslizantes y una recta r cualquiera, se define el **momento áxico** del sistema respecto de r como un escalar obtenido sumando algebraicamente los momentos áxicos respecto de r de todos los vectores del sistema. Así pues, si se denomina m_i el momento áxico respecto de r del vector $\overline{v}_i$, el momento áxico del sistema m es sencillamente

$$m = \sum_i m_i \qquad (7)$$

donde la suma es algebraica, ya que los momentos áxicos son escalares.

Si O es un punto cualquiera de la recta r y se utiliza la expresión 4, se tiene

$$m_i = \overline{G}_{O\,vi} \cdot \overline{r}_O$$

y por tanto

$$m = \sum_i m_i = \sum_i \left(\overline{G}_{O\,vi} \cdot \overline{r}_O\right) = \overline{r}_O \cdot \sum_i \overline{G}_{O\,vi}$$

pero $\sum_i \overline{G}_{O\,vi}$ es precisamente el momento polar del sistema respecto de O (ecuación 5), con lo que finalmente resulta

$$m = \overline{G}_O \cdot \overline{r}_O \qquad (8)$$

expresión que indica que el momento áxico del sistema respecto de r puede obtenerse también como la proyección sobre r del momento polar del sistema respecto de un punto de la recta.

Corolarios

De las definiciones de momento polar y momento áxico del sistema y de la expresión fundamental (ecuación 6) que relaciona los momentos polares en dos puntos distintos, pueden deducirse varios corolarios de gran interés práctico:

a) El momento polar respecto de dos puntos P y Q tales que PQ es paralelo a la resultante es el mismo.

En efecto, la expresión 6 indica que

$$\overline{G}_Q = \overline{G}_P + \overline{QP} \wedge \overline{R}$$

pero si $\overline{QP}$ es paralelo a $\overline{R}$, su producto vectorial es cero y entonces

$$\overline{G}_Q = \overline{G}_P \qquad \text{c.q.d.}$$

b) El momento áxico respecto de dos rectas r y s paralelas a la resultante es el mismo.

En efecto, si O es un punto de la recta r y P un punto de la recta s , los momentos áxicos respecto de r y s serían respectivamente (ecuación 8):

$$m_r = \overline{G}_O \cdot \overline{r}_O$$
$$m_s = \overline{G}_P \cdot \overline{r}_O$$

donde $\overline{r}_O$ es un versor paralelo a $\overline{R}$

Utilizando la expresión 6, se tiene

$$\overline{G}_P = \overline{G}_O + \overline{PO} \wedge \overline{R}$$

y sustituyendo, resulta

$$m_s = \left(\overline{G}_O + \overline{PO} \wedge \overline{R}\right) \cdot \overline{r}_O = \overline{G}_O \cdot \overline{r}_O + \left(\overline{PO} \wedge \overline{R}\right) \cdot \overline{r}_O$$

El vector $\overline{PO} \wedge \overline{R}$ es perpendicular a $\overline{R}$ y $\overline{r}_O$ es paralelo a $\overline{R}$, en consecuencia su producto escalar es nulo, con lo que se obtiene finalmente

$$m_s = \overline{G}_O \cdot \overline{r}_O = m_r \qquad \text{c.q.d.}$$

c) El producto escalar de la resultante por el momento polar es el mismo en todos los puntos del espacio. Es decir, si P y Q son dos puntos cualquiera se tiene

$$\overline{G}_P \cdot \overline{R} = \overline{G}_Q \cdot \overline{R} \qquad (9)$$

En efecto, la expresión 6 fundamental establece

$$\overline{G}_Q = \overline{G}_P + \overline{QP} \wedge \overline{R}$$

y por tanto

$$\overline{G}_Q \cdot \overline{R} = \overline{G}_P \cdot \overline{R} + \left(\overline{QP} \wedge \overline{R}\right) \cdot \overline{R}$$

de nuevo, el vector $\left(\overline{QP} \wedge \overline{R}\right)$ es perpendicular a $\overline{R}$, por lo que su producto escalar por $\overline{R}$ es cero y resulta la expresión 9, tal como se quería demostrar

d) Si se denomina θ al ángulo que forma el momento polar con la resultante en un punto cualquiera, se verifica que

$$G \cos\theta = K \quad \text{(cte.)} \tag{10}$$

En efecto, para dos puntos P y Q cualquiera se tiene (ecuación 9)

$$\overline{G}_P \cdot \overline{R} = \overline{G}_Q \cdot \overline{R}$$

Desarrollando los productos escalares

$$G_P \cdot R \cos\theta_P = G_Q \cdot R \cos\theta_Q$$

o bien

$$G_P \cos\theta_P = G_Q \cos\theta_Q = K \qquad \text{c.q.d.}$$

donde hemos denominado θ_P al ángulo que forma $\overline{G}_P$ con $\overline{R}$ y θ_Q al ángulo que forma $\overline{G}_Q$ con $\overline{R}$ (ver figura 5)

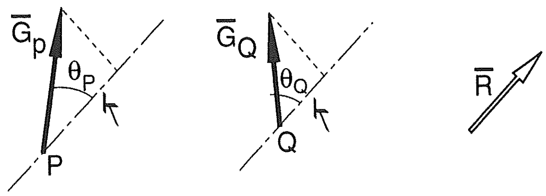

Figura 5

e) De acuerdo con la expresión 10,. el momento polar en un punto cualquiera vale

$$G = \frac{K}{\cos\theta} \tag{11}$$

siendo θ el ángulo que forma $\overline{G}$ con $\overline{R}$. El momento polar es mínimo en los puntos en los que θ=0, es decir en puntos para los que el momento polar y la resultante sean paralelos.

Para tales puntos se tendrá

$$G = K = G_{min} \tag{12}$$

Eje central

Se denomina eje central del sistema al lugar geométrico de los puntos para los que el momento polar es G_{min}, o lo que es igual para los que el momento polar es paralelo a la resultante.

De acuerdo con el corolario *a*, si un punto P cumple la condición de momento polar mínimo, lo cumplirá también cualquier punto Q situado en la recta paralela a $\overline{R}$ por P. Así pues, si encontramos un punto P del eje central, éste quedará definido por la recta paralela a la resultante que pasa por P.

Veamos entonces cómo encontrar un punto P del eje central. Para ello, se comienza hallando el momento polar del sistema en un punto cualquiera O (por ejemplo, el origen de coordenadas). Si el momento polar correspondiente $\overline{G}_O$ resultara paralelo a $\overline{R}$, O pertenecería al eje central y ya se habría terminado el proceso. Si $\overline{G}_O$ no es paralelo a $\overline{R}$, vamos a demostrar que un punto P del eje central es el que cumple la condición siguiente:

$$\overline{OP} = \frac{\overline{R} \wedge \overline{G}_O}{R^2} \tag{13}$$

En efecto, de acuerdo con la expresión 6, se tiene

$$\overline{G}_P = \overline{G}_O + \overline{PO} \wedge \overline{R}$$

Sustituyendo, resulta

$$\overline{G}_P = \overline{G}_O + \frac{1}{R^2}\left[\left(\overline{G}_O \wedge \overline{R}\right) \wedge \overline{R}\right]$$

La expresión entre corchetes es un doble producto vectorial que de acuerdo con la expresión general:

$$\left(\overline{a} \wedge \overline{b}\right) \wedge \overline{c} = \left(\overline{a} \cdot \overline{c}\right) \overline{b} - \left(\overline{b} \cdot \overline{c}\right) \overline{a} \tag{14}$$

resulta

$$\left(\overline{G}_O \wedge \overline{R}\right) \wedge \overline{R} = \left(\overline{G}_O \cdot \overline{R}\right) \overline{R} - \left(\overline{R} \cdot \overline{R}\right) \overline{G}_O$$

con lo que

$$\overline{G}_P = \overline{G}_O + \frac{1}{R^2}\left[\left(\overline{G}_O \cdot \overline{R}\right) \overline{R} - R^2\, \overline{G}_O\right] = \frac{\overline{G}_O \cdot \overline{R}}{R^2}\, \overline{R} \tag{15}$$

Se comprueba que $\overline{G}_P$ resulta paralelo a $\overline{R}$ con lo que queda demostrado que el punto P pertenece al eje central.

Además, es fácil ver que $\overline{G}_P$ es igual al momento polar mínimo. En efecto, según la ecuación 10

$$\overline{G}_P = \frac{G_O \cos\theta}{R} \cdot \overline{R} = K\frac{\overline{R}}{R}$$

con lo que $G_P = K$

donde K es el momento mínimo (ecuación 12).

En resumen, ha quedado demostrado que el eje central es una recta paralela a la resultante por el punto P que cumple la condición expresada por la ecuación 13.

Vamos a demostrar ahora que no existe ningún punto fuera de dicha recta que cumpla la condición. Es decir, se trata de demostrar que si Q es un punto tal que $\overline{G}_Q$ es paralelo a $\overline{R}$, Q debe encontrarse en la recta paralela a $\overline{R}$ por P.

En efecto, si $\overline{G}_Q$ es paralelo a $\overline{R}$ debe cumplirse que

$$\overline{G}_Q \wedge \overline{R} = 0$$

pero de acuerdo con la expresión 6, se tiene

$$\overline{G}_Q = \overline{G}_P + \overline{QP} \wedge \overline{R}$$

Por tanto, debe cumplirse que

$$\left[\overline{G}_P + \overline{QP} \wedge \overline{R}\right] \wedge \overline{R} = 0$$

Pero $\overline{G}_P \wedge \overline{R} = 0$, ya que P es un punto del eje central, y sin embargo $\left(\overline{QP} \wedge \overline{R}\right) \wedge \overline{R}$ no puede ser cero, por ser un producto vectorial de dos vectores perpendiculares, a menos que $\overline{QP}$ sea paralelo a $\overline{R}$, es decir que Q se encuentre en la recta paralela a la resultante por el punto P, o a menos que R sea cero.

Es decir, el eje central es una recta paralela a la resultante por el punto P que cumple la condición 13 y la recta indicada es única, salvo que la resultante del sistema sea nula y en tal caso el momento polar en todos los puntos del espacio es el mismo (expresión 6, cuando $\overline{R} = 0$)

Si denominamos (x_P, y_P, z_P) a las coordenadas cartesianas del punto P y (R_x, R_y, R_z) las componentes cartesianas de la resultante, las ecuaciones del eje central son por tanto:

$$\frac{x - x_P}{R_x} = \frac{y - y_P}{R_y} = \frac{z - z_P}{R_z} \qquad (16)$$

Invariantes del sistema

Se denomina invariantes de un sistema de vectores deslizantes a aquellas magnitudes, escalares o vectoriales, que son idénticas en todos los puntos del espacio. Invariantes existen infinitos, pero todos ellos pueden deducirse a partir de dos, que son los únicos independientes, el denominado invariante vectorial, que es la resultante $\overline{R}$ y el denominado invariante escalar, que es el producto escalar del momento polar por la resultante $\overline{G} \cdot \overline{R}$. Ambas magnitudes ya se demostró anteriormente que no dependen del punto elegido, por lo que efectivamente son invariantes del sistema.

Clasificación de sistemas

Los sistemas de vectores deslizantes se clasifican de acuerdo con el valor de sus invariantes. Así, podemos distinguir cuatro clases:

Clase I. Constituida por sístemas en los que ambos invariantes son distintos de cero:

$$\overline{R} \neq 0$$
$$\overline{G} \cdot \overline{R} \neq 0$$

Clase II. Constituida por sistemas en los que el invariante escalar es cero, pero la resultante no es nula:

$$\overline{R} \neq 0$$
$$\overline{G} \cdot \overline{R} = 0$$

Los sistemas de esta clase son tales que el momento polar en todos los puntos es siempre normal a la resultante. En los puntos del eje central en los que $\overline{G}$ y $\overline{R}$ deben ser paralelos, se llega a la conclusión de que el momento polar debe ser nulo. Entre ellos se encuentran los casos, de tanto interés en Mecánica, de sistemas de vectores concurrentes, sistemas planos y sistemas de vectores paralelos.

Clase III. Constituida por sistemas en los que la resultante es nula:

$$\overline{R} = 0$$

Obviamente, si la resultante es nula, el invariante escalar también tiene que ser cero: $\overline{R} \cdot \overline{G} = 0$. En esta clase de sistemas, tal como indicamos anteriormente el momento polar en todos los puntos del espacio es el mismo. Los sistemas de esta clase tienen momento polar distinto de cero:

$$\overline{G} \neq 0$$

Clase IV. Constituida por sistemas en los que tanto la resultante como el momento polar en todos los puntos del espacio son nulos:

$$\overline{R} = 0$$
$$\overline{G} = 0$$

En esta clase se incluyen los sistemas de fuerzas que actuan sobre un sólido rígido en Estática.

Equivalencia de sistemas

Se dice que dos sistemas de vectores deslizantes son equivalentes cuando el momento polar de ambos sistemas en todos los puntos del espacio es el mismo. Es decir, para todo punto P debe verificarse que

$$\overline{G}_P = \overline{G}'_P \qquad (17)$$

donde $\overline{G}_P$ es el momento polar en P del primer sistema y $\overline{G}'_P$ el del segundo.

Si dos sistemas son equivalentes, su resultante debe ser la misma.

En efecto, debe cumplirse la igualdad 17 para todo punto del espacio.

En particular, debe cumplirse también para otro punto Q:

$$\overline{G}_Q = \overline{G}'_Q$$

pero de acuerdo con la expresión 6 se tiene

$$\overline{G}_Q = \overline{G}_P + \overline{QP} \wedge \overline{R}$$
$$\overline{G}'_Q = \overline{G}'_P + \overline{QP} \wedge \overline{R}'$$

donde se denomina $\overline{R}$ y $\overline{R}'$ a las resultantes de los dos sistemas

Restando miembro a miembro las últimas expresiones resulta

$$\overline{QP} \wedge \left(\overline{R} - \overline{R}'\right) = 0$$

Esta expresión debe cumplirse para toda pareja de puntos P y Q del espacio. Es decir, debe cumplirse cuando $\overline{QP}$ es un vector cualquiera del espacio, lo cual implica $\overline{R} - \overline{R}' = 0$, o bien $\overline{R} = \overline{R}'$ c.q.d.

Viceversa, **si dos sistemas tienen igual resultante e igual momento polar en un punto, puede afirmarse que los sistemas son equivalentes.**

Es decir, se supone que $\overline{R} = \overline{R}'$ y que en un punto O se tiene $\overline{G}_O = \overline{G}'_O$. Para todo punto P del espacio, la expresión 6 indica que

$$\overline{G}_P = \overline{G}_O + \overline{PO} \wedge \overline{R}$$
$$\overline{G}'_P = \overline{G}'_O + \overline{PO} \wedge \overline{R}'$$

como $\overline{R} = \overline{R}'$ y $\overline{G}_O = \overline{G}'_O$, se deduce que $\overline{G}_P = \overline{G}'_P$, que es la condición para que los dos sistemas sean equivalentes.

Reducción de sistemas

Se denomina reducción de un sistema de vectores deslizantes a la operación de encontrar un sistema equivalente constituido por un menor número de vectores.

La importancia práctica de la reducción de sistemas es clara. En muchos campos de la Mecánica aparecen sistemas constituidos por un número elevado de vectores y en los que debe obtenerse el momento polar en un gran número de puntos. En estos casos, la reducción del sistema hasta tener un sistema equivalente constituido por uno, dos o tres vectores como máximo permite hallar el momento polar (que por definición es igual al del sistema inicial) con mucho menor esfuerzo de cálculo.

La reducción máxima de un sistema es distinta, dependiendo de la clase del mismo. Para sistemas de la clase I ($\overline{R} \neq 0$, $\overline{R} \cdot \overline{G} \neq 0$) el sistema más reducido está consituido por un vector deslizante $\overline{v}'$ igual a la resultante aplicado según una recta cualquiera y un par de vectores $\overline{v}_1'$ y $\overline{v}_2'$ (dos vectores iguales y de sentido contrario) cuyo momento polar $\overline{G}_O$ sea igual al momento polar del sistema original en los puntos tales como el O de la recta soporte del primer vector (ver figura 6).

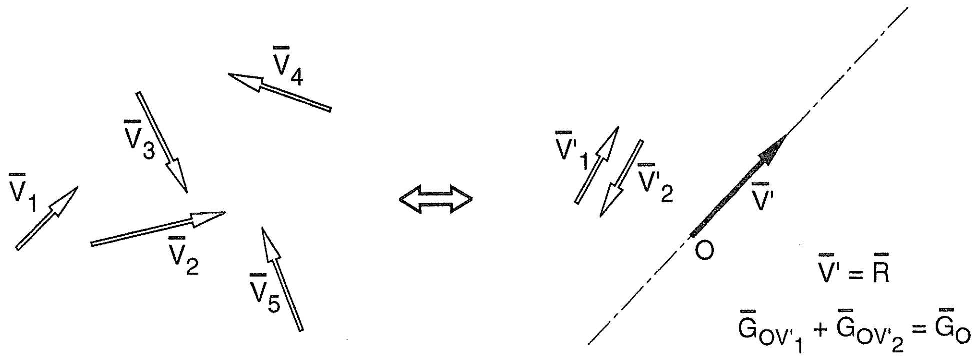

Figura 6

Tal como se ha definido, el sistema reducido tiene la misma resultante que el original y el mismo momento polar en el punto O, por tanto es equivalente al primero.

La reducción a un vector deslizante en un punto más un par es por tanto la reducción más general de los sistemas de la clase I. El sistema reducido es distinto dependiendo del punto en que se aplica el vector.

En el caso importantísimo de sistemas de la clase II, se puede realizar la reducción general a un sistema constituido por un vector y un par en un punto cualquiera. Como para esta clase se tiene $\overline{G} \cdot \overline{R} = 0$, el momento del par debe ser normal al vector. Sin embargo, se puede llevar a cabo una mayor reducción, si se elige como recta de aplicación del vector el eje central del sistema. En tal caso, como el momento polar es nulo, la reducción se limita a un solo vector deslizante igual a la resultante (ver figura 7).

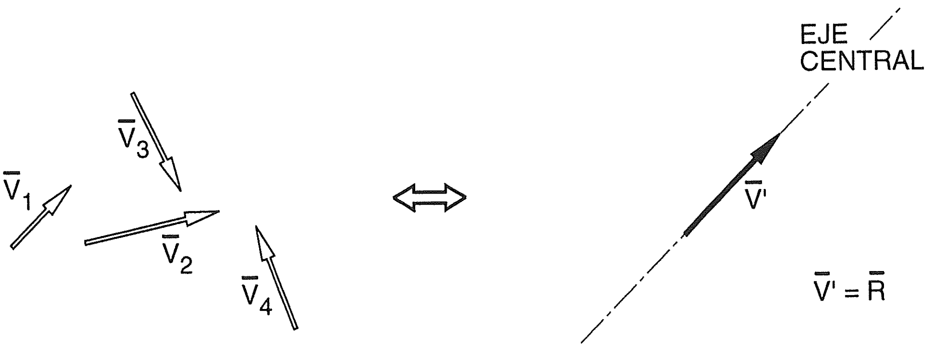

Figura 7

Para sistemas de la clase III, $\left(\overline{R} = 0\right)$ el sistema más reducido está constituido por un par de vectores cuyo momento polar sea igual al momento polar del sistema original, que es el mismo en todos los puntos del espacio (ver figura 8).

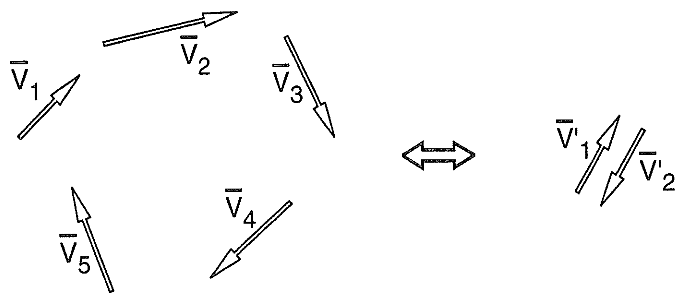

Figura 8

Finalmente, los sistemas de la clase IV $\left(\overline{R} = 0\,, \overline{G} = 0\right)$ se reducen a cero, es decir a un sistema sin ningún vector.