ELEMENTOS FINITOS

ELEMENTOS FINITOS Y VIBRACIONES MECÁNICAS

GRADO EN INGENIERÍA MECÁNICA

Índice

Índice

Índice

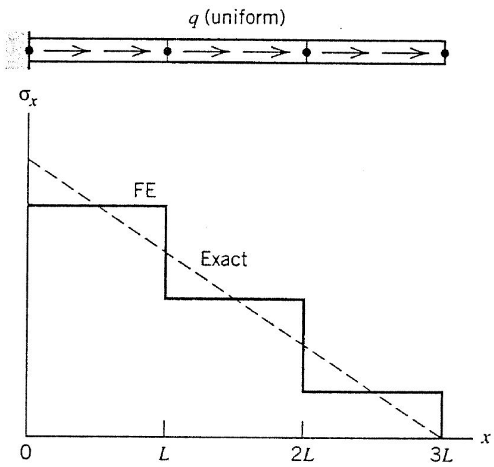
Introducción

- ★ El concepto de EEFF introducido por Turner y colaboradores en 1956
- ★ Base del análisis por EEFF:
  - ▷ Descomposición de un dominio en un número finito de subdominios (Elementos)
  - ▷ Aproximación de una variable de campo, desplazamientos, mediante funciones aproximadas dentro de cada elemento
  - ▷ Los nodos están en límites de cuerpo, o conectando unos elementos con otros.
  - ▷ Un nodo determina las coordenadas en el espacio donde los gdl y las acciones sobre el sistema físico tienen lugar

Introducción

- ★ La esencia del método de los elementos finitos es aproximar los desplazamientos elemento por elemento, utilizando funciones por trozos
- ★ El desplazamiento en el elemento se determina, generalmente mediante polinomios.

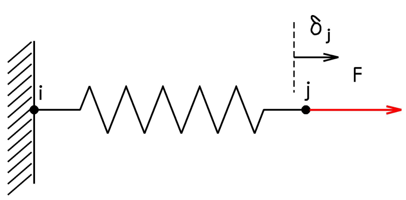
Introducción



Introducción

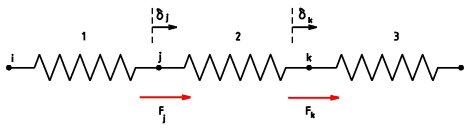
- ★ Método Directo
  - ▷ A partir del comportamiento físico del sistema
- ★ Método Analítico
  - ▷ Utilizando matrices y funciones
  - ▷ Se intenta explicar la "física" del sistema

Método Directo Ecuación de un muelle



$$F = k \cdot \delta_j \tag{1}$$

Método Directo Muelle generalizado



Método Directo Muelle generalizado
En el equilibrio se tiene que $F_j + F_k = 0$ o que $F_k = -F_j$

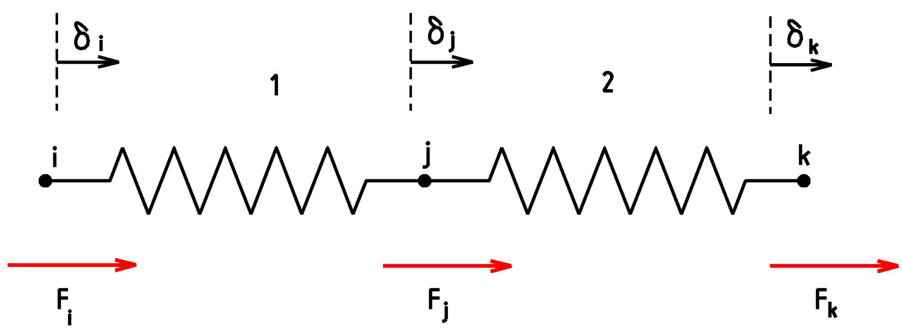
$$\begin{aligned} F_k &= k \cdot (\delta_k - \delta_j) \\ F_j &= k \cdot (\delta_j - \delta_k) \end{aligned} \tag{2}$$

Ordenando los resultados anteriores en forma matricial,

$$\left\{ \begin{array}{c} F_k \\ F_j \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} k & -k \\ -k & k \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \delta_j \\ \delta_k \end{array} \right\} \tag{3}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\delta} \tag{4}$$

Método Directo Sistemas de muelles



Método Directo Sistemas de muelles
dos constantes diferente, k_1 y k_2

$$F_i + F_j + F_k = 0 \tag{5}$$

$$\begin{aligned} F_i &= k_1 \cdot (\delta_i - \delta_j) \\ F_k &= k_2 \cdot (\delta_k - \delta_j) \end{aligned} \tag{6}$$

$$F_j = -F_i - F_k = k_1 \cdot (\delta_i - \delta_j) - k_2 \cdot (\delta_i - \delta_j) \tag{7}$$

$$F_j = -k_1 \cdot \delta_i + (k_1 + k_2) \cdot \delta_j - k2 \cdot \delta_k \tag{8}$$

Método Directo Sistemas de muelles

$$\left\{ \begin{array}{c} F_i \\ F_j \\ F_k \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_k \end{array} \right\} \tag{9}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta} \tag{10}$$

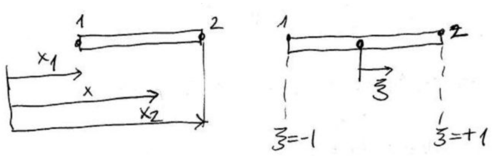
donde $\mathbf{k}$ es la matriz de rigidez **Problemas Unidimensionales. Introducción**

- ★ Utilización de la energía potencial total, relaciones esfuerzos-deformación unitaria.
- ★ El procedimiento es es mismo para 1D, 2D y 3D
- ★ Los vectores $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\epsilon}$, $\mathbf{T}$ y $\mathbf{f}$ dependen de la posición x
- ★ Las relaciones entre deformación unitaria y esfuerzo son: $\boldsymbol{\sigma} = E\boldsymbol{\epsilon}$ y $\boldsymbol{\epsilon} = \frac{du}{dx}$

Introducción

- ★ Fuerzas
  - ▷ $\mathbf{f}$ ≡fuerza por unidad de volumen. Peso propio
  - ▷ $\mathbf{T}$ ≡fuerza por unidad de superficie. 1D Fuerza por unidad de longitud. Resistencia por fricción.
  - ▷ P_i ≡fuerza puntual
- ★ La idea básica es discretizar y expresar el campo de desplazamientos en términos de valores en puntos discretos.

Coordenadas y Funciones de Forma

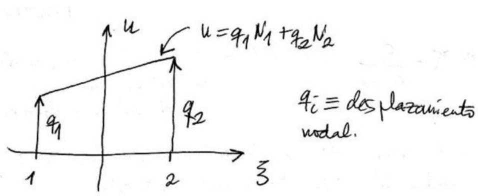


- ★ Sistema Natura o Intrínseco

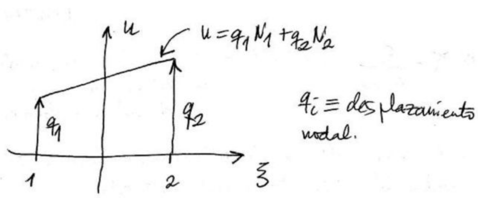
$$\xi = \frac{2}{x_2 - x_1}(x - x_1) - 1 \tag{11}$$

Coordenadas y Funciones de Forma

- ★ El campo de desplazamiento desconocido dentro de un elemento será interpolado por una distribución lineal
- ★ La aproximación es más exacta cuanto más pequeño sea el tamaño del elemento
- ★ La interpolación lineal se realiza utilizando las siguientes ecuaciones.



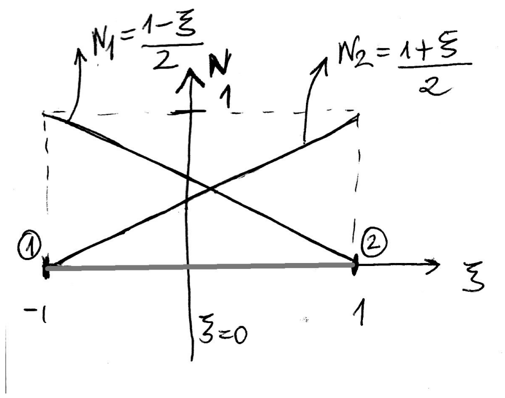
Coordenadas y Funciones de Forma



$$
\begin{aligned}
N_1(\xi) &= \frac{1-\xi}{2} && (12)\\
N_2(\xi) &= \frac{1+\xi}{2} && (13)\\
u &= N_1 q_1 + N_2 q_2 && (14)
\end{aligned}
$$

Coordenadas y Funciones de Forma

★ Las funciones de forma tienen comportamiento lineas



Coordenadas y Funciones de Forma

★ Forma vectorial de la función de forma.

$$
\begin{aligned}
u &= N_1 q_1 + N_2 q_2 && (15)\\
u &= \mathbf{N}\mathbf{q} && (16)\\
\mathbf{N} &= \left[\begin{array}{cc} N_1 & N_2 \end{array}\right] && (17)\\
\mathbf{q} &= \left[\begin{array}{cc} q_1 & q_2 \end{array}\right]^T && (18)
\end{aligned}
$$

★ $\mathbf{q}$ ≡Vector de desplazamientos del elemento

Coordenadas y Funciones de Forma

★ Las coordenadas en x se han interpolado dentro del elemento utilizando las mismas funciones de forma.

★ Formulación Isoparamétrica

▷ Cuando los desplazamientos u y las coordenadas x son interpoladas usando las mimas funciones de forma N_1 y N_2

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 \tag{19}$$

$$u = N_1 q_1 + N_2 q_2 \tag{20}$$

Coordenadas y Funciones de Forma

★ En general las funciones de forma deben satisfacer:

▷ Las primeras derivadas deben ser finitas dentro del elemento

▷ Los desplazamientos deben ser continuos a través de la frontera del elemento

Ecuación deformación unitaria

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\epsilon} &= \frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} && (21)\\
\frac{d\xi}{dx} &= \frac{2}{x_2 - x_1} && (22)\\
u &= \mathbf{N}\mathbf{q} = \frac{1-\xi}{2}q_1 + \frac{1+\xi}{2}q_2 && (23)\\
\frac{du}{d\xi} &= \frac{-q_1 + q_2}{2} && (24)\\
\epsilon &= \frac{-q_1 + q_2}{x_2 - x_1} && (25)\\
\epsilon &= \mathbf{B}\mathbf{q} && (26)
\end{aligned}$$

Coordenadas y Funciones de Forma. Ley de Hooke

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\epsilon} &= \mathbf{B}\mathbf{q} && (27)\\
\mathbf{B} &= \frac{\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}}{x_2 - x_1} && (28)
\end{aligned}$$

★ Ley de Hooke

$$\boldsymbol{\sigma} = E\mathbf{B}\mathbf{q} \tag{29}$$

Coordenadas y Funciones de Forma. Resumen

★ Relaciones de las coordenadas, los desplazamientos, los desplazamientos unitarios y las tensiones, en función de las valores nodales

$$\begin{aligned}
u &= \mathbf{N}\mathbf{q} && (30)\\
\boldsymbol{\epsilon} &= \mathbf{B}\mathbf{q} && (31)\\
\boldsymbol{\sigma} &= E\mathbf{B}\mathbf{q} && (32)
\end{aligned}$$

Energía potencial y equilibrio

★ En sólidos se busca la relación entre los desplazamientos $\mathbf{u}$ que satisfaga las condiciones de equilibrio.

★ La solución exacta es compleja de obtener

★ Utilización de métodos aproximados

- ▷ Energía potencial
- ▷ Método de Rayleigh-Ritz
- ▷ Método de Garlekin

Energía potencial y equilibrio

- ★ En sólidos se busca la relación entre los desplazamientos **u** que satisfaga las condiciones de equilibrio.
- ★ La solución exacta es compleja de obtener
- ★ Utilización de métodos aproximados
  - ▷ Energía potencial
  - ▷ Método de Rayleigh-Ritz
  - ▷ Método de Garlekin

Energía potencial y equilibrio

- ★ La energía potencial de un cuerpo elástico se define como la suma de la energía de deformación unitaria total (U) más el potencial de trabajo (WP)

$$\Pi = U + WP \tag{33}$$

- ★ Materiales lineales elásticos

$$U = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} dV \tag{34}$$

Energía potencial y equilibrio

$$WP = -\int_V \mathbf{u}^T \mathbf{f} dV - \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{T} dS - \sum_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{P}_i \tag{35}$$

- ★ Energía Potencial para un cuerpo elástico

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{f} dV - \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{T} dS - \sum_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{P}_i \tag{36}$$

Energía potencial y equilibrio

- ★ Se supone que es un sistema conservativo
- ★ Principio de la energía potencial
  - ▷ En sistemas conservativos, la energía potencial tiene un mínimo en aquellos desplazamientos cinemáticamente admisibles que se corresponden con las condiciones de equilibrio.
  - ▷ Si es mínimo $\rightrightarrows$ el estado de equilibrio es estable.

Energía potencial y equilibrio

- ★ Energía Potencial 1D

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_L \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} A dx - \int_L u^T f A dx - \int_L u^T T dx - \sum_i u_i P_i \tag{37}$$

- ★ Como el modelo se ha dividido en elementos finitos, la energía quedaría

$$\Pi = \sum_e \frac{1}{2}\int_e \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} A dx - \sum_e \int_e u^T f A dx - \sum_e \int_e u^T T dx - \sum_i Q_i P_i \tag{38}$$

★ En el término de las cargas puntuales se supone que se aplican sobre los nodos

Matriz de rigidez del elemento

★ Partiendo de la energía de deformación unitaria

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2}\int_e \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} A dx & (39)\\ u &= \mathbf{N}\mathbf{q} & (40)\\ \boldsymbol{\epsilon} &= \mathbf{B}\mathbf{q} & (41)\\ \boldsymbol{\sigma} &= E\mathbf{B}\mathbf{q} & (42) \end{aligned}$$

Matriz de rigidez del elemento

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2}\int_e \mathbf{q}^T \mathbf{B}^T E \mathbf{B}\mathbf{q} A dx & (43)\\ &= \frac{1}{2}\mathbf{q}^T \int_e \left[\mathbf{B}^T E \mathbf{B} A dx\right] \mathbf{q} & \\ \xi &= \frac{2}{x_2 - x_1}(x - x_1) - 1 & (44)\\ \frac{d\xi}{dx} &= \frac{2}{x_2 - x_1} & (45)\\ dx &= \frac{x_2 - x_1}{2} d\xi = \frac{l_e}{2} d\xi & (46)\\ \xi \in [1, -1] \quad &; \quad l_e = |x_2 - x_1| & (47) \end{aligned}$$

Matriz de rigidez del elemento

★ $\mathbf{B}$ es una matriz constante

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2}\mathbf{q}^T \left[A_e \frac{l_e}{2} E_e \mathbf{B}^T \mathbf{B} \int_{-1}^{1} d\xi\right] \mathbf{q} & (48)\\ \mathbf{B} &= \frac{\left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \end{array}\right]}{x_2 - x_1} & (49)\\ U_e &= \frac{1}{2}\mathbf{q}^T A_e l_e E_e \frac{1}{l_e^2} \left[\begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \end{array}\right] \mathbf{q} & (50)\\ &= \frac{1}{2}\mathbf{q}^T \frac{A_e E_e}{l_e} \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}\right] \mathbf{q} & (51) \end{aligned}$$

Matriz de rigidez del elemento

$$U_e = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T \mathbf{k}^e \mathbf{q} \tag{52}$$

★ Matriz de rigidez $\mathbf{k}^e$ del elemento

$$\mathbf{k}^e = \frac{E_e A_e}{l_e} \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}\right] \tag{53}$$

★ Ecuación 52 muy parecida a la energía unitaria de un resorte simple

$$U = \frac{1}{2}kQ^2 \tag{54}$$

Términos de fuerza

★ Fuerzas en el cuerpo

$$\begin{aligned}
\int_e u^T f A dx &= A_e f \int_e (N_1 q_1 + N_2 q_2)\, dx && (55)\\
\int_e u^T f A dx &= \mathbf{q}^T \left[\begin{array}{c} A_e f \int_e N_1 dx \\ A_e f \int_e N_2 dx \end{array} \right] && (56)\\
dx &= \frac{l_e}{2} d\xi && (57)
\end{aligned}$$

Términos de fuerza

★ Evaluando las integrales

$$\begin{aligned}
\int_e N_1 dx &= \frac{l_e}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1-\xi}{2} d\xi = \frac{l_e}{2} && (58)\\
\int_e N_2 dx &= \frac{l_e}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1+\xi}{2} d\xi = \frac{l_e}{2} && (59)
\end{aligned}$$

★ Término de fuerzas

$$\int_e u^T f A dx = \mathbf{q}^T \frac{A_e l_e}{2} f \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right] \tag{60}$$

Términos de fuerza

★ Término de fuerzas

$$\begin{aligned}
\int_e u^T f A dx &= \mathbf{q}^T \frac{A_e l_e}{2} f \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right] = \mathbf{q}^T \mathbf{f}^e && (61)\\
\mathbf{f}^e &= \frac{A_e l_e f}{2} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right] && (62)
\end{aligned}$$

★ $A_e l_e$ ≡volumen del elemento

★ f ≡fuerza por unidad de volumen

★ La ecuación 62 se divide la fuerza en los dos nodos

Términos de fuerza

★ Fuerzas de tracción. T es constante dentro del elemento.

$$\begin{aligned}
\int_e u^T T dx &= \int_e (N_1 q_1 + N_2 q_2)\, T dx && (63)\\
\int_e u^T T dx &= \mathbf{q}^T \left[\begin{array}{c} T \int_e N_1 dx \\ T \int_e N_2 dx \end{array} \right] && (64)\\
\int_e u^T T dx &= \mathbf{q}^T \mathbf{T}^e && (65)\\
\mathbf{T}^e &= \frac{T l_e}{2} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right] && (66)
\end{aligned}$$

Términos de fuerza

★ La energía potencial total

$$\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{Q}^T\mathbf{K}\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T\mathbf{F} \tag{67}$$

★ $\mathbf{K}$ ≡Matriz de rigidez global

★ $\mathbf{F}$ ≡Vector de carga total

★ $\mathbf{Q}$ ≡Vector de desplazamientos totales

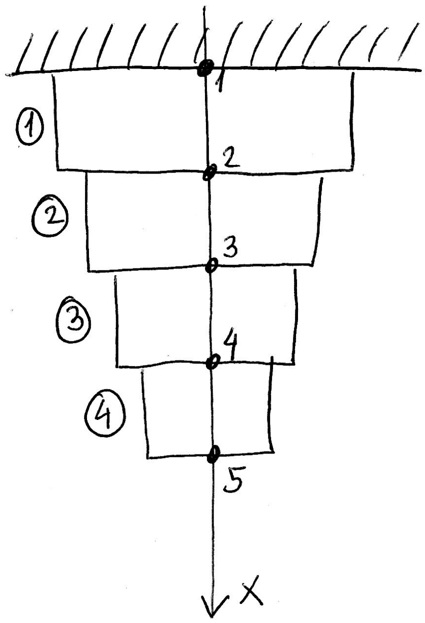
Ensamblado de las matrices K y F

★ Energía potencial total

$$\Pi = \sum_e \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{k}^e\mathbf{q} - \sum_e \mathbf{q}^T\mathbf{f}^e - \sum_e \mathbf{q}^T\mathbf{T}^e - \sum_i P_iQ_i \tag{68}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{Q}^T\mathbf{K}\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T\mathbf{F} \tag{69}$$

Ensamblado de las matrices K y F



Ensamblado de las matrices K y F

★ Elemento 3

$$U_3 = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{k}^3\mathbf{q} \tag{70}$$

$$U_3 = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\frac{E_3A_3}{l_3}\cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{71}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} Q_3 & Q_4 \end{bmatrix} \tag{72}$$

Ensamblado de las matrices K y F

★ Elemento 3

$$
\begin{aligned}
U_3 &= \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{k}^3\mathbf{q} && (70)\\
U_3 &= \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\frac{E_3A_3}{l_3}\cdot \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \boxed{3} & \boxed{4} \end{array} \\ \begin{array}{c} \boxed{3} \\ \boxed{4} \end{array} & \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}\right] \end{array} && (71)\\
\mathbf{q} &= \left[\begin{array}{cc} Q_3 & Q_4 \end{array}\right] && (72)
\end{aligned}
$$

Ensamblado de las matrices K y F

$$
\begin{aligned}
U_3 &= \frac{1}{2}\mathbf{Q}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_3A_3}{l_3} & -\frac{E_3A_3}{l_3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E_3A_3}{l_3} & \frac{E_3A_3}{l_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q} && (73)\\
\mathbf{Q} &= \left[\begin{array}{ccccc} Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 & Q_5 \end{array}\right]^T && (74)\\
\mathbf{K} &= \sum_e \mathbf{K}^e && (75)
\end{aligned}
$$

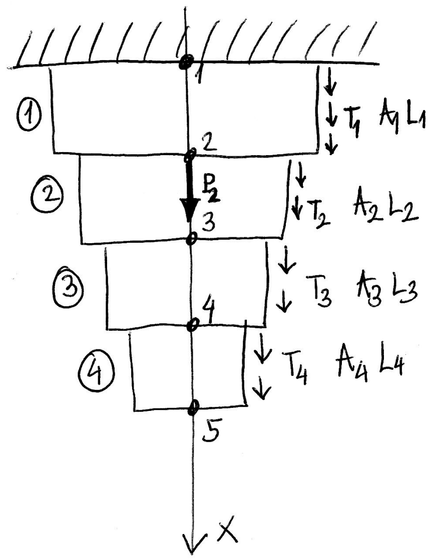
Ensamblado de las matrices K y F

$$
\begin{aligned}
U_3 &= \frac{1}{2}\mathbf{Q}^T \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{5} \end{array} \\ \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \\ \boxed{4} \\ \boxed{5} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_3A_3}{l_3} & -\frac{E_3A_3}{l_3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E_3A_3}{l_3} & \frac{E_3A_3}{l_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \mathbf{Q} && (73)\\
\mathbf{Q} &= \left[\begin{array}{ccccc} Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 & Q_5 \end{array}\right]^T && (74)\\
\mathbf{K} &= \sum_e \mathbf{K}^e && (75)
\end{aligned}
$$

Ensamblado de las matrices K y F

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K} = &\frac{A_1E}{l_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{A_2E}{l_2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\
&+\frac{A_3E}{l_3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{A_4E}{l_4}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (76)
\end{aligned}
$$

Ensamblado de las matrices K y F



Ensamblado de las matrices K y F

$$\mathbf{F} = \sum_e \mathbf{f}^e \tag{77}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \left(\frac{A_1 l_1 f}{2} + \frac{l_1 T_1}{2}\right) \\ \left(\frac{A_1 l_1 f}{2} + \frac{l_1 T_1}{2}\right) + \left(\frac{A_2 l_2 f}{2} + \frac{l_2 T_2}{2}\right) \\ \left(\frac{A_2 l_2 f}{2} + \frac{l_2 T_2}{2}\right) + \left(\frac{A_3 l_3 f}{2} + \frac{l_3 T_3}{2}\right) \\ \left(\frac{A_3 l_3 f}{2} + \frac{l_3 T_3}{2}\right) + \left(\frac{A_4 l_4 f}{2} + \frac{l_4 T_4}{2}\right) \\ \left(\frac{A_4 l_4 f}{2} + \frac{l_4 T_4}{2}\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ P_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{78}$$

Propiedades de K

- ★ La dimensión de **K** es(Número Nodos x Número Nodos)
- ★ Es simétrica

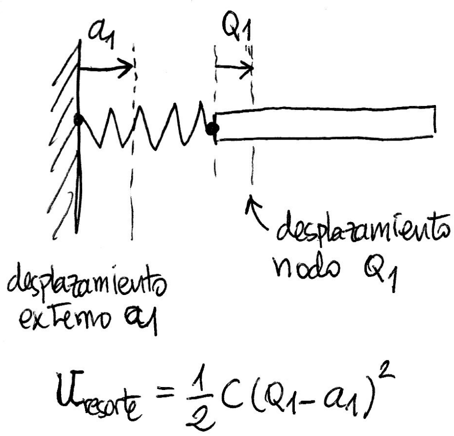
Condiciones de Contorno

- ★ En sistemas conservativos, la energía potencial tiene un mínimo en aquellos desplazamientos cinemáticamente admisibles que se corresponden con las condiciones de equilibrio.
- ★ Las ecuaciones de equilibrio se obtienen minimizando la Energía Potencial, con respecto a **Q**
- ★ Las condiciones de contorno son usualmente del tipo: $Q_{p1} = a_1, Q_{p2} = a_2, \cdots$
- ★ Q_{p1} desplazamiento en el grado de libertad p_1

Método de la penalización

- ★ Método para la resolución del sistema
  - ▷ Obtención de desplazamientos, reacciones, tensiones, $\cdots$
- ★ Se considera $Q_1 = a_1$
- ★ Sobre el soporte se supone aplicado un resorte de gran rigidez, C.
- ★ Energía unitaria del resorte $U_s = \frac{1}{2}C\left(Q_1 - a_1\right)^2$

Método de la penalización



Método de la penalización

★ Energía Potencial

$$\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{Q}^T\mathbf{K}\mathbf{Q} + \frac{1}{2}C\left(Q_1 - a_1\right)^2 - \mathbf{Q}^T\mathbf{F} \tag{79}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_i} = 0 \tag{80}$$

$$i = 1, \cdots, N \tag{81}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11}+C & \cdots & k_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N1} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 + Ca_1 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix} \tag{82}$$

Método de la penalización

★ Enfoque aproximado, depende de las fuerzas de reacción y la elección del valor de C.

★ Desarrollando la 1^a ecuación de 82

$$\left(k_{11} + C\right) Q_1 + \cdots + k_{1N} Q_N = F_1 + Ca_1 \tag{83}$$

$$\left(\frac{k_{11}}{C} + 1\right) Q_1 + \cdots + \frac{k_{1N}}{C} Q_N = \frac{F_1}{C} + a_1 \tag{84}$$

★ Si C los suficientemente grande $Q_1 \approx a_1$

$$C = max\left|k_{ij}\right| \times 10^5 \ \left(10^6, 10^7\right) \tag{85}$$

Cargas Térmicas

★ Cambio de temperatura en un material isotrópico lineal.

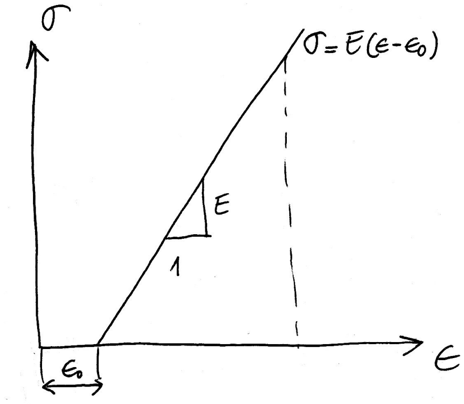
★ Problema de esfuerzos térmicos

★ Conocido $\Delta T\left(x\right)$

$$\epsilon_0 = \alpha \Delta T \tag{86}$$

Cargas Térmicas

★ Teniendo en cuenta las cargas estructurales y térmicas



Cargas Térmicas

$$\boldsymbol{\sigma} = E\left(\epsilon - \epsilon_0\right) \tag{87}$$

$$u_0 = \frac{1}{2}\sigma\left(\epsilon - \epsilon_0\right) \tag{88}$$

$$u_0 = \frac{1}{2}\left(\epsilon - \epsilon_0\right)^T E\left(\epsilon - \epsilon_0\right) \tag{89}$$

★ Integrando sobre el volumen de la estructura se obtiene la energía

$$U = \int_L \frac{1}{2}\left(\epsilon - \epsilon_0\right)^T E\left(\epsilon - \epsilon_0\right) A dx \tag{90}$$

Cargas Térmicas

★ Para un elemento unidimensional

★ Cambiando a coordenadas naturales

$$U = \sum_e \frac{1}{2} A_e \frac{l_e}{2} \int_{-1}^{1} \left(\epsilon - \epsilon_0\right)^T E\left(\epsilon - \epsilon_0\right) d\xi \tag{91}$$

$$\epsilon = \mathbf{B}\mathbf{q} \tag{92}$$

$$\begin{aligned} U = & \sum_e \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\left(E_e A_e \frac{le}{2}\int_{-1}^{1}\mathbf{B}^T\mathbf{B}d\xi\right)\mathbf{q} - \sum \mathbf{q}^T E_e A_e \frac{l_e}{2}\epsilon_0 \int_{-1}^{1}\mathbf{B}^T d\xi \\ & + \sum_e \frac{1}{2} E_e A_e \frac{l_e}{2}\epsilon_0^2 \end{aligned} \tag{93}$$

Cargas Térmicas

★ El primer término energía calculada para elemento 1D, determinación de la matriz de rigidez del elemento

★ El último término es constante, se cancela en la obtención de las ecuaciones de equilibrio.

★ El segundo término da la carga térmico Θ^e

$$\Theta^e = E_e A_e \frac{l_e}{2}\epsilon_0 \int_{-1}^{1}\mathbf{B}^T d\xi \tag{94}$$

Cargas Térmicas

$$\mathbf{B} = \frac{\left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \end{array}\right]}{x_2 - x_1} \tag{95}$$

$$\boldsymbol{\Theta}^e = \frac{E_e A_e l_e \alpha \Delta T}{x_2 - x_1}\left[\begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array}\right] \tag{96}$$

- ★ ΔT promedio de temperatura dentro del elemento
- ★ Θ^e se ensambla dentro del vector de fuerzas

$$\mathbf{F} = \sum_e (\mathbf{f}^e + \mathbf{T}^e + \mathbf{\Theta}^e) + \mathbf{P} \tag{97}$$

Cargas Térmicas

- ★ Una vez resuelta $\mathbf{F} = \mathbf{KQ}$ en $\mathbf{Q}$
- ★ El esfuerzo se obtiene utilizando la siguiente ecuación

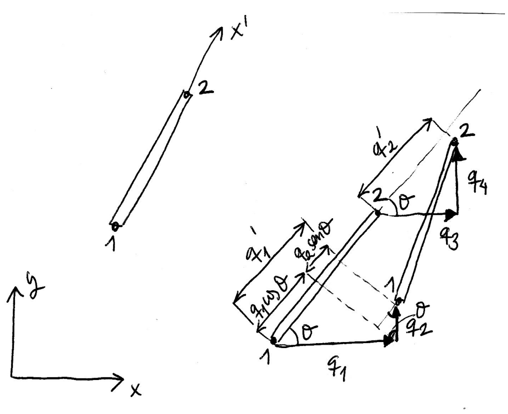
$$\boldsymbol{\sigma} = E(\mathbf{Bq} - \alpha\Delta T) \tag{98}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{x_2 - x_1}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{q} - E\alpha\Delta T \tag{99}$$

Sistemas Articulados Planos

- ★ Las barras de los sistemas articulados tienen diferentes orientaciones
- ★ Sistemas de Coordenadas Local x'
  - ▷ Cada nodo 1 gdl
- ★ Sistema de Coordenadas Global xyz
  - ▷ Cada nodo 2 gdl
- ★ Numeración Sistemática
  - ▷ Nodo j
  - ▷ Tiene 2 gdl: Q_{2j-1} en x; Q_{2j} en y;

Sistemas Articulados Planos



Sistemas Articulados Planos

- ★ Sistema Local

$$\mathbf{q}' = \begin{bmatrix} q'_1 & q'_2 \end{bmatrix}^T \tag{100}$$

- ★ Sistema global

$$\begin{aligned}
\mathbf{q} &= \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix}^T && (101)\\
q_1' &= q_1 \cos\theta + q_2 \operatorname{sen}\theta && (102)\\
q_2' &= q_3 \cos\theta + q_4 \operatorname{sen}\theta && (103)
\end{aligned}$$

Sistemas Articulados Planos

★ Utilizando los cosenos directores

$$\begin{aligned}
l &= \cos\theta = \frac{x_2 - x_1}{l_e} && (104)\\
m &= \cos\phi = \operatorname{sen}\theta = \frac{y_2 - y_1}{l_e} && (105)\\
l_e &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} && (106)\\
\mathbf{q}' &= \mathbf{Lq} && (107)\\
\mathbf{L} &= \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix} && (108)
\end{aligned}$$

Sistemas Articulados Planos. Matriz de rigidez

★ Es un elemento 1D en el sistema local

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}' &= \frac{E_e A_e}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} && (109)\\
U_e &= \frac{1}{2} \mathbf{q}'^T \mathbf{k}' \mathbf{q}' && (110)\\
\mathbf{q}' &= \mathbf{Lq} && (111)\\
U_e &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \left(\mathbf{L}^T \mathbf{k} \mathbf{L} \right) \mathbf{q} && (112)\\
k &= \mathbf{L}^T \mathbf{k} \mathbf{L} && (113)
\end{aligned}$$

Tensiones y Reacciones

★ Determinación de las tensiones y las reacciones en los elementos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= E_e \epsilon && (114)\\
\boldsymbol{\sigma} &= \frac{E_e}{l_e} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1' \\ q_2' \end{bmatrix} && (115)\\
\mathbf{q}' &= \mathbf{Lq} && (116)\\
\sigma &= E_e \mathbf{BLq} && (117)\\
(\mathbf{R} + \mathbf{F}) &= \mathbf{KQ} && (118)\\
\mathbf{R} &= \mathbf{KQ} - \mathbf{F} && (119)
\end{aligned}$$

Sistemas Articulados Planos. Cargas Térmicas

★ Cambio de sistema de referencia

★ ϵ_0 por temperatura, o bien por la introducción de algún elemento más largo o más corte, por error de fabricación

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Theta}' &= E_e A_e l_e \epsilon_0 \mathbf{B} && (120)\\
\epsilon &= \alpha \Delta T && (121)
\end{aligned}$$

Sistemas Articulados Planos. Cargas Térmicas

★ La energía potencial es la misma en ambos sistemas de referencia

$$\mathbf{q}^T\mathbf{\Theta} = \mathbf{q}'^T\mathbf{\Theta}' \tag{122}$$

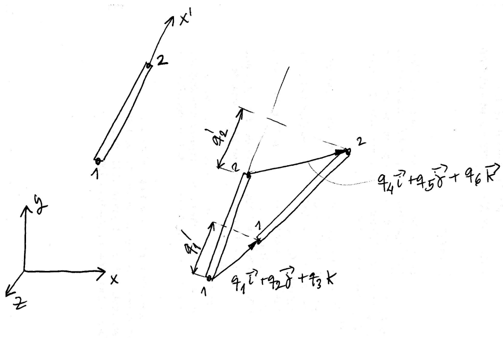
$$\mathbf{q}^T\mathbf{\Theta} = \mathbf{q}^T\mathbf{L}^T\mathbf{\Theta}' \tag{123}$$

$$\mathbf{\Theta} = \mathbf{L}^T\mathbf{\Theta}' \tag{124}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = E\left(\epsilon - \epsilon_0\right) \tag{125}$$

★ Se sigue el mismo procedimiento de resolución

Sistemas Articulados 3D



Sistemas Articulados 3D

★ Cambio de sistema de referencia

$$\mathbf{q}' = \left[\begin{array}{cc} q'_1 & q'_2 \end{array}\right]^T \tag{126}$$

$$\mathbf{q} = \left[\begin{array}{cccccc} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \end{array}\right]^T \tag{127}$$

$$\mathbf{q}' = \mathbf{L}\mathbf{q} \tag{128}$$

$$\mathbf{L} = \left[\begin{array}{cccccc} l & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & n \end{array}\right] \tag{129}$$

Sistemas Articulados 3D

★ Cambio de sistema de referencia

$$l = \frac{x_2 - x_1}{l_e} \tag{130}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{l_e} \tag{131}$$

$$n = \frac{z_2 - z_1}{l_e} \tag{132}$$

$$l_e = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2} \tag{133}$$

Vigas

★ Vigas con sección transversal simétrica con respecto al plano de carga.

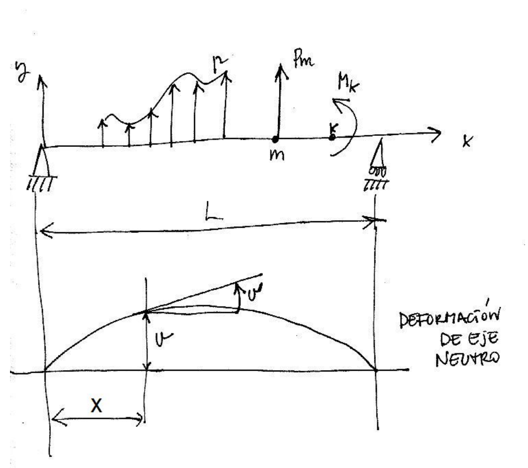
★ Para deflexiones pequeñas se puede utilizar la teoría elemental de vigas

$$\sigma = -\frac{M}{I}y \tag{134}$$

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \tag{135}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \tag{136}$$

Vigas



Vigas

- ★ Utilizando el método de la energía potencial
- ★ La energía deformación unitaria dU para un elemento de longitud dx
- ★ v es la deflexión del eje centroidal en la posición x

Vigas

$$dU = \frac{1}{2}\int_A \sigma\epsilon dA dx \quad (137)$$

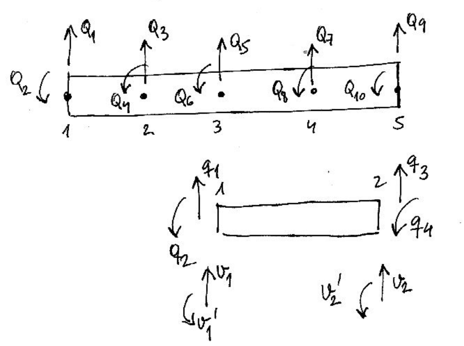
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{M^2}{EI^2}\int_A y^2 dA\right) \quad (138)$$

$$dU = \frac{1}{2}\frac{M^2}{EI}dx \quad (139)$$

$$U_{viga} = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx \quad (140)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 - \int_0^L pv dx - \sum_m P_m v_m - \sum_k M_k v_k'$$

Formulación del Elemento Finito



Formulación del Elemento Finito

- ★ Las funciones de forma son diferentes a lo anteriormente estudiado, están relacionados valoras nodales y pendientes
- ★ Funciones de forma de Hermite

Formulación del Elemento Finito

$$
\begin{aligned}
H_i &= a_i + b_i\xi + c_i\xi^2 + d_i\xi^3 && (141)\\
H_1 &= \frac{1}{4}\left(2 - 3\xi + \xi^3\right) && (142)\\
H_2 &= \frac{1}{4}\left(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3\right) && (143)\\
H_3 &= \frac{1}{4}\left(2 + 3\xi - \xi^3\right) && (144)\\
H_4 &= \frac{1}{4}\left(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3\right) && (145)
\end{aligned}
$$

Formulación del Elemento Finito

★ Las funciones de Hermite sirven para expresar v como

$$
\begin{aligned}
v(\xi) &= H_1 v_1 + H_2\left(\frac{dv}{d\xi}\right) + H_3 v_2 + H_4\left(\frac{dv}{d\xi}\right) && (146)\\
x &= \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2}\xi && (147)\\
l_e &= x_2 - x_1 && (148)\\
\frac{dv}{d\xi} &= \frac{dv}{dx}\frac{dx}{d\xi} = \frac{l_e}{2}\frac{dv}{dx} && (149)\\
v(\xi) &= H_1 q_1 + \frac{l_e}{2}H_2 q_2 + H_3 q_3 + \frac{l_e}{2}H_4 q_4 && (150)
\end{aligned}
$$

Formulación del Elemento Finito

$$
\begin{aligned}
v &= \mathbf{Hq} && (151)\\
\mathbf{H} &= \left[H_1, \frac{le}{2}H_2, H_3, \frac{le}{2}H_4\right] && (152)
\end{aligned}
$$

★ La energía de deformación unitaria del elemento está dada por

Formulación del Elemento Finito

$$
\begin{aligned}
U_e &= \frac{1}{2}EI\int_e\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 && (153)\\
\frac{dv}{dx} &= \frac{2}{l_e}\frac{dv}{d\xi} && (154)\\
\frac{d^2v}{dx^2} &= \frac{4}{l_e^2}\frac{d^2v}{d\xi^2} && (155)\\
v &= \mathbf{Hq} &&\\
\frac{d^2v}{dx^2} &= \mathbf{q^T}\frac{16}{l_e^4}\left(\frac{d^2\mathbf{H}}{d\xi^2}\right)^T\left(\frac{d^2\mathbf{H}}{d\xi^2}\right)\mathbf{q} && (156)
\end{aligned}
$$

Formulación del Elemento Finito

$$
\left(\frac{d^2\mathbf{H}}{d\xi^2}\right) = \left[\frac{3}{2}\xi, \frac{-1+3\xi}{2}\frac{l_e}{2}, -\frac{3}{2}\xi, \frac{1+3\xi}{2}\frac{l_e}{2}\right] \qquad (157)
$$

★ Integrando 153

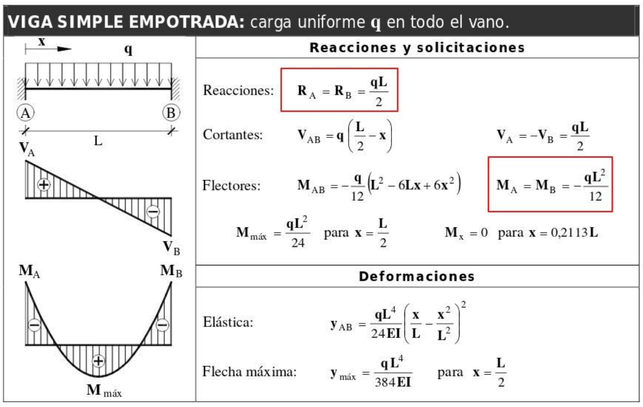
$$
\begin{aligned}
U_e &= \frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathbf{T}}\mathbf{k_e}\mathbf{q} && (158)\\
k_e &= \frac{EI}{l_e^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} && (159)
\end{aligned}
$$

Vector de Carga

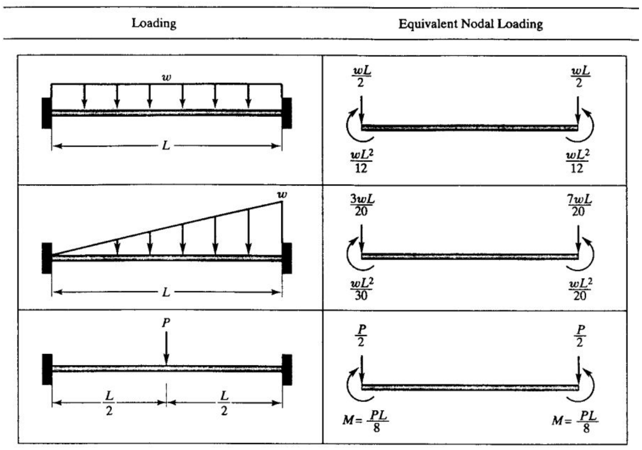
★ Considerando una carga distribuida p

$$
\begin{aligned}
\int_{l_e} pv dx &= \left(\frac{pl_e}{2}\int_{1}^{-1}\mathbf{H}d\xi\right)\mathbf{q} && (160)\\
\int_{l_e} pv dx &= \mathbf{f_e^T}\mathbf{q} && (161)\\
f_e &= \left[+\frac{pl_e}{2}, \frac{pl_e^2}{12}, \frac{pl_e}{2}, -\frac{pl_e^2}{12}\right] && (162)
\end{aligned}
$$

Vector de Carga



Vector de Carga



Esfuerzos cortantes y momentos flectores Se obtiene el momento flector y el esfuerzo cortante del elemento:

$$M = \frac{EI}{l_e^2}\frac{d^2v}{dx^2} \tag{163}$$

$$T = \frac{dM}{dx} \tag{164}$$

$$M = \frac{EI}{l_e^2}\left[6\xi q_1 + (3\xi - 1)\, l_e q_2 - 6\xi q_3 + (3\xi + 1)\, l_e q_4\right] \tag{165}$$

$$T = \frac{6EI}{l_e^3}\left(2q_1 + l_e q_2 - 2q_3 + l_e q_4\right) \tag{166}$$

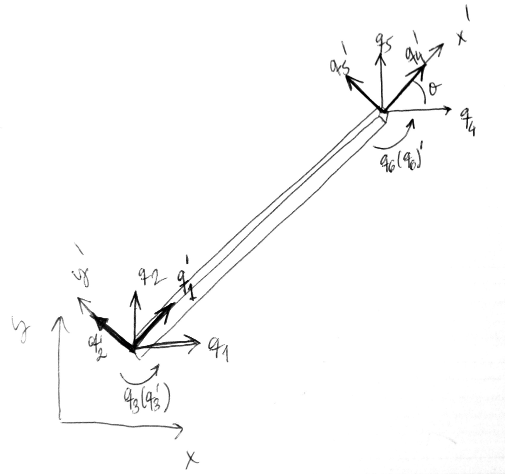
$$\tag{167}$$

Esfuerzos cortantes y momentos flectores

★ Reacciones en los apoyos

$$\mathbf{R} = \mathbf{K.Q} - \mathbf{F} \tag{168}$$

Pórticos



Pórticos

★ En un sistema generalizado xy el vector de desplazamientos será $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \end{bmatrix}$

★ Se puede definir un sistema de referencia x'y' en que x' esté alineado con el eje de la viga $\mathbf{q}' = \begin{bmatrix} q_1' & q_2' & q_3' & q_4' & q_5' & q_6' \end{bmatrix}$

★ En ambos sistemas los giros serán los mismos $q_3 = q_3'$ y $q_6 = q_6'$

$$\mathbf{q}' = \mathbf{Lq} \tag{169}$$

Pórticos

★ En la figura se observa que en el sistema alineado $x'y'$

- ▷ los desplazamientos q_2', q_3', q_5' y q_6' son los mismos que en una viga alineada con el eje x
- ▷ Por su parte q_1' y q_4' se comportan como una barra de un sistema articulado

Pórticos

$$
k'_e = \begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccc} \boxed{q'_1} & \boxed{q'_2} & \boxed{q'_3} & \boxed{q'_4} & \boxed{q'_5} & \boxed{q'_6} \end{array} \\
\begin{array}{c} \boxed{q'_1} \\ \boxed{q'_2} \\ \boxed{q'_3} \\ \boxed{q'_4} \\ \boxed{q'_5} \\ \boxed{q'_6} \end{array} &
\begin{bmatrix}
\frac{EA}{l_e} & 0 & 0 & \frac{-EA}{l_e} & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI}{l_e^3} & \frac{6EI}{l_e^2} & 0 & \frac{-12EI}{l_e^3} & \frac{6EI}{l_e^2} \\
0 & \frac{6EI}{l_e^2} & \frac{4EI}{l_e} & 0 & \frac{-6EI}{l_e^2} & \frac{2EI}{l_e} \\
\frac{-EA}{l_e} & 0 & 0 & \frac{EA}{l_e} & 0 & 0 \\
0 & \frac{-12EI}{l_e^3} & \frac{-6EI}{l_e^2} & 0 & \frac{12EI}{l_e^3} & \frac{-6EI}{l_e^2} \\
0 & \frac{6EI}{l_e^2} & \frac{2EI}{l_e} & 0 & \frac{-6EI}{l_e^2} & \frac{4EI}{l_e}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Pórticos

$$U_e = \frac{1}{2}\mathbf{q}'^{\mathbf{T}}\mathbf{k}'_{\mathbf{e}}\mathbf{q}' = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathbf{T}}\mathbf{L}^{\mathbf{T}}\mathbf{k}'_{\mathbf{e}}\mathbf{L}\mathbf{q} \tag{170}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{171}$$

$$\mathbf{k_e} = \mathbf{L}^{\mathbf{T}}\mathbf{k}'_{\mathbf{e}}\mathbf{L} \tag{172}$$

Pórticos

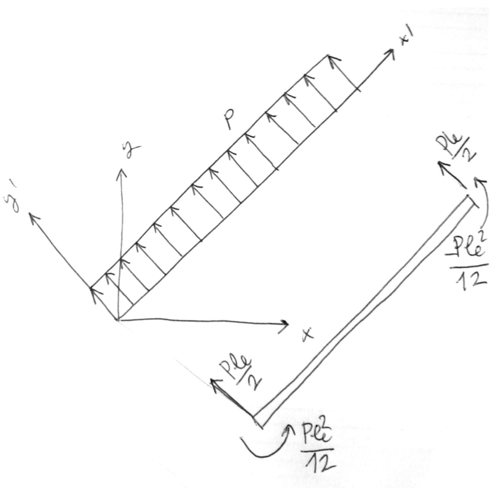
★ La carga distribuida se asigna a los desplazamientos que los pueden asumir

$$\mathbf{q}'^{\mathbf{T}}\mathbf{f}' = \mathbf{q}^{\mathbf{T}}\mathbf{L}^{\mathbf{T}}\mathbf{f}' \tag{173}$$

$$\mathbf{f}' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{pl_e}{2} & \frac{pl_e^2}{12} & 0 & \frac{pl_e}{2} & \frac{-pl_e^2}{12} \end{bmatrix} \tag{174}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{L}^{\mathbf{T}}\mathbf{f}' \tag{175}$$

Pórticos



Pórticos 3D

★ Los pórticos 3D aparecen en el cálculo de estructuras, tanto para edificios como para máquinas como coches o bicicletas.

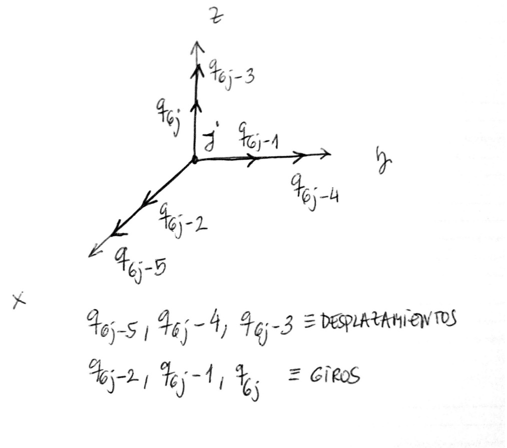
★ Cada nodo tiene 6 grados de libertad: 3 desplazamientos y 3 giros

★ El vector de desplazamientos de un elemento es un vector de 12×1

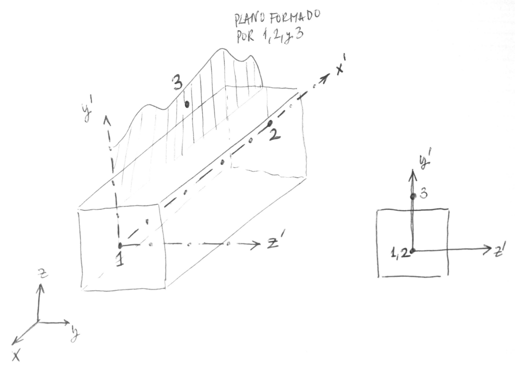
★ Se tienen dos sistemas de referencia:

- ▷ Local: $x'y'z'$
- ▷ Global: xyz

Pórticos 3D



Pórticos 3D



Pórticos 3D

★ El proceso de determinación de los unitarios se basa en la búsqueda de una matriz de giro R, que alinea el vector $[1, 0, 0]$ con el unitario en la dirección x'.

★ El procedimiento anterior se realiza con la función unitariox10.m

Pórticos 3D

★ Los parámetros son:

- ▷ A≡Área,$I_{y'}$ ≡ Momento de inercia en y', $I_{z'}$ ≡ Momento de inercia en z', J≡ Momento de inercia polar
- ▷ E≡ Módulo de Elasticidad, G≡ Módulo de Elasticidad Transversal

★ Comparando el comportamiento de los distintos grados de libertad, se obtiene la matriz

Pórticos 3D

$$\mathbf{k}' = \begin{bmatrix} AS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -AS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & a_{z'} & 0 & 0 & 0 & b_{z'} & 0 & -a_{z'} & 0 & 0 & 0 & b_{z'} \\ & & a_{y'} & 0 & -b_{y'} & 0 & 0 & 0 & -a_{y'} & 0 & -b_{y'} & 0 \\ & & & TS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -TS & 0 & 0 \\ & & & & c_{y'} & 0 & 0 & 0 & b_{y'} & 0 & d_{y'} & 0 \\ & & & & & c_{z'} & 0 & -b_{z'} & 0 & 0 & 0 & d_{z'} \\ & & & & & & AS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & a_{z'} & 0 & 0 & 0 & -b_{z'} \\ & & & & & & & & a_{y'} & 0 & b_{y'} & 0 \\ & & & & & & & & & TS & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & c_{y'} & 0 \\ & & & & & & & & & & & c_{z'} \end{bmatrix} \tag{176}$$

Pórticos 3D

$$AS = \frac{EA}{l_e} \tag{177}$$
$$TS = \frac{GJ}{l_e} \tag{178}$$
$$a_{z'} = \frac{12EI_{z'}}{l_e^3} \tag{179}$$
$$b_{z'} = \frac{6EI_{z'}}{l_e^2} \tag{180}$$
$$c_{z'} = \frac{4EI_{z'}}{l_e} \tag{181}$$
$$d_{z'} = \frac{2EI_{z'}}{l_e} \tag{182}$$

Pórticos 3D

★ La matriz de transformación del sistema local al global

$$\mathbf{q}' = \mathbf{Lq} \tag{183}$$
$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \tag{184}$$
$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{bmatrix} \tag{185}$$

Pórticos 3D

★ l_1, m_1, y n_1 son los cosenos de los ángulos entre el eje x' local, y x global

★ l_2, m_2, y n_2 son los cosenos de los ángulos entre el eje y' local, y y global

★ l_3, m_3, y n_3 son los cosenos de los ángulos entre el eje z' local, y z global

Pórticos 3D

★ La matriz de rigidez del sistema será:

$$\mathbf{K} = \mathbf{L^T K L} \tag{186}$$

★ Si tiene cargas en el eje y' y en z'

$$\mathbf{f}' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-P_{y'}l_e}{2} & \frac{-P_{z'}l_e}{2} & 0 & \frac{-P_{y'}l_e^2}{12} & \frac{-P_{z'}l_e^2}{12} & 0 & \frac{-P_{y'}l_e}{2} & \frac{-P_{z'}l_e}{2} & 0 & \frac{P_{y'}l_e^2}{12} & \frac{P_{z'}l_e^2}{12} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{L^T f'} \quad (187)$$

Elementos Bidimensionales

★ El vector de desplazamientos viene dado por

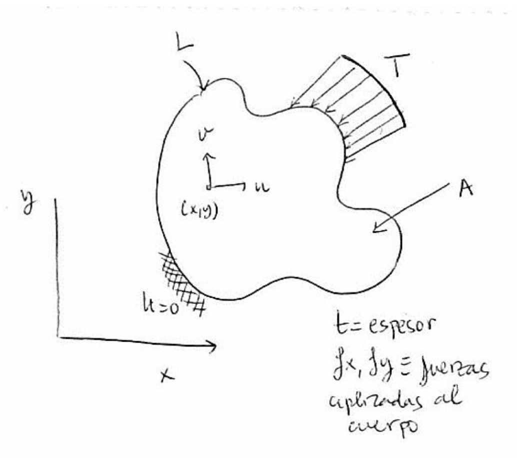
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}^T \quad (188)$$

★ Las tensiones y los desplazamientos unitarios están dados por

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}^T \quad (189)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix}^T \quad (190)$$

Elementos Bidimensionales



Elementos Bidimensionales

★ Los esfuerzos vienen dados por

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x & f_y \end{bmatrix}^T \quad (191)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_x & T_y \end{bmatrix}^T \quad (192)$$

$$dV = tdA \quad (193)$$

Elementos Bidimensionales

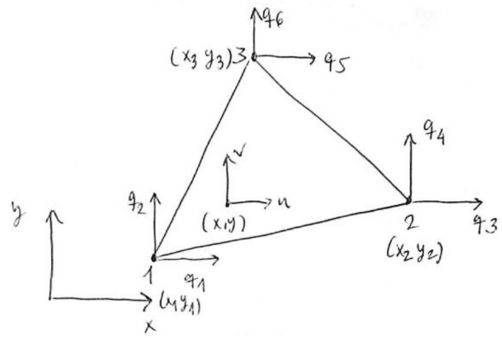
★ La relación entre el desplazamiento unitario y el desplazamiento viene dado por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \end{bmatrix}^T \quad (194)$$

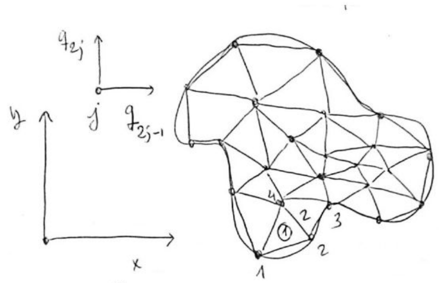
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (195)$$

★ Donde **D** para un estado tensional plano

Conectividad



Modelado



Modelado

- ★ Ahora 3 nodos forman un elemento
- ★ Los elementos cubren casi todo el cuerpo excepto una pequeña parte exterior
- ★ La región sin mallar se puede reducir el tamaño de los elementos

Triángulo con deformación unitaria constante

- ★ Los desplazamientos en el interior del elementos son aproximaciones, determinadas a partir de las funciones de forma
- ★ Se toman las siguientes funciones de forma

$$N_1 = \xi \tag{196}$$
$$N_2 = \eta \tag{197}$$
$$N_3 = 1 - \xi - \eta \tag{198}$$
$$1 = N_1 + N_2 + N_3 \tag{199}$$

Triángulo con deformación unitaria constante

- ★ En la aproximación Isoparamétrica los desplazamientos se toman

$$u = N_1 q_1 + N_2 q_3 + N_3 q_5 \tag{200}$$
$$v = N_1 q_2 + N_2 q_4 + N_3 q_6 \tag{201}$$

$$u = (q_1 - q_5)\,\xi + (q_3 - q5)\,\eta + q5 \tag{202}$$
$$v = (q_2 - q_6)\,\xi + (q_4 - q6)\,\eta + q6 \tag{203}$$

Triángulo con deformación unitaria constante

- ★ En forma de matriz se obtiene

$$
\begin{aligned}
\mathbf{N} &= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} && (204)\\
\mathbf{u} &= \mathbf{N}\mathbf{q} && (205)
\end{aligned}
$$

Triángulo con deformación unitaria constante

- ★ Para el elemento triangular, las coordenadas x e y se pueden poner en función de las funciones de forma
- ★ Representación Isoparamétrica

$$
\begin{aligned}
x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 && (206)\\
y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 && (207)\\
x &= (x_1 - x_3)\,\xi + (x_2 - x_3)\,\eta + x_3 && (208)\\
y &= (y_1 - y_3)\,\xi + (y_2 - y_3)\,\eta + y_3 && (209)\\
x &= x_{13}\xi + x_{23}\eta + x_3 && (210)\\
x &= y_{13}\xi + y_{23}\eta + y_3 && (211)
\end{aligned}
$$

Triángulo con deformación unitaria constante

- ★ Para la determinación de las deformaciones unitarias es necesario determinar las derivadas parciales y de u y v

$$
\begin{aligned}
u &= u\left(\; x(\xi,\eta) \quad y(\xi,\eta) \;\right) && (212)\\
v &= v\left(\; x(\xi,\eta) \quad y(\xi,\eta) \;\right) && (213)\\
\frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} && (214)\\
\frac{\partial v}{\partial \eta} &= \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} && (215)
\end{aligned}
$$

Triángulo con deformación unitaria constante

$$
\begin{aligned}
\left\{ \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{matrix} \right\} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{matrix} \right\} && (216)\\
\mathbf{J} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} && (217)\\
\mathbf{J} &= \begin{bmatrix} x_{13} & y_{13} \\ x_{23} & y_{23} \end{bmatrix} && (218)\\
\left\{ \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{det\mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{23} & -y_{13} \\ -x_{23} & x_{13} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{matrix} \right\} && (219)
\end{aligned}
$$

Triángulo con deformación unitaria constante

$$
\begin{aligned}
\left\{ \begin{matrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{det\mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{23} & -y_{13} \\ -x_{23} & x_{13} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{matrix} \right\} && (220)\\
\boldsymbol{\varepsilon} &= \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{matrix} \right\} && (221)\\
&= \mathbf{B}\mathbf{q} && (222)\\
\mathbf{B} &= \frac{1}{det\mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} && (223)
\end{aligned}
$$

Criterio de la Energía potencial

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_A \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} t dA - \int_A \mathbf{u^T f} t dA - \int_L \mathbf{u^T T} t dl - \sum_i \mathbf{u_i^T P_i}$$

$$U_e = \frac{1}{2}\int_e \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} t dA$$

$$= \frac{1}{2}\int_e \mathbf{q^T B^T D B q} t dA \quad (224)$$

★ Se toman las matrices **D B** y el espesor t constante

Criterio de la Energía potencial

$$U_e = \frac{1}{2} A_e t_e \mathbf{q^T B^T D B q}$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{q^T k_e q} \quad (225)$$

$$k_e = A_e t_e \mathbf{B^T D B} \quad (226)$$

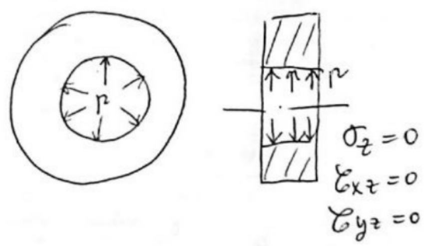
Criterio de la Energía potencial

★ Donde la matriz **D**

★ Esfuerzos planos

▷ Un cuerpo fino está sometido a un estado tensional

▷ Se toma σ_z, τ_{xz} y τ_{yz} como cero



Criterio de la Energía potencial

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (227)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (228)$$

Criterio de la Energía potencial

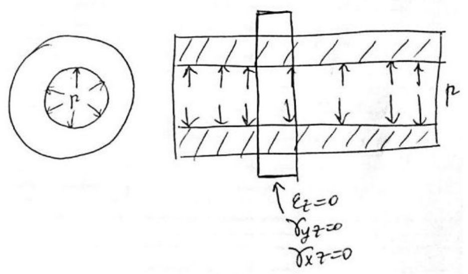
★ Deformación unitaria plana

★ A lo largo de un sólido uniforme de sección transversal constante, sujeto a una carga longitudinal

★ Una pequeña parte se puede considerar sujeta a deformación unitaria plana

★ $\boldsymbol{\varepsilon_z}$, $\boldsymbol{\gamma_{zx}}$, $\boldsymbol{\gamma_{yz}}$

Criterio de la Energía potencial



$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{bmatrix} \tag{229}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{230}$$

Criterio de la Energía potencial

★ Términos de fuerza: Fuerzas aplicadas en el cuerpo

$$\begin{aligned} \int_e \mathbf{u}^{\mathbf{T}}\mathbf{f}t dA &= t_e \int_e (uf_x + vf_y)\, dA \\ &= q_1\left(t_e f_x \int_e N_1 dA\right) + q_2\left(t_e f_y \int_e N_1 dA\right) \\ &\quad + q_3\left(t_e f_x \int_e N_2 dA\right) + q_4\left(t_e f_y \int_e N_2 dA\right) \\ &\quad + q_5\left(t_e f_x \int_e N_3 dA\right) + q_6\left(t_e f_y \int_e N_3 dA\right) \end{aligned} \tag{231}$$

Criterio de la Energía potencial

$$\int N_i dA = \frac{1}{3}A_e \tag{232}$$

$$\int_e \mathbf{u}^{\mathbf{T}}\mathbf{f}t dA = \mathbf{q}^{\mathbf{T}}\mathbf{f}^{\mathbf{e}} \tag{233}$$

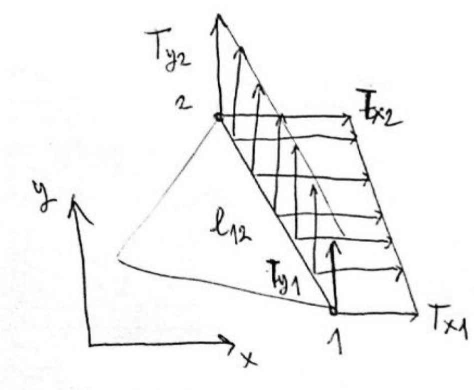
$$\mathbf{f}^{\mathbf{e}} = \frac{t_e A_e}{3}\begin{bmatrix} f_x & f_y & f_x & f_y & f_x & f_y \end{bmatrix}^T \tag{234}$$

Criterio de la Energía potencial

★ Fuerzas superficiales

- ▷ Se transmiten a partir de una superficie del sólido

Criterio de la Energía potencial



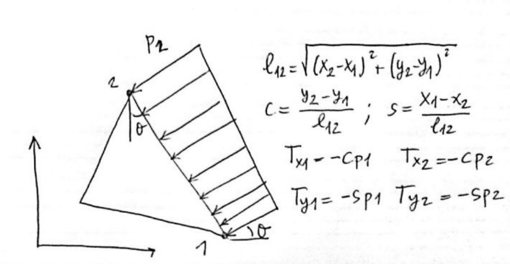
Criterio de la Energía potencial

$$
\begin{aligned}
\int_L \mathbf{u^T T} t dl &= \int_{l_{12}} (uT_x + vT_y)\, t dl && (235)\\
u &= N_1 q_1 + N_2 q3 && (236)\\
v &= N_1 q_2 + N_2 q_4 && (237)\\
T_x &= N_1 T_{x1} + N_2 T_{x2} && (238)\\
T_y &= N_1 T_{y1} + N_2 T_{y2} && (239)
\end{aligned}
$$

Criterio de la Energía potencial

$$
\begin{aligned}
\int_{l_{12}} N_1^2 dl &= \frac{1}{3} l_{12} && (240)\\
\int_{l_{12}} N_2^2 dl &= \frac{1}{3} l_{12} && (241)\\
\int_{l_{12}} N_1 N_2 dl &= \frac{1}{6} l_{12} && (242)\\
l_{12} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} && (243)\\
\int_{l_{12}} \mathbf{u^T T} t dl &= \left[\begin{array}{cccc} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{array}\right] \mathbf{T^e} && (244)\\
\mathbf{T^e} &= \frac{t_e l_{12}}{6} \left[\begin{array}{cccc} 2T_{x1} + T_{x2} & 2T_{y1} + T_{y2} & T_{x1} + 2T_{x2} & T_{y1} + 2T_{y2} \end{array}\right]^T
\end{aligned}
$$

Criterio de la Energía potencial



Criterio de la Energía potencial

★ Determinación de las tensiones en un elemento

$$
\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{DBq} \tag{245}
$$

Consideraciones Dinámicas. Introducción

★ Estática

- ▷ Las cargas se aplican lentamente.

Consideraciones Dinámicas. Introducción

★ Dinámica

- ▷ Las cargas se aplican súbitamente.
- ▷ Las cargas varían con el tiempo.
- ▷ El sólido se deforma elásticamente hasta que cesa la carga, volviendo a su posición inicial.
  - Tiende a vibrar cerca de su posición de equilibrio.

▷ Vibración libre

- Movimiento debido a la energía de deformación restauradora
- Las vibraciones disminuyen con el tiempo debido al amortiguamiento
- En estos modelos se ignora el amortiguamiento

Consideraciones Dinámicas. Formulación

★ Lagrangiano

▷ T≡ Energía Cinética.

▷ $\Pi \equiv$ Energía Potencial.

$$L = T - \Pi \tag{246}$$

★ Principio de Hamilton

▷ Para un intervalo de tiempo desde t_1 a t_2, el estado de movimiento de un cuerpo tiene un extremo para el funcional: $I = \int_{t_1}^{t_2} L dt$

$$L = T - \Pi \tag{247}$$

Cuerpo sólido con masa distribuida

★ La energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2}\int_v \dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{T}}\dot{\mathbf{u}}\rho \cdot dV \tag{248}$$

▷ $\rho \equiv$ Densidad

▷ $\dot{\mathbf{u}}^T = [\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}] \equiv$ vector de velocidad en un punto x

★ En el MEF(FEM) se divide el cuerpo en elementos.

★ En cada elemento se expresa el desplazamiento **u** en función del desplazamiento nodal **q** usando las funciones de forma **N**

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q} \tag{249}$$

Cuerpo sólido con masa distribuida

★ El vector velocidad está dado por:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\dot{\mathbf{q}} \tag{250}$$

★ La energía cinética del elemento estaría dada por

$$T_e = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}}\left[\int_e \rho \mathbf{N}^T\mathbf{N} dV\right]\dot{\mathbf{q}} \tag{251}$$

★ La matriz de masa

$$\mathbf{m_e} = \int_e \rho \mathbf{N}^T\mathbf{N} dV \tag{252}$$

Cuerpo sólido con masa distribuida

★ La energía cinética total

$$T = \sum_e T_e = \sum_e \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}}\mathbf{m_e}\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{Q}}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{Q}} \tag{253}$$

★ La energía potencial estará dada por:

$$\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{Q}^T\mathbf{K}\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T\mathbf{F} \tag{254}$$

★ El lagrangiano:

$$L = T - \Pi \tag{255}$$
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{K}\mathbf{Q} = \mathbf{F} \tag{256}$$

Cuerpo sólido con masa distribuida

★ Para vibraciones libres $\mathbf{F} = 0$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{K}\mathbf{Q} = 0 \tag{257}$$

★ Se toma un desplazamiento nodal:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{U}\operatorname{sen}\omega t \tag{258}$$

- ▷ $\mathbf{U}$ ≡vector de las amplitudes nodales de la vibración
- ▷ $\omega\,[rad/s] \equiv$ frecuencia circular

Cuerpo sólido con masa distribuida

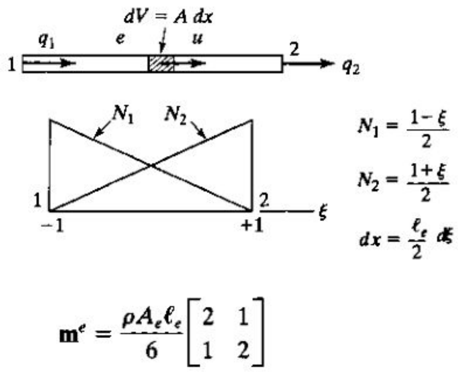
★ Sustituyen la expresión anterior

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \omega^2\mathbf{M}\mathbf{U} = \lambda\mathbf{M}\mathbf{U} \tag{259}$$

- ▷ $\mathbf{U}$ ≡vector propio, que representa el modo de vibración correspondiente al valor propio lambda

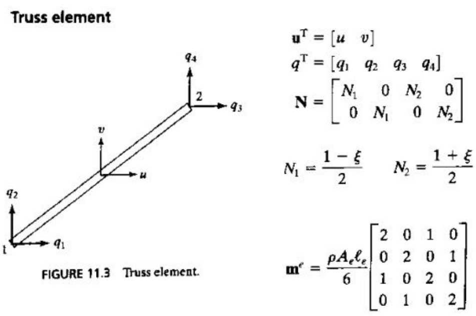
Matrices de Masa

★ Elemento Barra



Matrices de Masa

★ Elemento Barra 2D



Matrices de Masa

★ Elemento Triángulo

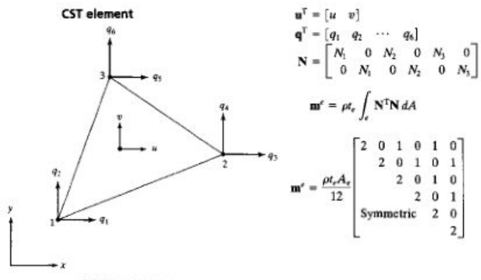


FIGURE 11.4 CST element.

Matrices de Masa

★ Elemento viga

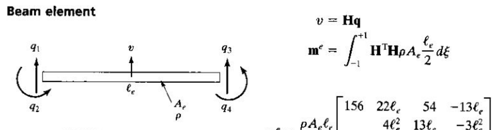
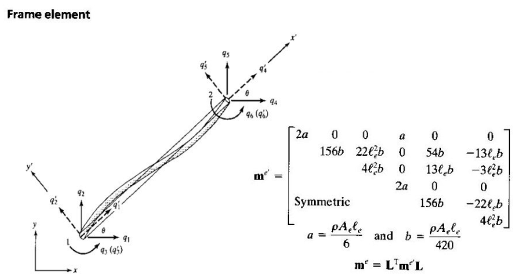


FIGURE 11.5 Beam element.

Matrices de Masa

★ Elemento viga



Determinación de la solución

★ Se eliminan las filas y las columnas, **K** y **M**, relacionadas con los desplazamientos en los apoyos.

- ▷ `elimina=[a,b,c]`
- ▷ `K[elimina,:]=[]`
- ▷ `K[:,elimina]=[]`

★ Se utiliza el polinomio característico

- ▷ `[V,D]=eig(K,M)`
- ▷ `V` Matriz de autovectores
- ▷ `D` Matriz de Diagonal, autovalores λ

Determinación de la solución

★ Usando la Factorización de Cholesky

▷ $\mathbf{M}$ una matriz simétrica definida positiva puede ser descompuesta como el producto de una matriz triangular inferior y la traspuesta de la matriz triangular inferior

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{L}\mathbf{L}^T && (260) \\ \mathbf{K}\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{M}\mathbf{x} && (261) \\ \mathbf{L}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{L}^{-T}\mathbf{L}^T\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{L}^T\mathbf{x} && (262) \\ & && (263) \end{aligned}$$

Referencias

[1] Chandrupatla, Tirupathi R.: *Introduccion al estudio del elemento finito en ingenieria*, 1999.