Trabajo y Energía

POR

Álvaro García López

Resumen

En este capítulo se desarrollan los métodos energéticos, que resultan tremendamente útiles en el estudio de la mecánica clásica. En particular, se introducirá al alumno al estudio del potencial para campos conservativos, además del teorema de las fuerzas vivas y el teorema general de la energía, del que se desprende la conservación de la energía mecánica.

1 Introducción

El concepto de energía fue introducido en la física por Aristóteles, si bien el uso que hacemos de él hoy en día data de la revolución industrial. Lo presentó Thomas Young en una disertación en 1803, remplazando el concepto de *vis viva* (fuerza viva), utilizado anteriormente por Leibniz para referirse a la energía cinética de los cuerpos. Desde una perspectiva cinemática, la **energía en acto** puede asociarse de forma intuitiva a cuan rápido es el movimiento de un sistema o, dicho de forma algo más imprecisa, a si se mueve mucho o se mueve poco. Si además en el mismo existe un campo de fuerzas y el movimiento es posible, podemos hablar de **energía en potencia**. Durante el movimiento del cuerpo se observará permanentemente la tendencia del mismo a transformar energía en potencia en energía en acto y viceversa. Además, en el caso de sistemas **conservativos o reversibles**, se verá que la energía total en el proceso de conversión de una forma a otra se preserva. Esto es, existe un **balance** entre las mismas. Sin embargo, en otros sistemas, conocidos como **disipativos o irreversibles**, en los que hay presentes fuerzas de rozamiento, se comprueba la existencia de pérdidas de energía mecánica, que es disipada al entorno en forma de calor o transformada en energía cinética interna de los constituyentes que forman el cuerpo. En la física clásica, y hablando de forma muy estricta, todos los sistemas en los que participan fuerzas fundamentales (electromagnética, gravitatoria, etc.) de forma dinámica son disipativos, yendo el proceso acompañando de pérdidas de energía en forma de **radiación** (electromagnética, gravitatoria, etc.).

Para mayor claridad, ilustremos estas ideas con la caída de un grave desde el reposo. Inicialmente, el centro de masas del cuerpo carece de energía en forma de movimiento. Sin embargo, debido a la existencia de un campo gravitatorio, tiene energía potencial. A medida que el cuerpo se precipita hacia el suelo por la vertical, se va actualizando la energía potencial, esto es, se transforma en energía cinética. Finalmente, el cuerpo colisiona con el suelo y pierde toda su energía cinética, que es transferida al movimiento interno de las moléculas del material del firme y de las que consituyen el propio cuerpo, con el consiguiente aumento de la temperatura de ambos.

2 Trabajo y Potencia

El concepto moderno de energía requiere la introducción, en primera instancia, del concepto de trabajo. El trabajo W es un concepto de naturaleza dinámica (si bien puede introducirse en términos cinemáticos através de la segunda ley de Newton), es decir, aparece siempre vinculado a alguna fuerza. Si la fuerza es constante y el desplazamiento ocurre a lo largo de una línea recta, se define como la fuerza $\boldsymbol{F}$ realizada **en la dirección del movimiento** por el desplazamiento realizado entre dos puntos $\Delta\boldsymbol{r}$, según la ecuación

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r} = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z = F\,\Delta s\cos\alpha = F_t\,\Delta s, \tag{1}$$

donde α es el ángulo que forma la fuerza con el vector desplazamiento. En otras palabras, el trabajo es la fuerza realizada en la dirección tangencial por la distancia recorrida.

Intuitivamente, si se desplaza un cuerpo, por ejemplo, una caja en una mudanza, resulta evidente pensar que el trabajo realizado es mayor cuanto más lejos se halle el piso nuevo del antiguo. Así mismo, cuanto más pese la caja, mayor será el esfuerzo por unidad de longitud (ver Fig. 1).

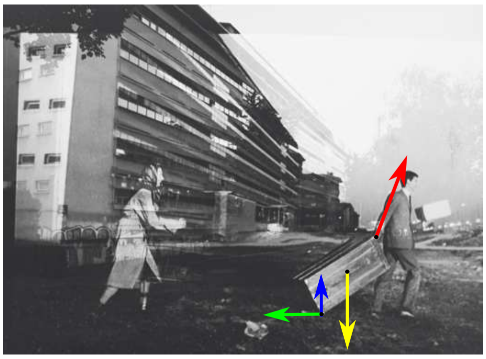

Figura 1. Anthony Perkins arrastrando un baúl por un descampado en la película «El proceso», basada en la novela homónima de Kafka y dirigida por Orson Welles. Las fuerzas del peso (amarillo), la normal (azul) y el rozamiento (verde). En rojo la fuerza con la que tira el hombre del baúl. Se observa claramente como, cuanto mayor peso, mayor es la fuerza normal y mayor es también la fuerza de rozamiento. Por lo tanto, mayor componente tangencial de la fuerza con la que ha de tirar el hombre. Nótese que, dado que el baul no rota, el torque neto ha de ser nulo.

Ahora bien, si la fuerza no es constante a lo largo de la trayectoria, podemos aproximar dicha trayectoria mediante desplazamientos muy pequeños rectilíneos, de la misma forma en que lo hicimos al calcular la longitud de arco de una curva (ver Fig. 2). Posteriormente, calculamos el trabajo diferencial hecho en cada tramo y los sumamos

$$W \approx \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_i)\cdot\Delta\boldsymbol{r}_i.$$

En el límite en el que los desplazamientos sean infinitamente pequeños (infinitesimales) e infinitos en número ($N\to\infty$, $\Delta\boldsymbol{r}_i\to 0$), la curva aproximada mediante segmentos coincidirá con la curva suave original y obtendremos la expresión integral

$$\boxed{W_{AB} = \int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}}, \tag{2}$$

donde se ha introducido la posición inicial $\boldsymbol{r}_A$ y la final $\boldsymbol{r}_B$ de la curva a lo largo de la cual nos movemos. Estrictamente hablando, el trabajo depende del trayecto, de manera que podemos definir $W_{AB}\equiv W(A\to B,\gamma)$, donde γ denota la curva particular a lo largo de la cual se mueve el cuerpo. Esta integral se denomina **integral de línea**, dado que se realiza el proceso de integración a lo largo de una línea curva cualquiera. Es importante resaltar que, en general, depende de los pasos intermedios del trayecto. Se dice entonces que el trabajo es una **función de proceso**. El trabajo se mide en Julios (J) y tiene dimensiones $[W] = ML^2T^{-2}$.

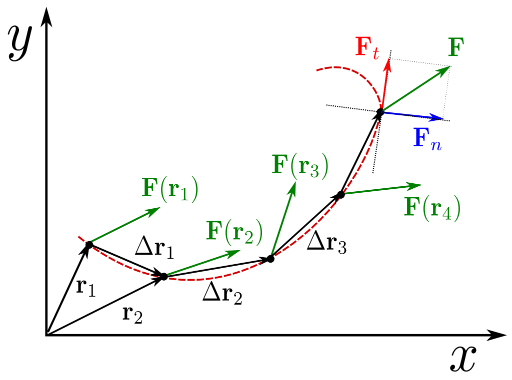

Figura 2. Una curva aproximada mediante segmentos. Una fuerza dada actúa en cada tramo, realizando un trabajo $W_i = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_i)\Delta\boldsymbol{r}_i$. La suma de todos ellos aproxima el trabajo total realizado .

Si separamos la fuerza en sus componentes tangencial y normal al movimiento $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_t + \boldsymbol{F}_n$, podemos escribir el trabajo como

$$W_{AB} = \int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B} \boldsymbol{F}_t(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B} \boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B} \boldsymbol{F}_t(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{s_A}^{s_B} F_t(s)\, ds. \tag{3}$$

En otras palabras, las componentes de la fuerza que son perpendiculares al desplazamiento no realizan trabajo. A las fuerzas que operan en la dirección del movimiento realizando trabajo se les denomina **fuerzas vivas**, mientras que las fuerzas perpendiculares al mismo se pueden denominar **fuerzas muertas**. Según la expresión anterior, es plausible calcular el trabajo como el área subtendida por el gráfico que resulta al representar la componente tangencial de la fuerza F_t frente a la longitud recorrida, tal y como se muestra en la Fig. 3. Resulta interesante notar que es posile definir la componente de la fuerza en una dirección dada a partir del trabajo realizado por unidad de longitud

$$\boxed{F_t(s) = \frac{dW}{ds}}, \tag{4}$$

expresión que resulta útil en ocasiones para calcular el valor de las fuerzas vivas.

Generalmente, las trayectorias de integración son complicadas, por lo que es necesario o preferible considerar una parametrización de la curva $\boldsymbol{r}(t)$ en el tiempo, para escribir el diferencial de posición en términos de la velocidad $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}(t)dt$, transformando la integral de línea en una integral sencilla en la variable temporal

$$\boxed{W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{v}(t)\, dt}. \tag{5}$$

Luego basta saber hacer un producto escalar y una integral de una variable para computar trabajos a lo largo de curvas tan complicadas como se quiera, siempre que se conozca la trayectoria que recorre el cuerpo, claro está. Es más, si ahora consideramos el trabajo infinitesimal realizado en un lapso de tiempo infinitesimal $[t, t+dt]$, obtenemos que

$$dW = (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v})\, dt.$$

A partir de esta expresión podemos definir la tasa con la que se realiza trabajo, esto es, cuanto trabajo se está realizando por unidad de tiempo. Este concepto recibe el nombre de **potencia** y puede calcularse de forma sencilla mediante la expresión

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}}. \tag{6}$$

Se recuerda que la potencia se mide en wattios (W) y, por lo tanto, tiene dimensiones $[P] = ML^2T^{-3}$. Finalmente, de la ecuación (4) se deduce que, cuando la fuerza se opone al vector unitario tangente a la curva, la potencia es negativa, mientras que si va en la dirección del mismo, es positiva. Más concretamente, si consideramos $\alpha(t)$ el ángulo que forman $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))$ y $\boldsymbol{v}(t)$ en cada instante de tiempo, de tal forma que $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = F \cdot v \cdot \cos\alpha$, tenemos los tres casos

1. $0 < \alpha < \pi/2$, el cuerpo acelera.
2. $\pi/2 < \alpha < \pi$, el cuerpo decelera.
3. $\alpha = \pi/2$, no se realiza trabajo.

Ejercicio 1. Calcular el trabajo realizado por una partícula de masa $m = 1\text{kg}$, que se mueve por una elipse según el vector posición $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t, \sin t)$ m, para ir desde el punto $(2, 0)$ hasta el punto $(0, 1)$. ¿Cual es la potencia en un instante dado de tiempo t s?.

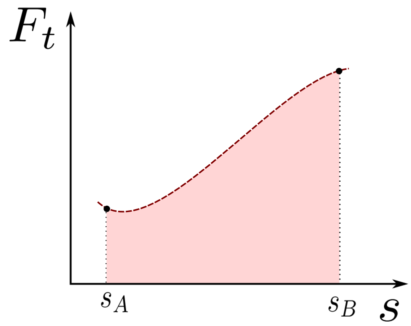

Figura 3. Representación del la fuerza viva frente a la distancia recorrida. El trabajo resulta ser el área subtendida por la función $F_t(s)$. Esta representación es típica en el estudio de la termodinámica. En el caso de un sistema cilindro-pistón, la componente tangencial de la fuerza es divida por el área y la longitud de arco multiplicada por la misma. Se obtiene así un diagrama $P - V$, siendo el trabajo realizado el área subtendida por la función $P(V)$.

3 Energía

La energía de un cuerpo se define como **la capacidad del mismo para realizar trabajo**. El trabajo producido o consumido consistirá sencillamente en un intercambio entre dos tipos de energías, tal y como se vio con los ejemplos anteriores. Todos los tipos de energía, ya sea química, nuclear, solar, muscular, etc., puede reducirse a dos casos fundamentales, como son la energía cinética y la energía potencial. La suma de ambas recibe el nombre de energía mecánica. Como se verá más adelante, en cualquier discplina científica lo ideal para comprender los conceptos energéticos es referir todo a estos dos casos esenciales. Conviene aclarar que, en el caso de las teorías relativistas, existe un tercer tipo de energía, asociada a la masa en reposo, de acuerdo con la ecuación de Einstein $E = mc^2$.

3.1 Energía cinética

La energía cinética se define como

$$\boxed{E_c(t) = \frac{1}{2} m\boldsymbol{v}^2(t)}. \tag{7}$$

En primer lugar véase que hemos introducido la energía cinética como dependiente del tiempo, pues puede cambiar según cambie la velocidad. Nótese además que, al igual que sucedía con el momento lineal, depende también de la masa. Por lo tanto, es un concepto que no solo incluye la actividad o movimiento del cuerpo, sino también la inercia, que era la resistencia a ser acelerado. Es decir, que representa **cuanto ha costado poner al cuerpo en movimiento desde el reposo** a la velocidad dada en ausencia de otras fuerzas.

3.2 Energía potencial

La energía potencial resulta más complicada de definir en general, pero es relativamente sencillo en el caso de **campos conservativos**. En este caso, si la fuerza la escribimos de la forma $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$, siendo $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ el vector posición, tenemos que la energía potencial se puede expresar de la forma

$$\boxed{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla E_p(\boldsymbol{r})}, \tag{8}$$

donde el **operador nabla** ∇ aplicado a una función escalar se denomina **gradiente** de dicha función. Dada cualquier función f de las coordenadas espaciales $f(x, y, z)$, el vector gradiente se escribe matemáticamente de la forma

$$\nabla \cdot f(\boldsymbol{r}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right), \tag{9}$$

donde las derivadas respecto de x, y y z son derivadas parciales (se deriva sólo la variable especificada, dejando el resto constantes). La interpretación del vector gradiente de f es la de un vector perpendicular a las superficies de nivel, que son aquellas superficies para las cuales la función es constante $f(x, y, z) = \text{cte}$. En el caso de tener campos, el gradiente del potencial nos da el vector campo que es tangente a las **líneas de fuerza** del campo y que representan la trayectoria que una partícula que participa de la interacción seguiría si fuera soltada en dicho punto. Dicho campo es perpendicular a las **superficies equipotenciales** y, por lo tanto, también lo es el gradiente.

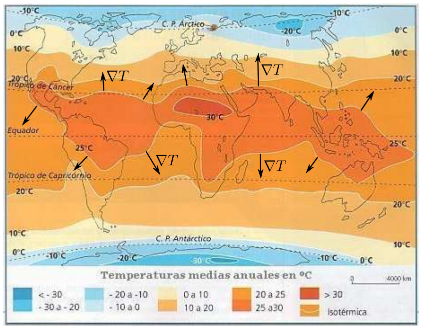

Figura 4. Mapa de temperaturas en el plano XY con las lineas isotermas. Se muestran el vector grandiente de temperaturas en distintos puntos de una isoterma dada, observándose que es perpendicular al espacio tangente en cada punto de la misma.

Un ejemplo típico donde se ve muy bien el significado del gradiente es un mapa de temperaturas, tal y como se muestra en la Fig. 4. Supongamos que trabajamos en dos dimensiones. La temperatura varía con la posición en el plano $T(x, y)$. Podemos dibujar las curvas a temperatura constante como $T(x,\ y) = \text{cte.}$, también conocidas como isotermas. Finalmente, el gradiente de temperaturas $\nabla T = (\partial T \,/\, \partial x,\ \partial T \,/\, \partial y)$ nos dice las direcciones perpendiculares (o normales) a la dirección tangente a dichas isotermas en cada punto, dándonos **la dirección de máxima variación** de la temperatura en un punto dado. Finalizamos con un ejemplo concreto. Considérese que el campo de temperaturas es de la forma $T(x, y) = x^2$, de manera que la temperatura aumenta según aumentamos en el eje X, pero no depende del eje Y. Entonces las isotermas son curvas que verifican $x = \text{cte}$. Éstas son paralelas al eje Y, de tal modo que el gradiente va en la dirección

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 2x, \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \Rightarrow \nabla T = (2x, 0),$$

esto es, a lo largo del eje X y siendo cada vez más intenso. Si existieran partículas que transfirieran el calor, estas se moverían en la dirección del eje X de mayor a menor temperatura (de derecha a izquierda, si fijamos derecha como positivo), al igual que una partícula cargada va de puntos de mayor a menor energía potencial.

A partir de la expresión anterior, es posible calcular la energía potencial a partir del campo de fuerzas

$$\boxed{\Delta E_p = E_p(\boldsymbol{r}_B) - E_p(\boldsymbol{r}_A) = -\int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r}}. \tag{10}$$

Por ser este un curso de física de primero, trabajaremos en una sola dimensión, evitando el uso de gradientes. En el caso de que el movimiento tenga lugar en el eje X, tenemos que

$$\boldsymbol{F}(x) = -\frac{dE_p}{dx}\boldsymbol{i}, \tag{11}$$

mientras que a la inversa se lee

$$E_p(x) = E_p(0) - \int_0^x \boldsymbol{F}(x) \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Dado que los campos con los que trabajaremos serán el campo gravitatorio constante y la fuerza elástica, procedemos a calcularlos de forma explícita en esta sección, para que no haya lugar a la confusión del procedimiento. En el caso del campo gravitatorio constante en el eje Z, tenemos que la fuerza que experimental un cuerpo de masa m viene dada por el peso $\boldsymbol{P} = -mg\boldsymbol{k}$. Podemos calcular la energía potencial a partir de un punto original (el origen de alturas) y un punto genérico z. Recordando que le vector $d\boldsymbol{r} = (dx, dy, dz)$, tenemos que

$$\Delta E_p = -W,$$

con lo que

$$E_p(z) - E_p(0) = -\int_0^z \boldsymbol{P} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_0^z (0, 0, -mg) \cdot (dx, dy, dz) = mg\int_0^z dz = mgz.$$

Por lo tanto, la energía potencial asociada al peso es

$$E_p(z) = E_p(0) + mgz.$$

El **origen de potenciales** se puede fijar arbitrariamente, porque en la ecuación (12) se puede añadir siempre una constante, cuya derivada es cero. En el caso más sencillo $E_p(0) = 0$, con lo cual la **energía potencial gravitatoria** para un campo uniforme queda de la forma

$$\boxed{E_p(z) = mgz}. \tag{12}$$

Ahora consideremos el caso de la ley de Hooke. Es decir, calculemos la energía potencial asociada a un muelle en el eje X, de modo que $\boldsymbol{F}(x) = -k(x - x_{\text{eq}})\boldsymbol{i}$. En este caso convendrá integrar entre el punto de equilibrio y un punto genérico. Tenemos entonces que

$$E_p(x) - E_p(x_{\text{eq}}) = -\int_{x_{\text{eq}}}^x \boldsymbol{F}(x) \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{x_{\text{eq}}}^x (-k(x - x_{\text{eq}}), 0, 0) \cdot (dx, dy, dz) = k\int_{x_{\text{eq}}}^x (x - x_{\text{eq}})dx,$$

con lo que el resultado final para la **energía potencial elástica** será

$$\boxed{E_p(x) = \frac{1}{2}k\,(x - x_{\text{eq}})^2}, \tag{13}$$

considerando que $E_p(x_{\text{eq}}) = 0$.

Todas las interacciones fundamentales tienen asociada su propia energía potencial en el caso de problemas de **cuerpos estáticos**: la electromagnética, la gravitatoria, la nuclear débil y la nuclear fuerte. La energía potencial asociada a las mismas en su expresión más general se escribe de la forma

$$\boxed{E_p(r) = \kappa\,\frac{e^{-m_p r}}{r}}, \tag{14}$$

donde κ es una **constante de acoplamiento** que depende de las propiedades de los cuerpos que intervienen en la interacción y m_p es la masa del **portador** de la interacción. Por ejemplo, para el campo gravitatorio se tiene que la masa del gravitón es nula $m_p = 0$ y la constante es $\kappa = -Gm_1m_2$, siendo m_1 y m_2 la masa de los cuerpos que se atraen (signo menos) mutuamente. Por lo tanto, la energía potencial gravitatoria se escribe como

$$E_p(r) = -G\,\frac{m_1 m_2}{r},$$

como se muestra en la Fig. 5. De aquí es inmediato obtener la **ley de gravitación universal** por medio del gradiente, que en este caso es

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\frac{dV}{dr}\boldsymbol{u}_r = -G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\boldsymbol{u}_r.$$

Ejercicio 2. Calcúlese la fuerza asociada a la interacción débil, sabiendo que que la masa de los portadores es no nula.

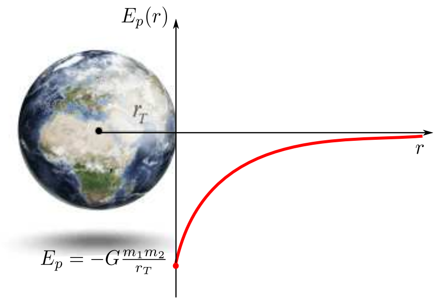

Figura 5. El potencial gravitatorio $E_p(r)$ frente a la distancia r para el planeta tierra.

De la expresión de la energía potencial expuesta anteriormente se pueden extraer dos conclusiones, que son equivalentes a la defininción de campo conservativo:

i. El trabajo realizado por un campo de fuerzas conservativo es igual a la diferencia de energías potenciales entre el punto final y el inicial, cambiado de signo. Para demostrarlo basta considerar la anterior expresión, obteniendo

$$\boxed{W_{AB} = -\Delta E_p} = -E_p(\boldsymbol{r}_B) + E_p(\boldsymbol{r}_A). \tag{15}$$

Este principio viene a decir que para campos conservativos el trabajo es una **función de estado** y no de proceso. Esto es, **no importa cual sea la trayectoria que une dos puntos, el trabajo realizado por la fuerza es siempre el mismo entre ambos**.

ii. El trabajo realizado por un campo de fuerzas conservativo a lo largo de una trayectoria cerrada es nulo. Para demostrarlo, basta considerar que a lo largo de una trayectoria cerrada se cumple $\boldsymbol{r}_B = \boldsymbol{r}_A$ e introducirlo en la anterior ecuación. Se escribe de la forma

$$\oint \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r} = 0,$$

donde el círculo denota que integramos a una trayectoria cerrada.

3.3 Trabajo en campos no conservativos

Finalmente, en el caso de campos **no conservativos**, como por ejemplo el campo magnético, **no es posible expresar el campo como gradiente de un potencial**. Tal es el caso también de las fuerzas de rozamiento, que dependen de la velocidad (o del vector unitario tangente, que viene a ser lo mismo) y de las fuerzas de arrastre. Estos campos se denominan **campos disipativos** y siempre realizan un trabajo negativo, puesto que se oponen al movimiento.

Por ejemplo, si consideramos una caja cayendo por un plano inclinado α grados respecto de la horizontal, el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es

$$W_R = \int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B} \boldsymbol{F}_R \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B} (-\mu g \cos\alpha, 0) \cdot (dx, dy) = -\mu g \cos\alpha \Delta x = -\mu g \cot\alpha H,$$

cuyo valor es siempre negativo, dado que $\alpha \in (0, \pi/2]$ y $H > 0$ es la altura desde la que baja el cuerpo.

3.4 Tipos de energía a nivel macroscópico

Es preciso exponer aquí de una manera cualitativa como ciertos tipos de energía, comúnmente usados en el estudio de la termodinámica y de la química, se relacionan con los casos fundamentales expuestos en previos apartados, según la mecánica estadística. Por ejemplo, la temperatura de un cuerpo es, salvo una constante, la energía cinética media de los átomos o moléculas que lo conforman. Cuanto mayor es la **temperatura** T del sólido cristalino, por ejemplo, puede pensarse que mayores son las oscilaciones de los átomos que conforman la red. La suma de la energía cinética y potencial medias de las moléculas que forman una substancia, se denomina **energía interna** U de dicha substancia. La **energía libre** de un sistema físico es la máxima energía que podemos extraer en forma de trabajo. El **calor** Q puede entenderse como el **flujo de energía** entre dos sistemas y puede relacionarse con un equivalente mecánico, en términos de trabajo disipado. La capacidad de un cuerpo para absorber energía sin modificar su temperatura, se denomina **capacidad calórifica** C. Ésta aumenta cuanto mayor es la inercia debida a la masa, de tal manera que es posible asumir mayores cantidades de energía por la substancia sin modificar su energía cinética media. Se habla así de **inercia térmica**. Así mismo, se define el **calor específico** c, que es capacidad calorífica por unidad de masa. Este último nos da una idea de cuanta energía es capaz de asumir una substancia en forma de energía potencial, sin modificar su energía cinética. Esto es, de incrementar su energía interna sin aumentar su temperatura. El flujo de energía en forma de calor se dirige, según la **ley de Fourier**, en la dirección del gradiente de temperaturas y en sentido opuesto a éste, de tal suerte que las regiones más calidas se enfrían y viceversa.

4 Teorema de las fuerzas vivas

Demostraremos ahora el teorema de las fuerzas vivas, que viene a relacionar el trabajo total realizado sobre un sistema con la variación de energía cinética. Puede enunciarse de la siguiente manera:

"El trabajo neto realizado sobre un cuerpo masivo cualquiera es igual a la variación de energía cinética entre los estados inicial y final"

Al ser el trabajo neto, se incluyen todas las fuerzas que actúen sobre el sistema. Esto puede escribirse matemáticamente de la forma

$$\boxed{W_{AB} = \Delta E_c}, \tag{16}$$

donde se considera el trabajo realizado entre el punto $\boldsymbol{r}_A$ y el $\boldsymbol{r}_B$. Para demostrarlo, basta considerar la definición de trabajo y realizar un cambio de variable. Partimos de la ecuación

$$W_{AB} = \int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = m\int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = m\int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B} \boldsymbol{a}_t \cdot d\boldsymbol{r} + m\int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B} \boldsymbol{a}_n \cdot d\boldsymbol{r} = m\int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B} \boldsymbol{a}_t \cdot d\boldsymbol{r},$$

donde se ha considerado la segunda ley de Newton, la descomposición de la aceleración en sus componentes intrínsecas (normal y tangencial) y el hecho de que $\boldsymbol{a}_n \perp d\boldsymbol{r}$, por lo que la segunda integral es cero. En otras palabras, la componente normal no realiza trabajo, estando asociada a fuerzas en la dirección perpendicular al movimiento (generalmente fuerzas de ligadura). Ahora basta tener en cuenta que los dos vectores de la integral apuntan en la misma dirección, con lo que $\boldsymbol{a}_t \cdot d\boldsymbol{r} = a_t \cdot ds$, y realizar un cambio de variable, de tal suerte que

$$W_{AB} = m\int_{s_A}^{s_B} a_t(s) \cdot ds = m\int_{s_A}^{s_B} \frac{dv}{dt} \cdot ds = m\int_{v_A}^{v_B} dv \cdot \frac{ds}{dt} = m\int_{v_A}^{v_B} v dv = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2, \tag{17}$$

tal y como se quería demostrar. El cambio de variable se ha realizado de la variable longitud de arco s, a la variable módulo de la velocidad v.

5 Teorema general de la energía

Para concluir con este capítulo, demostraremos que el trabajo realizado por las fuerzas disipativas es equivalente a la variación de energía mecánica. Este teorema puede enunciarse de la forma siguiente:

"El trabajo neto realizado por las fuerzas no conservativas sobre un cuerpo masivo cualquiera es igual a la variación de energía mecánica entre los estados inicial y final"

Deduciremos del mismo la conservación de la energía mecánica en el caso de que todas las fuerzas que actúan sobre el sistema sean conservativas. Para demostrar este teorema, partimos del teorema anterior, y descomponemos la fuerza total que actúa sobre el cuerpo $\boldsymbol{F}_{\text{tot}}$ en la suma fuerzas conservativas $\boldsymbol{F}_c$ y fuerzas no conservativas $\boldsymbol{F}_{nc}$. Si se quiere, puede verse este teorema como un corolario del teorema anterior. Se tiene que

$$\Delta E_c = W_{AB} = \int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B} \boldsymbol{F}_{nc}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B} \boldsymbol{F}_c(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}. \tag{18}$$

Ahora bien, se demostró previamente que el trabajo realizado por las fuerzas conservativas viene dado por la variación de energía potencial cambiada de signo. Es decir, que se tiene

$$\int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B} \boldsymbol{F}_c(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = -\Delta E_p. \tag{19}$$

Por lo tanto obtenemos que

$$W_{AB}^{(nc)} = \int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B} \boldsymbol{F}_{nc}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \Delta E_c + \Delta E_p. \tag{20}$$

De donde resulta las sencilla expresión

$$\boxed{W_{AB}^{(nc)} = \Delta E_m}, \tag{21}$$

siendo E_m la energía mecánica. Nótese el poderío de este último teorema, que nos permite calcular el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas sin conocer los estados intermedios del proceso. Ello no quiere decir que dicho trabajo sea función de estado, dado que la variación de energía cinética depende de las velocidades inicial y final, y la trayectoria particular influirá en dichos valores. Como colofón, recordamos que, para sistemas que funcionen cíclicamente, la disipación a lo largo de un ciclo es igual a la variación de energía cinética

$$W_{\text{ciclo}}^{(nc)} = \oint \boldsymbol{F}_{nc}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \Delta E_c. \tag{22}$$

Si expresamos esta integral en términos de la variable temporal, podemos relacionar las pérdidas a lo largo del ciclo con la **potencia media disipada**, de la forma

$$P_m = \frac{1}{T} \oint P(t) dt = \frac{1}{T} \oint \boldsymbol{F}_{nc}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{v} \cdot dt = \frac{W_{\text{ciclo}}^{(nc)}}{T}. \tag{23}$$

El corolario más importante de este teorema es que **en ausencia de fuerzas de disipación se conserva la energía mecánica** $\Delta E_m = 0$. Este principio será utilizado en numerosos problemas en los que no intervengan fuerzas no conservativas.

Ejercicio 3. Calcular la energía perdida por ciclo $t \in [0, 2\pi]$ para una masa de un kilogramo que lleva un movimiento en espiral logarítmica, según el vector posición $\boldsymbol{r}(t) = e^{-t}(\cos t, \sin t)$.