Capítulo 3

Compacidad

3.1. Espacios compactos

Sea X un espacio topológico. Diremos que una colección $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es un *recubrimiento* de X si

$$X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda.$$

Si U_λ es abierto para todo $\lambda \in \Lambda$ diremos que $\mathcal{U}$ es un *recubrimiento abierto* de X. Por otro lado, diremos que la colección $\mathcal{U}' = \{U'_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es un *subrecubrimiento* de $\mathcal{U}$ si $\mathcal{U}'$ es un recubrimiento de X tal que $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$.

Definición 3.1.1. Sea X un espacio topológico. Diremos que X es *compacto* si todo recubrimiento abierto de X admite un subrecubrimiento finito.

Ejemplos

1. Todo espacio indiscreto X es compacto.

   En efecto, si $\mathcal{U}$ es un recubrimiento abierto de X, entonces $X \in \mathcal{U}$ y, por tanto, $\mathcal{U}' = \{X\}$ es un subrecubrimiento finito de X.

2. Todo espacio finito X es compacto ya que todo recubrimiento abierto de X es finito.

3. Sea X un espacio discreto. X es compacto si y solo si X es finito.

   "$\Rightarrow$" Considremos el recubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{\{x\}\}_{x\in X}$ de X. Como X es compacto, $\mathcal{U}$ admite un subrecubrimiento finito $\mathcal{U}' = \{\{x_i\}\}_{i=1,\ldots,n}$ de donde se sigue que $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

   "$\Leftarrow$" Es una consecuencia directa del ejemplo anterior.

4. El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales dotado de la topología usual no es compacto.

   En efecto, el recubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{(-n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ no admite ningún subrecubrimiento finito.

5. $\mathbb{R}^n$ con la topología usual no es compacto (Ejercicio).

Sea X un espacio topológico y $A \subset X$ un subespacio. Diremos que $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es un recubrimiento de A por abiertos de X si U_λ es abierto en X para cada $\lambda \in \Lambda$ y

$$A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda.$$

Proposición 3.1.2. *Sea X un espacio topológico y $A \subset X$ un subespacio. Entonces, A es compacto si y solo si todo recubrimiento de A por abiertos de X admite un subrecubrimiento finito.*

Demostración. Ejercicio. □

Ejemplos

1. Consideremos en $\mathbb{R}$ con la topología usual el subconjunto

   $$A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

   A no es compacto ya que A es un subespacio discreto de $\mathbb{R}$ que tiene infinitos elementos. Sin embargo $\overline{A} = A \cup \{0\}$ es compacto. En efecto, sea $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ un recubrimiento de A por abiertos de $\mathbb{R}$. Sea $U_{\lambda_0} \in \mathcal{U}$ tal que $0 \in U_{\lambda_0}$. Como U_{λ_0} es un entorno de 0 y la sucesión $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $1/n \in U_{\lambda_0}$. Para cada $n < n_0$ escogemos $U_{\lambda_n} \in \mathcal{U}$ tal que $1/n \in U_{\lambda_n}$. Por construcción $\mathcal{U}' = \{U_{\lambda_i}\}_{i=0,\ldots,n_0-1}$ es un subrecubrimiento finito de $\mathcal{U}$ y, por tanto, $\overline{A}$ es compacto.

3.2. Compacidad y aplicaciones continuas

Teorema 3.2.1. *Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Si X es compacto, entonces $f(X)$ es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ un recubrimiento de $f(X)$ por abiertos de Y. Como f es continua, para cada $\lambda \in \Lambda$, $V_\lambda = f^{-1}(U_\lambda)$ es abierto en X y

$$X = f^{-1}(f(X)) = f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(U_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda.$$

Como consecuencia $\mathcal{V} = \{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es un recubrimiento abierto de X y, puesto que X es compacto, $\mathcal{V}$ admite un subrecubrimiento finito $\mathcal{V}' = \{V_{\lambda_i}\}_{i=1,\ldots,n}$. Como consecuencia,

$$\begin{aligned} f(X) = f(V_{\lambda_1} \cup \ldots \cup V_{\lambda_n}) = f(V_{\lambda_1}) \cup \ldots \cup f(V_{\lambda_n}) = \\ f(f^{-1}(U_{\lambda_1})) \cup \ldots \cup f(f^{-1}(U_{\lambda_n})) \subset U_{\lambda_1} \cup \ldots \cup U_{\lambda_n} \end{aligned}$$

y, por tanto, $\mathcal{U}' = \{U_{\lambda_i}\}_{i=1,\ldots,n}$ es un subrecubrimiento finito de $\mathcal{U}$ lo que garantiza la compacidad de $f(X)$. □

Corolario 3.2.2. *La compacidad es una propiedad topológica.*

Corolario 3.2.3. *Todo cociente de un espacio topológico compacto es compacto.*

3.3. Compacidad de los intervalos

Teorema 3.3.1. *El intervalo* $[0,1]$ *con la topología usual es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ un recubrimiento abierto de $[0,1]$. Se define

$$C = \{x \in [0,1] \mid [0,x] \text{ está recubierto por un número finito de abiertos de } \mathcal{U}\}$$

El conjunto $C \neq \emptyset$ ya que $0 \in C$. Además, dado que $C \subset [0,1]$ se tiene que C está acotado superiormente. Sea $c = \sup C$. Obsérvese que, como $C \subset [0,1]$ y $[0,1]$ es cerrado se tiene que $c \in [0,1]$. Veamos que $c = 1$. Supongamos, razonando por reducción al absurdo, que $c < 1$ y sea $U_{\lambda_c} \in \mathcal{U}$ tal que $c \in U_{\lambda_c}$. Como U_{λ_c} es abierto en $[0,1]$ y $c < 1$ se tiene que existe $\varepsilon > 0$ tal que $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset U_{\lambda_c}$. Sea $d \in (c, c+\varepsilon)$. Veamos que $d \in C$. Puesto que $c = \sup C$ se tiene que existe $b \in C$ tal que $c - \varepsilon < b \leq c$. Como consecuencia, existen $U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_n} \in \mathcal{U}$ tales que

$$[0,b] \subset U_{\lambda_1} \cup \ldots \cup U_{\lambda_n}$$

y, dado que $[b,d] \subset U_{\lambda_c}$, se tiene que

$$[0,d] \subset U_{\lambda_1} \cup \ldots \cup U_{\lambda_n} \cup U_{\lambda_c}.$$

Por consiguiente, $d \in C$ lo que contradice que $c = \sup C$. Entonces $c = 1$, lo que garantiza la compacidad de $[0,1]$. □

Corolario 3.3.2. *S^1 es compacto.*

En general si $J \subset \mathbb{R}$ es un intervalo existen tres opciones:

1. Si J es un intervalo cerrado se tiene que $J \approx [0, 1]$ y, dado que la compacidad es una propiedad topológica se tiene que J es compacto.

2. Si J es un intervalo abierto entonces $J \approx \mathbb{R}$ y, puesto que $\mathbb{R}$ no es compacto se tiene J no es compacto.

3. En otro caso, $J \approx [0, 1)$ y $[0, 1)$ no es compacto ya que el recubrimiento abierto

$$\mathcal{U} = \{[0, 1 - 1/n)\}_{n \geq 2}$$

no admite ningún subrecubrimiento finito.

Corolario 3.3.3. *Los subconjuntos compactos y conexos de la recta real son los intervalos cerrados y los puntos.*

3.4. Subespacios compactos de espacios T_2

Proposición 3.4.1. *Sea X un espacio topológico compacto. Si $A \subset X$ es cerrado, entonces A es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un recubrimiento de A por abiertos de X. Puesto que A es cerrado, $X \setminus A$ es abierto y, como consecuencia, $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cup \{X \setminus A\}$ es un recubrimiento abierto de X. Como X es compacto, $\mathcal{V}$ admite un subrecubrimiento finito $\mathcal{V}' = \{U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_n}, X \setminus A\}$ y, por tanto, $\mathcal{U}' = \{U_{\lambda_i}\}_{i=1,\ldots,n}$ es un subrecubrimiento finito de $\mathcal{U}$ lo que garantiza la compacidad de A. □

Teorema 3.4.2. *Sea X un espacio topológico T_2 y $A \subset X$ un subconjunto compacto. Entonces A es cerrado en X.*

Demostración. Supongamos, razonando por reducción al absurdo, que A no es cerrado en X. Entonces, existe $x \in \overline{A} \setminus A$. Puesto que X es un espacio T_2 se tiene que dado $y \in A$ existen abiertos U_y y V_y disjuntos tales que $y \in U_y$ e $x \in V_y$. La colección $\mathcal{U} = \{U_y\}_{y \in A}$ es un recubrimiento de A por abiertos de X y, como A es compacto, $\mathcal{U}$ admite un subrecubrimiento finito $\mathcal{U} = \{U_{y_i}\}_{i=1,\ldots,n}$. Por otro lado, $x \in V = V_{y_1} \cap \ldots \cap V_{y_n}$ que es abierto en X y satisface que $V \cap A = \emptyset$ ya que en otro caso, $V \cap U_{y_i} \neq \emptyset$ para algún $i = 1, \ldots, n$ en contradicción con la elección de V. Esto contradice que $x \in \overline{A}$ y, por consiguiente, A es cerrado en X. □

Ejemplos

1. Si X es un espacio indiscreto con más de un elemento y $A \subsetneq X$ es un subconjunto no vacío entonces A es compacto. Sin embargo, A no es cerrado ya que $X \setminus A$ es distinto del vacío y del total.

2. Si X no es T_1 los conjuntos unipuntuales son compactos pero no son cerrados.

3. Consideremos en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales la topología cofinita τ_{CF} y sea $A \subset \mathbb{R}_{CF}$ un subconjunto. Entonces A es compacto.

   En efecto, sea $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ un recubrimiento de A por abiertos de $\mathbb{R}_{CF}$. Fijado $U_{\lambda_0} \in \mathcal{U}$, dado que $\mathbb{R}_{CF} \setminus U_{\lambda_0}$ es finito se tiene que existen a lo sumo un número finito de puntos $x_1, \ldots, x_n \in A \setminus U_{\lambda_0}$. Entonces, si para cada $i = 1 \ldots, n$ escogemos $U_{\lambda_i} \in \mathcal{U}$ tal que $x_i \in U_{\lambda_i}$. Como consecuencia la colección $\mathcal{U}' = \{U_{\lambda_i}\}_{i=0,\ldots,n}$ es un subrecubrimiento finito de $\mathcal{U}$ y, por tanto, A es compacto.

   Por otro lado, los únicos subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}_{CF}$ son los finitos.

Corolario 3.4.3. *La intersección arbitraria de subconjuntos compactos de un espacio T_2 es compacto.*

Demostración. Ejercicio. □

Corolario 3.4.4. *Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Si X es compacto e Y es T_2 entonces f es cerrada. Si además f es sobreyectiva entonces es una identificación y si es biyectiva un homeomorfismo.*

3.5. Producto de espacios compactos

Lema 3.5.1 (Entorno tubular)**.** *Sean X e Y espacios topológicos. Supongamos que Y es compacto. Entonces, dado $x \in X$ y V abierto de $X \times Y$ tal que $\{x\} \times Y \subset V$ existe U abierto en X tal que $x \in U$ y $U \times Y \subset V$.*

Demostración. Dado $y \in Y$ se tiene que $(x, y) \in \{x\} \times Y \subset V$ y, por tanto, existe un abierto producto $U_y \times V_y$ tal que $(x, y) \in U_y \times V_y \subset V$. La colección $\mathcal{U} = \{U_y \times V_y\}_{y\in Y}$ es un recubrimiento de $\{x\} \times Y$ por abiertos de $X \times Y$. El conjunto $\{x\} \times Y$ es compacto ya que es homeomorfo a Y que es compacto por hipótesis. Por tanto, $\mathcal{U}$ admite un subrecubrimiento finito $\mathcal{U}' = \{U_{y_i} \times V_{y_i}\}_{i=1,\ldots,n}$. Además, la construcción garantiza que

$$\{x\} \times Y \subset (U_{y_1} \times V_{y_1}) \cup \ldots \cup (U_{y_n} \times V_{y_n}) \subset V.$$

Por consiguiente, si escogemos $U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ se tiene que $\{x\} \times Y \subset U \times Y \subset V$. □

Teorema 3.5.2. *Sean X e Y espacios topológicos compactos. Entonces $X \times Y$ es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{V}$ un recubrimiento abierto de $X \times Y$. Fijado $x \in X$, $\mathcal{V}$ es un recubrimiento de $\{x\} \times Y$ por abiertos de $X \times Y$. Puesto que $\{x\} \times Y$ es compacto existen $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$ tales que

$$\{x\} \times Y \subset V_x = V_1 \cup \ldots \cup V_n.$$

Además, el lema del entorno tubular garantiza que existe U_x abierto en X tal que

$$\{x\} \times Y \subset U_x \times Y \subset V_x.$$

La colección $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x \in X}$ es un recubrimiento abierto de X y, puesto que X es compacto, admite un subrecubrimiento finito $\mathcal{U}' = \{U_{x_i}\}_{i=1,\ldots,k}$. Como consecuencia

$$X \times Y \subset U_{x_1} \times Y \cup \ldots \cup U_{x_k} \times Y \subset V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_k}$$

y, puesto que cada V_{x_i} es la unión de un número finito de elementos de $\mathcal{V}$, se sigue que $\mathcal{V}$ admite un subrecubrimiento finito. $\square$

Corolario 3.5.3. $[0,1] \times [0,1]$ *es compacto y, por tanto, lo son todos sus cocientes.*

3.6. Subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$

Teorema 3.6.1. *En $\mathbb{R}^n$ con la topología usual $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y solo si A es cerrado y acotado con respecto a la distancia euclídea.*

Demostración. "$\Rightarrow$"

Puesto que $\mathbb{R}^n$ es T_2, si $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto entonces A es cerrado. Por otro lado, la colección $\mathcal{U} = \{B(0,k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ es un recubrimiento de A por abiertos de $\mathbb{R}^n$. Puesto que A es compacto existen $k_1, \ldots, k_s \in \mathbb{N}$ tales que

$$A \subset B(0,k_1) \cup \ldots \cup B(0,k_s) = B(0,m)$$

con $m = \max_{i=1,\ldots,s} k_i$. Por tanto, A es acotado.

"$\Leftarrow$" Supongamos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado y acotado con respecto a la distancia euclídea. Puesto que A es acotado existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset [-k,k]^n$. El intervalo $[-k,k]$ es compacto y, dado que el producto de dos compactos es compacto, se sigue fácilmente por inducción que $[-k,k]^n$ es compacto. Dado que A es un cerrado contenido el compacto $[-k,k]^n$ se sigue que A es compacto. $\square$

Corolario 3.6.2. *Sea X un espacio topológico compacto y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua. Entonces f alcanza el máximo y el mínimo.*

Demostración. Como X es compacto se tiene que $f(X) \subset \mathbb{R}$ es compacto. Por tanto $f(X)$ es cerrado y acotado. Como $f(X)$ es acotado existen $m = \inf f(X)$ y $M = \sup f(X)$. Puesto que m y M son puntos adherentes de $f(X)$ y $f(X)$ es cerrado en $\mathbb{R}$ se tiene que $m, M \in f(X)$. $\square$

Corolario 3.6.3. *Sea (X, d) un espacio métrico y $A, B \subset X$ subconjuntos compactos disjuntos. Entonces*
$$d(A, B) = \text{ínf}\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\} > 0.$$

Demostración. Ejercicio. □

Ejemplos

1. La esfera unidad $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es compacto.

   En efecto, sea
   $$f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$$
   $$f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2.$$
   Es claro que $S^n = f^{-1}(\{1\})$ y, puesto que f es continua y $\{1\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$ se tiene que S^n es cerrado en $\mathbb{R}^{n+1}$. Además, $S^n \subset B(0, 2)$ y, por tanto, es acotado.

2. La bola cerrada $\overline{B(0, 1)}$ es compacto.

   $\overline{B(0, 1)}$ es cerrado siendo la adherencia de $B(0, 1)$ y es acotado ya que $\overline{B(0, 1)} \subset B(0, 2)$.

3.7. Lema del número de Lebesgue

Lema 3.7.1. *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ un compacto. Entonces, la aplicación $d : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*
$$d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, y) \mid y \in A\}$$
es continua y para cada $x \in X$ existe $y \in A$ tal que $d(x, A) = d(x, y)$.

Demostración. Ejercicio. □

Lema 3.7.2 (número de Lesbesgue)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico y $\mathcal{U}$ un recubrimiento abierto de X. Si X es compacto existe $\delta > 0$ tal que si $A \subset X$ satisface que su diámetro $\delta(A) < \delta$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $A \subset \mathcal{U}$.*

Demostración. Si $X \in \mathcal{U}$ no hay nada que probar así que supongamos que $X \notin \mathcal{U}$. Sea $\mathcal{U}' = \{U_1, \ldots, U_n\}$ un subrecubrimiento finito $\mathcal{U}$. Para cada $i = 1, \ldots, n$ se definen $C_i = X \setminus U_i$ y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x, C_i).$$

La aplicación f es continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in X$. En efecto, la continuidad de f se sigue del lema anterior. Por otro lado, dado $x \in X$ existe i tal que $x \in U_i$. Como U_i es abierto existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U_i$. Por tanto, $d(x, C_i) \geq \varepsilon$ y, como consecuencia, $f(x) \geq \varepsilon/n > 0$.

Como f es continua y X es compacto existe $\delta = \min_{x \in X} f(x)$. Puesto que $f(x) > 0$ para todo $x \in X$ se sigue que $\delta > 0$. Sea $A \subset X$ tal que $\delta(A) < \delta$. Entonces, dado $x_0 \in A$, $A \subset B(x_0, \delta)$ y, como consecuencia,

$$\delta \leq f(x_0) \leq \max_{i=1,\ldots,n} d(x_0, C_i).$$

Sea m tal que $d(x_0, C_m) = \max_{i=1,\ldots,n} d(x_0, C_i)$, entonces

$$A \subset B(x_0, \delta) \subset U_m.$$

$\square$

3.8. Compacidad local

Definición 3.8.1. Sea X un espacio topológico. Diremos que X es localmente compacto si cada $x \in X$ posee un entorno compacto.

Ejemplos

1. $\mathbb{R}^n$ con la topología usual es localmente compacto.

   En efecto, dado $x \in \mathbb{R}^n$, la bola cerrada $\overline{B(x, 1)}$ es un entorno compacto de x.

2. Todo espacio discreto X es localmente compacto ya que dado $x \in X$, $\{x\}$ es un entorno compacto de x.

3. El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ dotado de la topología usual no es localmente compacto.

   Si $\mathbb{Q}$ fuese localmente compacto, dado $p \in \mathbb{Q}$ existiría N entorno compacto de p en $\mathbb{Q}$. Como N es un entorno de p en $\mathbb{Q}$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $(p - \varepsilon, p + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \subset N$. Por otro lado, como N es compacto se tiene que N es cerrado en $\mathbb{R}$. Como consecuencia, N contiene a todos sus puntos de acumulación y, por tanto, $[p - \varepsilon, p + \varepsilon] \subset N$ lo que contradice que $N \subset \mathbb{Q}$.

4. La recta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$ no es localmente compacto.

   Sea $x \in \mathbb{R}_S$ y $N \in \mathcal{N}_x$. Entonces, existe $y \in N$ tal que $[x, y) \subset N$. Como $\mathbb{R}_S$ es un espacio regular y $[x, y)$ es cerrado en $\mathbb{R}_S$ se tiene que para cada $z \in N \setminus [x, y)$ existe un abierto U_z de

$\mathbb{R}_S$ tal que $z \in U_z$ y $U_z \cap [x, y) = \emptyset$. Es fácil ver que el recubrimiento de N por abiertos de $\mathbb{R}_S$ dado por

$$\mathcal{U} = \{U_z\}_{z \in N \setminus [x,y)} \cup \left\{ \left[x, \frac{(n-1)y + x}{n} \right) \right\}_{n \geq 2}$$

no admite ningún subrecubrimiento finito.

3.9. La compactificación de Alexandroff

Sea (X, τ) un espacio topológico T_2. Consideremos el conjunto Y que se obtiene a partir del espacio X añadiendo un punto adicional que denotaremos por $\infty \notin X$. La familia de conjuntos

$$\tau_Y = \tau \cup \{Y \setminus K \mid K \subset X \text{ es compacto}\}$$

es una topología en $Y = X \cup \{\infty\}$. El espacio topológico (Y, τ_Y) se denomina *compactificación de Alexandroff* o *compactificación por un punto* de X.

Teorema 3.9.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico. La compactificación de Alexandroff Y de X tiene las siguientes propiedades:*

(1) Y es compacto.

(2) La topología de X como subespacio de Y coincide con τ.

(3) Y es T_2 si y solo si X es localmente compacto.

Demostración. (1) Veamos que Y es compacto. Sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento abierto de Y y sea $U_\infty \in \mathcal{U}$ tal que $\infty \in U_\infty$. Entonces $K = Y \setminus U_\infty$ es compacto y, puesto que $\mathcal{U}$ es un recubrimiento de K por abiertos de Y, existen $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ tales que

$$K \subset U_1 \cup \ldots \cup U_n.$$

Como consencuencia,

$$Y \subset U_1 \cup \ldots \cup U_n \cup U_\infty$$

y, por tanto, $\mathcal{U}' = \{U_1, \ldots, U_n, U_\infty\}$ es un subrecubrimiento finito de $\mathcal{U}$.

(2) Sea τ_s la topología relativa de X como subespacio de Y. Veamos que $\tau_s = \tau$.

"$\subset$" Sea $U \in \tau_s$. Entonces existe $U' \in \tau_Y$ tal que $U = U' \cap X$. Si $\infty \notin U'$ entonces $U' \subset X$ y $U' \in \tau$. Por tanto $U = U' \in \tau$. Por otro lado, si $\infty \in U'$ se tiene que existe un compacto $K \subset X$ tal que $U' = Y \setminus K$. Se sigue que,

$$U = U' \cap X = (Y \setminus K) \cap X = X \setminus K.$$

Puesto que (X, τ) es T_2 y K es compacto, se sigue que K es cerrado en (X, τ) y, por consiguiente, $U \in \tau$.

"$\supset$" Este contenido se sigue inmediatamente del hecho de que $\tau \subset \tau_Y$.

(3) "$\Rightarrow$" Supongamos que Y es T_2. Entonces, dado $x \in X$ existen abiertos disjuntos U y V de Y tales que $x \in U$, $\infty \in V$. Como consecuencia U es un subconjunto abierto de X contenido en el compacto $N = Y \setminus V$ lo que garantiza la compacidad local de X.

"$\Leftarrow$" Supongamos que X es localmente compacto. Como X es T_2 y $\tau \subset \tau_Y$ basta probar que dado $x \in X$ existen U y V abiertos disjuntos de Y tales que $x \in U$, $\infty \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Como X es localmente compacto, dado $x \in X$ existe $N \subset X$ entorno compacto de x, es decir, N es un subconjunto compacto de X tal que existe U abierto de X y, por tanto, de Y, tal que $x \in U \subset N$. Entonces, $V = Y \setminus N$ es un abierto de Y disjunto de U tal que $\infty \in V$ de donde se sigue que Y es T_2. $\square$

Ejemplos

1. La compactificación de Alexandroff de $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo a la esfera S^n.

2. La compactificación de Alexandroff del cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ es homeomorfo al toro con un meridiano identificado a un punto.